MANUAL

pentru calculul construcțiilor

MANUAL PENTRU CALCULUL CONSTRUCȚIILOR

Volumul I

BAZELE TEORETICE DE CALCUL AL CONSTRUCȚIILOR

Coordonare:

Prof. ing. ANDREI D. CARACOSTEA

Colectivul de autori:

Prof. dr. ing. **E. BEIU-PALADI**, prof. ing. **A. CARACOSTEA**, prof. dr. ing. **GH. ILIE**, **C. IONESCU**, prof. ing. **P. MAZILU** prof. ing. **M. MIHAILESCU**, conf. dr. ing. **V. PETCU**, dr. ing. **H. SANDI**, prof. dr. doc. ing. **M. SOARE**, prof. dr. ing. **N. ȚOPA**

Grosu Violeta

EDITURA TEHNICĂ
București — 1977

„Manualul pentru calculul construcţiilor'' este conceput, ca şi lucrarea cu acelaşi titlu apărută în anul 1959, ca un instrument curent de lucru, care să conţină, sub formă sintetică, însă uşor de folosit, tot materialul de bază necesar proiectării şi calculului structurilor de rezistenţă a construcţiilor.

Ţinînd seama de progresele tehnico-ştiinţifice din ultimii 15 ani în domeniul construcţiilor, de necesităţile actuale ale dezvoltării construcţiilor în patria noastră, de noile norme şi standarde de proiectare şi calcul de la noi, precum şi de sugestiile primite de la foarte mulţi ingineri ce lucrează în proiectare şi execuţie, noua lucrare a fost mult extinsă, introducîndu-se o serie de secţiuni noi tratînd domenii speciale din teoria şi tehnica construcţiilor. În scopul de a pune la dispoziţia celor ce vor folosi lucrarea un material cît mai complet, s-a considerat necesar să fie extinsă şi asupra structurilor de rezistenţă în ansamblul lor. Din aceste motive a fost necesar ca lucrarea să apară în trei volume, şi anume: primul volum, care apare acum, conţine bazele teoretice de calcul al elementelor de construcţie şi structurilor formate din bare, al doilea volum, în curs de elaborare, cuprinde alcătuirea şi calculul elementelor de construcţie din lemn, zidărie, metal, beton şi beton armat, iar al treilea volum va cuprinde alcătuirea şi calculul structurilor de rezistenţă în ansamblul lor, destinat diferitelor scopuri: construcţii industriale, construcţii de locuinţe multietajate, construcţii cultural-educative, construcţii pentru transporturi etc.

Manualul este elaborat de un colectiv de cadre didactice de prestigiu de la Institutul de construcţii Bucureşti şi de la facultăţile de construcţii din cadrul Institutelor politehnice din Timişoara, Cluj şi Iaşi precum şi de specialişti din cercetare şi din producţie.

Volumul I, de faţă, cuprinde secţiunile: matematică şi mecanică teoretică; elemente de programare la calculatoare electronice; rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii; statica structurilor formate din bare; calculul structurilor în domeniul plastic; plăci plane; învelitori subţiri; stabilitatea sistemelor de bare şi dinamica construcţiilor.

Manualul se adresează inginerilor, subinginerilor, studenţilor ingineri şi tehnicienilor chemaţi să proiecteze, să calculeze şi să verifice structurile inginereşti de rezistenţă, indiferent de destinaţia lor, dar în special acelora ce lucrează în domeniul construcţiilor.

Redactor: Ing. **EMILIA ILIE**
Tehnoredactor: **VALERIU MORĂRESCU**
Coperta: **SIMONA NICULESCU**

Bun de tipar: 25.05.1977. Coli de tipar 87
Tiraj: 22.000+75+10 exemplare legate. C.Z. 624.04

C. 413. — I. P. INFORMAŢIA
str. Brezoianu nr. 23—25
Bucureşti

PREFAȚĂ

Lucrarea „Manual pentru calculul construcțiilor'' apărută în Editura tehnică în anul 1959 a fost, la vremea apariției ei, deosebit de bine primită de specialiștii chemați să proiecteze și să calculeze construcții inginerești, ea epuizîndu-se în mai puțin de zece zile de la apariție. Lucrarea este încă și azi larg folosită, după mai bine de 15 ani de la apariție.

Cu toate că o nouă ediție a lucrării era de mult și insistent cerută, principala cauză care a dus la întîrzierea reapariției ei este datorată progreselor din ultimii 10—15 ani în domeniul teoriei și practicii construcțiilor, lărgirii folosirii calculatoarelor electronice, extinderii noilor procedee de calcul bazate pe metode probabilistice și semiprobabilistice și, odată cu aceasta, acțiunii de reelaborare a diferitelor standarde de proiectare și calcul al construcțiilor. Din aceleași cauze, o reeditare a vechiului „Manual'' sub forma sa inițială, nu mai era posibilă, impunîndu-se alcătuirea unei noi lucrări fundamental revizuită, completată și pusă la zi, față de cea veche.

La alcătuirea și elaborarea noului „Manual pentru calculul construcțiilor'' pe care-l prezentăm aici, a fost păstrată ideea, dovedită corespunzătoare, ce a stat la baza elaborării lucrării apărută în 1959, și anume, să punem la dispoziția inginerilor, subinginerilor, studenților ingineri și tehnicienilor constructori, o lucrare practică care să conțină, într-o expunere unitară și cît mai concisă, însă ușor de folosit, tot materialul de bază necesar proiectării și calculului construcțiilor. În consecință, lucrarea conține bazele teoretice de calcul, principiile moderne de alcătuire constructivă a elementelor de construcții din lemn, zidărie, metal și beton armat și precomprimat, precum și metodele și procedeele noi de alcătuire și calcul specifice structurilor de rezistență în ansamblul lor, în concordanță cu prevederile standardelor, prescripțiilor și normativelor actualmente în vigoare la noi.

Ținînd seama de extinderea ce a fost necesar să o dăm lucrării, în scopul măririi utilității ei prin cuprinderea într-un tot unitar a întregului material necesar alcătuirii și calculului atît a elementelor de construcție, cît și a structurilor de rezistență a construcțiilor în ansamblul lor, noul „Manual pentru calculul construcțiilor'' va apărea în trei volume.

Volumul I, prezentat acum, cuprinde toate secțiunile ce tratează bazele teoretice de calcul al construcțiilor și elementelor de construcții, indiferent de destinația lor și materialul din care sînt executate, respectiv secțiunile tratînd: matematică și mecanică, elemente de programare la calculatoare electronice, rezistența materialelor și teoria elasticității, statica structurilor formate din bare, calculul structurilor în domeniul plastic, plăci plane, învelitori subțiri, stabilitatea sistemelor de bare și dinamica construcțiilor.

Prin apariția în ultimii 15 ani a unor lucrări de specialitate în limba română, a fost posibil ca materialul cuprins în unele secțiuni din volumul I să fie redactat mai sintetic, făcînd, în schimb, trimiterile necesare la noile lucrări apărute. S-au sporit în schimb alte secțiuni, prin introducerea unor capitole noi.

Volumul II, *în curs de elaborare, cuprinde secțiunile privind : acțiuni și metode generale de calcul în construcții, geotehnică, fundații și împingerea pămîntului și ziduri de sprijin, precum și secțiunile privind alcătuirea și calculul elementelor de construcții din lemn, zidărie, metal și beton armat și precomprimat. În fiecare din aceste secțiuni sînt expuse principiile generale de alcătuire și calcul, însoțite de tabele de calcul ajutătoare și de unele prevederi din standardele și normativele în vigoare la noi.*

Volumul III al lucrării va cuprinde alcătuirea și calculul structurilor inginerești de rezistență în ansamblul lor alcătuite din lemn, zidărie, metal, beton armat și precomprimat, destinate construcțiilor industriale, construcțiilor de locuințe multietajate, construcțiilor cultural-educative, construcțiilor agrozootehnice și construcțiilor în transporturi. Volumul va cuprinde de asemenea și prevederile noilor prescripții în curs de elaborare privind alcătuirea și calculul construcțiilor pentru a rezista acțiunilor seismice. Se vor face și unele completări de rezistența materialelor, statica și dinamica construcțiilor specifice structurilor spațiale și celor cu diafragme.

În încheiere, ne revine plăcuta sarcină să mulțumim autorilor menționați pe prima pagină a ,,Manualului'' pentru strădania depusă în elaborarea secțiunilor ce le-au revenit. Mulțumim și Editurii tehnice pentru grija avută în asigurarea unei bune prezentări a lucrării, și în special tov. ing. Emilia Ilie pentru priceperea, conștiinciozitatea și pasiunea depusă în munca de redactare a lucrării.

Vom fi recunoscători, și le mulțumim anticipat, tuturor celor care vor face observații și sugestii constructive pentru îmbunătățirea unei eventuale noi ediții.

București, iulie 1976

Prof. ing. Andrei D. Caracostea

SECȚIUNEA I

MATEMATICA ȘI MECANICA

Prof. dr. ing. **ERNEST BEIU-PALADI**

CUPRINS

Partea întîi. MATEMATICA

Partea a doua. **MECANICA**

TABELELE SECŢIUNII I

PARTEA ÎNTÎI

MATEMATICA

1. TABELE NUMERICE

Tabelul I.1

Funcții trigonometrice, exponențiale și hiperbolice
(Argumentul în radiani și grade sexagesimale) *)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x grade
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00°
01	0,01000	0,99995	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000	0,57
02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	1,15
03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	1,72
04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	2,29
05	0,04998	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	2,86
06	0,05996	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	3,44
07	0,06994	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	4,01
08	0,07991	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	4,58
09	0,08988	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	5,16
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5,73
11	0,10978	0,99396	0,11045	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	6,30
12	0,11971	0,99281	0,12058	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	6,88
13	0,12963	0,99156	0,13074	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	7,45
14	0,13954	0,99022	0,14092	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	8,02
15	0,14944	0,98877	0,15114	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	8,59
16	0,15932	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865	9,17
17	0,16918	0,98558	0,17166	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	9,74
18	0,17903	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	10,31
19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	10,89
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11,46
21	0,20846	0,97803	0,21314	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	12,03
22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652	12,61
23	0,22798	0,97367	0,23414	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	13,18
24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	13,75
25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	14,32
26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	14,90
27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	15,47
28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	16,04
29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	16,62
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17,19
31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	17,76
32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	18,33
33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	18,91
34	0,33349	0,94275	0,35347	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	19,48
35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	20,05
36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	20,63
37	0,36162	0,93233	0,38786	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	21,20
38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	21,77
39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	22,35

*) Tabel suplimentar pentru argumentele $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$, 2π (v. tabelul I.3, p. 21).

Tabelul I.1 (continuare)

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92
41	0,39861	0,91712	0,43463	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	23,49
42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	24,06
43	0,41687	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	24,64
44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	25,21
45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	25,78
46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	26,36
47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	26,93
48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	27,50
49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	28,07
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65
51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	29,22
52	0,49688	0,86782	0,57256	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770	29,79
53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	30,37
54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	30,94
55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	31,51
56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	32,09
57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	32,66
58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	33,23
59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	33,80
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	34,38
61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	34,95
62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	35,52
63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	36,10
64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	36,67
65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	37,24
66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	37,82
67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	38,39
68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	38,96
69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	39,53
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40,11
71	0,65183	0,75836	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	40,68
72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	41,25
73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	41,83
74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	42,40
75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	42,97
76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	43,54
77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	44,12
78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	44,69
79 *)	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	45,26
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84
81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	46,41
82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	46,98
83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	47,56
84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	48,13
85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	48,70
86	0,75784	0,65224	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	49,27
87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	49,85
88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	50,42
89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	50,99

*) Tabel suplimentar pentru argumentele $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (v. tabelul I. 3, pag. 21)

Observație: Pentru argumentele $x > 6{,}3$ se poate lua; 1) sh $x \approx$ ch $x \approx \frac{1}{2} e^x$; (cel puțin în trei zecimale). 2) th $x \approx 1{,}000\,00$; 3) sin x, cos x, tg x egali cu valorile respective ale funcțiilor pentru acea din valorile argumentelor $x-2\pi, x-4\pi, x-6\pi, \ldots$ care este cuprinsă între 0,0 și 6,3. — Relevăm probele ch $x \pm$ sh $x = e^{\pm x}$.

Tabelul I.1 (continuare)

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51,57
91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	52,14
92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	52,71
93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	53,29
94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	53,86
95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	54,43
96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	55,00
97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	55,58
98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	56,15
99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	56,72
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30
01	0,84683	0,53186	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	57,87
02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	58,44
03	0,85730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	59,01
04	0,86240	0,50622	1,70361	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	59,59
05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	60,16
06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	60,73
07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	61,31
08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320	61,88
09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	62,45
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	63,03
11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	63,60
12	0,90010	0,43568	2,06596	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	64,17
13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	64,74
14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	65,32
15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	65,89
16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104	66,46
17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	67,04
18	0,92461	0,38092	2,42727	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	67,61
19	0,92837	0,37166	2,49790	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	68,18
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75
21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	69,33
22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	69,90
23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	70,47
24	0,94578	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	71,05
25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	71,62
26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	72,19
27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	72,77
28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	73,34
29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	73,91
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	74,48
31	0,96618	0,25785	3,74708	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	75,06
32	0,96872	0,24818	3,90335	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	75,63
33	0,97115	0,23848	4,07231	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	76,20
34	0,97348	0,22875	4,25562	3,81904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167	76,78
35	0,97572	0,21901	4,45522	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405	77,35
36	0,97786	0,20924	4,67344	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	77,92
37	0,97991	0,19945	4,91306	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	78,50
38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	79,07
39	0,98370	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	79,64
1,40	0,98545	0,16997	5,79788	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	80,21
41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	80,79
42	0,98865	0,15023	6,58112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	81,36
43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	81,93
44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	82,51

Tabelul 1.1 (continuare)

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	83,08
46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	83,65
47	0,99492	0,10063	9,91550	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	84,22
48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	84,80
49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	85,37
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	85,94
51	0,99815	0,06076	16,42809	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	86,52
52	0,99871	0,05077	19,66966	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870	87,09
53	0,99917	0,04079	24,49841	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042	87,66
54	0,99953	0,03079	32,46114	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	88,24
55	0,99978	0,02079	48,07849	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379	88,81
56	0,99994	0,01080	92,62050	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	89,37
57*)	1,00000	+0,00080	+1255,766	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	89,95
58	0,99996	−0,00920	−108,6492	4,85496	0,20598	2,32449	2,53047	0,91860	90,53
59	0,99982	−0,01920	−52,06698	4,90375	0,20393	2,34991	2,55384	0,92015	91,10
1,60	0,99957	−0,02920	−34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,67
61	0,99923	−0,03919	−25,49474	5,00281	0,19989	2,40146	2,60135	0,92316	92,25
62	0,99879	−0,04918	−20,30728	5,05309	0,19790	2,42760	2,62549	0,92462	92,82
63	0,99825	−0,05917	−16,87110	5,10387	0,19593	2,45397	2,64990	0,92606	93,39
64	0,99761	−0,06915	−14,42702	5,15517	0,19398	2,48059	2,67457	0,92747	93,97
65	0,99687	−0,07912	−12,59926	5,20698	0,19205	2,50746	2,69951	0,92886	94,54
66	0,99602	−0,08909	−11,18055	5,25931	0,19014	2,53459	2,72472	0,93022	95,11
67	0,99508	−0,09904	−10,04718	5,31217	0,18825	2,56196	2,75021	0,93155	95,68
68	0,99404	−0,10899	−9,10277	5,36556	0,18637	2,58959	2,77596	0,93286	96,26
69	0,92290	−0,11892	−8,34923	5,41948	0,18452	2,61748	2,80200	0,93415	96,83
1,70	0,99166	−0,12884	−7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	97,40
71	0,99033	−0,13875	−6,13726	5,52896	0,18087	2,67405	2,85491	0,93665	97,98
72	0,98889	−0,14865	−6,65244	5,58453	0,17907	2,70273	2,88180	0,93786	98,55
73	0,98735	−0,15853	−6,22810	5,64065	0,17728	2,73168	2,90897	0,93906	99,12
74	0,98572	−0,16840	−5,85353	5,69734	0,17552	2,76091	2,93643	0,94023	99,69
75	0,98399	−0,17825	−5,52038	5,75460	0,17377	2,79041	2,96419	0,94138	100,27
76	0,98215	−0,18808	−5,22209	5,81244	0,17204	2,82020	2,99224	0,94250	100,84
77	0,98022	−0,19789	−4,95341	5,87085	0,17033	3,85026	3,02059	0,94361	101,41
78	0,97820	−0,20768	−4,71009	5,92986	0,16861	2,88061	3,04925	0,94470	101,99
79	0,97607	−0,21745	−4,48866	5,98945	0,16696	2,91125	3,07821	0,94576	102,56
1,80	0,97385	−0,22720	−4,28626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	103,13
81	0,97153	−0,23693	−4,10050	6,11045	0,16365	2,97340	3,13705	0,94783	103,71
82	0,96911	−0,24663	−3,92293	6,17186	0,16203	3,00492	3,16694	8,94884	104,28
83	0,96659	−0,25631	−3,77118	6,23389	0,16041	3,03674	3,19715	0,94983	104,85
84	0,96398	−0,26596	−3,62449	6,29654	0,15882	3,06886	3,22768	0,95080	105,42
85	0,96128	−0,27559	−3,48806	6,35982	0,15724	3,10129	3,25853	0,95175	106,00
86	0,95847	−0,28519	−3,36083	6,42374	0,15567	3,13403	3,28970	0,95268	106,57
87	0,95557	−0,29476	−3,24187	0,48830	0,15412	3,16709	3,32121	0,95359	107,14
88	0,95258	−0,30430	−4,13038	6,55350	0,15259	3,20046	3,35305	0,95449	107,72
89	0,94949	−0,31381	−3,02566	6,61937	0,15107	3,23415	3,38522	0,95537	108,29
1,90	0,94630	−0,32329	−2,92710	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	108,86
91	0,94302	−0,33274	−2,83414	6,75309	0,14808	3,30250	3,45058	0,95709	109,44
92	0,93965	−0,34215	−2,74630	6,82096	0,14661	3,33718	3,48378	0,95792	110,01
93	0,93618	−0,35153	−2,66316	6,88951	0,14515	3,37218	3,54733	0,95873	110,58
94	0,93261	−0,36087	−2,58433	6,95875	0,14370	3,40752	3,55123	0,95953	111,15

*) Tabel suplimentar pentru argumentele $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π. $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$, 2π (v. tabelul I. 3, rag. 21)

Tabelul I.1 (continuare)

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
95	0,92896	−0,37018	−2,50948	7,02869	0,14227	3,44321	3,58548	0,96032	111,73
96	0,92521	−0,37945	−2,43828	7,09933	0,14086	3,47923	3,62009	0,96109	112,30
97	0,92137	−0,38868	−2,37048	7,17068	0,13916	3,51561	3,65507	0,96185	112,87
98	0,91744	−0,39788	−2,30582	7,24274	0,13807	3,55234	3,69041	0,96259	113,45
99	0,91341	−0,40703	−2,24408	7,31553	0,13670	3,58942	3,72611	0,96331	114,02
2.00	0,90930	−0,41615	−2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	114,59
01	0,90509	−0,42522	−2,12853	7,46332	0,13399	3,66466	3,79865	0,96473	115,16
02	0,90079	−0,43425	−2,07437	7,53833	0,13266	3,70283	3,83549	0,96544	115,74
03	0,89641	−0,44323	−2,02242	7,61409	0,13134	3,74138	3,87271	0,96609	116,31
04	0,89193	−0,45218	−1,97252	7,69061	0,13003	3,78029	3,91032	0,96675	116,88
05	0,88736	−0,46107	−1,92456	7,76790	0,12873	3,81958	3,94832	0,96740	117,46
06	0,88271	−0,46992	−1,87841	7,84597	0,12745	3,85926	3,98671	0,96803	118,03
07	0,87796	−0,47873	−1,83396	7,92432	0,12619	3,89932	4,02550	0,96865	118,60
08	0,87313	−0,48748	−1,79111	8,00447	0,12493	3,93977	4,06470	0,96926	119,18
09	0,86821	−0,49619	−1,74977	8,08491	0,12369	3,98061	4,10430	0,96986	119,75
2,10	0,86321	−0,50485	−1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	120,32
11	0,85812	−0,51345	−1,67127	8,24824	0,12124	4,06350	4,18474	0,97103	120,89
12	0,85294	−0,52201	−1,63396	8,33114	0,12003	4,10555	4,22558	0,97159	121,47
13	0,84768	−0,53051	−1,59785	8,41487	0,11884	4,14801	4,26685	0,97215	122,04
14	0,84233	−0,53896	−1,56288	8,49944	0,11765	4,19089	4,30855	0,97269	122,61
15	0,83690	−0,54736	−1,52898	8,58486	0,11468	4,23419	4,35067	0,97323	123,19
16	0,83138	−0,55570	−1,49610	8,67114	0,11533	4,27791	4,39323	0,97375	123,76
17	0,82579	−0,56399	−1,46420	8,75823	0,11418	4,32205	4,43623	0,97426	124,33
18	0,82010	−0,57221	−1,43321	8,84631	0,11304	4.36663	4,47967	0,97477	124,90
19	0,81434	−0,58039	−1,40310	8,93521	0,11192	4,41165	4,52356	0,97526	125,48
2,20	0,80850	−0,58850	−1,37382	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574	126,05
21	0,80257	−0,59656	−1,34534	9,11572	0,10970	4,50301	4,61271	0,97622	126,62
22	0,79651	−0,60455	−1,31761	9,20733	0,10861	4,54936	4,65797	0,97668	127,20
23	0,79048	−0,61249	−1,29061	9,29987	0,10753	4,59617	4,70370	0,97714	127,77
24	0,78432	−0,62036	−1,26429	9,39333	0,10646	4,64344	4,74989	0,97759	128,34
25	0,77807	−0,62817	−1,23863	9,48677	0,10540	4,69117	4,79657	0,97803	128,92
26	0,77175	−0,63592	−1,21359	9,58309	0,10435	4,73937	4,84372	0,97846	129,49
27	0,76535	−0,64361	−1,18916	9,67940	0,10331	4,78804	4,89136	0,97888	130,06
28	0,75888	−0,65123	−1,16530	9,77668	0,10228	4,83720	4,93948	0,97929	130,63
29	0,75233	−0,65879	−1,14200	9,87494	0,10127	4,88683	4,98810	0,97970	131,21
2,30	0,74571	−0,66628	−1,11921	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010	131,78
31	0,73901	−0,67370	−1,09694	10,07442	0,09926	4,98758	5,08684	0,98049	132,35
32	0,73223	−0,68106	−1,07514	10,17567	0,09827	5,03870	5,13697	0,98087	132,93
33	0,72538	−0,68834	−1,05381	10,27794	0,09730	5,09032	5,18762	0,98124	133,50
34	0,71846	−0,69556	−1,03293	10,38124	0,09633	5,14245	5,23879	0,98161	134,07
35	0,71147	−0,70271	−1,01247	10,48557	0,09537	5,19510	5,29047	0,98197	134,65
36*)	0,70441	−0,70979	−0,99242	10,59095	0,09442	5,24827	5,34269	0,98233	135,22
37	0,69728	−0,71680	−0,97276	10,69739	0,09348	5,30196	5,39544	0,98267	135,79
38	0,69007	0,72374	−0,95349	10,80490	0,09255	5,35618	5,44873	0,98301	136,38
39	0,68280	−0,73060	−0,93458	10,91349	0,09163	5,41093	5,50256	0,98335	136,94
2,40	0,67546	−0,73739	−0,91601	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367	137,51
41	0,66806	−0,74441	−0,89779	11,13396	0,08982	5,52207	5,61189	0,98400	138,08
42	0,66058	−0,75075	−0,87989	11,24586	0,08892	5,57847	5,66739	0,98430	138,66
43	0,65304	−0,75732	−0,86230	11,35888	0,08804	5,63542	5,72346	0,98462	139,23
44	0,64544	−0,76382	−0,84501	11,47304	0,08716	5,69294	5,78010	0,98492	139,80
45	0,63776	−0,77023	−0,82802	11,58835	0,08629	5,75103	5,83732	0,98522	140,37
46	0,63003	−0,77657	−0,81130	11,70481	0,08543	5,80969	5,89512	0,98551	140,95
47	0,62223	−0,78283	−0,79485	11,82245	0,08458	5,86893	5,95352	0,98579	141,52
48	0,61437	−0,78901	−0,77866	11,94126	0,08374	5,92876	6,01250	0,98607	142,09
49	0,60645	−0,79512	−0,76272	12,06128	0,08291	5,99918	6,07209	0,98635	142,67

*) Tabel suplimentar pentru argumentele $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (v. tabelul I.3, pag. 21).

Tabelul I.1 (continuare)

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
2,50	0,59847	−0,80114	−0,74702	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661	143,24
55	0,55768	−0,83005	−0,67186	12,80710	0,07808	6,36451	6,44259	0,98788	146,10
60	0,51550	−0,85689	−0,60160	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903	148,97
65	0,47203	−0,88158	−0,53544	14,15404	0,07065	7,04169	7,11234	0,99007	151,83
70	0,42738	−0,90407	−0,47273	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101	154,70
75	0,38166	−0,92430	−0,41292	15,64263	0,06393	7,78935	7,85328	0,99186	157,56
80	0,33499	−0,94222	−0,35553	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263	160,43
85	0,28748	−0,95779	−0,30015	17,28778	0,05784	8,61497	8,67281	0,99333	163,29
90	0,23925	−0,97096	−0,24641	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396	166,16
95	0,19042	−0,98170	−0,19397	19,10595	0,05233	9,52681	9,57915	0,99454	169,02
3,00	0,14112	−0,98999	−0,14255	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	171,89
05	0,09146	−0,99581	−0,09185	21,11534	0,04736	10,53399	10,58135	0,99552	174,75
10	+0,04158	−0,99914	−0,04162	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595	177,62
15*)	−0,00841	−0,99996	+0,00841	23,33606	0,04285	11,64661	11,69946	0,99633	180,48
20	−0,05837	−0,99829	0,05847	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668	183,35
25	−0,10820	−0,99413	0,10883	25,79034	0,03877	12,87578	12,91456	0,99700	186,21
30	−0,15775	−0,98748	0,15975	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728	189,08
35	−0,20690	−0,97836	0,21148	28,50273	0,03508	14,23382	14,26891	0,99754	191,94
40	−0,25554	−0,96680	0,26432	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777	194,81
45	−0,30354	−0,95282	0,31857	31,50039	0,03175	15,73432	15,76607	0,99799	197,67
3,50	−0,35078	−0,93646	0,37459	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	200,54
55	−0,39715	−0,91775	0,43274	34,81332	0,02872	17,39230	17,42102	0,99835	203,40
60	−0,44252	−0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851	206,26
65	−0,48679	−0,87352	0,55727	38,47467	0,02599	19,22434	19,25033	0,99865	209,13
70	−0,52984	−0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878	211,99
75	−0,57156	−0,82056	0,69655	42,52108	0,02351	21,24878	21,27230	0,99889	214,86
80	−0,61186	0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900	217,72
85	−0,65063	−0,75940	0,85676	46,99306	0,02128	23,48589	23,50717	0,99909	220,59
90	0,68777	−0,72593	0,94742	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918	223,45
95*)	−0,72319	−0,69065	1,04711	51,93537	0,01925	25,95806	25,97731	0,99926	226,32
4,00	−0,75680	−0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933	229,18
05	−0,78853	−0,61500	1,28215	57,39746	0,01742	28,69002	28,70744	0,99939	232,05
10	−0,81828	−0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945	234,91
15	−0,84598	−0,53321	1,58659	63,43400	0,01576	31,70912	31,72438	0,99951	237,78
20	−0,87158	−0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955	240,64
25	−0,89499	−0,44609	2,00631	70,10541	0,01426	35,04557	35,05984	0,99959	243,51
30	−0,91617	−0,40080	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	246,37
35	−0,93505	−0,35451	2,63760	77,47846	0,01291	38,73278	38,74568	0,99967	249,24
40	−0,95160	−0,30733	3,09632	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	252,10
45	−0,96577	−0,25939	3,72327	85,62694	0,01168	42,80763	42,81931	0,99973	254,97
4,50	−0,97753	−0,21080	4,63773	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975	257,83
55	−0,98684	−0,16168	6,10383	94,63241	0,01057	47,31092	47,32149	0,99978	260,69
60	−0,99369	−0,11215	8,86017	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	263,56
65	−0,99805	−0,06235	16,00767	104,5850	0,00956	52,28771	52,29772	0,99982	266,43
70	−0,99992	−0,01239	+80,71277	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983	269,29
75*)	−0,99929	+0,03760	−26,57541	115,5843	0,00865	57,78782	57,79647	0,99985	272,16
80	−0,99616	0,08750	−11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986	275,02
85	−0,99055	0,13718	− 7,22093	127,7404	0,00783	63,86628	63,87411	0,99988	277,88
90	−0,98245	0,18651	− 5,26749	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	280,75
95	−0,97190	0,23538	− 4,12906	141,1750	0,00708	70,58394	70,59102	0,99990	283,61

*) Tabel suplimentar pentru argumetele $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (v. tabelul I.3, pag 21).

Tabelul I.1 (continuare)

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
5,00	−0,95892	0,28366	−3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991	286,48
10	−0,92581	0,37798	−2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	292,21
20	−0,88345	0,46852	−1,88564	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994	297,94
30	−0,83227	0,55437	−1,50127	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995	303,67
40	−0,77276	0,63469	−1,21754	221,4064	0,00452	110,7010	110,7055	0,99996	309,40
50*)	−0,70554	0,70867	−0,99558	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	315,13
60	−0,63127	0,77557	−0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	185,2151	0,99997	320,87
70	−0,55069	0,83471	−0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	326,60
80	−0,46460	0,88552	−0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	332,32
90	−0,37388	0,92748	−0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99998	338,05
6,00	−0,27942	0,96017	−0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999	343,77
10	−0,18216	0,98327	−0,18526	445,8578	0,00224	222,9278	222,9300	0,99999	349,50
20	−0,08309	0,99654	−0,08338	492,7490	0,00203	246,3785	246,3755	0,99999	355,23
30*)	+0,01681	0,99986	+0,01682	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999	360,96
40	0,11655	0,99318	0,11735	601,8450	0,00166	300,9217	300,9233	0,99999	366,69
50	0,21512	0,97659	0,22028	665,1416	0,00150	332,5701	332,5716	1,00000	372,42
60	0,31154	0,95023	0,32786	735,0952	0,00136	367,5469	367,5483	**)	378,15
70	0,40485	0,91438	0,44276	812,4058	0,00123	406,2023	406,2035		383,88
80	0,49411	0,86940	0,56834	897,8473	0,00111	448,9231	448,9242		389,61
90	0,57844	0,81573	0,70911	992,2747	0,00101	496,1369	496,1379		395,34
7,00	0,65699	0,75390	0,87145	1096,633	0,00091	548,3161	548,3170		401,07
10	0,72896	0,68454	1,06489	1211,967	0,00083	605,9831	605,9869		406,80
20	0,79366	0,60835	1,30462	1339,431	0,00075	669,7150	669,7158		412,53
30	0,85044	0,52608	1,61656	1480,300	0,00068	740,1496	740,1503		418,26
40	0,89871	0,43855	2,04928	1635,984	0,00061	817,9919	817,9925		423,99
50	0,93800	0,34664	2,70601	1808,042	0,00055	904,0209	904,0215		429,72
60	0,96792	0,25126	3,85227	1998,196	0,00050	999,0977	999,0982		435,45
70	0,98817	0,15337	6,44287	2208,348	0,00045	1104,174	1104,174		441,18
80	0,99854	+0,05206	+18,50682	2440,602	0,00041	1220,301	***)		446,91
90	0,99894	−0,04600	−21,71511	2697,282	0,00037	1348,641			452,64
8,00	0,98936	−0,14550	−6,79971	2980,958	0,00034	1490,479			458,37
10	0,96989	−0,24354	−3,98240	3294,468	0,00030	1647,234			464,10
20	0,94073	−0,33915	−2,77375	3640,950	0,00027	1820,475			469,83
30	0,90217	−0,43138	−2,09138	4023,872	0,00025	2011,936			475,56
40	0,85460	−0,51929	−1,64571	4447,067	0,00022	2223,533			481,28
50	0,79849	−0,60201	−1,32636	4914,769	0,00020	2457,384			487,01
60	0,73440	−0,67872	−1,08203	5431,660	0,00018	2715,830			492,74
70	0,66297	−0,74865	−0,88556	6002,912	0,00017	3001,456			498,47
80	0,58492	−0,81109	−0,72115	6634,244	0,00015	3317,122			504,20
90	0,50102	−0,86544	−0,57892	7331,974	0,00014	3665,987			509,93
9,00	0,41212	−0,91113	−0,45232	8103,084	0,00012	4051,542			515,66
10	0,31910	−0,94772	−0,33670	8955,293	0,00011	4477,646			521,39
20	0,22289	−0,97484	−0,22864	9897,129	0,00010	4948,564			527,12
30	0,12445	−0,99223	−0,12543	10938,02	0,00009	5469,010			532,85
40	+0,02478	−0,99969	−0,02478	12088,38	0,00008	6044,190			538,58
50	−0,07515	−0,99717	+0,07536	13359,73	0,00007	6679,863			544,31
60	−0,17433	−0,98469	0,17704	14764,78	0,00007	7382,391			550,04
70	−0,27176	−0,96236	0,28239	16317,61	0,00006	8158,804			555,77
80	−0,36648	−0,93043	0,39388	18033,74	0,00046	9016,872			561,40
90	−0,45754	−0,88919	0,51455	19930,37	0,00005	9965,185			567,23
10,00	−0,50442	−0,83907	0,64836	22026,47	0,00005	11013,23			572,96

*) Tabel suplimentar pentru argumentele $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$ (v. tabelul I. 3, pag. 21).
**) Cu exactitatea tabelului pentru $x \geqslant 6{,}50$ se poate lua th x = 1,00000.
***) Cu exactitatea tabelului pentru $x \geqslant 7{,}70$ se poate lua ch$x$ = sh x.

Tabelul I.2

Valori uzuale

Mărimea	n	$\log n$	Mărimea	n	$\log n$
π	3,1415927	0,49715	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	0,90194—1
$\pi:2$	1,5707963	0,19612	$\sqrt{3:\pi}$	0,977205	0,98998—1
$\pi:3$	1,0471976	0,02003			
$\pi:4$	0,7853982	0,89509—1	$\sqrt[3]{\pi:4}$	0,922635	0,96503—1
π^2	9,8696044	0,99430	$\sqrt[3]{2:\pi}$	0,860254	0,93463—1
π^3	31,006277	1,49145			
π^4	97,409091	1,98860	$\sqrt[3]{3:\pi}$	0,984745	0,99332—1
π^5	306,019685	2,48575	$M = \log e$	0,434294	0,63778—1
π^6	961,389195	2,98290	$1:M$	2,302585	0,36222
$1:\pi$	0,3183099	0,50285—1	g	9,81	0,99167
$1:\pi^2$	0,1013212	0,00570—1	g^2	96,2361	1,98334
$1:\pi^3$	0,0322515	0,50855—2	$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583
$1:\pi^4$	0,010266	0,01140—2	$1:2g$	0,050968	0,70730—2
$1:\pi^5$	0,003268	0,051425—3	$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24857	$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645919	0,16572	$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572	$\pi:\sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,6011511	0,66287	$\pi:\sqrt{2g}$	0,709252	0,85080—1
$1:\sqrt{\pi}$	0,5641896	0,751425—1			
$4\pi^2$	39,478418	1,59636	e	2,718282	0,43429
$\pi^2:4$	2,4674011	0,39224	e^2	7,389056	0,86859
$\pi\sqrt{2}$	4,4428829	0,64766	$1:e$	0,367879	0,56571—1
$\pi:\sqrt{2}$	2,221442	0,34663	$1:e^2$	0,135335	0,13141—1
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476

Tabelul 1.3

Funcții trigonometrice, exponențiale și hiperbolice pentru argumente speciale

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x grade
$\pi/4 = 0,7854$	0,70711	0,70711	1	2,19323	0,45594	0,86867	1,32461	0,65579	45°00
$\pi/2 = 1,5708$	1,00000	0,00000	$\pm\infty$	4,81049	0,20788	2,30130	2,50918	0,91715	90°00
$3\pi/4 = 2,3562$	0,70711	−0,70711	−1	10,55072	0,09478	5,22797	5,32275	0,98219	135°00
$\pi = 3,1416$	0,00000	−1,00000	0	23,14069	0,04321	11,54874	11,59195	0,99627	180°00
$5\pi/4 = 3,9270$	−0,70711	−0,70711	1	50,75402	0,01970	23,36716	25,38686	0,99922	225°00
$3\pi/2 = 4,7124$	−1,00000	0,00000	$\pm\infty$	111,31780	0,00898	55,65440	55,66338	0,99984	270°00
$7\pi/4 = 5,4978$	−0,70711	0,70711	−1	244,15110	0,00410	122,0735	122,0776	0,99997	315°00
$2\pi = 6,2832$	0,00000	1,00000	0	535,49170	0,00187	267,7449	267,7468	0,99999	360°00

2. FORMULE UZUALE

2.1. Algebra

Numărul tuturor *permutărilor* de n elemente este

$P_n = 1, 2 \ldots (n-1) \cdot n = n!$ (convențional : $0! = 1$).

Dacă printre cele n elemente $a, b, c, \ldots, a$ se repetă de α ori, b de β ori, c de γ ori etc., atunci $P_n = n!/(\alpha!\beta!\gamma!\ldots)$, $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$ (*permutări cu repetiție*).

Numărul *combinărilor* de n elemente luate cîte p este $C_n^p = \binom{n}{p} = n!/p!(n-p)! =$
$= n(n-1) \ldots (n-p+1)/p!$.

$$C_n^p = C_n^{n-p}; \quad C_n^n = C_n^0 = 1; \quad \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n; \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0.$$

Binomul lui Newton: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$.

2.2. Funcții trigonometrice (fig. I.1, I.2)

Relații de bază: $\text{tg } a = \sin a/\cos a$; $\text{cotg } a = 1/\text{tg } a = \cos a/\sin a$; $\sec a = 1/\cos a$; $\text{cosec } a = 1/\sin a$; $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Funcții de un argument:

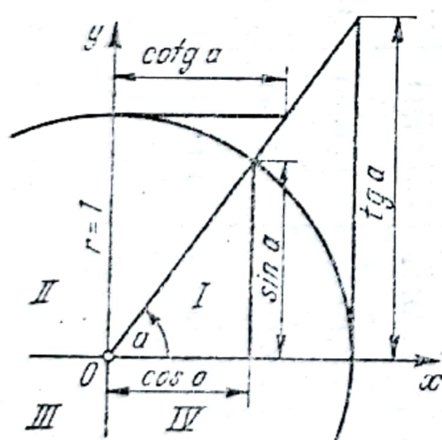


Fig. I.1

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \text{tg}^2 a/(1 + \text{tg}^2 a) = 1/(1 + \text{cotg}^2 a)$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1/(1 + \text{tg}^2 a) = \text{cotg}^2 a/(1 + \text{cotg}^2 a)$$

$$\text{tg}^2 a = \sin^2 a/(1 - \sin^2 a) = (1 - \cos^2 a)/\cos^2 a.$$

Funcții de suma și diferența a două argumente:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b;$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b;$$

$$\text{tg}(a \pm b) = (\text{tg } a \pm \text{tg } b)/(1 \mp \text{tg } a \text{ tg } b);$$

$$\text{cotg}(a \pm b) = (\text{cotg } a \text{ cotg } b \mp 1)/(\text{cotg } b \pm \text{cotg } a)$$

Funcții de multipli și de fracțiuni de argumente:

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \text{ tg } a/(1 + \text{tg}^2 a)$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = (1 - \mathrm{tg}^2 a)/(1 + \mathrm{tg}^2 a)$$

$$\mathrm{tg}\ 2a = 2\ \mathrm{tg}\ a/(1 - \mathrm{tg}^2 a);\ \mathrm{cotg}\ 2a = (\mathrm{cotg}^2 a - 1)/2\ \mathrm{cotg}\ a;$$

$$\sin na = \binom{n}{1}\sin a \cos^{n-1} a - \binom{n}{3}\sin^3 a \cos^{n-3} a + \binom{n}{5}\sin^5 a \cos^{n-5} a - \ldots$$

$$\cos na = \cos^n a - \binom{n}{2}\sin^2 a \cos^{n-2} a + \binom{n}{4}\sin^4 a \cos^{n-4} a - \ldots$$

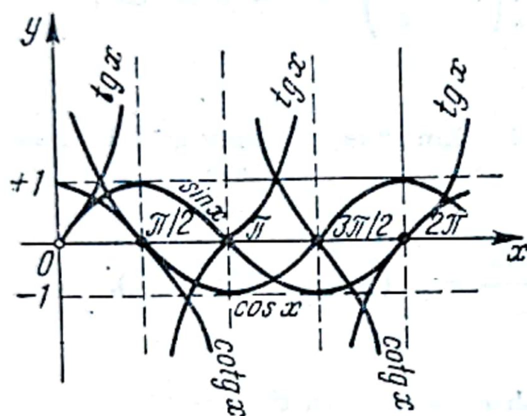


Fig. I.2

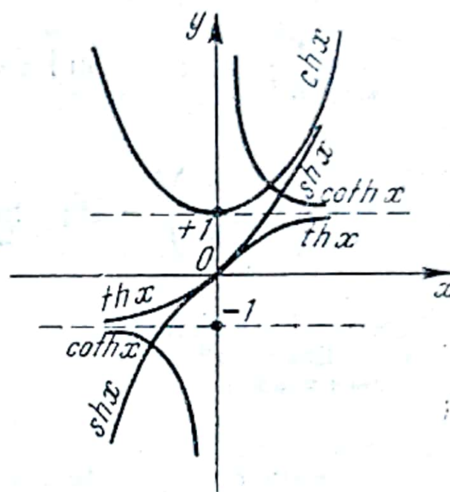


Fig. I.3

$$\sin(a/2) = \sqrt{(1 - \cos a)/2} = (1/2)\sqrt{1 + \sin a} - (1/2)\sqrt{1 - \sin a};$$

$$\cos(a/2) = \sqrt{(1 + \cos a)/2} = (1/2)\sqrt{1 + \sin a} + (1/2)\sqrt{1 - \sin a};$$

$$\mathrm{tg}(a/2) = \sin a/(1 + \cos a) = (1 - \cos a)/\sin a = \sqrt{(1 - \cos a)/(1 + \cos a)}.$$

2.3. Funcții hiperbolice (fig. I.3)

Relații de bază: $\mathrm{ch}\ x = (1/2)(e^x + e^{-x})$; $\mathrm{sh}\ x = (1/2)(e^x - e^{-x})$;

$\mathrm{th}\ x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) = \mathrm{sh}\ x/\mathrm{ch}\ x$; $\mathrm{coth}\ x = 1/\mathrm{th}\ x$; $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Funcții de suma și diferența a două argumente:

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\ x\ \mathrm{ch}\ y \pm \mathrm{ch}\ x\ \mathrm{sh}\ y;\ \mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\ x\ \mathrm{ch}\ y \pm \mathrm{sh}\ x\ \mathrm{sh}\ y;$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = (\mathrm{th}\ x \pm \mathrm{th}\ y)/(1 \pm \mathrm{th}\ x\ \mathrm{th}\ y);$$

$$\mathrm{coth}(x \pm y) = (1 \pm \mathrm{coth}\ x\ \mathrm{coth}\ y)/(\mathrm{coth}\ x \pm \mathrm{coth}\ y);$$

Funcții de multipli de argumente:

$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = 2\,\mathrm{th}\,x/(1 - \mathrm{th}^2\,x)$;

$\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2\,x + \mathrm{sh}^2\,x = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2\,x = 2\,\mathrm{ch}^2\,x - 1 = (1 + \mathrm{th}^2 x)/(1 - \mathrm{th}^2 x)$;

$\mathrm{th}\,2x = 2\,\mathrm{th}\,x/(1 + \mathrm{th}^2 x)$.

2.4. Limite frecvent întîlnite ale unor expresii

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1; \ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 0{,}271828;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{z}{x}\right)^x = e^z; \quad \lim_{x\to 0+} x^x = 1; \ \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{x\to+\infty} x^{-a} \ln x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty\,(a>0)} x^a e^{-x} = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k, \ (-\infty < k < +\infty).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}\,x}{x} = 1.$$

2.5. Derivatele funcțiilor elementare, integrale nedefinite și integrale definite uzuale

Tabelul I.4

Derivatele funcțiilor elementare

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
ax^n	ax^{n-1}	$\mathrm{cotg}\,x$	$-1/\sin^2 x$	$\mathrm{arctg}\,x$	$1/(1+x^2)$
e^x	e^x	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{arccotg}\,x$	$-1/(1+x^2)$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{arg\,sh}\,x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\ln x$	$1/x$	$\mathrm{th}\,x$	$1/\mathrm{ch}^2\,x$	$\mathrm{arg\,ch}\,x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{coth}\,x$	$-1/\mathrm{sh}^2\,x$	$\mathrm{arg\,th}\,x$	$1/(1-x^2)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\mathrm{arg\,cotg}\,x$	$1/(1-x^2)$
$\mathrm{tg}\,x$	$1/\cos^2 x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	x^x	$x^x(1+\ln x)$

Tabelul 1.5

Integrale nedefinite, uzuale

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pentru $n \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c = \ln cx \quad x > 0$

3. $\int e^x\,dx = e^x + c$

4. $\int a^x\,dx = a^x/\ln a + c$

5. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1} + c$ pentru $n \neq -1$

6. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln c\,(a+bx) = \begin{cases} \frac{1}{b}\ln(a+bx) + c & \text{pentru } a+bx>0 \\ \frac{1}{b}\ln[-(a+bx)]+c' & \text{pentru } a+bx<0 \end{cases}$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$

8. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln c\,\frac{1+x}{1-x} = \begin{cases} \operatorname{arg\,th} x + c & \text{pentru } |x|<1 \\ \operatorname{arg\,coth} x + c^* & \text{pentru } |x|>1 \end{cases}$

9. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + c$

11. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$

12. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}+c)$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c = -\arccos\frac{x}{a} + c'$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arg\,sh}\frac{x}{a} + c = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arg\,ch}\frac{x}{a} + c = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + c$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$

17. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x + c$ (pentru $a>0$; $b>0$)

18. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left\{c\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\cdot x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\cdot x}\right\}$ (pentru $a>0$; $b>0$)

Tabelul 1.5 (continuare)

19. $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arcsec } x + c$

21. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \text{arccosec } x + c$

22. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

23. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

24. $\int \text{tg } x \, dx = -\ln \cos x + c$

25. $\int \text{cotg } x \, dx = \ln \sin x + c$

26. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

27. $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$

28. $\int \text{arctg } x \, dx = x \text{ arctg } x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + c$

29. $\int \text{arccotg } x \, dx = x \text{ arccotg } x + \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + c$

30. $\int \text{sh } x \, dx = \text{ch } x + c$

31. $\int \text{ch } x \, dx = \text{sh } x + c$

32. $\int \text{th } x \, dx = \ln \text{ch } x + c$

33. $\int \text{coth } x \, dx = \ln \text{sh } x + c$

34. $\int \text{arg sh } x \, dx = x \text{ arg sh } x - \sqrt{1 + x^2} + c$

35. $\int \text{arg ch } x \, dx = x \text{ arg ch } x - \sqrt{x^2 - 1} + c$

36. $\int \text{arg th } x \, dx = x \text{ arg th } x + \frac{1}{2} \ln (1 - x^2) + c$

37. $\int \text{arg coth } x \, dx = x \text{ arg coth } x + \frac{1}{2} \ln (x^2 - 1) + c$

38. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c$

39. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

40. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$

41. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 = c$

42. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \text{tg } \frac{x}{2} + c$

43. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + c$

44. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c$

45. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c$

Tabelul 1.6

Integrale definite, uzuale

1. $\int_0^\infty e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha = \frac{x}{x^2 + y^3}$

2. $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

3. $\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + k^2} \, d\alpha = \frac{1}{2} \pi e^{-kx}$

4. $\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{(\alpha^2 + k^2)^2} \, d\alpha = \frac{\pi x}{4k} e^{-kx}$

5. $\int_0^\infty \frac{\alpha^3 \sin \alpha x}{(x^2 + k^2)^2} \, d\alpha = \frac{\pi}{4} (2 - kx) e^{-kx}$

6. $\int_0^\infty e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{y}{x^2 + y^2}$

7. $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

8. $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + k^2} \, d\alpha = \frac{1}{2} \frac{\pi}{k} e^{-kx}$

9. $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + k^2)^2} \, d\alpha = \frac{\pi}{4k^3} (1 + kx) e^{-kx}$

10. $\int_0^\infty \frac{\alpha^2 \cos \alpha x}{(\alpha^2 + k^2)^2} \, d\alpha = \frac{\pi}{4k} (1 - kx) e^{-kx}$

11. $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} e^{-\alpha y} \, d\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

12. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n}}{n-1}$ dacă $n > 1$

13. $\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

pentru $a>0$; $b>0$

14. $\int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$

15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ $a > 0$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

3. SIMBOLURI LOGICE ȘI ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

3.1. Simboluri logice

Pentru a se evita repetări frecvente de expresii simple care ar consuma inutil parte din spațiul grafic disponibil, se vor utiliza parțial în această secțiune următoarele *simboluri logice*:

Implicația, notată cu semnul $\Rightarrow$.

De exemplu, dacă p și q sînt propoziții, $p \Rightarrow q$ se citește:
- dacă p, atunci q; sau
- din p se deduce q; sau
- p este o condiție suficientă pentru q; sau
- q este o condiție necesară pentru p.

Semnul $\Rightarrow$ mai poate fi citit: „deci", „așadar", „prin urmare" etc.

Echivalența logică, notată cu semnul $\Leftrightarrow$.

De exemplu, $p \Leftrightarrow q$ se citește :
— p dacă și numai dacă q ; sau
— p este condiția necesară și suficientă ca q ; sau
— p este echivalent cu q.
Semnul $\Leftrightarrow$ se mai citește : ,,adică", ,,înseamnă că", ,,este același lucru cu" etc.

3.2. Mulțimi

Noțiunea de mulțime nu poate fi definită riguros, fiind considerată în matematici, drept noțiune primară. În general, se înțelege prin *mulțime*, o colecție de obiecte bine determinate — numite *elemente* — ale percepției sau gîndirii, avînd una sau mai multe proprietăți comune, obiecte considerate împreună ca un tot. Exemple : totalitatea cărților dintr-o bibliotecă, mulțimea tuturor numerelor naturale, mulțimea tuturor cercurilor din plan etc.

Principalul concept al teoriei mulțimilor este acela de *apartenență.* Fiind dată o mulțime A, faptul că elementul x aparține acestei mulțimi se scrie $x \in A$. Negația apartenenței se notează $\notin$.

O mulțime A poate fi definită :

— fie prin indicarea tuturor elementelor mulțimii, de exemplu mulțimea A formată din numerele 2,3 și 5 se notează $A = \{2,3,5\}$;

— fie prin indicarea unor proprietăți caracteristice de delimitare a elementelor mulțimii, utilizîndu-se notația $A = \{x : p(x)\}$, care reprezintă mulțimea elementelor x posedînd proprietatea $p(x)$. De multe ori, notația precedentă se simplifică indicîndu-se numai un element arbitrar (sau generic) x, scriindu-se $A = \{x\}$, subînțelegîndu-se că se cunoaște regula de identificare a elementelor mulțimii A.

O mulțime care conține un număr finit de elemente se numește *mulțime finită* ; în caz contrar se numește *mulțime infinită.*

Două mulțimi A și B sînt *egale*, notîndu-se $A = B$, dacă și numai dacă ele au aceleași elemente. În caz contrar, se scrie $A \neq B$.

3.3. Operații cu mulțimi

Se numește *reuniune* a două mulțimi A și B, mulțimea $\{x : x \in A$ sau $x \in B\}$, notată $A \cup B$. Se precizează că aici cuvîntul ,,sau" nu are caracter disjunctiv, adică mulțimea $A \cup B$ este formată din toate elementele lui A și B luate împreună.

Intersecția a două mulțimi A și B, notată $A \cap B$ este mulțimea $\{x : x \in A$ și $x \in B\}$, formată numai din elemente comune lui A și B. Dacă mulțimile A și B nu au nici un element comun, se numesc *disjuncte* și se notează $A \cap B = \emptyset$, unde $\emptyset$ este *mulțimea vidă.*

Reguli de calcul cu operațiile $\cup$ și $\cap$:

1) $A \cap A = A$; $\quad A \cup A = A$, (idempotență)
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, (asociativitate)
3) $A \cap B = B \cap A$; $\quad A \cup B = B \cup A$, (comutativitate)
4) $A \cap (A \cup B) = A$; $\quad A \cup (A \cap B) = A$, (adjunctivitate)
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (distributivitate).

Operațiile de intersecție și de reuniune se pot extinde la un număr oarecare de mulțimi, scriindu-se atunci :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i ; \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

3.4. Incluziune, diferență și complementară

Dacă $x \in A \Rightarrow x \in B$, se spune că A este o *submulțime* a mulțimii B, sau A este *inclusă* în B, sau A este o *parte* a mulțimii B și se notează $A \subset B$ (sau $B \supset A$). Relația $\subset$ numită *incluziune* este :

1) reflexivă : $A \subset A$,
2) antisimetrică : $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$,
3) tranzitivă : $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

$A \subset B$ poate să însemne și $A = B$. Dacă $A \subset B$ și $A \neq B$, se spune că A este o *submulțime strictă* a lui B.

Relația care neagă incluziunea se notează $\not\subset$, respectiv $\not\supset$.

Oricare ar fi A, are loc incluziunea $\emptyset \subset A$.

Prin *diferența* a două mulțimi B și A, notată $B-A$, se înțelege mulțimea $\{x : x \in B, x \notin A\}$. În particular, dacă $A \subset B$, atunci $B - A$ se numește *complementara* mulțimii A în raport cu mulțimea B și se notează $\complement_B A$.

În unele aplicații concrete, se obișnuiește a se considera o anumită mulțime bine precizată, mai cuprinzătoare, numită *mulțime de referință* sau *mulțime de bază*. În acest caz, complementara lui A se raportează la această mulțime de bază (care conține pe A) și se scrie $\complement A$ sau A^c.

Notîndu-se cu E mulțimea de bază, există următoarele relații cu privire la complementare, dacă $A, B \subset E$:

$$\left.\begin{aligned} &(A^c)^c = A ; \quad \emptyset^c = E ; \quad E^c = \emptyset \\ &A \cup A^c = E ; \quad A \cap A^c = \emptyset \\ &\left.\begin{aligned} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{aligned}\right\} \text{(formulele lui A. de Morgan)} \end{aligned}\right\} \qquad (I.1)$$

3.5. Mulțimea părților unei mulțimi

Fie o mulțime de bază E. *Mulțimea tuturor părților* lui E se notează $\mathfrak{P}(E)$. Elementele mulțimii $\mathfrak{P}(E)$ sînt submulțimi ale mulțimii de bază E și satisfac operațiilor și relațiilor între mulțimi, menționate anterior. În afară de acestea, pentru mulțimea $\mathfrak{P}(E)$ sînt caracteristice următoarele proprietăți :

$$\left.\begin{aligned} &E \in \mathfrak{P}(E) ; \quad \emptyset \in \mathfrak{P}(E) \\ &A \in \mathfrak{P}(E) \Rightarrow A^c \in \mathfrak{P}(E) \\ &A, B \in \mathfrak{P}(E) \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{P}(E) \\ &A, B \in \mathfrak{P}(E) \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{P}(E). \end{aligned}\right\} \qquad (I.2)$$

Dacă mulțimea de bază E este finită și conține n elemente, mulțimea $\mathfrak{P}(E)$ conține 2^n elemente.

3.6. Funcții

Fie A și B două mulțimi diferite sau identice. Dacă printr-o regulă oarecare se face să corespundă fiecărui element $x \in A$ un element și numai unul singur $y \in B$, se spune că s-a definit o *funcție* pe A cu valori în B și se notează $f: A \to B$ sau $x \to (f(x), x \in A$ sau în mod curent $y = f(x)$.

Prin funcție, se înțelege ansamblul format din : 1) mulțimea A numită *mulțimea* (sau *domeniul*) *de definiție* a funcției ; 2) mulțimea B numită *mulțimea în care funcția ia valori* ; 3) corespondența $x \to y$ de la A la B. Funcția $f: A \to B$ se mai numește *reprezentare* sau *aplicație* a lui A în B.

Un element oarecare $x \in A$ se numește *variabilă* sau *argument*. Elementul unic $y \in B$ asociat elementului $x \in A$ se numește *imaginea* lui x prin f sau *valoarea funcției în punctul* x și se notează $f(x)$.

Fie $f: A \to B$ și $C \subset A$. Se numește *imaginea lui C prin f* sau *transformata lui C prin f*, mulțimea $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$, $f(C) \subset B$.

Imaginea $f(A)$ a întregii mulțimi de definiție se numește *mulțimea valorilor funcției f*. Dacă $f(A) \subset B$ și $f(A) \neq B$, se spune că f este o aplicație a lui A ,,*în*'' B. Dacă $f(A) = B$, se spune că f este o aplicație a lui A ,,*pe*'' B.

Fie $f: A \to B$ și $D \subset B$. Se numește *imagine reciprocă* sau *inversă a lui D prin f*, mulțimea $f^{-1}(D) = \{x : x \in A,\ f(x) \in D\}$. Evident, $f^{-1}(D) \subset A$.

$f: A \to B$ este o *funcție biunivocă*, dacă oricare ar fi $x', x'' \in A$ $x' \neq x''$, atunci $f(x') \neq f(x'')$.

Fie funcția biunivocă $f: A \to B$. Se numește *funcție inversă* (sau *reciprocă*) a funcției f, funcția f^{-1} prin care fiecărui element $y \in f(A) \subset B$ îi corespunde acel element unic $x \in A$ pentru care $f(x) = y$. Egalitatea $x = f^{-1}(y)$ este echivalentă cu $f(x) = y$.

4. CALCUL VECTORIAL

4.1. Noțiuni introductive

Procesele fizice se descriu în general sub forma *operațiilor fizice* (fenomene observate, experimentale etc.) între *obiectele fizice*. Studiul sistematic al proceselor fizice impune, datorită complexității acestora, descrieri simplificate ale însușirilor respective, cu ajutorul *modelelor* fizice sau simbolice. Acestea abstractizează convenabil anumite proprietăți ale proceselor fizice, considerate drept esențiale pentru direcția de cercetare abordată.

Științele matematice se ocupă în general cu modelele simbolice, sau *modelele matematice*, cuprinzînd clase de *obiecte matematice* (numere, vectori, matrice etc.), precum și cu operațiile între acestea. Modelele matematice reproduc în mod corespunzător aspectele cercetate ale unei anumite situații fizice, stabilind reguli de corespondență între obiecte și operații fizice și obiecte și operații matematice. (Matematica utilizează de asemenea uneori modele matematice care nu prezintă corespondențe nemijlocite în natura fizică).

Obiectele și operațiile modelelor matematice sînt asociate adesea mulțimii numerelor reale, fapt care permite stabilirea de corespondențe cu rezultatele măsurătorilor fizice.

Vectorii sînt elemente ale spațiului vectorial — model matematic definit la cap. 5, paragraful 5.3. Cadrul expunerii din capitolul de față — spațiul euclidian tridimensional — permite o geometrizare a vectorilor, prin considerarea acestora ca mărimi geometrice. În acest sens, prin *vector* (liber) se înțelege clasa tuturor segmentelor orientate din spațiu, care au aceeași *direcție*, același *sens* și aceeași *lungime* (*modul*). Grafic, un vector se reprezintă printr-un singur element din clasa respectivă (fig. I.4), segmentul orientat $\overline{AB}$,

Punctul A se numește *originea*, punctul B — *extremitatea*, iar dreapta AB— *suportul* vectorului. Simbolic, se notează acest vector, fie $\overline{AB}$, fie mai frecvent $\bar{a}$ (se mai obișnuiește notația $\overrightarrow{AB}$ și $\vec{a}$). Lungimea (modulul) vectorului $\bar{a}$ se notează $|\bar{a}|$.

Observație. În secțiunea I se vor utiliza pentru vectori : 1) notația $\bar{a}$, în capitolele care se referă la spații cel mult tridimensionale (calculul vectorial, geometria diferențială, capitolele de mecanică etc.) ; 2) notația $\boldsymbol{a}$, în capitolele care se referă la spații n-dimensionale (algebra liniară, calculul probabilităților etc.).

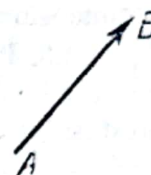


Fig. I.4

Vectorul nul $\bar{0}$ are lungimea zero și direcția nedeterminată. [1])

Doi vectori sînt egali ($\bar{a} = \bar{b}$), dacă au aceeași lungime, aceeași direcție și același sens.

4.2. Clasificarea vectorilor

Vectorii se clasifică în : 1) *vectori liberi* care au fost definiți la punctul precedent; 2) *vectori alunecători*, caracterizați în afară de direcție, sens și lungime, prin *suporturile* acestora ; 3) *vectori legați*, caracterizați în afară de direcție, sens și lungime, prin *punctele de aplicație respective.*

Calculul vectorial se ocupă obișnuit numai cu operații asupra vectorilor liberi.

4.3. Operații asupra vectorilor, bază și coordonate

4.3.1. **Adunarea și multiplicarea cu un scalar.** *Suma* $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se efectuează conform regulii paralelogramului (fig. I.5).

Produsul cu un scalar α, al unui vector $\bar{a}$ este un vector $\bar{b} = \alpha\,\bar{a}$, avînd aceeași direcție cu $\bar{a}$ și $|\bar{b}| = |\alpha|\,|\bar{a}|$. Sensul lui $\bar{b}$ coincide cu sensul lui $\bar{a}$, dacă $\alpha > 0$ și este invers sensului lui $\bar{a}$, dacă $\alpha < 0$.

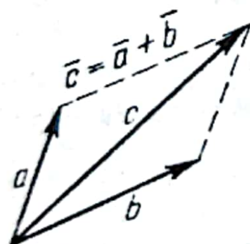


Fig. I.5

Un vector al cărui modul este egal cu 1 se numește *versor.*

Operațiile de adunare și de multiplicare cu un scalar satisfac relațiilor de la pct. 5.3.1.

4.3.2. **Dependența și independența liniară a vectorilor ; bază și coordonate.** Se spune că m vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, .., \bar{a}_m$ sînt *liniar independenți*, dacă din $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{a}_m = \bar{0}$ rezultă necesar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. În caz contrar, acești vectori sînt *liniar dependenți.*

Orice vector din spațiul tridimensional poate fi descompus după trei vectori liniar independenți $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$: $\bar{a}=\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$. Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se numesc *coordonatele* vectorului $\bar{a}$ în raport cu *baza* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

În spațiul cu două dimensiuni, adică într-un plan, un vector $\bar{a}$ poate fi descompus în mod unic după doi vectori liniar independenți $\bar{e}_1, \bar{e}_2$: $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$.

Doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt liniar dependenți, dacă și numai dacă sînt paraleli (sau în particular, coliniari), adică $\bar{a} = \alpha\bar{b}$, $\alpha \neq 0$. Trei vectori coplanari sînt întotdeauna liniar dependenți. Trei vectori sînt liniar dependenți dacă și numai dacă sînt paraleli cu același plan.

Fie în spațiul tridimensional un sistem triortogonal cartezian de axe $Oxyz$. (În matematică și în mecanică se utilizează un sistem ,,drept'' de axe ; utilizarea unui sistem ,,stîng''

[1]) Vectorul nul se scrie mai simplu uneori 0, dacă nu se pot produce confuzii.

de axe influențează numai asupra definirii produsului vectorial și asupra formulelor care conțin acest produs). Versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai acestor axe, formează o *bază ortonormată* a spațiului tridimensional. Coordonatele a_x, a_y, a_z ale unui vector $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, se numesc *coordonate carteziene ortogonale*, iar $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (generalizarea în spațiul tridimensional a teoremei lui Pitagora).

4.3.3. **Produs scalar.** Produsul scalar a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, notat $\bar{a} \cdot \bar{b}$ sau $(\bar{a}, \bar{b})$, este scalarul $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\alpha$, unde α este unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Proprietăți ale produsului scalar:

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ $(\bar{a} \neq 0,\ \bar{b} \neq 0)$ dacă și numai dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt ortogonali;

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$; $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;

$(\alpha\bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$; $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 \geqslant 0$; $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leqslant |\bar{a}|\,|\bar{b}|$.

Relații într-o bază carteziană ortogonală: $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$; $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0$; $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$; $a_x = \bar{a} \cdot \bar{i}$, $a_y = \bar{a} \cdot \bar{j}$, $a_z = \bar{a} \cdot \bar{k}$.

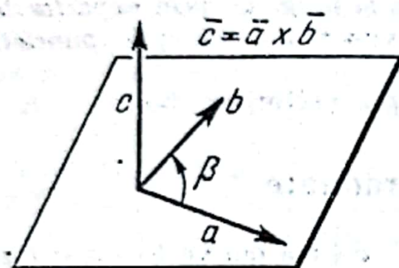


Fig. I.6

4.3.4. **Produs vectorial.** Produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ din spațiul tridimensional, este un vector $\bar{c}$, astfel încît: $|\bar{c}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\beta$, β fiind unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$, direcția lui $\bar{c}$ este normală pe $\bar{a}$ și pe $\bar{b}$, sensul lui $\bar{c}$ coincide cu sensul de înaintare al unui șurub drept care s-ar roti de la vectorul $\bar{a}$ la vectorul $\bar{b}$ cu un unghi mai mic decît π (fig. I.6)].

Observație. Produsul vectorial se definește în acest fel numai într-un spațiu tridimensional.

Proprietăți ale produsului vectorial: $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ $(\bar{a} \neq 0,\ \bar{b} \neq 0)$, dacă și numai dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt liniar dependenți; $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$; $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$; $\alpha\bar{a} \times \bar{b} = \alpha(\bar{a} \times \bar{b})$; $\bar{a} \times \bar{a} = 0$.

Relații într-o bază carteziană ortogonală: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$;

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j};\ \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

4.3.5. **Produs mixt.** Produsul mixt a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ se notează $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ sau $[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]$ și este egal cu scalarul $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$. Proprietăți: $[\bar{a}\bar{b}\bar{c}] = 0$ $(\bar{a} \neq \bar{0},\ \bar{b} \neq \bar{0},\ \bar{c} \neq 0)$, dacă și numai dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt liniar dependenți;

$$[\bar{a}\bar{b}\bar{c}] = [\bar{b}\bar{c}\bar{a}] = [\bar{c}\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}\bar{c}] = -[\bar{a}\bar{c}\bar{b}] = -[\bar{c}\bar{b}\bar{a}];$$

$$[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{a} & \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{a}\cdot\bar{c} \\ \bar{b}\cdot\bar{a} & \bar{b}\cdot\bar{b} & \bar{b}\cdot\bar{c} \\ \bar{c}\cdot\bar{a} & \bar{c}\cdot\bar{b} & \bar{c}\cdot\bar{c} \end{vmatrix} \text{ (determinantul lui Gram)};\ [\bar{a}\bar{b}\bar{c}]\,[\bar{d}\bar{e}\bar{f}] = \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{d} & \bar{a}\cdot\bar{e} & \bar{a}\cdot\bar{f} \\ \bar{b}\cdot\bar{d} & \bar{b}\cdot\bar{e} & \bar{b}\cdot\bar{f} \\ \bar{c}\cdot\bar{d} & \bar{c}\cdot\bar{e} & \bar{c}\cdot\bar{f} \end{vmatrix}.$$

Relații într-o bază carteziană ortogonală: $[\bar{a}\bar{b}\bar{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$.

$[\bar{a}\bar{b}\bar{c}] > 0$, dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, formează un triedru drept (oblic sau ortogonal) de vectori. Produsul mixt $[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]$ este egal în modul cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, luați drept muchii.

4.3.6. **Alte produse de trei și de patru vectori.** $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b})$ — *produs dublu vectorial.*

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{c} \\ \bar{a}\cdot\bar{d} & \bar{b}\cdot\bar{d} \end{vmatrix}. \qquad (\bar{a}\times\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2.$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = [\bar{a}\bar{c}\bar{d}]\bar{b} - [\bar{b}\bar{c}\bar{d}]\bar{a} = [\bar{a}\bar{b}\bar{d}]\bar{c} - [\bar{a}\bar{b}\bar{c}]\bar{d}.$$

5. ALGEBRĂ LINIARĂ

5.1. Determinanți

5.1.1. **Definiții.** *Determinantul de ordin n*, asociat unei matrice pătrate (v. pct. 5.2)

$$\mathbf{A} = [a_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (I.3)$$

avînd n^2 *elemente* a_{ik}, $i, k = 1, 2, \dots, n$, este suma tuturor produselor $(-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$ diferite între ele, de n elemente, indicii $k_1, k_2, \dots, k_n$ fiind o permutare a numerelor $1, 2, \dots, n$, iar exponentul r fiind egal cu numărul inversiunilor indicilor $k_1, k_2, \dots, k_n$. Suma acestor produse este formată din $n!$ termeni.

Determinantul asociat matricei (I.3) se notează fie prin prefixul „det", fie prin două bare verticale simple $|\dots|$. Astfel se poate scrie: $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \det[a_{ik}] = |a_{ik}|$.

5.1.2. **Minori și complemente algebrice. Dezvoltarea determinantului.** Un *minor* M de ordin m, asociat matricei (I.3), este un determinant M de ordin m, obținut din matricea $\mathbf{A}$ prin înlăturarea elementelor din $n-m$ linii și $n-m$ coloane. Minorul M și minorul M' de ordin $n-m$ format din matricea $\mathbf{A}$ prin îndepărtarea celor m linii și m coloane conținute în M, se numesc *minori complementari*. În particular, dacă $m = n$, $M' = 1$.

Un minor M de ordin m al matricei (I.3) se notează explicit:

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_m \\ k_1 k_2 \dots k_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_m} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_mk_1} & a_{i_mk_2} & \dots & a_{i_mk_m} \end{vmatrix} \qquad (I.4)$$

În particular: $A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_n \\ k_1 \dots k_n \end{pmatrix} = |A|$, $A\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = a_{i_1 k_1}$.

Minorii (I.4) pentru care $i_1 = k_1$, $i_2 = k_2$, ... $i_m = k_m$, se numesc *minori principali.*

Dacă M' este minorul complementar al minorului $M = A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_m \\ k_1 k_2 \dots k_m \end{pmatrix}$, numărul $(-1)^s M'$, unde $s = i_1 + i_2 + \dots + i_m + k_1 + k_2 + \dots + k_m$, se numește *complementul algebric* al minorului M. În particular, complementul algebric al elementului a_{ik} se notează obișnuit cu A_{ik}.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Fig. I.7

Un determinant poate fi exprimat explicit în funcție de elementele unei linii oarecare i sau a unei coloane oarecare k (*dezvoltare după o linie sau după o coloană*): $|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$. Dacă complementele algebrice A_{ik} nu corespund elementelor liniei sau coloanei respective: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} A_{ik} = 0,\ j \neq k,\ h \neq i.$

Pentru calculul determinantului de ordinul trei, există cunoscuta *regulă a lui Sarrus* (fig. I.7)

5.1.3. Proprietăți ale determinanților. Se pot defini următoarele proprietăți:

1) Un determinant este *egal cu zero* dacă: a) toate elementele unei linii (coloane) sînt nule; b) două sau mai multe linii (coloane) sînt liniar dependente, sau în particular, sînt identice.

2) Un determinant *nu se schimbă* dacă: a) se înlocuiesc toate liniile prin coloane, sau invers, adică toate elementele a_{ik} se înlocuiesc cu a_{ki}. Această operație se numește „transpunere" (v. pct. 5.2.9); b) la o linie (coloană) se adună o combinație liniară a altor linii (coloane).

3) Un determinant *schimbă de semn,* dacă se permută între ele două linii sau două coloane.

5.1.4. Operații asupra determinanților. Se definesc următoarele operații:

5.1.4.1. Adunarea a doi determinanți. Dacă toate elementele liniei i a det (A) pot fi scrise sub forma $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = 1,2, \dots n$, atunci det (A) = det (B) + det (C), unde matricele **B** și **C** se obțin din **A** prin înlocuirea liniei i cu linia b_{ij}, respectiv c_{ij}, $j = 1, 2, \dots, n$.

5.1.4.2. Multiplicarea cu un număr. Un determinant se multiplică cu un număr, dacă toate elementele unei linii (coloane) se multiplică cu acest număr.

5.1.4.3. Multiplicarea a doi determinanți. Fie doi determinanți $|\mathbf{A}|$ și $|\mathbf{B}|$ de același ordin. Atunci $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}|$, unde **AB** este produsul matricei **A** cu matricea **B** (v. pct 5.2.3).

5.1.4.4 **Derivata unui determinant.** Dacă elementele a_{ik} sînt funcţii de o variabilă scalară t şi $|\mathbf{A}(t)| = |a_{ik}(t)|$, atunci $\mathrm{d}|\mathbf{A}|/\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,\mathrm{d}a_{ik}/\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} A_j$, unde prin A_j, $j = 1,2,\ldots,n$, s-au notat cei n determinanţi de ordin identic cu $|\mathbf{A}|$, obţinuţi din $|\mathbf{A}|$ prin înlocuirea elementelor liniei j cu derivatele acestor elemente.

Considerînd toate elementele a_{ik} ale unui determinant de ordinul n, $|\mathbf{A}| = |a_{ik}|$, drept variabile independente, se pot scrie următoarele expresii: $A_{ik} = \dfrac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ik}}$,

$$\mathrm{d}|A| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial|\mathbf{A}|}{\partial a_{ik}}\,\mathrm{d}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,\mathrm{d}a_{ik}.$$

5.1.5. **Determinanţi speciali.** Printre determinanţii speciali se întîlnesc mai frecvent determinantul bordat şi determinantul lui Vandermonde.

1) Fiind dat un determinant de ordinul n, $|\mathbf{A}| = |a_{ik}|$, se numeşte *determinant bordat* al acestuia, determinantul de ordinul $n+1$

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & \ldots & v_n & w \end{vmatrix}$$

Rezultă: $|\mathbf{B}| = w|\mathbf{A}| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,u_i\,v_k$. În particular, dacă $w = 1$ şi toţi $u_i = 0$ sau toţi $v_k = 0$, atunci $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

2) *Determinantul lui Vandermonde* are elementele sale a_{ik} egale cu $(a_k)^{i-1}$. În acest caz,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_k - a_i).$$

5.2. Matrice

5.2.1. **Noţiuni generale.** Un ansamblu finit de numere reale sau complexe, dispuse sub forma unui tablou dreptunghiular avînd *m linii* şi *n coloane*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se numește *matrice de dimensiunile* $m \times n$. Numerele a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots n$ se numesc *elementele matricei*. Elementul a_{ij} este dispus în *linia* i și în *coloana* j. Prescurtat, o matrice se notează $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sau $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, dacă este necesar a se preciza dimensiunile sale.

În cadrul acestei secțiuni se vor utiliza numai matrice formate din *elemente reale*.

5.2.2. **Tipuri principale de matrice.** *Matricea nulă* se notează $[0]$ sau $\mathbf{0}$ și are toate elementele nule.

Matricea $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} = [a_i] = [a_i]_{m \times 1}$ se numește *matrice-coloană* sau *coloană*, iar $\mathbf{a}^T = [a_1 \ldots a_n] = [a_j] = [a_j]_{1 \times n}$ se numește *matrice-linie* sau *linie*. (Cu privire la semnificația indicelui superior T, v. pct. 5.2.9).

Coloana a j—a și linia a i—a a unei matrice oarecare se notează $\mathbf{a}_j = [a_{\cdot j}] = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ respectiv $\mathbf{a}_i^T = [a_{i\cdot}] = [a_{i1} \ldots a_{in}]$. Cu aceste notații pentru coloane și linii, o matrice oarecare $[a_{ij}]_{m \times n}$ se mai poate scrie sub formele: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n] = [a_{\cdot 1} a_{\cdot 2} \ldots a_{\cdot n}]$, punînd în evidență coloanele sale sau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \vdots \\ a_{m\cdot} \end{bmatrix}, \text{ punînd în evidență liniile sale.}$$

Matricea $[a_{ij}]_{n \times n}$ se numește *matrice pătrată de ordinul* n.

O matrice pătrată se numește:

— *Matrice triunghiulară superioară*, dacă pentru orice $i > j$, $a_{ij} = 0$.

— *Matrice triunghiulară inferioară* dacă pentru orice $i < j$, $a_{ij} = 0$. Dacă $[a_{ij}]$ este matrice triunghiulară, $\det [a_{ij}] = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

— *Matrice diagonală*, dacă pentru orice $i \neq j$, $a_{ij} = 0$, utilizîndu-se uneori notația specială $[\diagdown a_{ii} \diagdown]$; $\det[\diagdown a_{ii} \diagdown] = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

— *Matrice-unitate*, notîndu-se $\mathbf{I}$, dacă este o matrice diagonală avînd toate elementele egale cu 1, $\det (\mathbf{I}) = 1$. Utilizînd *simbolul lui Kronecker* $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \neq j \\ 1, & \text{pentru } i = j \end{cases}$, se poate scrie $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$.

5.2.3. **Operații cu matrice.** Operațiile asupra matricelor se definesc prin operații asupra elementelor sale.

1) *Egalitatea matricelor* de aceleaşi dimensiuni $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ şi $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2) *Suma matricelor* de aceleaşi dimensiuni $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ şi $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ este o matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

3) *Produsul unei matrice* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *cu un scalar* α este o matrice $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$: $\mathbf{B} = \alpha A \Leftrightarrow b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $\mathbf{A}$ este o matrice pătrată de ordinul n $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$.

4) *Produsul a două matrice* $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ şi $\mathbf{B}=[b_{jk}]_{n\times p}$ este o matrice $\mathbf{C}=[c_{ik}]_{m\times p}$ şi se defineşte numai dacă numărul coloanelor matricei $\mathbf{A}$ este egal cu numărul liniilor matricei $\mathbf{B}$. În acest caz, matricea $\mathbf{A}$ se numeşte *conformabilă* cu matricea $\mathbf{B}$; $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Existenţa produsului $\mathbf{AB}$ nu implică existenţa produsului $\mathbf{BA}$. Ambele produse $\mathbf{AB}$ şi $\mathbf{BA}$ există simultan dacă $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{jk}]_{n\times m}$ (caz particular : $m = n$), iar în acest caz în general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$: *produsul a două matrice nu este comutativ*. În particular dacă $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$ se numesc *matrice comutative*.

$\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$ fiind matrice pătrate de acelaşi ordin, în general, necomutative, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\ \det(\mathbf{B})$.

5) *Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice* :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},\ \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},\ \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B},$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A},\ \alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A},\ \alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}),\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC},\ \ (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

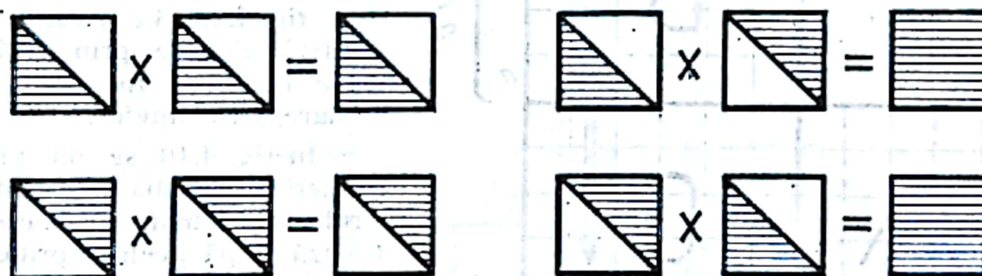


Fig. I.8

6) *Produsul matricelor de diferite tipuri* :

Matrice oarecare $\times$ matrice nulă = matrice nulă.

Matrice nulă $\times$ matrice oarecare = matrice nulă.

Matrice pătrată $\times$ matrice pătrată = matrice pătrată.

Produsul a două matrice triunghiulare, conform fig. I.8.

$\mathbf{A}$ fiind matrice pătrată $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ şi $\mathbf{DA} = [\diagdown d_{ii} \diagdown]\,[a_{jk}] = \begin{bmatrix} d_{11} & a_{1.} \\ d_{22} & a_{2.} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ d_{nn} & a_{n.} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{AD} = [a_{jk}]\,[\diagdown d_{ii} \diagdown] = [d_{11}\,a_{.1}\ \ d_{22}\,a_{.2} \ldots d_{nn}a_{.n}]$.

Dacă $\mathbf{C} = [\diagdown c_{ii} \diagdown]$ şi $\mathbf{D} = [\diagdown d_{ii} \diagdown]$, atunci $\mathbf{CD} = \mathbf{DC} = [\diagdown c_{ii}d_{ii} \diagdown]$.

Produsul $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = [a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T\mathbf{a} = [b_1 \dots b_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ este un scalar, numindu-se *produs scalar* (al unei linii cu o coloană).

Produsul $\mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \dots b_n]$ se numeşte *produs diadic* şi este o matrice $[c_{ij}]_{n \times n}$ unde $c_{ij} = a_i b_j$, $i, j = 1,2,\dots,n$. În general $\mathbf{ab}^T \neq \mathbf{ba}^T$.

Produsul matricei $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ cu coloana $\mathbf{a} = [a_j]_{n \times 1}$ este coloana $\mathbf{c} = \mathbf{Aa} = [c_i]_{m \times 1}$ cu elementele $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_j$, iar produsul unei linii $\mathbf{b}^T = [b_i]_{1 \times m}$ cu aceeaşi matrice $\mathbf{A}$ este linia $\mathbf{d}^T = [d_j]_{1 \times n}$, $d_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

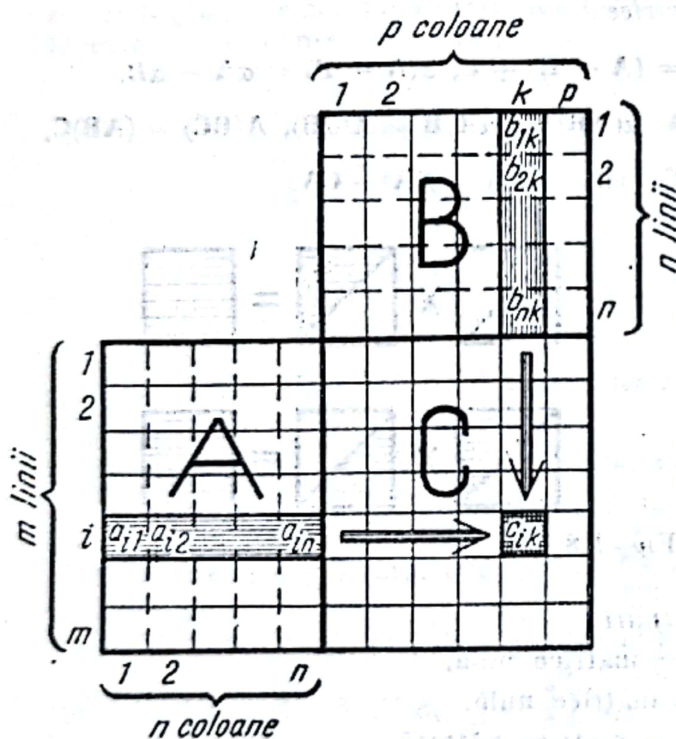


Fig. I.9

7) *Calculul practic al produsului a două matrice* se poate efectua după cum urmează. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{jk}]_{n \times p}$ şi $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [c_{ik}]_{m \times p}$. Calculul elementelor $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ se sistematizează mai simplu conform schemei din fig. I.9. *Verificarea* calculelor rezultă aici fie prin proba de sumare a liniilor fie prin proba de sumare a coloanelor.

În fig. I.10 se dă un exemplu numeric cu probă de sumare a liniilor. Proba de sumare a coloanelor se efectuează după aceleaşi principii. Organizarea calculelor prin schema indicată este deosebit de avantajoasă dacă se multiplică mai multe matrice. Astfel în fig. I.11, *a* şi *b* se indică două posibilităţi de realizare a produsului de patru matrice **ABCD**. Cu litere mici s-au notat numerele de linii şi de coloane. În fig. I.11, *a* s-a utilizat o coloană generală de verificare pentru proba de sumare a liniilor iar în fig. I.11, *b*, o linie generală de verificare pentru proba de sumare a coloanelor

8)Se spune despre o matrice pătrată **A** că se numeşte *nesingulară* (sau *nedegenerată*), dacă posedă o *matrice inversă* $\mathbf{A}^{-1}$ şi numai una, definită prin relaţia $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. În caz contrar, **A** este o matrice *singulară* (sau *degenerată*). Condiţia necesară şi suficientă ca **A** să fie nesingulară este Det $(\mathbf{A}) \neq 0$.

$\mathbf{A}^{-1}$ se exprimă explicit prin formula $\mathbf{A}^{-1} = [a_{ij}]^{-1} = [A_{ji}]/\det[a_{ij}]$ unde A_{ij} este complementul algebric (v. pct. 5.1.2) al elementului a_{ij}.

Dacă **A** și **B** sînt nesingulare iar α un scalar: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$.

Calculul coloanei de verificare

			4	1	5	4+1=	5	
			2	−2	0	2−2=	0	Verificare
			−3	−1	−4	−3−1=	−4	
3	2	1	13	−2	11	3·5+2·0+1·(−4)=	11	=13−2
5	−1	2	12	5	17	5·5+(−1)·0+2·(−4)=	17	=12+5
0	2	3	−5	−7	−12	0·5+2·0+3·(−4)=	−12	=−5−7

Fig. I.10

9) *Puterile întregi pozitive ale matricei pătrate* **A** sînt: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA}, \ldots$ Dacă **A** este nesingulară, puterile întregi negative se definesc astfel: $\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^p = (\mathbf{A}^p)^{-1}$, $p = 1, 2, \ldots$ Puterile unei aceleiași matrice pătrate sînt matrice comutative: $\mathbf{A}^n\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n+m}$.

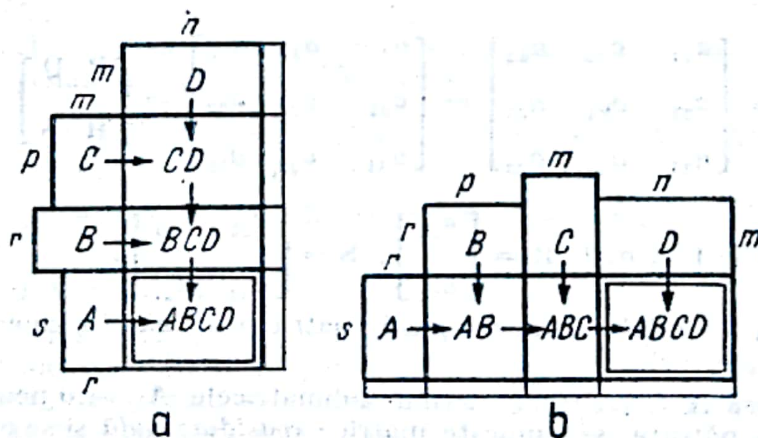


Fig. I.11

O expresie de forma $p(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{A}^n + \alpha_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{A} + \alpha_n\mathbf{I}$ se numește *polinom de matrice* sau *polinom matriceal* și poate fi privită ca rezultat al înlocuirii variabilei t cu matricea pătrată **A** în polinomul algebric $p(t) = \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}t + \alpha_n$. Regulile de calcul cu polinoamele algebrice se extind identic, asupra polinoamelor matriceale.

5.2.4. **Rangul matricei.** *Rangul* r al unei matrice de dimensiuni $m \times n$ — notat de asemenea rang (**A**) — este un număr egal cu ordinul maxim al minorilor (v. pct. 5.1.2) nenuli asociați matricei respective. În acest caz, toți minorii de ordin $r+1$ și mai mare sînt nuli. Rangul r este cel mult egal cu cel mai mic dintre numerele m și n.

Se numește *defect al matricei* și se notează cu d, cea mai mică dintre diferențele $m-r$ și $n-r$. O matrice pătrată de ordin n este nesingulară dacă și numai dacă $r=n$, adică $d=0$.

Practic, rangul r al unei matrice **A** se poate calcula astfel: Trecînd sumar de la minori de ordin mai mic la minori de ordin mai mare, se examinează calitatea acestora de a fi nenuli. Fie astfel minorul M care a fost apreciat la prima vedere ca fiind minor nenul, de ordin maxim r. Se formează toți minorii $\overline{M}$ de ordin $r+1$, obținuți prin bordarea (v. pct. 5.1.5.) lui $\overline{M}$ cu liniile și coloanele matricei **A**, neconținute în M. Dacă toți minorii $\overline{M}$ sînt nuli, $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$. Dacă cel puțin un singur minor M este nenul, atunci $\text{rang}(\mathbf{A}) > r$.

5.2.5. **Urma matricei.** *Urma* unei matrice pătrate $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de ordin n se notează $\text{Tr}(\mathbf{A})$ și se definește ca sumă a elementelor diagonalei principale: $\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Dacă **A** și **B** sînt de același ordin, iar α este scalar: $\text{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B})$, $\text{Tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\,\text{Tr}(\mathbf{A})$, $\text{Tr}(\mathbf{BA}) = \text{Tr}(\mathbf{AB})$.

5.2.6. **Matrice celulară sau compusă.** În anumite cazuri se pot realiza sistematizări avantajoase și economii de calcul, dacă se înlocuiesc operațiile asupra matricelor de dimensiuni mari cu operații asupra matricelor de dimensiuni mai mici. Aceasta se obține prin descompunerea unei matrice în *submatrice* dreptunghiulare sau *celule*, prin trasarea unor linii despărțitoare drepte, verticale și orizontale, în interiorul matricei, linii care traversează toată matricea dată. Elementele situate în regiunile dreptunghiulare astfel create, constituie submatrice sau celule. Descompunerea unei matrice date în submatrice se poate efectua în diferite feluri.
Astfel, de exemplu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

unde: $\mathbf{P} = [a_{11}]$, $\mathbf{Q} = [a_{12}\ a_{13}]$, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Se numește matrice *celulară* sau *compusă*, matricea ale cărei elemente sînt matrice (numite submatrice sau celule).

Matricea compusă $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{n\times n}$, avînd submatricele $\mathbf{A}_{ij} = 0$ pentru orice $i \neq j$, iar $\mathbf{A}_{ii}$ fiind matrice pătrate, se numește matrice *cvasidiagonală* și se notează $[\diagdown \mathbf{A}_{ii} \diagdown]$.

În acest caz, $\det[\diagdown \mathbf{A}_{ii} \diagdown] = \prod_{i=1}^{n} \det(\mathbf{A}_{ii})$, $\text{Tr}[\diagdown \mathbf{A}_{ii} \diagdown] = \sum_{i=1}^{n} \text{Tr}(\mathbf{A}_{ii})$.

Operațiile asupra matricelor compuse se definesc analog cu cele asupra matricelor prin operații asupra elementelor, al căror rol este jucat acum de celule, cu condiția ca aceste operații asupra celulelor să fie posibile.

5.2.7. **Matrice echivalente. Matrice asemenea.** Două matrice dreptunghiulare **A** și **B** se numesc *echivalente*, dacă există două matrice nesingulare pătrate **P** și **Q**, astfel încît **B** să se poată obține din **A** prin *transformarea de echivalență* $\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}$. În acest caz, **A** și **B** au aceleași dimensiuni și același rang.

Două matrice avînd aceleași dimensiuni și același rang sînt echivalente.

Două matrice pătrate **A** şi **C** se numesc *asemenea*, dacă există o matrice pătrată nesingulară **S**, astfel încît **C** să se poată obţine din **A** prin *transformarea de asemănare* $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ sau $\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}$. Transformarea de asemănare este un caz particular al transformării de echivalenţă şi are proprietăţile : dacă **A** este asemenea cu **B** şi **B** asemenea cu **C**, **A** este asemenea cu **C**; $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1}(\alpha\mathbf{A})\mathbf{S} = \alpha\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$; $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{S} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S})$; $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S})^{-1}$; $\mathbf{S}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{S} = f(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S})$, unde α este un scalar, iar $f(\mathbf{A})$ este un polinom matriceal.

Două matrice asemenea posedă acelaşi rang, aceeaşi urmă şi acelaşi determinant.

Operaţia de transformare prin asemănare este utilizată în scopul transformării unei matrice date într-o matrice avînd o formă şi o structură mai simple.

5.2.8 **Derivata unei matrice.** Dacă elementele matricei $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ sînt funcţii diferenţiabile $a_{ij}(t)$ în raport cu argumentul scalar t, atunci derivata matricei **A** se defineşte: $\mathrm{d}\mathbf{A}(t)/\mathrm{d}t = [\mathrm{d}a_{ij}(t)/\mathrm{d}t]$. Derivatele parţiale şi integralele de matrice se definesc analog.

5.2.9. **Matrice cu proprietăţi speciale de simetrie.** *Matricea transpusă* în raport cu o matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, se notează $\mathbf{A}^T$ şi este $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n\times m}$. Transpunerea unei matrice este o operaţie avînd următoarele proprietăţi: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$, $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$, $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$, $[\diagdown a_{ii}\diagdown]^T = [\diagdown a_{ii}\diagdown]$, α fiind scalar.

Dacă **A** este pătrată, $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$ şi $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$.

O matrice pătrată $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se numeşte:

— *simetrică*, dacă $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, adică dacă $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice i şi j;

— *antisimetrică*, dacă $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, adică dacă $a_{ij} = -a_{ji}$ pentru orice $i \neq j$ şi $a_{ii} = 0$ pentru orice i;

— *ortogonală*, dacă $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, deci dacă $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

— *normală*, dacă $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. O matrice simetrică sau ortogonală este de asemenea o matrice normală.

Determinantul unei matrice antisimetrice de ordin impar este nul. Determinantul unei matrice ortogonale este egal cu $+1$ sau cu -1.

A fiind o matrice pătrată oarecare, matricea $\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ este simetrică iar matricea $\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ este antisimetrică şi $\mathbf{A} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$.

5.3. Spaţiu vectorial

5.3.1. **Noţiuni introductive.** Se numeşte *spaţiu liniar* sau *spaţiu (liniar) vectorial*, o mulţime $\mathfrak{K}$ de elemente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$, numite *vectori*, în care este definită o operaţie de adunare între elemente precum şi o operaţie de înmulţire a elementelor cu numere: 1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. 2) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = \alpha\beta\boldsymbol{a}$, $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$, $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, unde α, β sînt scalari, iar $\boldsymbol{o}$ este vectorul nul [1].

Un spaţiu vectorial se numeşte *real* sau *complex*, după cum operaţia de înmulţire este definită pentru numere $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ reale sau pentru numere $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ complexe.

Materialul tratat în expunerea de faţă se va referi numai la spaţiul vectorial real.

5.3.2. **Combinaţie liniară. Vectori liniar independenţi şi liniar dependenţi.** Un vector

$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \xi_n\boldsymbol{e}_n \tag{1.5}$$

se numeşte *combinaţie liniară* a vectorilor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, factorii $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ fiind scalari. Dacă vectorii $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ sînt combinaţii liniare ale vectorilor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, orice com-

---

[1]) V. nota de la pag. 31.

binație liniară a vectorilor $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ este de asemenea combinație liniară a vectorilor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Orice mulțime de vectori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *generează* (sau *determină*) un spațiu vectorial conținînd toate combinațiile liniare posibile ale *vectorilor generatori* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Vectorii $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ se numesc *liniar independenți*, dacă $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{o} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. În caz contrar, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ se numesc *liniar dependenți*. În acest caz, cel puțin unul dintre aceștia este o combinație liniară a celorlalți. Dacă vectorii $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ sînt combinații liniare ale vectorilor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, atunci este suficient ca $p > m$, pentru ca vectorii $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ să fie liniar dependenți. Mai mulți vectori, printre care se găsește și vectorul nul, sînt întotdeauna liniar dependenți.

5.3.3. **Dimensiunea spațiului vectorial. Bază și sistem de coordonate.** Spațiul vectorial se numește *finit-dimensional*, dacă există un număr finit de vectori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in \mathfrak{R}$, astfel încît orice vector $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}$ să poată fi reprezentat în mod unic sub forma (I.5). Dacă acest lucru nu este posibil, spațiul se numește infinit-dimensional, constituind obiectul de studiu al analizei funcționale.

Se numește *bază* în $\mathfrak{R}$, o mulțime $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ de vectori liniar independenți, astfel încît orice vector $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}$ să poată fi reprezentat în mod unic sub forma (I.5). Într-un spațiu liniar $\mathfrak{R}$, generat de o bază de n vectori : 1) orice mulțime de n vectori liniar independenți este o bază în $\mathfrak{R}$; 2) nici o mulțime de $m < n$ vectori nu poate constitui o bază în $\mathfrak{R}$; 3) orice mulțime de $m > n$ vectori este liniar dependentă.

Numărul n al vectorilor bazei se numește *dimensiunea* spațiului vectorial respectiv. Spațiul vectorial n-dimensional se notează cu simbolul $\mathfrak{R}^n$. Se obișnuiește a se scrie $n = \dim(\mathfrak{R}^n)$, iar dacă $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ este o bază în $\mathfrak{R}^n$, se scrie $\{\boldsymbol{e}_i\} = \text{baza}\,(\mathfrak{R}^n)$ sau $\{\boldsymbol{e}\} = \text{baza}\,(\mathfrak{R}^n)$.

Într-un spațiu vectorial n-dimensional, numerele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ din expresia (I.5) se numesc *coordonatele* vectorului $\boldsymbol{x}$ în *sistemul de coordonate* (*sistemul de referință*) definit de vectorii bazei $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Dacă $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n$ avînd coordonatele ξ_i și respectiv η_i, atunci vectorul $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ are coordonatele $\xi_i + \eta_i$, iar vectorul $\alpha\boldsymbol{x}$ — coordonatele $\alpha\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

5.3.4. **Izomorfismul spațiilor vectoriale.** Prin *izomorfism* a două mulțimi pe care sînt definite anumite operații, se înțelege o corespondență biunivocă între elementele acestora, astfel încît și operațiile efectuate asupra elementelor lor să fie în corespondență biunivocă. Noțiunea de izomorfism are în general o importanță practică deosebită, deoarece permite reprezentarea unui model matematic prin alt model matematic.

Două spații vectoriale $\mathfrak{R}$ și $\mathfrak{R}'$ sînt izomorfe, atunci și numai atunci cînd pentru orice $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{R}$ și $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}' \in \mathfrak{R}'$ se pot stabili corespondențe biunivoce $\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}'$, astfel încît $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$ și $\alpha\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \alpha\boldsymbol{a}'$. Condiția necesară și suficientă ca $\mathfrak{R}$ să fie izomorf cu $\mathfrak{R}'$, este ca $\dim(\mathfrak{R}) = \dim(\mathfrak{R}')$.

5.3.5. **Subspații vectoriale.** Se numește *subspațiu* (vectorial) al spațiului $\mathfrak{R}^n$, o mulțime de vectori $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}^n$, astfel încît orice combinație liniară a acestor vectori să reprezinte un vector din $\mathfrak{L}$. Vectorul nul și întreg spațiul $\mathfrak{R}^n$ sînt *subspații improprii* ale spațiului $\mathfrak{R}^n$.

Într-un subspațiu vectorial $\mathfrak{L}$, se pot defini o bază, o dimensiune etc., așa cum s-a arătat în cazul spațiului vectorial. Dacă $\mathfrak{L}^m \subset \mathfrak{R}^n$, atunci $m \leqslant n$.

O mulțime de vectori oarecare $\{\boldsymbol{a}_i\} \subset \mathfrak{R}^n$ generează un subspațiu $\mathfrak{L}^m \subset \mathfrak{R}^n$. În acest caz, $\mathfrak{L}^m$ este cel mai mic subspațiu din $\mathfrak{R}^n$ care conține vectorii $\{\boldsymbol{a}_i\}$.

O bază $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \ldots, \boldsymbol{e}_m$ în $\mathfrak{L}^m \subset \mathfrak{R}^n$ și în general orice mulțime de $m < n$ vectori liniar independenți din $\mathfrak{L}^m$, pot fi completate pînă la o bază în $\mathfrak{R}^n$.

Fie $\mathfrak{L}^m, \mathfrak{L}^p \subset \mathfrak{R}^n$. Se numește *sumă* $\mathfrak{L}^m + \mathfrak{L}^p$ a acestor două subspații, subspațiul generat de $\mathfrak{L}^m \cup \mathfrak{L}^p$ și se numește *intersecție* $\mathfrak{L}^m \cap \mathfrak{L}^p$, subspațiul generat de vectorii comuni subspațiilor $\mathfrak{L}^m, \mathfrak{L}^p$. Dacă $\mathfrak{L}^m \cap \mathfrak{L}^p = \{\boldsymbol{o}\}$, suma celor două subspații se numește *sumă directă* și se notează cu $\oplus$: $\mathfrak{L}^m \oplus \mathfrak{L}^p = \mathfrak{L}^r$. În acest caz, orice vector $\boldsymbol{z} \in \mathfrak{L}^r$ poate fi

reprezentat unic ca sumă $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, unde $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{L}^m$ și $\boldsymbol{y} \in \mathfrak{L}^p$ și dacă $\{\boldsymbol{a}\}$ = bază $(\mathfrak{L}^m)$ și $\{\boldsymbol{b}\}$ = baza $(\mathfrak{L}^p)$, atunci $\{\boldsymbol{a}\} \cup \{\boldsymbol{b}\}$ = baza $(\mathfrak{L}^m \oplus \mathfrak{L}^p)$.

Dimensiunea subspațiului - sumă este $\dim(\mathfrak{L}^m + \mathfrak{L}^p) = m + p - \dim(\mathfrak{L}^m \cap \mathfrak{L}^p)$, deci dacă $\dim(\mathfrak{L}^m + \mathfrak{L}^p) = m + p$, suma celor două subspații este o sumă directă.

5.3.6. **Spațiu euclidian și spațiu normat. Produs scalar.** *Produsul scalar* a doi vectori $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ este o operație care face să corespundă fiecărei perechi $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ de vectori din $\mathfrak{R}$, un număr real notat cu $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, astfel încît : $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$, $(\alpha\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqslant 0$ și $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Spațiul vectorial în care se definește un produs scalar se numește *spațiu euclidian* și se notează în general cu $\mathfrak{E}$ sau cu $\mathfrak{E}^n$ cînd se precizează că dimensiunea sa este egală cu n.

Într-un spațiu euclidian, $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 \leqslant (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ (inegalitatea lui Cauchy). Această relație se transformă într-o egalitate dacă și numai dacă $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ sînt liniar dependenți.

m vectori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ dintr-un spațiu euclidian sînt liniar independenți, dacă și numai dacă determinantul de ordin m $\det\,[(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)]$ (*determinantul lui Gram*) este diferit de zero.

Un spațiu vectorial $\mathfrak{R}$ se numește *spațiu normat*, dacă fiecărui vector $\boldsymbol{a}$ din $\mathfrak{R}$ îi corespunde un număr real $\|\boldsymbol{a}\|$ numit *normă, valoare absolută*, sau *modul* al vectorului $\boldsymbol{a}$, astfel încît pentru orice $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{R}$: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$, $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, $\|\boldsymbol{a}\| \geqslant 0$, $\|\alpha\boldsymbol{a}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (inegalitatea,, triunghiului''). Cu satisfacerea acestor proprietăți, norma unui vector poate fi definită în mai multe moduri. Frecvent se utilizează următoarea normă $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$, denumită și ,,lungimea'' vectorului $\boldsymbol{a}$.

5.3.7. **Exemple de spații vectoriale.** 1) Segmentele orientate (caracterizate prin modul, direcție și sens), denumite vectori liberi, sînt elemente ale unui spațiu vectorial tridimensional, în timp ce mulțimea vectorilor alunecători din același spațiu nu formează un spațiu vectorial, operația de adunare neputînd fi definită în acest caz. 2) Mulțimea tuturor sistemelor ordonate de cîte n numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ constituie un spațiu vectorial n-dimensional numit *spațiu aritmetic*. Cea mai simplă bază a acestui spațiu este formată din vectorii $\boldsymbol{e}_1 = (1,0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$ și se numește *bază naturală a spațiului aritmetic*. 3) Mulțimea tuturor polinoamelor al căror grad nu întrece un număr natural n, este un spațiu vectorial cu dimensiunea $n + 1$. 4) Matricele pătrate de ordin n formează un spațiu vectorial avînd dimensiunea n^2.

5.4. Forme liniare și transformări liniare

5.4.1. **Noțiuni introductive.** O funcție $f: \mathfrak{R} \to \Omega$ a cărei mulțime de definiție $\mathfrak{R}$ este un spațiu vectorial, se numește *funcție de argument vectorial*.

Funcția f se numește *transformare* sau *operator*, dacă mulțimea Ω în care f ia valori este un spațiu vectorial $\mathfrak{R}'$ care poate fi identic cu $\mathfrak{R}$, iar dacă Ω este mulțimea numerelor, f se numește *funcțională*.

5.4.2. **Forme liniare.** O funcțională $f(\boldsymbol{x})$ definită pe un spațiu vectorial $\mathfrak{R}$ este *funcțională liniară*. dacă este aditivă : $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}$ și omogenă : $f(\alpha\, \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$, α fiind un scalar. O funcțională liniară se mai numește *formă liniară* și se notează $l(\boldsymbol{x})$.

Dacă $\{\boldsymbol{e}_i\}$ = baza $(\mathfrak{R}^n)$ și $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \in \mathfrak{R}^n$, forma $l(\boldsymbol{x})$ poate fi exprimată în general : $l(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$, unde constantele $a_i = l(\boldsymbol{e}_i)$ depind numai de alegerea bazei.

Fie m forme liniare $l_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i$, $j = 1,2, \ldots, m$. Dacă $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_m l_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, formele liniare l_j se numesc *liniar independente*; în caz contrar, ele sînt *liniar dependente*.

5.4.3. **Transformări liniare.** O transformare $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ se numește *transformare liniară* (sau *operator liniar*) și este o aplicație a spațiului $\mathfrak{R}$ în spațiul $\mathfrak{R}'$, notîndu-se $x' = f(x) = Ax$, unde $x \in \mathfrak{R}$, $x' \in \mathfrak{R}'$, dacă este aditivă: $A(x + y) = Ax + Ay$ și omogenă: $A(\alpha x) = \alpha Ax$, cu $x, y \in \mathfrak{R}$ și α scalar.

Relația $A(x+y) = Ax + Ay$ se interpretează în științele fizice drept „principiu al suprapunerii efectelor".

Întrucît în cele ce urmează se vor avea în vederea numai transformări liniare, acestea vor fi uneori desemnate prescurtat prin „transformări".

Imaginea $A(\mathfrak{R})$ a întregii mulțimi de definiție este un subspațiu în $\mathfrak{R}'$. *Rangul* r al transformării A este dimensiunea subspațiului-imagine $A(\mathfrak{R})$. Imaginea inversă (v. pct 3.6) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$ a elementului nul din $\mathfrak{R}'$ prin transformarea A, se numește *nucleul transformării liniare* A. Dimensiunea d a nucleului $\mathfrak{N}$ se numește *defect al transformării liniare* A. Dacă spațiul $\mathfrak{R}$ are dimensiunea n, atunci pentru orice transformare A, $r + d = n$.

5.4.3. **Tipuri principale de transformări liniare. Operații asupra transformărilor liniare.** Fie $A : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ și $x \in \mathfrak{R}$, $x' \in \mathfrak{R}'$.

Transformarea nulă 0 se definește prin $0x = o'$, unde $o' \in \mathfrak{R}'$.

Suma a două transformări este o transformare $C : Ax + Bx = (A + B)x = Cx$; $C = A + B$, unde $A, B, C : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ și $x \in \mathfrak{R}$.

Dacă $A : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, $B : \mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$ și $x \in \mathfrak{R}$, *produsul* BA se definește ca rezultat al efectuării succesive a transformărilor A și B și este o transformare $C : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$; $B(Ax) = (BA)x = Cx$, $BA = C$. În general, $BA \neq AB$.

Transformarea identică I transformă fiecare vector $x \in \mathfrak{R}$ în el însuși: $Ix = x$. Dacă $x' \in \mathfrak{R}'$, $I'x' = x'$ și $Ax = x'$, atunci $I'A = AI = A$.

O transformare A se numește *nesingulară* dacă stabilește o corespondență biunivocă de la $\mathfrak{R}$ la întreg spațiul $\mathfrak{R}'$, unde $\dim(\mathfrak{R}) = \dim(\mathfrak{R}')$. Transformarea A este nesingulară, atunci și numai atunci cînd aceasta posedă o *transformare inversă* unică $A^{-1} : \mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}$ astfel încît $x' = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}x'$. În acest caz $AA^{-1} = I'$ și $A^{-1}A = I$, iar $Ax = o \Leftrightarrow x = o$. Dacă A și B sînt nesingulare, atunci AB, A^{-1} și B^{-1} sînt de asemenea nesingulare, iar $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$. O transformare nesingulară păstrează independența liniară a vectorilor.

Puterile întregi ale unei transformări A sînt $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA, \ldots$, iar dacă A este nesingulară, $A^{-p} = (A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$, $p = 1,2, \ldots$.

5.5. Reprezentări matriceale

5.5.1. **Vectori.** Introducerea unei baze într-un spațiu vectorial creează posibilitatea — așa cum s-a arătat la pct. 5.3.3. — ca operațiile (de adunare și de multiplicare cu un scalar) asupra unor obiecte abstracte și anume asupra vectorilor, să fie înlocuite cu operații aritmetice obișnuite asupra unor numere desemnînd coordonatele acestor vectori. Mai precis, introducerea unei baze în $\mathfrak{R}^n$ stabilește un izomorfism (v. pct. 5.3.4) între vectorii $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in \mathfrak{R}^n$ și sistemele ordonate de n numere $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — coordonatele vectorului x în baza $\{e_i\}$.

5.5.2. **Transformări liniare.** Între transformările liniare $A: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ și matricele $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ se stabilește o corespondență biunivocă cu proprietăți de izomorfism, prin intermediul precizării unei baze $\{e_i\}$ în $\mathcal{R}^n$. În acest caz, relația de transformare liniară $y=Ax$ este reprezentată într-o bază $\{e_i\}$ prin relația matriceală $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, unde:

$$\mathbf{y} = [\eta_i]_{n\times 1},\ y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i,\ \mathbf{x} = [\xi_j]_{n\times 1},\ x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j,\ \mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}.$$

Dacă $A: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$, matricea corespunzătoare $\mathbf{A}$, de dimensiunea $m \times n$, este unic determinată dacă se stabilesc baze vectoriale în $\mathcal{R}^m$ și $\mathcal{R}^n$.

Diferitelor tipuri de transformări, precum și operațiilor asupra acestora, le corespund anumite tipuri de matrice cu operațiile respective. Astfel: transformării identice îi corespunde matricea-unitate; transformării nesingulare și celei inverse — matricea nesingulară, respectiv matricea inversă; sumei și produsului a două transformări — suma, respectiv produsul de matrice.

5.5.3 **Produs scalar.** Fie $\{e_i\}$ o bază într-un spațiu euclidian $\mathcal{E}^n$. Produsul scalar al vectorilor $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in \mathcal{E}^n$, $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \in \mathcal{E}^n$ are expresia $(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\xi_i\eta_k = \mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{y}$, unde $\mathbf{x}^T = [\xi_i]^T$, $\mathbf{y} = [\eta_k]$, $\mathbf{G} = [g_{ik}] = [g_{ki}] = [(e_i,\ e_k).]$. $\det(\mathbf{G})$ este determinantul lui Gram (v. pct. 5.3.6).

5.6. Vectori ortogonali și subspații ortogonale

5.6.1. **Vectori ortogonali și bază ortogonală.** În cadrul punctelor 5.6 și 5.7 se consideră că toți vectorii aparțin aceluiași spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{E}^n$ cu baza $[e_i]$, iar transformările $A, B, \ldots\ \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$.

Doi vectori a, b, se numesc *ortogonali*, scriindu-se $a \perp b$, dacă produsul lor scalar (a, b) este nul. Vectorul nul este ortogonal oricărui vector.

Vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m \leqslant n$, formează un *sistem ortogonal de vectori*, dacă $(x_i, x_j) = 0$ pentru orice $i \neq j$. Un sistem ortogonal de vectori este întotdeauna liniar independent și deci este alcătuit din cel mult n vectori. Un sistem ortogonal de n vectori poate constitui o bază în $\mathcal{E}^n$, numită *bază ortogonală*.

5.6.2. **Bază ortonormată.** Se numește *sistem ortonormat de vectori* un sistem ortogonal de vectori avînd fiecare lungimea egală cu 1, adică $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker) ($i, j = 1, 2, \ldots, m$), $m \leqslant n$). În acest caz, un vector x satisface *inegalitatea lui Bessel* $\sum_{i=1}^{m} |(x_i, x)|^2 \leqslant \|x\|^2$, semnul ,,egal'' intervenind în cazul și numai în cazul cînd x aparține subspațiului generat de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

În $\mathcal{E}^n$, orice sistem ortonormat de vectori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formează o *bază ortonormată*. Baza naturală a spațiului aritmetic (v. pct. 5.3.7) este o bază ortonormată. Într-o bază ortonormată $\{e_i\}$: coordonatele unui vector $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ au expresiile $\xi_i = (x, e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$: matricea $\mathbf{G}$ definită la pct. 5.5.3 devine matrice-unitate, astfel încît $(x, y) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i$, produsul scalar a doi vectori calculîndu-se prin produsul scalar

dintre matricea-linie și matricea-coloană formate din coordonatele celor doi vectori; în particular $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

5.6.3. **Construirea unui sistem ortonormat de vectori.** Fiind dat un sistem ortogonal de vectori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ alcătuind eventual o bază ortogonală, acesta poate fi normat prin împărțirea fiecărui vector $\boldsymbol{u}_i$ cu $\sqrt{(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i)}$ $i = 1,2, \ldots$

Într-un caz general, fiind dat un sistem liniar independent de vectori $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m$, există un sistem ortonormat $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, generînd același subspațiu (sau spațiu) ca și sistemul dat și care poate fi construit prin *procedeul Gram-Schmidt*, redat în continuare.

Se transformă $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ într-un sistem ortogonal $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ și apoi se normează așa cum s-a arătat mai înainte:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\sqrt{(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i)}}; \quad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{f}_1; \quad \boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{f}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{f}_{i+1})\, \boldsymbol{e}_k; \quad i = 1,2, \ldots, m-1.$$

Dacă sistemul de vectori $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ este liniar independent, atunci rezultă $\boldsymbol{e}_i \neq \boldsymbol{0}$, $i = 1,2, \ldots, m$. În caz contrar, unii dintre vectorii $\boldsymbol{e}_i$ rezultă nuli. Mai precis, dacă $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_{r-1}$ sînt liniar independenți, iar $\boldsymbol{f}_r$ este o combinație liniară a acestora, atunci $\boldsymbol{e}_r$ rezultă nul.

Procedeul de ortogonalizare descris, poate servi și la verificarea independenței liniare a unui sistem de vectori.

5.6.4. **Subspații ortogonale.** Se spune că *un vector $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}^n$ este ortogonal pe subspațiul $\mathcal{E}^m \subset \mathcal{E}^n$* și se scrie $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{E}^m$, dacă $\boldsymbol{x}$ este ortogonal pe orice vector din $\mathcal{E}^m$. Pentru aceasta este suficient ca $\boldsymbol{x}$ să fie ortogonal pe vectorii unei baze din $\mathcal{E}^m$.

Două subspații $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}^n$ și $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}^n$ se numesc *subspații ortogonale* (sau *reciproc ortogonale*), notîndu-se $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$, dacă fiecare vector al unuia este ortogonal pe orice vector al celuilalt. În acest caz: $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{\boldsymbol{o}\}$, iar suma subspațiilor $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ este o sumă directă (v. pct. 5.3.5) și se numește *sumă ortogonală*, notată cu $\mathcal{E}_1 \boxplus \mathcal{E}_2$.

Dacă $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{E}^n$, $\mathcal{E}_3 \supset \mathcal{E}_2$, subspațiul generat de vectorii $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_3$, $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{E}_2$ se numește *diferență ortogonală* a subspațiilor $\mathcal{E}_3$ și $\mathcal{E}_2$ și se notează $\mathcal{E}_3 \boxminus \mathcal{E}_2$, iar dacă $\mathcal{E}_3$ coincide cu întreg spațiul $\mathcal{E}^n$, diferența ortogonală $\mathcal{E}_3 \boxminus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$ se numește *complementul ortogonal* al lui $\mathcal{E}_2$. În acest caz, $\mathcal{E}_1 \boxplus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}^n$, iar despre $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ se spune că sînt *subspații complementare ortogonal.*

Fiind date două subspații complementare ortogonal, $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$, orice vector $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}^n$ poate fi descompus în mod unic sub forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, unde $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{E}_1$, $\boldsymbol{x}_1 \perp \mathcal{E}_2$ și $\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{E}_2$, $\boldsymbol{x}_2 \perp \mathcal{E}_1$. Vectorii $\boldsymbol{x}_1$ și $\boldsymbol{x}_2$ se numesc *proiecții ortogonale* ale vectorului $\boldsymbol{x}$ pe $\mathcal{E}_1$, respectiv pe $\mathcal{E}_2$.

Proiectarea unui vector $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}^n$ pe un subspațiu din $\mathcal{E}^n$ este o transformare liniară denumită *transformare de proiecție.*

5.7. Forme liniare și transformări liniare în spațiul euclidian

5.7.1. **Forme liniare.** Forma liniară $l(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i$ poate fi considerată în spațiul euclidian drept produs scalar al unui vector constant $\boldsymbol{a}$ cu un vector variabil $\boldsymbol{x}$, de componente a_i, respectiv ξ_i, $i = 1,2, \ldots, m$, în aceeași bază a unui subspațiu $\mathcal{E}^m \subset \mathcal{E}^n$.

5.7.2. **Transformări liniare**. Dacă baza spaţiului euclidian este normată, matricea asociată unei transformări A are expresia $\mathbf{A} = [(\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j)]$.

Spaţiul euclidian permite definirea următoarelor tipuri de transformări, prezentînd proprietăţi speciale de simetrie, acestor transformări asociindu-se matrice cu aceleaşi denumiri (v. pct. 5.2.9).

Se numeşte *transformare adjunctă* (sau *transformare conjugată* sau *transformare transpusă*) cu A, transformarea unic determinată A^T care satisface relaţiei $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pentru orice $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$, cu proprietăţile : $(A^T)^T = A$, $0^T = 0$, $I^T = I$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, $(A\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^T B\boldsymbol{y}) = (B^T A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Dacă transformării A îi corespunde matricea $\mathbf{A}$, transformării adjuncte A^T îi corespunde matricea $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{G}$, iar în cazul unei baze ortonormate, cînd $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ — matricea $\mathbf{A}^T$.

O transformare A se numeşte *autoadjunctă* (sau *autoconjugată*, sau *simetrică*), dacă $A^T = A$. În acest caz, $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Matricea asociată este o matrice simetrică

Dacă $A^T = -A$, transformarea A se numeşte *antisimetrică*, corespunzîndu-i într-o bază dată, o matrice antisimetrică.

O transformare A este *ortogonală*, dacă $AA^T = A^T A = I$. În acest caz, $A^T = A^{-1}$. O transformare ortogonală este nesingulară şi nu modifică produsul scalar : $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pentru orice $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$. Acestei transformări îi corespunde o matrice ortogonală.

O transformare A se numeşte *normală*, dacă $AA^T = A^T A$, fiindu-i asociată o matrice normală. Transformările autoadjuncte şi cele ortogonale sînt transformări normale.

Proprietăţile caracteristice ale operaţiilor cu tipurile de transformări enumerate la acest punct sînt analoage cu cele menţionate la pct. 5.2.9, pentru matricele asociate acestor transformări.

5.8. Reprezentări matriceale la schimbarea bazei vectoriale

5.8.1. **Schimbarea bazei**. Fie $\{\boldsymbol{e}_i\}$ şi $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ două baze în $\mathcal{R}^n$. Există o transformare C şi numai una singură : $C\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}'_k$, $k=1,2,\ldots,n$, care transformă baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$ în baza $\{\boldsymbol{e}'_i\}$. Numerele c_{ik}, $i, k = 1,2, \ldots, n$ din relaţiile precedente sînt elementele unei matrice $[c_{ki}] = \mathbf{C}^T$ ($\det(\mathbf{C}) \neq 0$). Matricea $\mathbf{C} = [c_{ik}]$ se numeşte *matricea transformării* C *în baza* $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

Baza $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ se transformă în baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$ prin transformarea inversă $C^{-1}\boldsymbol{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} c'_{ik}\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, unde c'_{ik}, $i, k = 1,2, \ldots, n$ sînt elementele matricei $[c'_{ki}] = (\mathbf{C}^{-1})^T$, $\mathbf{C}$ fiind matricea definită anterior.

5.8.2. **Transformarea coordonatelor unui vector**. Fie $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k\boldsymbol{e}'_k$ şi $\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}'_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, $\mathbf{C} = [c_{ik}]$. Notînd coloanele coordonatelor vectorului $\boldsymbol{x}$ în cele două baze cu $\mathbf{x} = [\xi_i]$ şi $\mathbf{x}' = [\xi'_k]$, relaţiile matriceale de transformare a coordonatelor sînt $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}'$ şi $\mathbf{x}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$. Dacă ambele baze sînt ortonormate, $\mathbf{C}$ este o matrice ortogonală, avînd expresia $\mathbf{C} = [(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_k)]$.

Se observă că în timp ce vectorii bazei $\{e_i\}$ se transformă cu matricea C^T, coordonatele ξ_i ale unui vector se transformă cu matricea C^{-1}. În general, două transformări ale unor obiecte (de natură diferită), avînd matricele una inversa transpusă a celeilalte, se numesc *contragrediente*, iar dacă cele două matrice coincid, se numesc *cogrediente*.

5.8.3. **Transformarea coeficienților unei forme liniare.** O formă liniară $l(x)$ raportată succesiv la bazele $\{e_i\}$ și $\{e'_i\}$ are expresiile $l(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i = \sum_{k=1}^{n} a'_k \xi'_k$, unde $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k e'_k$ și $\sum_{i=1}^{n} c_{ik} e_i = e'_k$, $k = 1,2, \ldots, n$, $C = [c_{ik}]$. Coeficienții a'_k se exprimă în funcție de a_i prin: $a'_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} a_i$. Deci coeficienții unei forme liniare se transformă la fel (sau cogredient) cu vectorii bazei.

5.8.4. **Reprezentarea unei transformări liniare în baze diferite.** Relația matriceală $y = Ax$, corespunzătoare în baza $\{e_i\}$ transformării $y = Ax$, ia în cazul trecerii la o nouă bază $\{e'_i\}$ prin transformarea C menționată mai înainte — forma $y' = A'x'$, unde $x' = C^{-1}x$, $y' = C^{-1}y$ și $A' = C^{-1}AC$, $A = CA'C^{-1}$. Matricele A și A' sînt matrice asemenea (v. pct. 5.2.7).

La aceeași schimbare a bazei, de astă dată în $\mathcal{E}^n$, produsul scalar (x, y), reprezentat în baza $\{e_i\}$ prin $(x, y) = x^T G y$, este dat în baza $\{e'_k\}$ de expresia $(x, y) = x'^T G' y'$, unde: $G = [(e_i, e_k)]$, $G' = [(e'_i, e'_k)] = C^T G C$.

5.9. Probleme de valori proprii în algebra liniară

5.9.1. **Subspații invariante față de o transformare liniară.** Subspațiul $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}^n$ se numește *invariant* în raport cu transformarea A, dacă A transformă orice vector $x \in \mathfrak{R}_1$ într-un vector $Ax \in \mathfrak{R}_1$. Spațiul întreg $\mathfrak{R}^n$ și subspațiul format numai din vectorul nul sînt *subspații invariante improprii* în raport cu orice transformare.

Dacă $\mathfrak{R}_1$ este invariant pentru A, atunci este invariant și pentru $A^2, A^3, \ldots$ și în general pentru transformarea $f(A)$, unde $f(t)$ este un polinom algebric.

Fie $e_1, e_2, \ldots e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$, o bază în $\mathfrak{R}^n$ și $e_1, e_2, \ldots, e_m$ o bază în $\mathfrak{R}_1$, atunci transformarea A se poate reprezenta prin matricea compusă $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A' \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right]$, unde A_1 este o matrice pătrată de ordinul m, reprezentînd transformarea A_1 „indusă" de A pe subspațiul $\mathfrak{R}_1$. Transformările A_1 și A se deosebesc numai prin domeniile respective de definiție.

În general $A : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ se numește *transformare decompozabilă*, dacă $\mathfrak{R}^n$ este suma directă (v. pct. 5.3.5) a două sau mai multe subspații invariante față de $A : \mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}_1 \oplus \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \ldots$. În acest caz se spune că *transformarea A este suma directă a transformărilor A_1, $A_2, \ldots,$* induse de A pe $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots,$ scriindu-se $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$, iar dacă se ia ca bază în $\mathfrak{R}^n$, reuniunea bazelor subspațiilor $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$, matricea A are forma cvasidiagonală cu celulele $A_1, A_2, \ldots$, corespunzînd transformărilor induse $A_1, A_2, \ldots$.

O matrice pătrată A reprezintă o transformare decompozabilă $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$, atunci și numai atunci cînd este asemenea unei matrice cvasidiagonale, avînd drept celule

matricele $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$, corespunzătoare transformărilor $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$. În acest caz, $\mathbf{A}$ se numește *matrice decompozabilă*.

5.9.2. **Vectori proprii și valori proprii.** De importanță deosebită sînt subspațiile unidimensionale invariante în raport cu o transformare $\mathcal{A}$ în $\mathcal{R}^n$. Vectorii ce le generează se numesc *vectori proprii* ai transformării liniare $\mathcal{A}$. Vectorul $\boldsymbol{x}$ este un vector propriu dacă

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \tag{I.6}$$

unde λ este un număr. Valoarea lui λ pentru care relația (I.6) este posibilă, se numește *valoare proprie* sau *valoare caracteristică* a transformării $\mathcal{A}$, corespunzătoare vectorului propriu $\boldsymbol{x}$.

Într-o bază oarecare, relația vectorială (I.6) se transformă în relația matriceală $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, sau

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \boldsymbol{o} \tag{I.7}$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice pătrată de ordin n, iar $\mathbf{x}$ este matricea-coloană a coordonatelor vectorului $\boldsymbol{x}$.

Ecuația matriceală (I.7) este echivalentă cu un sistem de n ecuații liniare omogene, care are soluții nenule dacă este satisfăcută *ecuația caracteristică* sau *seculară* a matricei $\mathbf{A}$,

$$\varphi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \det\,[a_{ij} - \lambda\delta_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația caracteristică este o ecuație de gradul n în λ și are n rădăcini reale sau complexe λ_r, $r = 1,2, \ldots, n$, numite *valori proprii* sau *valori caracteristice* ale matricei $\mathbf{A}$. Valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ coincid cu cele ale transformării $\mathcal{A}$, definite mai înainte.

Unele valori proprii pot fi multiple. Dacă există $s \leqslant n$ valori proprii distincte λ_q, $q = 1,2, \ldots, s$, gradul de multiplicitate al lui λ_q se notează cu $m'_q \geqslant 1$ $\left(\sum_{q=1}^{s} m'_q = n\right)$, numindu-se *multiplicitate algebrică* a valorii proprii (distincte) λ_q.

Mulțimea $\{\lambda_r\}$ a valorilor λ_r, $r = 1,2, \ldots, n$, se numește *spectrul* transformării $\mathcal{A}$ (sau al matricei $\mathbf{A}$) și nu depinde de baza vectorială din $\mathcal{R}^n$.

Vectorii proprii ai transformării $\mathcal{A}$ se calculează pentru fiecare valoare proprie λ_r în parte, prin rezolvarea sistemului omogen de n ecuații $(\mathbf{A} - \lambda_r\mathbf{I})\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$. Coordonatele u_{ir}, $i = 1, 2, \ldots, n$, ale unui vector propriu $\boldsymbol{u}_r$ se determină cu aproximația unui factor care poate fi folosit pentru normare.

Observație. Coloana $\mathbf{u}_r$ a coordonatelor vectorului propriu $\boldsymbol{u}_r$ va fi uneori desemnată în continuare, printr-un abuz de limbaj, însă în concordanță cu literatura de specialitate, drept „vector propriu" (al matricei $\mathbf{A}$), păstrîndu-se pentru $\boldsymbol{u}_r$ denumirea de vector propriu al transformării $\mathcal{A}$.

Unei valori proprii λ_q îi pot corespunde $m_q \geqslant 1$ vectori proprii liniar independenți care generează un subspațiu invariant în raport cu $\mathcal{A}$, numărul m_q, egal cu defectul matricei $(\mathbf{A} - \lambda_q\mathbf{I})$, numindu-se *multiplicitate geometrică* a valorii proprii λ_q. Între m_q și m'_q există relația $1 \leqslant m_q \leqslant m'_q$.

Dacă rangul matricei $(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})$ este egal cu $n-1$ pentru orice $r = 1,2, \ldots, n$, toate valorile proprii λ_r sînt distincte și fiecărei valori proprii îi corespunde exact un singur vector propriu ; mulțimea tuturor celor n vectori proprii formează o bază în $\mathcal{R}^n$.

5.9.3. **Polinom caracteristic.** Polinomul algebric $\varphi(\lambda)$ din partea stîngă a ecuației caracteristice, se numește *polinom caracteristic* și este independent de baza în care este stabilit.

Forma generală a polinomului caracteristic este $\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n$, unde coeficienții $p_1, p_2, \ldots$ sînt funcții simetrice de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Ei pot fi exprimați și în funcție de elementele matricei $\mathbf{A}$ și anume p_i este egal cu suma tuturor C_n^i minori principali de ordinul i ai $\det(\mathbf{A})$. În particular : $p_1 = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ și $p_n = \det(\mathbf{A})$.

Matricele asemenea au același polinom caracteristic.

Dacă matricea $\mathbf{A}$ are spectrul $\{\lambda_r\}$, atunci $\alpha\mathbf{A}$ are spectrul $\{\alpha\lambda_r\}$, iar $\mathbf{A}^p$ are spectrul $\{\lambda_r^p\}$, ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), iar dacă $\mathbf{A}$ este nesingulară, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ; de asemenea, orice polinom sau orice funcție analitică $f(\mathbf{A})$ are spectrul $\{f(\lambda_r)\}$.

Dacă $\varphi(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$, atunci $\varphi(\mathbf{A}) = 0$: orice matrice $\mathbf{A}$ satisface ecuației sale caracteristice (*teorema Cayley-Hamilton*). Această teoremă permite ca orice funcție întreagă și deci orice funcție analitică $f(\mathbf{A})$ de o matrice pătrată de ordin n, să se reprezinte ca funcție liniară de n puteri întregi pozitive și distincte ale matricei $\mathbf{A}$. Dacă valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ sînt distincte, atunci o astfel de funcție $f(\mathbf{A})$ se poate exprima sub forma
$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)}$$
(*formula lui Sylvester*).

5.9.4. **Matrice diagonalizabile.** În algebra liniară, clasa matricelor pătrate de ordin n care posedă exact n vectori proprii independenți este deosebit de importantă. Matricele din această clasă pot avea valori proprii multiple, însă multiplicitatea algebrică a acestora este egală cu multiplicitatea geometrică : $m_q' = m_q$, $q = 1,2, \ldots, s$. Dacă se schimbă baza inițială în care a fost scrisă o astfel de matrice $\mathbf{A}$, într-o bază formată din cei n vectori proprii, matricea $\mathbf{A}$ se transformă într-o matrice diagonală $\mathbf{\Lambda} = [\diagdown \lambda_r \diagdown]$ prin transformarea de asemănare $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$. Această operație se numește *diagonalizare*, iar matricele pătrate care pot fi diagonalizate se numesc *matrice diagonalizabile* sau *matrice cu structură simplă*. Clasa matricelor diagonalizabile este identică cu clasa matricelor pătrate de ordin n care au exact n vectori proprii liniar independenți.

Matricea $\mathbf{U}$ care apare în relația de diagonalizare se numește *matrice modală*, este pătrată, de ordin n și nesingulară. Ea este alcătuită din coloanele coordonatelor vectorilor proprii $\mathbf{u}_r$, în baza corespunzătoare matricei $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \; \mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n] = [u_{ir}] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Coloanele acestei matrice se consideră de obicei ca fiind normate prin relațiile $\mathbf{u}_r^T \mathbf{u}_r = 1$, $r = 1,2, \ldots, n$.

Relaţia de transformare $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \mathbf{\Lambda}$, scrisă sub forma $\mathbf{AU} = \mathbf{U\Lambda}$, apare drept o notare concentrată a celor n sisteme omogene de cîte n ecuaţii $(\mathbf{A} - \lambda_r\mathbf{I})\mathbf{u}_r = 0$, $r = 1,2, \ldots, n$.

O transformare liniară $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, scrisă într-o bază oarecare prin matricea diagonalizabilă $\mathbf{A}$, capătă prin schimbarea bazei iniţiale în baza $\{\boldsymbol{u}_r\}$, forma simplă $\mathbf{\Lambda x}' = \mathbf{y}'$, unde $\mathbf{x} = \mathbf{Ux}'$ şi $\mathbf{y} = \mathbf{Uy}'$.

5.9.5. **Matrice normale şi matrice simetrice.** O clasă importantă de matrice diagonalizabile o formează matricele normale (v. pct. 5.2.9), cu cazurile particulare ale matricelor simetrice, antisimetrice şi ortogonale.

Matricea modală $\mathbf{U}$, corespunzătoare unei matrice normale $\mathbf{A}$, este o matrice ortogonală ($\mathbf{UU}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$), iar diagonalizarea matricei $\mathbf{A}$ se obţine prin relaţia $\mathbf{U}^T\mathbf{AU} = \mathbf{\Lambda}$.

Toate valorile proprii ale unei matrice simetrice sînt reale.

Dacă $m_q = m'_q$, $q = 1,2,\ldots,s$, este multiplicitatea valorilor proprii λ_q, vectorii proprii corespunzători lui λ_q generează subspaţii $\mathcal{E}_q$ invariante în raport cu $\boldsymbol{A}$. Întreg spaţiul poate fi descompus într-o sumă directă de astfel de subspaţii invariante $\mathcal{E}_q$, $q = 1,2,\ldots s$, ortogonale între ele.

5.9.6. **Descompunere spectrală.** O matrice normală $\mathbf{A}$ poate fi exprimată sub forma $\mathbf{A} = \mathbf{U\Lambda U}^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{G}_i$, denumită „descompunere spectrală" a matricei $\mathbf{A}$.

Matricele $\mathbf{G}_i = \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T$ numite „componentele matricei $\mathbf{A}$", au rangul egal cu 1 şi satisfac relaţiilor $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j = \mathbf{O}$ pentru $i \neq j$ şi $\mathbf{G}_i^2 = \mathbf{G}_i$ (idempotenţă).

Dacă $f(\mathbf{A})$ este un polinom scalar avînd ca argument matricea normală $\mathbf{A}$, descompunerea sa spectrală este $f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\mathbf{G}_i$. În particular, este frecvent întîlnită expresia $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{G}_i}{\lambda_i - \mu}$, unde $\mu \neq \lambda_i$.

5.9.7. **Matrice pozitive.** Matrice pozitive se numesc matricele care au toate elemente pozitive şi se notează convenţional $\mathbf{A} > 0$. Analog se defineşte un vector pozitiv, notat cu $\boldsymbol{x} > 0$, dacă are toate componentele sale pozitive.

Dacă $\mathbf{A}$ este o matrice pozitivă, valoarea proprie avînd modulul cel mai mare este reală şi pozitivă şi este o rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice respective; acestei valori proprii îi corespunde un vector propriu care poate fi luat pozitiv (*teorema lui Perron*).

5.9.8. **Transformări şi matrice pozitiv definite.** (prescurtat : p.d.). O transformare autoadjunctă $\boldsymbol{A}$ se numeşte *pozitiv definită*, dacă pentru orice $\boldsymbol{x} \neq 0$, $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ $(\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}^n)$.

O transformare p.d. $\boldsymbol{A}$ este nesingulară, iar matricea acesteia $\mathbf{A}$ într-o bază ortonormată, satisface relaţiei $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0$ pentru orice coloană $\mathbf{x} \neq 0$ şi se numeşte *matrice pozitiv-definită*.

Dacă $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{B}$ sînt transformări p.d., transformările $c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B}$ unde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ şi $\boldsymbol{A}^{-1}$, sînt de asemenea p.d.

Dacă $\boldsymbol{A}$ este o transformare p.d., atunci : 1) transformarea $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ este p.d., $\mathbf{C}$ fiind matrice nesingulară; 2) transformarea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{1/2}$ definită prin $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$, este p.d.; 3) transformările $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ unde $\boldsymbol{B}$ este autoadjunctă, posedă toate valorile proprii reale.

O transformare $\boldsymbol{A}$ (sau o matrice pătrată $\mathbf{A}$) este pozitiv definită, dacă şi numai dacă toate valorile proprii respective sînt pozitive.

Fiind dată o transformare p.d. $\boldsymbol{A}$, se poate defini un nou produs scalar între doi vectori $\boldsymbol{a}$ şi $\boldsymbol{b}$, notat $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_A$ şi avînd valoarea $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_A = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Acest produs scalar se

bucură de toate proprietățile menționate la pct. 5.3.6. Vectorii $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ se numesc *A-ortogonali* dacă $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_A = (A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, cu toate consecințele și proprietățile arătate la pct. 5.6.

5.9.9. Problema generală a valorilor proprii. În științele aplicate, în afară de așa-numita *problemă specială* (sau *simplă*) de *valori proprii* (a algebrei liniare) sub forma avută în vedere pînă aici, intervine și *problema generală de valori proprii*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}, \quad (\boldsymbol{x} \neq 0), \quad \text{sau matriceal: } \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}, \tag{I.8}$$

fiind necesar să se găsească valorile proprii λ și vectorii proprii $\mathbf{x}$.

Presupunînd că matricea $\mathbf{B}$ este nesingulară, problema generală se transformă într-o problemă simplă pentru matricea $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.

Dacă $\mathbf{A}$ este matrice simetrică, iar $\mathbf{B}$ este pozitiv definită, toate valorile proprii λ sînt reale. Introducînd un nou produs scalar, ca la punctul precedent, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_B = (\boldsymbol{a}, B\boldsymbol{b})$, transformarea $B^{-1}A$ se comportă ca o transformare autoadjunctă în raport cu acest produs scalar, bucurîndu-se de proprietățile spectrale arătate anterior, printre care se menționează B-ortogonalitatea vectorilor proprii.

Valorile proprii determinate de egalitatea (I.8) coincid cu rădăcinile ecuației $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}) = 0$. Procedînd la fel ca în cazul problemei speciale pentru o matrice simetrică, se găsește o matrice modală $\mathbf{V}$ care este „B-ortogonală": $\mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = \mathbf{I}$ și care diagonalizează matricea $\mathbf{A}$: $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$

5.10. Forme pătratice

5.10.1. Forme biliniare și forme pătratice. Fie $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ o funcție de două argumente vectoriale $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n$, luînd valori în mulțimea numerelor. Funcția $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ se numește *formă biliniară* dacă este liniară atît relativ la argumentul $\boldsymbol{x}$: $A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{y}) + A(\boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{y})$, $A(\alpha\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \alpha A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$, cît și relativ la $\boldsymbol{y}$: $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}_1) + A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}_2)$, $A(\boldsymbol{x}; \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$.

Dacă $\{\boldsymbol{e}_i\}$ = baza $(\mathcal{R}^n)$ și $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \boldsymbol{e}_j$, atunci $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j$, unde coeficienții $a_{ij} = A(\boldsymbol{e}_i; \boldsymbol{e}_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, formează o matrice pătrată $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, numită *matricea formei biliniare* $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ în baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Notînd componentele vectorilor $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{y}$ cu $\mathbf{x} = [\xi_i]$ și $\mathbf{y} = [\eta_j]$, $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ se poate scrie sub forma matriceală $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$.

O formă biliniară se numește *simetrică* dacă $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x})$ pentru orice $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n$. Matricea acesteia este în orice bază, simetrică.

Punînd $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ în $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ rezultă o *formă pătratică* $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$, iar expresia matriceală $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ devine $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}_1\mathbf{x}$, unde $\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ este „partea simetrică" a matricei $\mathbf{A}$. Prin urmare, matricea unei forme pătratice poate fi considerată întotdeauna matrice simetrică. Unei forme pătratice $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$ îi corespunde o infinitate de forme biliniare $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$. Dintre acestea, este unic determinată forma biliniară simetrică, denumită *formă biliniară polară* a formei pătratice $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$.

Rangul r al matricei $\mathbf{A}$ se numește *rang* al formei pătratice $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$. $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$ este singulară sau nesingulară, după cum $r < n$ sau $r = n$. Dacă $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$ este singulară în $\mathcal{R}^n$, atunci există un subspațiu $\mathcal{R}^m$ de dimensiune $m \leq n$, în care $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$ este nesingulară.

O formă pătratică $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x})$, precum și matricea ei $\mathbf{A}$, se numesc: a) *pozitiv definite* (*negativ definite*) dacă pentru orice $\mathbf{x} \neq 0$, $A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}) > 0$ $(A(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}) < 0)$; b) *pozitiv semidefi-*

nite (*negativ semidefinite*), dacă $A(x;x)\geq 0$ ($A(x;x)\leq 0$) pentru orice $x\neq 0$; c) *nedefinite*, dacă $A(x;x)$ poate lua valori pozitive, negative sau zero.

5.10.2. Schimbarea bazei. Trecînd de la baza $\{e_i\}$ la o nouă bază $\{e'_i\}$ prin matricea nesingulară **C** definită la pct. 5.8.1., coordonatele vectorului x devin $\mathbf{x}'=[x'_i]$, iar forma pătratică $A(x;x)$ capătă expresia matriceală $A(x;x)=\mathbf{x}'^T\mathbf{A}'\mathbf{x}'$, unde $\mathbf{A}'=\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$.

5.10.3. Forme biliniare și forme pătratice în spațiul euclidian. Într-o bază oarecare a unui spațiu vectorial, atît transformările liniare cît și formele biliniare sînt date prin matrice. Totuși, în general, nu se poate stabili o corespondență biunivocă între o transformare liniară și o formă biliniară sau o formă pătratică, deoarece matricele respective se transformă după formule diferite în cazul trecerii la o altă bază. Această corespondență biunivocă se poate stabili însă în spațiul euclidian, prin intermediul produsului scalar, astfel încît $A(x;y)=(Ax,y)$.

5.10.4. Reducerea unei forme pătratice la forma canonică. Pentru orice formă pătratică nesingulară $A(x;x)$ există o bază $\{f_i\}$ în care forma pătratică are expresia

$$A(x;x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2 \text{ unde } x=\sum_{i=1}^{n}x_i f_i,$$ denumită *formă canonică* a formei pătratice.

În particular, o formă pătratică în $\mathcal{E}^n$ poate fi redusă la forma canonică a ei printr-o transformare ortogonală și în acest caz matricea **A** se transformă în matricea $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}=\mathbf{\Lambda}$, unde **U** este matricea modală a matricei **A**, iar $\mathbf{\Lambda}$ este matricea diagonală a coeficienților $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, egali cu valorile proprii $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ale matricei **A**.

Există diferite metode de găsire a formei canonice și a bazei $\{f_i\}$. Dintre acestea se menționează *metoda Jacobi* în care se presupune că $A(x;x)$ este dată în baza inițială $\{e_i\}$ prin matricea $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ avînd șirul minorilor principali superiori diferit de zero:

$$\Delta_0=1,\ \Delta_1=a_{11}\neq 0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,\ldots,\ \Delta_n=\det(\mathbf{A})\neq 0.$$ Atunci:

$$\alpha_1=\Delta_0/\Delta_1,\ \alpha_2=\Delta_1/\Delta_2,\ldots,\alpha_n=\Delta_{n-1}/\Delta_n.$$

Numărul coeficienților α_i nenuli este egal cu rangul formei pătratice.

Condiția necesară și suficientă ca $A(x;x)$ să fie pozitiv (negativ) definită, este ca șirul minorilor principali $\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ să fie format numai din numere pozitive (să posede n variații de semn).

O formă pătratică pozitiv sau negativ definită este în mod necesar nesingulară, iar o formă pătratică semidefinită este singulară.

Pentru o aceeași formă pătratică există o infinitate de forme canonice corespunzînd unor baze diferite. Se verifică însă următoarea *teoremă a inerției formelor pătratice* (*Sylvester*): în toate formele canonice ale unei aceleiași forme pătratice, numărul coeficienților pozitivi și numărul coeficienților negativi rămîn neschimbate.

5.10.5. Reducerea simultană a două forme pătratice la forme canonice. Fie în $\mathcal{E}^n$ două forme pătratice $A(x;x)$ și $B(x;x)$, dintre care $B(x;x)$ este pozitiv definită. Ambele forme pot fi reduse la forme canonice prin aceeași transformare cu matricea modală **V** definită la pct. 5.9.9., prin relațiile $\mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V}=\mathbf{I}$ și $\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}=\mathbf{\Lambda}$, unde $\mathbf{\Lambda}$ este matricea diagonală a valorilor proprii pentru problema generală $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{B})\,\mathbf{x}=0$. În acest caz

$$A(x;x)=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i'^2 \text{ și } B(x;x)=\sum_{i=1}^{n}x_i'^2 \text{ cu } \mathbf{x}'=\mathbf{V}^T\mathbf{x}.$$

5.10.6. Proprietăți extremale ale formelor pătratice. Se consideră o transformare autoadjunctă A în $\mathcal{E}^n$ avînd matricea (simetrică) **A**. Problema valorilor proprii ale

transformării A sau ale matricei $\mathbf{A}$ este o problemă de valori staționare ale formei pătratice $A(x;x) = (Ax,x) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, condiționate de relația $(x,x) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$.

Obișnuit, condiția $(x,x) = 1$ se satisface implicit prin luarea în considerație, în loc de forma pătratică $A(x;x)$ a *citului lui Rayleigh* $R(x) = R(\mathbf{x}) = \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)} = \dfrac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$.

Fie $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ și $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vectorii proprii corespunzători. Citul lui Rayleigh $R(\mathbf{x})$ ia valori staționare egale cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dacă $\mathbf{x}$ este egal cu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ și: 1) $\min\limits_{\mathbf{x}\neq 0} R(\mathbf{x}) = \lambda_1$, $\max\limits_{\mathbf{x}\neq 0} R(\mathbf{x}) = \lambda_n$; 2) $\min\limits_{\substack{\mathbf{x}\neq 0,\ \mathbf{x}^T\mathbf{u}_i=0\\ i=1,2,\ldots,r-1}} R(\mathbf{x}) = \lambda_r$, $\max\limits_{\substack{\mathbf{x}\neq 0,\ \mathbf{x}^T\mathbf{u}_i=0\\ i=n-r+1,\ldots,n}} R(\mathbf{x}) = \lambda_{n-r}$.

Principiul minimaximal al lui Courant: fie y_k, $k = 1, 2, \ldots r-1$, un sistem liniar independent de vectori oarecare și $m(y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}) = \min R(\mathbf{x})$ cu condițiile $\mathbf{x}^T\mathbf{y}_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,r-1$. Atunci $\lambda_r = \max\ m(y_1, y_2, \ldots, y_{r-1})$ dacă $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ parcurg toate sistemele de $r-1$ vectori liniar independenți.

Se menționează că în cazul unei probleme generale de valori proprii $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{y}$, cu matricea $\mathbf{A}$ simetrică și matricea $\mathbf{B}$ simetrică și pozitiv definită, numitorul citului lui Rayleigh se înlocuiește peste tot cu $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$.

5.10.7. **Teoremele de comparație a valorilor proprii.** Aceste teoreme indicate în continuare, sînt consecințe ale proprietăților extremale redate la punctul precedent.

Se consideră problema generală de valori proprii $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$, cu spectrul $\{\lambda_i\}$. Matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ sînt simetrice, iar $\mathbf{B}$ este pozitiv determinată. Fie alte două matrice $\mathbf{A}_1$ și $\mathbf{B}_1$, ambele simetrice și pozitiv determinate. Atunci:

1) Nici o valoare proprie μ_i a problemei $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1)\mathbf{x} = \mu\,\mathbf{B}\mathbf{x}$ nu este mai mică decît λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

2) Nici o valoare proprie ν_i a problemei $\mathbf{A}\mathbf{x} = \nu(\mathbf{B} + \mathbf{B}_1)\mathbf{x}$ nu este mai mare ca λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$.

3) Dacă se impune vectorilor x condiția de a aparține numai unui subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}^n$ de dimensiune $n-m$, cele $n-m$ valori proprii $\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-m}'$ ale problemei astfel rezultate, satisfac relațiilor $\lambda_i \leqslant \lambda_i' \leqslant \lambda_{i+m}$, $i=1,2,\ldots,n-m$. Obișnuit, această restricție asupra vectorilor x se exprimă prin m ecuații liniare independente (,,de legătură'') cu componentele acestor vectori.

5.11. Sisteme de ecuații liniare

5.11.1. **Noțiuni introductive.** Fie un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, sau cu notație matriceală, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ este *matricea sistemului*, $\mathbf{x} = [x_j]_{n\times 1}$ este *coloana necunoscutelor*, iar $\mathbf{b} = [b_i]_{m\times 1}$ este *coloana termenilor liberi*. Matricea compusă $\overline{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ se numește *matricea extinsă*.

Dacă $\mathbf{b} = 0$, sistemul se numește *omogen*; în caz contrar se numește *neomogen*.

Se numește *soluție* a unui sistem de ecuații, orice coloană $\xi = [\xi_j]_{n\times 1}$ de n numere ξ_j, $j = 1,2,\ldots,n$, care verifică simultan toate cele m ecuații. Dacă există o astfel de soluție, sistemul de ecuații se numește *compatibil*; în caz contrar el este *incompatibil*. Un sis-

tem compatibil care are o singură soluţie se numeşte *determinat*, iar dacă are mai multe soluţii se numeşte *nedeterminat*. Teoria sistemelor de ecuaţii liniare se ocupă cu elaborarea metodelor care permit să se decidă asupra existenţei şi unicităţii soluţiilor, precum şi cu studierea procedeelor de găsire a acestor soluţii.

5.11.2. Compatibilitatea sistemelor. Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil atunci şi numai atunci cînd $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\bar{\mathbf{A}})$. Un sistem omogen este întotdeauna compatibil.

5.11.3. Unicitatea soluţiei. Un sistem compatibil de ecuaţii liniare admite o soluţie unică, dacă şi numai dacă $\text{rang}\,(\mathbf{A}) = n$ (numărul necunoscutelor).

5.11.4. Sisteme omogene. Dacă un sistem omogen de m ecuaţii cu n necunoscute, $\mathbf{Ax}=0$, are mai multe soluţii $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$, atunci orice combinaţie liniară a acestora $\alpha_1\xi^{(1)}+ +\alpha_2\,\xi^{(2)}+\ldots$ este de asemenea o soluţie. Mulţimea soluţiilor generează *subspaţiul soluţiilor* $\mathcal{S}\subset\mathcal{S}^n$ avînd $\dim(\mathcal{S}) = n - r$, unde $r = \text{rang}\,(\mathbf{A})$, $r \leqslant n$, $r \leqslant m$.

1) Dacă $r = n$, ceea ce implică $n \leqslant m$, atunci $\dim\,(\mathcal{S}) = 0$, subspaţiul $\mathcal{S}$ este nul, iar sistemul admite numai soluţia banală ($\xi = 0$). Acest caz intervine în particular dacă $n = m$ şi $\det\,(\mathbf{A})\neq 0$.

2) $r < n$ este condiţia necesară şi suficientă ca sistemul să admită soluţii nenule. În acest caz, există un minor nenul de ordin r al matricei $\mathbf{A}$. Considerînd că sistemul de ecuaţii este astfel scris, încît acest minor este situat în colţul din stînga sus al matricei $\mathbf{A}$, se păstrează numai primele r ecuaţii, denumite *ecuaţii principale*, iar celelalte $n-r$ ecuaţii fiind combinaţii liniare ale ecuaţiilor principale, se lasă la o parte. Necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se numesc *necunoscute principale*, iar $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ se numesc *necunoscute libere*.

Sistemul ecuaţiilor principale, scris sub forma $\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x_j = -\sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j$, $i = 1,2 \ldots \ldots, r$, apare drept sistem neomogen pentru necunoscutele principale, avînd o soluţie unică $\xi_1^{(k)}\ \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_r^{(k)}$ pentru orice alegere a unor valori $\xi_{r+1}^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$ a necunoscutelor libere.

Coloana $\xi^{(k)}=[\xi_j^{(k)}]_{n\times 1}$ este o soluţie a sistemului dat $\mathbf{Ax}=0$ şi există cel mult $n-r$ astfel de coloane liniar independente, alcătuind o bază a subspaţiului soluţiilor $\mathcal{S}$. Orice sistem liniar independent de un număr maxim de soluţii $\xi^{(k)} = [\xi_j^{(k)}]$, $k = 1, 2, \ldots, n - r$, se numeşte *sistem fundamental de soluţii*. *Soluţia generală* ξ este orice combinaţie liniară a sistemului fundamental de soluţii : $\xi = \sum_{k=1}^{n-r} c_k\xi^{(k)}$, unde c_k sînt constante arbitrare.

Deseori se utilizează sistemul fundamental de soluţii, obţinut prin atribuirea următoarelor valori pentru necunoscutele libere: $\xi_{r+j}^{(k)} = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n - r$,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{pentru } j=k \\ 0 & \text{pentru } j\neq k \end{cases}.$$

Caz particular : $m=n$, $r = n - 1$. Subspaţiul soluţiilor sistemului $\mathbf{Ax} = 0$ are dimensiunea 1. Componentele ξ_j ale oricărei soluţii $\xi = [\xi_j]$ se pot exprima prin $\xi_j = cA_{ij}$, $j = 1,2,\ldots,n$, unde c este o constantă oarecare, iar A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea $\mathbf{A}$, indicele i fiind astfel luat, încît cel puţin unul din A_{ij}, $j = 1,2,\ldots,n$, să fie nenul.

5.11.5. **Sisteme neomogene.** În timp ce un sistem omogen este întotdeauna compatibil, un sistem neomogen posedă numai în cazuri particulare această proprietate.

Dacă un sistem neomogen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admite o soluție $\xi^{(0)}$, atunci *soluția generală* a acestuia este suma soluției $\xi^{(0)}$ și a soluției generale a sistemului omogen asociat $\mathbf{Ax} = 0$.

Condiția de compatibilitate de la pct. 5.11.2 mai poate fi exprimată și altfel, sub o formă special utilă în cazul sistemelor neomogene: un sistem de ecuații liniare este compatibil atunci și numai atunci cînd coloana termenilor liberi este ortogonală cu toate soluțiile sistemului omogen transpus $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = 0$. Această condiție își găsește utilizare în cazurile cînd sistemul omogen asociat admite soluții nebanale.

Cazul particular rang $(\mathbf{A})$ = rang $(\bar{\mathbf{A}}) = n$ este caracterizat prin existența unei singure soluții. Dacă $m > n$, se transcrie sistemul astfel încît determinantul nenul D de ordinul n format din matricea $\mathbf{A}$ să cuprindă primele n ecuații. Soluția este dată de *regula lui Cramer* $\xi_i = D_i/D$, $i = 1, 2, \ldots, n$ unde D_i este determinantul obținut din D, prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi, sau $D_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j$, A_{ji} fiind complementul algebric al elementului a_{ji} din D.

6. GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

6.1. Curbe

6.1.1. **Generalități.** Fie o curbă C, dată prin ecuația vectorială parametrică $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al unui punct curent pe curbă, sau prin ecuațiile carteziene parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, t_1 și t_2 putînd fi egali cu $-\infty$, respectiv $+\infty$. Un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se numește *multiplu*, dacă există cel puțin două valori diferite t' și t'', așa ca $x_0(t') = x_0(t'')$, $y_0(t') = y_0(t'')$ și $z_0(t') = z_0(t'')$. În caz contrar, punctul P_0 este *simplu*. O curbă care are numai puncte simple se numește *curbă simplă*. Se consideră în continuare, că funcțiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ posedă derivate continue și $\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t \neq 0$. În acest caz, C este o *curbă regulată* sau *curbă netedă*. În unele cazuri se va admite și existența derivatelor de ordin superior.

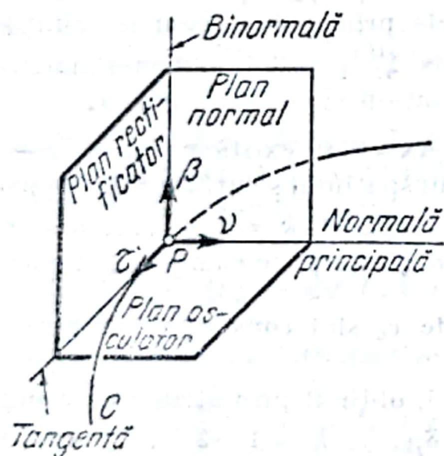


Fig. I.12

Derivatele în raport cu t se notează cu un punct, două puncte etc.: $dx/dt = \dot{x}$, $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ etc. Adesea se obișnuiește să se considere ca parametru lungimea arcului $s = \int_C \mathrm{d}s = \int_C \sqrt{\mathrm{d}\bar{r}\cdot\mathrm{d}\bar{r}} = \int_C \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$. În acest caz, este necesar să se admită un sens pozitiv de parcurgere a curbei, pentru care se ia $\mathrm{d}s$ pozitiv. Derivatele în raport cu s se vor nota cu apostrof: $x' = x'_s = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)/(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t) = \dot{x}/\dot{s}$.

6.1.2. **Triedrul mobil.** Triedrul mobil sau *triedrul lui Frenet* are originea într-un punct curent $P(\bar{r}) = P(x, y, z)$ al curbei, fiind format din *tangenta, normala principală* și *binormala* la curbă în punctul P(fig. I.12), după care se dispun versorii $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$. Planele de coordonate se numesc: *plan osculator, plan normal* și *plan rectificator*. Cercul tangent la curbă (situat în planul osculator) se numește *cerc osculator* sau *cerc de curbură*

al curbei în punctul P. Sensul versorului $\bar{\tau}$ coincide cu sensul de parcurgere al curbei, versorul $\bar{\nu}$ este dirijat spre concavitatea curbei, adică spre centrul cercului de curbură numit *centru de curbură*, iar versorul $\bar{\beta}$ se stabilește astfel încît triedrul $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ să fie un triedru drept: $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$.

Versorii $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ se pot exprima prin derivatele în raport cu s ale funcției $\bar{r} = \bar{r}(s)$: $\bar{\tau} = \bar{r}'$, $\bar{\nu} = \bar{r}''/|\bar{r}''| = \bar{r}''/k$, $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$, unde $k = |\bar{r}''|$ se numește *curbura* curbei în punctul P, $\rho_k = 1/k$ fiind *raza de curbură* egală cu raza cercului osculator în P. Vectorul $k\bar{\nu} = \bar{r}''$ se numește *vectorul curburii*.

6.1.3. **Formulele lui Frenet-Serret.** Formulele lui Frenet-Serret sînt: $\bar{\tau}' = k\bar{\nu}$, $\bar{\nu}' = -k\bar{\tau} + \theta\bar{\beta}$, $\bar{\beta}' = -\theta\bar{\nu}$, unde θ se numește *torsiunea* curbei în punctul P, $\rho_\theta = 1/\theta$ fiind *raza de torsiune* în P. Torsiunea se exprimă în funcție de $\bar{r}(s)$: $\theta = 1/\rho_\theta = [\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''']/k^2 = [\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''']/(\bar{r}'')^2$ și rezultă pozitivă dacă forma curbei parcurse în sens pozitiv în vecinătatea punctului P, se apropie de un șurub drept.

La creșterea arcului s, punctul P se mișcă pe curba C și dacă se atribuie parametrului s semnificația de „timp" (se poate presupune și că punctul P are o mișcare uniformă pe curbă), cîmpul vectorial al vitezelor triedrului mobil (v. pct. 16.2.1) este caracterizat, pe lingă viteza punctului P, de vectorul vitezei unghiulare $\bar{\Omega} = \theta\bar{\tau} + k\bar{\beta}$, numit *vectorul lui Darboux*. $|\bar{\Omega}| = \sqrt{\theta^2 + k^2}$ se numește *curbura totală* în P.

Funcțiile scalare $k = k(s)$, $\theta = \theta(s)$, denumite *ecuațiile naturale* ale curbei, determină curba C cu aproximația poziției sale în spațiu. Un arc al curbei C este situat în același plan, sau este un segment rectiliniu, în cazul și numai în cazul cînd pentru toate punctele acestui arc, $\theta = 0$ și respectiv $k = 0$.

6.2. Suprafețe

6.2.1. **Generalități.** Se consideră o suprafață S, determinată prin ecuația vectorială parametrică $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al punctului curent P, sau prin ecuațiile carteziene parametrice $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, sau prin ecuația $\varphi(x, y, z) = 0$, pentru un domeniu anumit de variație a parametrilor u și v, denumiți *coordonate curbilinii pe suprafață*. Pentru $u = \text{const}$ sau pentru $v = \text{const}$, se obține cîte o curbă de suprafața S. Pe o suprafață, există două familii de *linii* (sau *curbe*) *coordonate* $u = c_1$, $v = c_2$, unde c_1 și c_2 sînt parametri.

Se presupune că funcțiile $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ posedă derivate parțiale de ordinul întîi continue și că rangul matricei $\begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{bmatrix}$ este egal cu 2, adică cei trei minori de ordinul 2, denumiți *determinanți funcționali* și notați simbolic cu $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ nu se anulează simultan, sau altfel exprimat, $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u,v)}\bar{i} + \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\bar{j} + \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bar{k} = 0$, unde: $\bar{r}'_u = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\bar{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\bar{k}$ și $\bar{r}'_v = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\bar{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\bar{k}$. Un punct al suprafeței pentru care $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq 0$ se numește *punct regulat*. O suprafață care are numai puncte regulate se numește *suprafață regulată* sau *suprafață netedă*. În unele cazuri se va admite existența derivatelor de ordin superior.

Condiţia $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq 0$ asigură existenţa şi independenţa liniară a vectorilor $\bar{r}'_u$ şi $\bar{r}'_v$, dirijaţi după cele două tangente la liniile de coordonate care trec prin punctul $P(u, v)$.

6.2.2. **Plan tangent şi normală la suprafaţă.** În orice punct regulat $P(\bar{r}) = P(x, y, z) = P(u, v)$, există un *plan tangent* avînd ecuaţia $[\bar{\xi} - \bar{r}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v] = 0$, unde $\bar{\xi}$ este vectorul de poziţie al punctului curent de pe acest plan.

Ecuaţia parametrică a *normalei* în punctul regulat P este $\bar{\xi} - \bar{r} = \lambda\bar{n}$, unde $\bar{n} = \dfrac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}$ este versorul normalei, $\bar{\xi}$ — vectorul de poziţie al punctului curent de pe normală şi λ — parametrul ecuaţiei.

6.2.3. **Formele fundamentale ale unei suprafeţe.** Diferenţiala vectorului de poziţie $\bar{r}$, luată de-a lungul unei curbe $\bar{r} = \bar{r}\,(u(t), v(t))$, sau $u = u(t)$, $v = v(t)$, situate pe suprafaţa S, are expresia $d\bar{r} = \bar{r}'_u du + \bar{r}'_v dv$. Pătratul diferenţialei $ds = |d\bar{r}|$, a arcului de curbă pe suprafaţa S în punctul $P(u, v)$, este o formă pătratică în du, dv şi se numeşte *prima formă fundamentală a suprafeţei*, avînd expresia $ds^2 = d\bar{r}^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)\,du dv + G(u, v)dv^2$, unde: $E(u, v) = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u$, $F(u,v) = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v$, $G(u,v) = \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v$. În orice punct al suprafeţei, prima formă fundamentală este pozitiv definită, adică: $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$.

Aria elementară dS, mărginită de liniile de coordonate u, $u + du$, v, $v + dv$, este $dS = \sqrt{EG - F^2}\, du dv$.

A doua formă fundamentală a suprafeţei are expresia $-d\bar{r} \cdot d\bar{n} = L(u, v)du^2 + 2M(u, v)\,du dv + N(u,v)\,dv^2$, unde $d\bar{n} = \bar{n}'_u du + \bar{n}'_v dv$, $L(u, v) = -\bar{r}'_u \cdot \bar{n}'_u = [\bar{r}''_{uu}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v]/\sqrt{EG - F^2}$, $M(u,v) = -\bar{r}'_u \cdot \bar{n}'_v = -\bar{r}'_v \cdot \bar{n}'_u = [\bar{r}''_{uv}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v]/\sqrt{EG - F^2}$, $N(u, v) = -\bar{r}'_v \cdot \bar{n}'_v = [\bar{r}''_{vv}, \bar{r}'_u, \bar{r}'_v]/\sqrt{EG - F^2}$.

6.2.4. **Curburi.** În orice punct $P(u, v)$ al unei curbe regulate $C : \bar{r} = \bar{r}(u(s), v(s))$ sau $u = u(s)$, $v = v(s)$, situate pe suprafaţa S, vectorul curburii $\bar{r}'' = k\bar{\nu}$ poate fi exprimat în mod unic ca suma vectorială a unui vector conţinut în planul tangent la S (*vectorul curburii geodezice* sau *tangenţiale*) şi a unui vector normal la S (*vectorul curburii normale*): $\bar{r}'' = k\bar{\nu} = k_g \bar{n} \times \bar{r}' + k_n \bar{n}$, unde $k_g = [k\bar{r}'\bar{\nu}\bar{n}] = [\bar{r}'\bar{r}''\bar{n}]$ se numeşte *curbura geodezică* a curbei C în punctul $P(u, v)$ şi este curbura proiecţiei curbei C pe planul tangent la S, iar $k_n = k\bar{\nu} \cdot \bar{n} = \bar{r}'' \cdot \bar{n} = -\bar{r}' \cdot \bar{n}'$ se numeşte *curbura normală* a curbei C în punctul $P(u, v)$ şi este curbura secţiunii normale, prin *secţiune normală* înţelegîndu-se intersecţia suprafeţei cu un plan determinat de normala la S în punctul P şi de tangenta la C în acelaşi punct P.

Teorema lui Meusnier: $k = |k_n/\cos\alpha|$, unde α este unghiul cuprins între planul osculator al curbei în P şi planul secţiunii normale în acelaşi punct P.

Punctul de pe suprafaţă, în care k_n are aceeaşi valoare pentru toate secţiunile normale $(L/E = M/F = N/G)$ se numeşte *punct ombilical*. În orice punct neombilical, există două secţiuni normale situate în două plane reciproc perpendiculare, numite *secţiuni normale principale*, cărora le corespund o valoare maximă k_1 şi o valoare minimă k_2 a curburii k_n; k_1 şi k_2 se numesc *curburi principale* ale suprafeţei S în punctul $P(u,v)$ şi sînt valorile proprii corespunzătoare problemei generale de valori proprii (v. pct. 5.9.9) ale matricei $\mathbf{A} - k\mathbf{B}$, unde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$, matricea $\mathbf{B}$ fiind pozitiv determinată.

Pentru orice secţiune normală prin punctul $P(u, v)$ al cărei plan formează unghiul β cu planul primei secţiuni normale principale: $k_n = k_1 \cos^2\beta + k_2 \sin^2\beta$ (teorema lui Euler).

Funcțiile simetrice $H(u, v) = 1/2\ (k_1 + k_2) = 1/2\ (EN - 2FM + GL)/(EG - F^2)$ și $K(u, v) = k_1k_2 = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ se numesc *curbură medie* și respectiv *curbură gaussiană* sau *totală* a suprafeței S în punctul $P(u, v)$. Valorile funcțiilor k_1, k_2, H și K nu depind de sistemul de coordonate curbilinii utilizat.

Un punct $P(u, v)$ al suprafeței S, se numește : 1) *punct eliptic* cînd $K > 0$ (secțiunile normale sînt fie toate convexe fie toate concave ; S nu intersectează planul tangent în P ; exemplu : orice punct al unui elipsoid) ; 2) *punct parabolic* cînd $K = 0$ (exemplu : orice punct al unui cilindru) ; 3) punct hiperbolic sau *punct de șa* cînd $K < 0$ (secțiunile normale sînt unele convexe și altele concave, iar S intersectează planul tangent în P ; exemplu : orice punct al hiperboloidului cu o pînză). Un punct ombilical ($k_1 = k_2$) este fie eliptic fie parabolic.

6.5.2. **Linii particulare pe suprafață.** *O linie de curbură* pe o suprafață se caracterizează prin proprietatea că tangenta în orice punct al liniei este conținută în planul unei secțiuni normale principale din punctul respectiv. Prin orice punct neombilical $P(u, v)$ trec două linii de curbură, avînd tangentele în P ortogonale.

Ecuația diferențială a acestora este $\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$

O *linie asimptotică* pe o suprafață este o linie care în fiecare punct al său are curbura normală nulă sau, ceea ce este echivalent, are planul osculator confundat cu planul tangent la suprafață. Ecuația diferențială a acestora este $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$. Exemplu : orice linie dreaptă trasată pe o suprafață. Direcțiile tangentelor în P la liniile asimptotice care trec prin punctul P al suprafeței se numesc *direcții asimptotice*.

Într-un punct eliptic, direcțiile asimptotice sînt imaginare. Într-un punct hiperbolic există două direcții asimptotice distincte ; tangentele la liniile de curbură sînt bisectoarele unghiurilor formate de cele două direcții asimptotice. Într-un punct parabolic există o singură direcție asimptotică care coincide cu tangenta la acea secțiune normală principală pentru care curbura este nulă.

O *linie geodezică* pe o suprafață are curbura geodezică nulă în toate punctele sale. Ea este fie o dreaptă, fie o curbă de-a lungul căreia normala principală coincide cu normala la suprafață. Linia geodezică care trece prin două puncte ale unei suprafețe este linia avînd cea mai mare sau cea mai mică lungime, care leagă aceste puncte.

Curbele coordonate $u =$ const, $v =$ const sînt : a) ortogonale, dacă $F = 0$; b) linii de curbură dacă $F = 0$, $M = 0$; c) linii asimptotice, dacă $L = 0$, $N = 0$. Condițiile menționate sînt necesare și suficiente și trebuie satisfăcute în toate punctele liniilor respective.

6.2.6. **Suprafața minimală.** Suprafața minimală se caracterizează prin relația $H(u, v) = 0$, adică $k_2 = -k_1$, satisfăcută în toate punctele acesteia. O suprafață este minimală atunci și numai atunci cînd liniile asimptotice formează o rețea ortogonală.

Fie o suprafață variabilă, sub forma unui domeniu simplu conex, mărginită de un contur închis invariabil. Pentru același contur, suprafața care are o arie minimă este o suprafață minimală.

7. SERII

7.1. Generalități

O sumă construită formal $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$, cu notația prescurtată $\sum_i u_i$, a unei mulțimi infinite de numere $u_1, u_2, \ldots$ sau de funcții $u_1(x),\ u_2(x), \ldots$ se

numește *serie*. Dacă *șirul sumelor parțiale* $s_1, s_2, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \ldots$ are o limită finită $S = \lim_{n\to\infty} s_n$ numită *suma seriei*, seria se numește *convergentă*. În caz contrar, seria este *divergentă*.

O serie (în mod necesar convergentă) $u_1 + u_2 + \ldots$ se numește *absolut convergentă*, dacă seria $|u_1| + |u_2| + \ldots$ este convergentă. O serie convergentă însă nu absolut convergentă se numește *condiționat convergentă*.

Restul unei serii convergente este suma seriei convergente $R_n = S - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ Restul R_n reprezintă eroarea efectuată prin înlocuirea sumei S cu suma parțială s_n. Pentru $n \to \infty$, R_n tinde către zero. Practic, este important ca R_n să tindă către zero suficient de „repede".

Se numește *domeniu de convergență* al unei serii de funcții, ansamblul valorilor lui x pentru care această serie este convergentă, $S(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ fiind suma seriei.

O serie de funcții este *uniform convergentă* într-un anumit interval $[a, b]$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr depinzînd numai de ε, $N = N(\varepsilon)$, astfel încît din $n \geqslant N$, rezultă $|R_n(x)| < \varepsilon$, pentru orice $x \in [a, b]$. Această proprietate de convergență uniformă este deosebit de însemnată atît din punct de vedere practic, cît și teoretic. Într-adevăr, dacă trebuie să se calculeze pentru o astfel de serie de funcții suma S cu o aproximație mai mică decît un ε dat, este suficient să se ia suma parțială s_n, unde $n \geqslant N$, după ce prin diferite procedee s-a apreciat numărul $N = N(\varepsilon)$.

O serie dublă $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}$ este covergentă dacă $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} u_{ik} = S$. În acest caz, $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} \right)$ dacă seriile $\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}$ și $\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}$ sînt convergente.

7.2. Operații cu serii convergente

7.2.1. Serii de numere. $\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i)$, $\alpha \sum_i a_i = \sum_i \alpha a_i$, α fiind un număr.

Orice permutare de termeni la o serie absolut convergentă nu modifică nici convergența nici suma sa. La o serie condiționat convergentă, se poate obține prin permutări ale termenilor, ca șirul sumelor sale parțiale: 1) să tindă către orice număr dat înainte, 2) să crească nemărginit, 3) să descrească nemărginit și 4) să tindă oscilant către limite situate într-un interval dat înainte (teorema lui Riemann).

Dacă $\sum_i a_i$ și $\sum_k b_k$ sînt absolut convergente, produsul acestora este seria dublă absolut convergentă $\sum_i \sum_k a_i b_k$ avînd suma egală cu $\left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_k b_k \right)$. Această serie dublă se poate calcula folosind regula lui Cauchy: $\sum_i \sum_k a_i b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

7.2.2. **Serii de funcții.** Fie $\sum_i u_i(x)$ o serie de funcții, absolut convergentă pe intervalul $[a, b]$ și un punct $c \in [a, b]$. Atunci: 1) suma seriei $\sum_i u_i(x)$ este o funcție continuă în punctul $x = c$, dacă fiecare termen $u_i(x)$ este o funcție continuă în acest punct; 2) dacă termenii $u_i(x)$ sînt funcții continue pe intervalul $[a, b]$, seria $\sum_i \int_a^x u_i(x)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe acest interval și

$$\sum_i \int_a^x u_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x \left[\sum_i u_i(x)\right] \mathrm{d}x.$$

Dacă seria $\sum_i u_i(x)$ este convergentă pe intervalul $[a, b]$, iar derivatele termenilor săi există și sînt continue pe același interval, atunci $\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_i(x) = \frac{d}{\mathrm{d}x} \sum_i a_i(x)$, cu condiția ca seria $\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_i(x)$ să fie uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$.

7.3. Criterii de convergență a seriilor

7.3.1. **Serii cu termeni pozitivi.** Fie seria $\sum_i u_i$ cu *termeni pozitivi*. Se presupune în cele ce urmează că există un număr N și că $n \triangleright N$.

1) Seria $\sum_i u_i$ este convergentă dacă $u_n \leqslant a_n$ sau $u_{n+1}/u_n \leqslant a_{n+1}/a_n$, unde seria $\sum_i a_i$ are termenii pozitivi și este convergentă (criteriul comparației). Seria $\sum_i u_i$ este divergentă dacă $u_n \geqslant b_n$ sau $u_{n+1}/u_n \geqslant b_{n+1}/b_n$, unde $\sum_i b_i$ este divergentă și are termenii pozitivi.

2) Seria $\sum_i u_i$ este convergentă, dacă cel puțin una din expresiile următoare posedă o limită superioară $A < 1$: a) u_{n+1}/u_n (d'Alembert), b) $\sqrt[n]{u_n}$ (Cauchy), c) $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) + 2$, d) $\left[n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) + 1\right] \ln n + 2$.

Seria $\sum_i u_i$ este divergentă dacă cel puțin una din expresiile anterioare a—d posedă o limită inferioară $B \triangleright 1$.

3) Se consideră o funcție continuă și descrescătoare $f(x)$, astfel încît $u_n \leqslant f(n)$. Seria $\sum_i u_i$ este convergentă dacă integrala improprie $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă (criteriul

integral). Seria $\sum_i u_i$ este divergentă dacă funcția continuă și descrescătoare $\varphi(x)$ satisface inegalității $u_n \geqslant \varphi(n)$, iar integrala improprie $\int_{N+1}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ este divergentă.

7.3.2. **Serii alternate.** Seria $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, unde $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sînt numere pozitive, este convergentă dacă $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ și dacă există un număr N astfel încît pentru toți $n > N$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$ (Leibnitz). Restul R_n satisface inegalității $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

7.3.3. **Serii de funcții.** a) Seria de funcții $\sum_i u_i(x)$ este convergentă absolut și uniform pe intervalul $[a, b]$, dacă pe acest interval funcțiile $u_i(x)$ sînt determinate și dacă pentru orice i, $|u_i(x)| \leqslant a_i$, unde $\sum_i a_i$ este o serie convergentă cu termeni pozitivi (Weierstrass).

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ un șir necrescător de numere pozitive. Seria de funcții $\sum_i \alpha_i u_i(x)$ este uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$: 1) dacă seria $\sum_i u_i(x)$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ (Abel); 2) dacă $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și există un număr A, astfel încît $\left|\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\right| \leqslant A$ pentru orice n și pentru toți $x \in [a, b]$ (Dirichlet).

8. DEZVOLTAREA ÎN SERIE A FUNCȚIILOR ȘI REPREZENTAREA ACESTORA PRINTR-O INTEGRALĂ

8.1 Introducere

Dezvoltarea în serie a funcțiilor, sau reprezentarea acestora printr-o integrală, este utilizată în principal pentru: a) aproximarea funcțiilor prin sumele parțiale ale seriilor respective, obținînd astfel simplificări însemnate de calcul în unele cazuri; b) înlocuirea operațiilor asupra funcțiilor prin operații, uneori mai simple, asupra termenilor seriei; c) studierea proprietăților unor funcții speciale care nu pot fi redate prin expresii finite de funcții elementare, dar ale căror dezvoltări în serie se pot stabili fără dificultate; d) reprezentarea de funcții discontinue prin funcții continue (serii și integrale Fourier), făcînd astfel posibilă utilizarea acestora în operațiile obișnuite ale analizei matematice.

8.2. Serii de puteri

O serie de puteri în raport cu variabila x este o serie de forma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ sau $\sum_{i=1}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$. În cele ce urmează se va face referință numai la prima formă, forma a doua obținîndu-se din prima printr-o translație de-a lungul axei x. Seria $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ se va nota prescurtat $\sum_i a_i x^i$.

Pentru orice serie de puteri există un număr real $r_c (0 \leqslant r_c \leqslant +\infty)$, numit *rază de convergență*, astfel încît seria să fie absolut convergentă pentru $|x| < r_c$ și divergentă pentru $|x| > r_c$. Domeniul de convergență este intervalul deschis (care nu conține extremitățile sale) $(-r_c, +r_c)$, numit *interval de convergență*, pe care seria de puteri este uniform convergentă. Pentru cele două extremități $x = -r_c$ și $x = +r_c$, seria poate fi convergentă sau divergentă. Dacă $r_c = 0$, seria este convergentă numai pentru $x = 0$.

Din convergența unei serii de puteri pentru $x = x_1$, rezultă convergența uniformă a acesteia pentru $|x| < |x_1|$, iar din divergența seriei pentru $x = x_1$ rezultă divergența pentru $|x| > |x_1|$.

Asupra unei serii de puteri se pot efectua toate operațiile arătate în capitolul precedent cu privire la seriile uniform convergente. Suplimentar se menționează următoarele: Prin derivare sau prin integrare de la 0 la x, o serie de puteri păstrează același interval de convergență. Convergența seriei derivate este mai slabă, iar convergența seriei integrate este mai bună în comparație cu convergența seriei inițiale. Proprietatea de divergență a seriei de puteri la $x = r_c$ sau (și) la $x = -r_c$ se menține și la seria derivată. Proprietatea de convergență a seriei inițiale în aceleași puncte se menține și la seria integrată.

Progresia geometrică infinită $a + ax + ax^2 + \ldots = a\sum_{i=0}^{\infty} x^i = a\dfrac{1}{1-x}$ este o serie de puteri convergentă absolut și uniform pe intervalul de convergență $(-1, +1)$ și divergentă pentru $x = -1$ și $x = +1$.

8.3. Seria Taylor

Fie $f(x)$ o funcție de n ori derivabilă în intervalul $a \leqslant x < b$, Atunci:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+ R_n(x), \quad (a \leqslant x < b) \qquad \textit{(formula lui Taylor)}$$

unde *restul* $R_n = \dfrac{f(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$, $0 < \theta < 1$ (forma lui Lagrange a restului); θ depinde de a, x și n.

Dacă funcția (x) este nemărginit derivabilă în intervalul $(a - r, a + r)$ și dacă în același interval $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, atunci formula lui Taylor se transformă în *seria Taylor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad |x-a| < r,$$

care permite dezvoltarea unei funcții date $f(x)$ în serie de puteri, în vecinătatea punctului a. Seria Taylor este uniform convergentă pe intervalul $(a - r, a + r)$.

Dacă în formula precedentă se scrie x în loc de a și Δx în loc de $x - a$, se obține dezvoltarea în serie de puteri a lui $f(x)$ în vecinătatea punctului x: $f(x + \Delta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}\Delta x^k$.

Pentru $a=0$, prima formă a seriei Taylor devine *seria MacLaurin* $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, care dă dezvoltarea lui $f(x)$ în vecinătatea punctului zero.

Dacă o funcţie $f(x)$ se dezvoltă în serie de puteri convergentă într-un interval $|x-a|<r\neq 0$, după puterile lui $(x-a)$, această dezvoltare este unică şi coincide cu seria Taylor a acestei funcţii.

O funcţie $f(x)$ care poate fi dezvoltată în serie de puteri, convergentă într-o vecinătate a punctului a, se numeşte *funcţie analitică* în punctul a.

Formula lui Taylor pentru mai multe variabile a funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de m ori derivabile parţial într-o vecinătate oarecare D a punctului $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este

$$f(x_1, x_2,\ldots,x_n) = f(a_1, a_2,\ldots,a_n) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_a (x-a_i) +$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a\cdot(x_i-a_i)(x_j-a_j)+\ldots+R_m(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in D.$$

Prin notaţia $(\;)_a$ se înţelege că derivatele respective se calculează în punctul $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Restul R_m are o expresie analoagă cu cazul unei singure variabile.

Dacă funcţia f posedă în D toate derivatele parţiale de orice ordin continue şi $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$ în D, atunci formula lui Taylor se transformă în *seria multiplă Taylor*.

8.4. Serii Fourier

8.4.1. Definiţie şi proprietăţi. Prin *serie Fourier* se înţelege seria $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$. Dacă această serie este convergentă pe intervalul închis (care conţine şi extremităţile sale) $[-\pi, \pi]$, atunci este convergentă pe toată axa reală; în acest caz, suma seriei este o funcţie periodică $f(x)$ cu perioada 2π, adică $f(x+2\pi)=f(x)$, iar seria respectivă se numeşte *serie Fourier a funcţiei* $f(x)$.

Dacă seria Fourier este uniform convergentă pe intervalul $[-\pi, \pi]$, atunci $f(x)$ este continuă pe acest interval.

Dacă şirurile $a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots$ sînt mărginite şi dacă $f(x)$ este integrabilă pe intervalul menţionat, *coeficienţii Fourier* a_k şi b_k se determină prin *formulele lui Euler-Fourier*:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k=0, 1, 2, \ldots$$

Deseori seria Fourier se defineşte pe intervalul $-l, l$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),\ \text{cu coeficienţii}\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad k=0, 1, 2,\ldots.$$

8.4.2. **Dezvoltarea unei funcţii în serie Fourier.** Pentru ca să admită o dezvoltare în serie Fourier, nu este necesar ca funcţia $f(x)$ să fie periodică, dacă funcţia dată se ia în consideraţie numai pe un interval $[a, b]$. Într-adevăr, printr-o schimbare de variabilă $x = \frac{b-a}{\pi} x^* + \frac{a+b}{2}$, intervalul $[a, b]$ al funcţiei date se poate transforma într-un interval $[-\pi, \pi]$ al funcţiei $f\left(\frac{b-a}{\pi} x^* + \frac{a+b}{2}\right) = \varphi(x^*)$ şi apoi $\varphi(x^*)$ se poate prelungi periodic cu perioada 2π, pe toată axa reală.

Prin urmare, consideraţiile următoare se pot mărgini la funcţii definite pe intervalul $[-\pi, \pi]$. Dezvoltarea în serie Fourier a unei astfel de funcţii pretinde satisfacerea *condiţiilor lui Dirichlet* care impun ca $f(x)$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$ să fie sau continuă sau să aibă un număr finit de discontinuităţi pe prima speţă şi în plus, ca $f(x)$ să aibă un număr finit de maxime sau de minime pe acest interval.

Un punct $x = c$ se numeşte *punct de discontinuitate de prima speţă* al funcţiei $f(x)$, dacă există o limită finită a lui $f(x)$, notată cu $f(c+0)$, cînd x tinde către c prin valori mai mari ca c şi o limită finită a lui $f(x)$, notată cu $f(c-0)$, cînd x tinde către c, prin valori mai mici ca c.

Teorema lui Dirichlet afirmă că dacă o funcţie $f(x)$ satisface pe intervalul $[-\pi, \pi]$ condiţiilor lui Dirichlet, atunci seria Fourier a acestei funcţii este convergentă pe intervalul $[-\pi, \pi]$, iar suma seriei: 1) este egală cu $f(x)$ în orice punct de continuitate a lui $f(x)$ în interiorul intervalului; 2) este egală cu $\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]$ în punctele de discontinuitate; 3) este egală cu $\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right]$ la extremităţile intervalului adică pentru $x = -\pi$ şi $x = +\pi$.

Condiţiile lui Dirichlet fiind îndeplinite, pe orice interval cuprins în interiorul intervalului $[-\pi, \pi]$, în care $f(x)$ este continuă, seria Fourier a lui $f(x)$ este uniform convergentă.

8.4.3. **Proprietăţi ale coeficienţilor lui Fourier.** Coeficienţii lui Fourier tind către zero pentru $k \to \infty$.

Dacă $f(x)$ posedă derivate continue pînă la ordinul $(m-1)$ inclusiv, pe tot intervalul închis de dezvoltare, fiecare dintre aceste derivate luînd valori egale la capetele intervalului şi dacă derivata de ordinul m este continuă sau are un număr finit de discontinuităţi de prima speţă pe acest interval, atunci coeficienţii lui Fourier descresc mai repede pentru $k \to \infty$ decît funcţia k^{-m}, adică $|a_k| < C/k^m$ şi $|b_k| < C/k^m$, C fiind o constantă.

8.4.4. **Dezvoltarea funcţiilor pare şi a funcţiilor impare, dezvoltarea în intervalul** $[0, \pi]$. O funcţie $f(x)$ este *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ şi în acest caz toţi coeficienţii b_k sînt nuli, iar $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx \, dx$. O funcţie $f(x)$ este *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ şi în acest caz toţi coeficienţii Fourier a_k sînt nuli, iar $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx \, dx$.

Dacă o funcţie $f(x)$ este definită în intervalul $[0, \pi]$, ea poate fi dezvoltată în acest interval, fie ca funcţie pară, fie ca funcţie impară. Ambele serii vor avea în interiorul intervalului, ca sumă, funcţia $f(x)$ în punctele de continuitate şi media aritmetică a valorilor din punctele de discontinuitate. În exteriorul intervalului însă, ele vor reprezenta funcţii complet diferite. Seria după cosinusuri dă în intervalul $[-\pi, 0]$ o prelungire pară

a lui $f(x)$ și apoi o prelungire cu perioada 2π în afara intervalului $[-\pi, \pi]$; la capetele intervalului, pentru $x = 0$, suma seriei este egală cu $f(+0)$, iar pentru $x = \pi$, cu $f(\pi - 0)$. Seria după sinusuri dă în intervalul $[-\pi, 0]$ o prelungire impară a lui $f(x)$ și apoi o prelungire cu perioada 2π în afara intervalului $[-\pi, \pi]$; la capetele intervalului, suma seriei este egală cu zero pentru $x = 0$ și $x = \pi$.

8.4.5. **Eroarea pătratică medie.** Dacă o funcție dată $f(x)$ este aproximată pe intervalul $[a, b]$ printr-o funcție $\varphi(x)$ și dacă există integrala $\int_a^b [f(x)]^2 \, dx$, se numește *eroare pătratică medie* numărul δ dat de relația $\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2 dx$.

Fie funcția de aproximare $\varphi(x)$ un *polinom trigonometric* de ordinul n, $P_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$. Atunci eroarea pătratică medie datorită aproximării funcției $f(x)$ prin $P_n(x)$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$, este minimă pentru orice n, dacă coeficienții α_k, β_k se înlocuiesc prin coeficienții lui Fourier a_k, b_k din dezvoltarea lui $f(x)$ în serie Fourier. Eroarea pătratică medie descrește o dată cu creșterea ordinului n al polinomului $P_n(x)$.

8.4.6. **Serii duble Fourier.** Fie o funcție $f(x, y)$ definită în pătratul $(Q) = [-\pi, \pi, -\pi, \pi]$. Seria dublă Fourier corespunzătoare este

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{n,m}(a_{n,m} \cos nx \cos my + b_{n,m} \cos nx \sin my +$$

$$+ c_{n,m} \sin nx \cos my + d_{n,m} \sin nx \sin my), \text{ unde :}$$

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi^2}\iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx \cdot \cos my \, dx \, dy, \quad b_{n,m} = \frac{1}{\pi^2}\iint_{(Q)} f(x, y) \cos nx \sin my \, dx \, dy,$$

$$c_{n,m} = \frac{1}{\pi^2}\iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx \cos my \, dx \, dy, \quad d_{n,m} = \frac{1}{\pi^2}\iint_{(Q)} f(x, y) \sin nx \sin my \, dx \, dy, \text{ iar}$$

$$\lambda_{n,m} = \begin{cases} 1/4, \text{ pentru } n = m = 0 \\ 1/2, \text{ pentru } \begin{cases} n = 0, & m \neq 0, \text{ sau} \\ n \neq 0, & m = 0 \end{cases} \\ 1 \quad, \text{ pentru } n \neq 0, \quad m \neq 0. \end{cases}$$

Dacă această serie este convergentă, suma ei $f(x, y)$ este o funcție periodică cu perioada 2π atît pentru x cît și pentru y. O funcție $f(x, y)$ se poate dezvolta în serie dublă Fourier în punctul $(x, y) \in (Q)$, dacă în domeniul (Q): 1) f'_x și f'_y există și sînt mărginite în orice punct; 2) f''_{xy} (sau f''_{yx}) există într-o vecinătate a punctului (x, y) și sînt continue în acest punct.

8.5. Integrala Fourier

Dacă o funcție $f(x)$ satisface condițiilor lui Dirichlet pe orice interval finit al axei reale și există integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$, atunci $f(x)$ poate fi reprezentată prin *integrala Fourier* a acestei funcții: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt = f(x)$, în punctele de discontinuitate luîndu-se pentru $f(x)$, la fel ca în cazul seriei Fourier, valoarea medie: $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$.

Integrala Fourier se mai poate pune sub forma

$$\int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha = f(x), \quad \text{unde}$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$$

și

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Integrala Fourier poate fi considerată drept o reprezentare a funcției $f(x)$ ca sumă de componente sinusoidale infinit mici, cu frecvențele circulare α variind continuu.

Dacă $f(x)$ este *funcție pară*, $f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$ și $A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$.

Dacă $f(x)$ este o *funcție impară*, $f(x) = \int_0^{\infty} B(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha$ și $B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha\,dt$.

O funcție $f(x)$, definită numai în intervalul $(0, \infty)$, poate fi reprezentată fie ca funcție pară, fie ca funcție impară. În primul caz, integrala Fourier nu are discontinuitate pentru $x = 0$, iar în cazul al doilea, dacă $f(0) \neq 0$, se obține o discontinuitate în acest punct, deoarece pentru $x = 0$, integrala Fourier respectivă este egală cu zero.

În tabelele I.7 — I.10 se dau coeficienții dezvoltărilor în serie Fourier, precum și expresiile integralelor Fourier pentru unele încărcări uzuale.

Tabelul 1.7

Dezvoltarea în serie Fourier a încărcărilor simetrice față de origine (Serie în cosinus)

Nr.	Schema încărcării	Funcția încărcării $p(x)$ dezvoltată în serie Fourier	n
		$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$	
1		$\frac{pc}{l} + \frac{2p}{l} \sum \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n (x - e)$	1,2,3,4
2		$\frac{2pc}{l} + \frac{4p}{l} \sum \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n e \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
3		$\frac{pc}{l} + \frac{2p}{l} \sum \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
4		$\frac{pc}{l} + \frac{2p}{l} \sum \frac{1}{\alpha_n} (-1)^n \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
5		$\frac{4p}{l} \sum \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n x$	1,3,5,7
6		$-\frac{2p}{c} \sum \frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
7		$\frac{2p}{c} \sum \frac{1}{\alpha_n} (-1)^{n+1} \sin \alpha_n c \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
8		$\frac{4p}{l} \sum \frac{1}{\alpha_n} (-1)^{n+1} \cos \alpha_n x$	1,3,5,7
9		$\frac{P}{2l} + \frac{P}{l} \sum \cos \alpha_n (x - e)$	1,2,3,4
10		$\frac{P}{l} + \frac{2P}{l} \sum \cos \alpha_n e \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4

Tabelul 1.7 (continuare)

Nr.	Schema încărcării	Funcția încărcării $p(x)$ dezvoltată în serie Fourier	n
11		$\frac{P}{2l} + \frac{P}{l}\sum \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
12		$\frac{P}{2l} + \frac{P}{l}\sum (-1)^n \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
13		$-2p\sum \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
14		$-2p\sum (-1)^n \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
15		$\frac{p}{2} + \frac{4p}{l^2}\sum \frac{1}{\alpha_n^2} \cos \alpha_n x$	1,3,5,7
16		$\frac{p}{2} - \frac{4p}{l^2}\sum \frac{1}{\alpha_n^2} \cos \alpha_n x$	1,3,5,7
17		$\frac{2}{3}p + \frac{4p}{l^2}\sum \frac{1}{\alpha_n^2}(-1)^{n+1} \cdot \cos \alpha_n x$	1,2,3,4
18		$-\frac{32\,p}{l^3}\sum \frac{1}{\alpha_n^3}(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos \alpha_n x$	1,3,5,7

Tabelul I.8

Dezvoltarea în serie Fourier a încărcărilor antisimetrice faţă de origine (Serii în sinus)

Nr.	Schema încărcării	Funcţia încărcării $p(x)$ dezvoltată în serie Fourier	n
		$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$	
1		$\frac{4p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n c\cdot\sin\alpha_n e\cdot\sin\alpha_n x$	1,2,3,4
2		$\frac{8p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n c\cdot\sin\alpha_n e\cdot\sin\alpha_n x$	1,3,5,7
3		$\frac{p}{2}+\frac{2p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x$	1,3,5,7
4		$\frac{p}{2}-\frac{2p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x$	1,3,5,7
5		$\frac{4p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x$	1,3,5,7
6	$p_1 = p\frac{l-2c}{2c}$	$\frac{2p}{c}\sum\frac{1}{\alpha_n}\left(\cos\alpha_n c+\frac{2c}{l}-1\right)\sin\alpha_n x$	1,3,5,7
7		$\frac{2P}{l}\sum\sin\alpha_n e\cdot\sin\alpha_n x$	1,2,3,4
8		$\frac{2p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n x$	1,2,3,4
9		$\frac{2p}{l}\sum\frac{1}{\alpha_n}(-1)^{n+1}\sin\alpha_n x$	1,2,3,4
10		$\frac{4p}{\pi}\sum\left(\frac{1}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\alpha_n x$	1,2,3,4

Tabelul 1.9

Dezvoltarea în integrale Fourier a încărcărilor simetrice

Nr.	Schema încărcării	Expresia integralei Fourier a încărcării $p(x)$
1		$\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin \alpha c\cdot\cos \alpha(x-e)\cdot d\alpha$
2		$\frac{4p}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin \alpha c\cdot\cos \alpha e\cdot\cos \alpha x\cdot d\alpha$
3		$\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\cdot\sin \alpha c\cdot\cos \alpha x\cdot d\alpha$
4		$\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha(x-e)\cdot d\alpha$
5		$\frac{2P}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha c\cdot\cos \alpha x\cdot d\alpha$
6		$\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha x\cdot d\alpha$
7		$\frac{2p}{\pi c}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2}(1-\cos \alpha c)\cos \alpha x\cdot d\alpha$
8		$\frac{2p}{\pi c}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2}(\cos \alpha c+\alpha c\cdot\sin \alpha c-1)\cos \alpha x\cdot d\alpha$
9	Parabolă	$\frac{4p}{\pi c^2}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^3}(\sin \alpha c-\alpha c\cdot\cos \alpha c)\cos \alpha x\cdot d\alpha$
10	Cosinusoidă	$4pc\int_0^\infty \frac{\cos \alpha c\cdot\cos \alpha x}{\pi^2-(2\alpha c)^2}\, d\alpha$

Tabelul I.10

Dezvoltarea în integrale Fourier a încărcărilor antisimetrice

Nr.	Schema încărcării	Expresia integralei Fourier a încărcării $p(x)$
1		$\frac{4p}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\sin\alpha c\cdot\sin\alpha e\cdot\sin\alpha x\cdot d\alpha$
2		$\frac{p}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}[\sin\alpha(c-x)+\sin\alpha x]\,d\alpha$
3		$\frac{2p}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}(1-\cos\alpha c)\cdot\sin\alpha x\cdot d\alpha$
4		$\frac{2P}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha e\cdot\sin\alpha x\cdot d\alpha$
5		$\frac{p}{\pi c}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2}[\cos\alpha(c-x)+\alpha c\sin\alpha(c-x)-\cos\alpha x]\,d\alpha$
6		$\frac{2p}{\pi c}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2}(\sin\alpha c-\alpha c\cdot\cos\alpha c)\sin\alpha x\cdot d\alpha$
7		$\frac{2p}{\pi c}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2}[\sin\alpha c\cdot\sin\alpha x+\alpha c\cdot\sin\alpha(c-x)]\,d\alpha$

9. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE

9.1. Ecuații diferențiale ordinare

9.1.1. Generalități. O ecuație de forma $F(x; y, y', \ldots, y^{(r)}) = 0$, stabilind o legătură între variabila independentă x, funcția necunoscută $y = y(x)$ și derivatele sale, se numește *ecuație diferențială ordinară de ordinul r*. Dacă ecuația este explicitată în raport cu derivata de ordinul cel mai înalt, se spune că este dată sub *forma normală*.

Orice funcție $y(x)$ care verifică ecuația diferențială într-un interval I finit sau infinit al axei Ox, se numește *soluție* sau *integrală* a ecuației. *A rezolva* sau *a integra* o ecuație diferențială, înseamnă a găsi funcțiile care o verifică. Dacă soluția unei ecuații diferențiale se poate exprima folosind un număr finit de integrale de funcții elementare, se spune că această ecuație poate fi integrată (rezolvată) prin *cuadraturi*.

Soluția sau *integrala generală* a ecuației diferențiale de ordinul n are forma $y = y(x; C_1, C_2, \ldots, C_n)$, unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare denumite *constante de integrare*. Valori particulare atribuite acestor constante dau o *soluție* sau o *integrală particulară*. Unele ecuații diferențiale posedă și *integrale singulare* care nu sînt cuprinse în integrala generală.

Problema Cauchy constă în găsirea unei soluții particulare satisfăcînd n *condiții inițiale* $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, cu ajutorul cărora se găsesc cele n constante de integrare $C_1, C_2, \ldots, C_n$. În *problema la limite*, se impune funcției $y(x)$ și derivatelor sale să satisfacă unor n *condiții la limite*, sau *condiții pe frontieră*, în punctele marginale $x = a$ și $x = b$ ale domeniului $I \equiv [a, b]$.

Un *sistem de ecuații diferențiale* $F_i(x; y_1, y_2, \ldots; y_1', y_2', \ldots) = 0, i = 1, 2, \ldots$, stabilește relații între variabila independentă x, funcțiile necunoscute $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots$ și derivatele acestora. *Ordinul* r_i al uneia din ecuații este ordinul maxim al derivatelor conținute în aceasta. În general, pentru găsirea a n funcții necunoscute este necesar ca sistemul să conțină n ecuații, iar soluția generală va depinde de $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ constante arbitrare.

Deseori integrarea unui sistem de n ecuații diferențiale poate conduce la integrarea unei singure ecuații diferențiale, dacă se elimină din ecuațiile sistemului dat, $n-1$ variabile y_i, împreună cu derivatele acestora.

Orice sistem de ecuații diferențiale, sau o singură ecuație de ordin $n \geqslant 2$, pot fi transformate într-un sistem echivalent de ecuații de ordinul întîi, prin înlocuirea derivatelor de ordin mai mare ca 1 prin funcții necunoscute auxiliare.

O ecuație diferențială se numește *liniară*, dacă este liniară în raport cu funcțiile necunoscute și cu derivatele acestora.

9.1.2. Ecuații diferențiale de ordinul *n*. Rezolvarea unei ecuații diferențiale prezintă următoarele caracteristici generale.

9.1.2.1. Proprietăți generale ale soluțiilor. Ecuația diferențială (ordinară) liniară de ordinul n are forma generală!

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \tag{1.9}$$

unde *coeficienții* $a_i(x), i = 1,2, \ldots n$, și *termenul liber* $f(x)$ sînt funcții continue într-un interval I, iar $a_0(x) \not\equiv 0$. Ecuația (1.9) posedă o soluție și numai una singură $y(x)$, de n ori derivabilă continuu în intervalul I, satisfăcînd unor condiții inițiale date pentru $x = a \in I$.

Dacă $f(x) \equiv 0$, ecuația se numește *omogenă*, în caz contrar, se numește *neomogenă*. Ecuația

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0 \tag{I.10}$$

se numește *ecuația omogenă asociată ecuației* (I.9).

Soluția generală a ecuației (I.9) este suma dintre soluția generală a ecuației (I.10) și o soluție particulară a ecuației (I.9).

Dacă y_1 și y_2 sînt soluții particulare ale ecuației (I.9), avînd termenul liber $f_1(x)$, respectiv $f_2(x)$, atunci $\alpha y_1 + \beta y_2$ este o soluție particulară a ecuației (I.9) cu termenul liber $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ („principiul suprapunerii efectelor", în problemele fizice sau tehnice). În particular, orice combinație liniară de soluții ale ecuației omogene (I.10) este de asemenea o soluție a acestei ecuații.

Soluția evidentă $y \equiv 0$ a ecuației omogene se numește *soluție trivială* sau *soluție banală*.

9.1.2.2. **Sistem fundamental de soluții.** Funcțiile $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_m(x)$ definite pe un interval I se numesc *liniar independente*, dacă relația $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, y_i(x) \equiv 0$ are loc numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$; în caz contrar, aceste funcții sînt *liniar dependente*. Fie $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ n soluții derivabile continuu de $n-1$ ori, ale ecuației diferențiale omogene (I.10). Aceste soluții sînt liniar independente în intervalul I, atunci și numai atunci cînd determinantul

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{I.11}$$

numit *determinantul lui Wronski* sau *wronskianul* funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, nu se anulează în nici un punct din I. Dacă W se anulează într-un punct din I, atunci el se anulează în toate punctele din I.

Ecuația diferențială omogenă (I.10) posedă n soluții liniar independente. Orice ansamblu de n soluții liniar independente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale acestei ecuații, se numește *sistem fundamental de soluții*, iar $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ este soluția generală.

9.1.2.3. **Metoda variației constantelor.** Presupunînd cunoscut un sistem fundamental de soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ al ecuației omogene (I.10), prin *metoda variației constantelor* se poate obține o soluție generală a ecuației neomogene (I.9), sub forma $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$. Și anume, se rezolvă sistemul de n ecuații liniare algebrice $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(j)}(x) = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$; $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x)/a_0(x)$, cu necunoscutele $C_i'(x)$, avînd ca determinant al coeficienților necunoscutelor wronskianul $W(x)$ care nu se anulează nicăieri în I și apoi prin simple integrări se găsesc funcțiile $C_i(x)$: $C_i(x) = \int C_i'(x)\, \mathrm{d}x + k_i$.

9.1.2.4. **Ecuații liniare și omogene cu coeficienți constanți.** Fie ecuația diferențială de ordinul n:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (I.12)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ fiind numere reale. Ecuația algebrică de gradul n,

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (I.13)$$

se numește *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale (I.12).

Dacă toate rădăcinile ecuației (I.13), $r_1, r_2, \ldots, r_n$, sînt distincte, soluția generală a ecuației (I.12) este $y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i x}$, iar dacă o rădăcină oarecare r_k este multiplă de ordin m_k, termenul corespunzător din formula precedentă se înlocuiește cu $(C_k + C_{k1} x + C_{k2} x^2 + \ldots + C_{k(m_k-1)} x^{m_k-1}) e^{r_k x}$.

Rădăcinile complexe ale ecuației (I.13) intervin ca perechi conjugate, iar la o astfel de pereche de rădăcini simple $\alpha+\beta i$, corespunde o pereche de termeni complecși din soluția generală, care pot fi înlocuiți cu o pereche de termeni reali: $C'e^{(\alpha+\beta i)x} + C''e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(A \cos \omega x + B \sin \omega x) = Ce^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi)$, unde constantele A și B, respectiv C și φ înlocuiesc constantele inițiale C', C''.

9.1.2.5. **Soluții particulare ale ecuației liniare neomogene cu coeficienți constanți.** Aceste soluții se pot găsi în general prin metoda variației constantelor. Dacă însă termenul liber este o sumă finită de termeni de forma $e^{\alpha_i x} P_i(x)$, $i = 1,2,\ldots$, α_i fiind numere reale sau complexe, iar $P_i(x)$ polinoame, soluția particulară poate fi obținută prin operații algebrice și de derivare. Conform celor arătate mai înainte, este suficient să se examineze numai soluția particulară dată de un singur termen al acestei sume. Fie deci $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$. Atunci ecuația neomogenă admite o soluție particulară de forma $e^{\alpha x}Q(x)$, sau de forma $e^{\alpha x}x^m Q(x)$, după cum α nu este rădăcină a ecuației caracteristice (I.13), sau este rădăcină multiplă de ordin m a acesteia; $Q(x)$ este un polinom de același grad cu $P(x)$, iar coeficienții constanți din expresia soluției se găsesc prin identificare.

9.1.3. **Sisteme de ecuații diferențiale liniare.** În vederea rezolvării unui sistem de ecuații diferențiale liniare, se pot da următoarele indicații.

9.1.3.1. **Proprietăți generale ale soluțiilor.** O ecuație diferențială de ordinul n (I.9) poate fi transformată într-un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1, cu n funcții necunoscute $y_1 = y$, $y_2 = y_1' = y'$, $y_3 = y_2' = y''$, $\ldots$, $y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)}$, astfel încît în cazul sistemelor liniare, se pot regăsi rezultatele de la pct. 9.1.2.

Fie sistemul de n ecuații sub forma normală, scris în notație matriceală

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \qquad (I.14)$$

unde:

$$\mathbf{y} = [y_i(x)]_{n\times 1},\ \mathbf{y}' = [\mathrm{d}y_i(x)/\mathrm{d}x]_{n\times 1},\ \mathbf{b} = [b_i(x)]_{n\times 1},\ \mathbf{A} = [a_{ij}(x)]_{n\times n}$$

Funcțiile $a_{ij}(x)$ și $b_i(x)$ sînt continue într-un interval I. Sistemul (I.14) admite o soluție unică în tot intervalul I, pentru condiții inițiale date la $x = a \in I$.

Dacă *termenii perturbatori* sau *liberi* $b_i(x)$ sînt identic nuli, se obține sistemul omogen

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad (I.15)$$

asociat sistemului (I.14). Soluția generală a sistemului (I.14) este suma soluției generale a sistemului omogen (I.15) și a unei soluții particulare a sistemului (I.14). Soluția evidentă $\mathbf{y} \equiv 0$ se numește *trivială* sau *banală*.

Fie $\mathbf{y}_{(1)}$ și $\mathbf{y}_{(2)}$ două soluții particulare ale ecuațiilor (I.14), corespunzătoare termenilor liberi diferiți $\mathbf{b}_{(1)}$ și $\mathbf{b}_{(2)}$. Atunci $\alpha\mathbf{y}_{(1)} + \beta\mathbf{y}_{(2)}$ este o soluție particulară a sistemului (I.14) în care termenul liber este $\alpha\,\mathbf{b}_{(1)} + \beta\mathbf{b}_{(2)}$. În particular, orice combinație liniară de soluții ale sistemului omogen (I.15) este de asemenea o soluție a acestui sistem.

9.1.3.2. **Sistem fundamental de soluții.** Fie n soluții $\mathbf{y}_{(j)}$ ale sistemului omogen (I.15) și $\mathbf{Y}(x) = [y_{ij}(x)]$, matricea componentelor acestora. Soluțiile $\mathbf{y}_{(j)}$sînt independente dacă există o valoare $x_0 \in I$ pentru care $\det(\mathbf{Y}(x_0)) \neq 0$ și în acest caz $\det(\mathbf{Y}(x)) \neq 0$ pentru orice $x \in I$.

Orice ansamblu de n soluții liniar independente $\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{y}_{(2)}, \ldots, \mathbf{y}_{(n)}$ se numește *sistem fundamental de soluții*. Notînd cu $\mathbf{Y}$ matricea sistemului fundamental, numită *matrice fundamentală* și cu $\mathbf{c} = [c_j]_{n\times 1}$ matricea-coloană a unor constante arbitrare, soluția generală este $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{c}$.

9.1.3.3. **Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene cu coeficienți constanți.** Se consideră un sistem de forma (I.15), matricea coeficienților $\mathbf{A}$ fiind constantă. Pentru a găsi un sistem fundamental de soluții, se caută o soluție nebanală de forma $\mathbf{y} = \mathbf{c}\,e^{\lambda x} = [c_i]_{n\times 1}\,e^{\lambda x}$. Prin înlocuire în (I.15), se obține sistemul omogen de ecuații liniare algebrice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{c} = 0$, care admite soluții nebanale dacă λ este rădăcină a ecuației caracteristice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Prin urmare, căutarea unui sistem fundamental de soluții conduce la o problemă de valori proprii ale matricei coeficienților.

În cele ce urmează se va presupune că $\mathbf{A}$ este o *matrice diagonalizabilă* (v. cap. 5 pct. 5.9.4). În acest caz, soluțiile sistemului $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{c} = 0$ sînt n matrice-coloană independente $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ — vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$ — corespunzînd valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Soluția generală a sistemului dat este de forma $\mathbf{y} = k_1\,\mathbf{v}_1\,e^{\lambda_1 x} + k_2\,\mathbf{v}_2\,e^{\lambda_2 x} + \ldots + k_n\mathbf{v}_n\,e^{\lambda_n x}$, cu constantele arbitrare $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Pentru condiții inițiale $\mathbf{y}(0)$ la $x = 0$, constantele $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \ldots, k_n]^T$ au expresia $\mathbf{k} = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{y}(0)$, unde $\mathbf{U}$ este matricea modală a matricei $\mathbf{A}$ (v. cap. 5 pct. 5.9.4).

9.1.3.4. **Soluții particulare ale sistemelor diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți.** Acestea se pot găsi în general prin metoda variației constantelor. Dacă însă termenii liberi au forma $b_i(x) = e^{\alpha x}\,B_i(x)$, $B_i(x)$ fiind un polinom de grad r_i, iar α nefiind o rădăcină a ecuației caracteristice, sistemul dat admite o soluție particulară de componente $e^{\alpha x}P_i(x)$, $P_i(x)$ fiind un polinom de grad $s_i \leqslant \max(r_i)$; dacă α este rădăcină multiplă de ordinul q a ecuației caracteristice, soluția particulară are componentele $e^{\alpha x}Q_i(x)$, unde polinoamele $Q_i(x)$ sînt polinoame de grad $t_i \leqslant \max(r_i) + q$.

9.2. Ecuații cu derivate parțiale

9.2.1. **Generalități.** O relație

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u;\ \partial u/\partial x_1,\ \partial u/\partial x_2, \ldots, \partial u/\partial x_n;\ \partial^2 u/\partial x_1\,\partial x_1,\ \partial^2 u/\partial x_1\,\partial x_2, \ldots) = 0 \qquad \text{(I.16)}$$

între $n \geqslant 2$ variabile independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o funcție necunoscută $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și derivatele sale parțiale pînă la ordinul r inclusiv, se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul r*. O funcție $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care verifică această ecuație într-un anumit domeniu D de variație a variabilelor independente, se numește *soluție* sau *integrală* a ecuației.

Soluția sau *integrala generală* conține funcții arbitrare. Dacă se cere ca funcția u și eventual derivatele sale, să satisfacă anumite condiții suplimentare, de-a lungul unei curbe, pe o suprafață etc. (condiții la limite sau pe frontieră, condiții inițiale), se obține o *soluție*

sau o *integrală particulară*. Pentru rezolvarea concretă a problemelor fizice care conduc la ecuații cu derivate parțiale, interesează nu atît aflarea unei soluții oarecare, sau chiar a soluției generale, cît aflarea acelor soluții care satisfac condițiile impuse.

Ecuația cu derivate parțiale se numește *omogenă*, dacă u fiind o soluție, αu este de asemenea soluție (α = const) și se numește *liniară*, dacă F este funcție liniară de u și de derivatele sale.

9.2.2. Rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale prin separarea variabilelor. În unele cazuri, încercarea de a găsi o soluție sub forma $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)\,\psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ permite de a scrie ecuația (I.16) sub *forma separată* $F_1(x_1\,;\ \varphi\,;\ \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}x_1^2,\ \ldots) = F_2(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n\,;\ \psi\,;\ \partial\psi/\partial x_2,\ \ \partial\psi/\partial x_3,\ \ldots)$. Funcțiile necunoscute φ și ψ trebuie să satisfacă ecuațiilor diferențiale $F_1(x_1\,;\ \varphi\,;\ \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}x_1^2, \ldots) = C_1$ și $F_2(x_2,\ x_3,\ \ldots, x_n\,;\ \psi\,;\ \partial\psi/\partial x_2,\ \partial\psi/\partial x_3, \ldots) = C_1$; prima dintre acestea este o ecuație diferențială ordinară, iar pentru ecuația a doua se poate eventual încerca din nou același procedeu de separare a variabilelor etc. „Constanta de separare" C_1 se determină în legătură cu condițiile suplimentare impuse problemei.

Cîteodată aplicarea acestei metode este posibilă după o schimbare corespunzătoare de variabile.

9.2.3. Ecuații cu derivate parțiale uzuale în mecanica construcțiilor. În continuare se dau cîteva indicații sumare asupra acestui tip de ecuații.

Ecuația lui Laplace bidimensională (ecuația potențialului)

$$\Delta u = 0,\ \text{ unde } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

este *operatorul lui Laplace*.

Soluție generală: $u = f_1(x + \mathrm{i}y) + f_2(x - \mathrm{i}y)$, f_1 și f_2 fiind funcții arbitrare, iar i simbolul imaginar; r și φ sînt coordonate polare în plan.

Soluții particulare: $u_k\,(x, y) = e^{\pm k(x+\mathrm{i}y)}$, $u_0(x, y) = (a + bx)\,(c + dy)$, $u_m(r, \varphi) = \left(Ar^m + \dfrac{B}{r^m}\right)(\alpha \cos m\varphi + \beta \sin m\varphi)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $u_0(r, \varphi) = A + B \ln r$, unde k, a, b, c, d, α, β, A, B, sînt constante arbitrare care se determină prin condițiile la limite.

Ecuația bipotențialului: $\Delta\,\Delta\,u = 0$.

Soluția generală: $\varphi + x\,\psi$, $\varphi + y\psi$, $\varphi + (x^2 + y^2)\,\psi$, unde φ și ψ sînt soluții ale ecuației $\Delta\,u = 0$.

Ecuația diferențială a coardei vibrante (ecuația unidimensională a undelor):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Soluția generală: $u(x, t) = u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$, reprezentînd o pereche de unde care se propagă în ambele sensuri ale axei Ox, cu viteza constantă c.

Condiții inițiale: $u(x, o) = u_0(x)$. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x)$. **Dacă:**

a) $-\infty < x < \infty$, soluția este $u(x, t) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0\,(x - ct) + u_0(x + ct)\Big) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} v_0\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ (d'Alembert).

b) $x \geqslant 0$ cu condițiile la limite $u(0, t) = 0, t \geqslant 0$, soluția este $u(x, t) = = \frac{1}{2}\left(P(x - ct) + P(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} Q(\xi)d\xi$, unde: $P(x) = u_0(x),\ x \geqslant 0$ și $P(x) = -u_0(-x),\ x < 0$, iar $Q(x) = v_0(x),\ x \leqslant 0$ și $Q(x) = -v_0(x),\ x < 0$.

c) $0 \leqslant x \leqslant L$, cu condițiile la limite $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Soluția $u(x, t)$ este dată de formula de la cazul b), unde acum $P(x)$ și $Q(x)$ sînt funcții periodice cu perioada $2L$, fiind respectiv egale cu $u_0(x)$ și $v_0(x)$ pentru $0 \leqslant x \leqslant L$ și cu $-u_0(-x)$ și $-v_0(-x)$ pentru $-L \leqslant x < 0$.

Pentru cazul c), soluția se poate scrie (Bernoulli și Fourier):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}\right), \text{ unde:}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx;\quad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Soluții particulare: $u(x, t) = e^{\pm ikx}e^{\pm i\omega t} = e^{\pm ik(x \pm ct)}$, $\omega = kc$ sau sub formele echivalente:

$$u(x, t) = C\cos(\omega t + \gamma_1)\cos(kx + \gamma_2) = A\cos(\omega t \pm kx + \gamma),$$

unde $k, \gamma_1, \gamma_2, \gamma, C, A$ sînt constante care se determină din condițiile la limite.

10. EXTREME LOCALE ALE FUNCȚIILOR

10.1. Extreme locale ale funcțiilor de o variabilă

Se consideră o funcție reală $f(x)$ avînd o valoare determinată pentru un punct interior $x = a$ al domeniului său de definiție.

1) Dacă $f'(a)$ există și $f'(a) = 0$, valoarea funcției $f(x)$ în punctul $x = a$ se numește *valoare staționară*, iar a se numește *punct staționar* al funcției $f(x)$. Condiția $f'(a) = 0$ este o *condiție necesară* de existență a unui *extrem local* în punctul a.

2) Dacă există derivata $f^{(n)}(a)$ și dacă $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f(x)$ are în punctul a:

– un *maxim local* pentru n par și $f^{(n)} < 0$,
– un *minim local* pentru n par și $f^{(n)} > 0$,
– un *punct de inflexiune* pentru n impar și $f^{(n)} \neq 0$.

Condițiile de la acest punct sînt *necesare și suficiente*.

10.2. Extreme locale ale funcțiilor de mai multe variabile

Se consideră o funcție reală $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avînd o valoare determinată pentru un punct interior $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ al domeniului său de definiție.

1) Dacă f este diferențiabilă în punctul A și dacă df se anulează în acest punct valoarea funcției f în punctul A se numește *valoare staționară*, iar A se numește *punct staționar*.

Condiţia necesară de existenţă a unui *extrem local* al funcţiei f în punctul A este ca diferenţiala primă df să se anuleze în acest punct, adică $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pentru $x_i = a_i$.

2) Dacă f are derivatele sale parţiale de ordinul doi continue în punctul A şi dacă este îndeplinită condiţia necesară de la punctul precedent, atunci pentru existenţa unui maxim (minim) în acest punct, este suficient ca forma pătratică (v. cap.5, pct. 5.10.1) în dx_i, dx_j, $d^2f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ calculată în punctul A, să fie negativ (pozitiv) definită.

3) Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este diferenţiabilă continuu de un număr suficient de ori şi dacă df se anulează în punctul A iar d^2f este semidefinită (v. cap.5, pct. 5.10.1), atunci caracterul valorii staţionare depinde de diferenţialele de ordin mai mare ca doi. Dacă însă d^2f este o formă pătratică nedefinită, atunci valoarea staţionară nu este nici maximă nici minimă.

10.3. Extreme condiţionate

Valorile extreme ale funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pot fi condiţionate de satisfacerea unor *condiţii suplimentare* sau *ecuaţii de legătură* suficient de regulate $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m < n$. Dacă eliminarea directă cu ajutorul ecuaţiilor de legătură a m din cele n variabile nu este practic posibilă, se utilizează *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* indicată în continuare.

Se formează funcţia $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$ unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sînt *multiplicatorii lui Lagrange*. Condiţia necesară de extrem condiţionat al funcţiei f este dată de n ecuaţii: $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Punctele de extrem condiţionat se vor afla printre punctele ale căror n coordonate verifică sistemul format din $n + m$ ecuaţii: $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$, $\varphi_k = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, m.$, cu $n+m$ necunoscute: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$.

11. CALCUL VARIAŢIONAL

11.1. Obiectul calculului variaţional

În cap. 5 pct. 5.4.1, s-a specificat că o aplicaţie a spaţiului vectorial în mulţimea numerelor se numeşte *funcţională*. Calculul variaţional este un capitol special al teoriei funcţionalelor. El studiază funcţionale $I(y)$ în scopul construirii unei teorii a extremelor acestora — funcţionale definite pe anumite mulţimi sau clase de funcţii $y(x)$ — şi anume acele funcţionale în expresiile cărora funcţiile necunoscute $y(x)$ sînt situate sub semnul unei integrale (simple sau multiple) definite. Problemele de acest tip se numesc *probleme*

variaționale. Funcționalele $I(y)$ au în general expresia $I = \int_{a_1}^{a_2} F\mathrm{d}x$, unde F este o funcție dată de variabila independentă x, de funcțiile necunoscute $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, precum și de derivatele acestora de ordinul 1. 2,..., m, fiind necesar ca F, y_1, y_2, ...,y_n să îndeplinească anumite condiții de derivabilitate și de continuitate, indicate în literatura de specialitate.

Funcțiile necunoscute $y_1, y_2, \ldots, y_n$ trebuie astfel determinate, încît împreună cu derivatele lor pînă la ordinul $m - 1$ inclusiv, să ia valori în general cunoscute, la marginile intervalului de integrare $[a_1, a_2]$ și să realizeze o valoare extremă a funcționalei I. Soluțiile unei probleme variaționale se numesc *curbe* sau *funcții extremale*, sau mai scurt, *extremale*.

În unele cazuri, expresia funcției F poate conține mai multe variabile independente, funcțiile necunoscute $y_1, y_2, \ldots$, precum și derivatele parțiale ale acestora, I fiind deci o integrală multiplă.

Rezolvarea problemelor variaționale poate fi efectuată: a) prin rezolvarea unor ecuații diferențiale; b) prin metode „directe".

11.2. Rezolvarea problemelor variaționale cu ajutorul ecuațiilor diferențiale

În cele ce urmează se indică unele tipuri frecvent întîlnite de probleme variaționale. Soluțiile acestora (funcțiile extremale) satisfac unor ecuații diferențiale — *ecuațiile lui Euler* sau generalizări ale acestora. Aceste ecuații diferențiale reprezintă *condiții necesare* de realizare a extremelor funcționalelor respective. Printre soluțiile ecuațiilor diferențiale menționate, pot exista unele care să nu constituie efectiv soluții — adică funcții extremale — ale problemei variaționale studiate. Acestea trebuie înlăturate, fie prin verificare, fie printr-o analizare și interpretare geometrică sau fizică corespunzătoare.

a) $I = \int_{a_1}^{a_2} F(y, y', x)\mathrm{d}x$. Condiții pe frontieră: $y(a_1) = b_1$, $y(a_2) = b_2$. Ecuația diferențială: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ (Euler).

b) $I = \int_{a_1}^{a_2} F(y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n'; x)\mathrm{d}x$. Condiții pe frontieră: $y_i(a_1) = b_{1i}$, $y_i(a_2) = b_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ecuațiile diferențiale: $\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (Euler).

c) $I = \int_{a_1}^{a_2} F(y_1, y_2, \ldots y_n; y_1', y_2', \ldots y_n'; \ldots; y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots y_n^{(m)}; x)\mathrm{d}x$. Condiții pe frontieră corespunzătoare la $x = a_1$ și $x = a_2$ pentru $y_i(x)$, $y_i'(x), \ldots, y_i^{(m-1)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ecuațiile diferențiale:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i''}\right) - \ldots + (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i^{(m)}}\right) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

d) $I = \iint \ldots \int_V F\left(y_1, y_2, \ldots y_n; \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_m}; x_1, x_2, \ldots, x_m\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_m$

unde $y_i = y_i(x_1, x_2 \ldots, x_m)$, $i = 1, 2 \ldots, n$, iar V este domeniul de integrare. Condițiile pe frontieră pentru $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ corespund valorilor luate de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pe conturul domeniului V. Ecuațiile diferențiale : $\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)}\right] = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, n$.

11.3. Extreme condiționate

Rezolvarea problemelor variaționale poate fi condiționată de satisfacerea unor *condiții suplimentare* sau *ecuații de legătură* suficient de regulate, care de exemplu în cazul problemei menționate la pct. b) sînt de forma $\varphi_k(y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n'; x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m < n$. Dacă eliminarea directă cu ajutorul ecuațiilor de legătură a m din cele n variabile y_i nu este practic posibilă, atunci funcțiile necunoscute $y_1, y_2, \ldots y_n$ se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i'}\right) = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, n$ (Euler), unde $\Phi = F + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x)\varphi_k$. Funcțiile necunoscute $\lambda_k(x)$ (*multiplicatorii lui Lagrange*) și $y_i(x)$ se determină din n ecuații diferențiale ale lui Euler și m ecuații de legătură, ținînd seama și de condițiile pe frontieră ale problemei.

11.4. Rezolvarea problemelor variaționale prin metode directe

Fie de exemplu funcționala $I(y) = \int_{a_1}^{a_2} F(y, y', x)\, dx$ care trebuie să ia o valoare extremă pentru o anumită funcție extremală $y^*(x)$. În *metodele directe* se încearcă să se aproximeze $y^*(x)$ printr-un șir de funcții satisfăcînd condițiile pe frontieră ale problemei, $u_1(x; \alpha_{11})$, $u_2(x; \alpha_{21}, \alpha_{22}), \ldots, u_r(x; \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rr}), \ldots$, unde α_{ri}, $i = 1, 2, \ldots, r$, $r = 1, 2, \ldots$ sînt parametri care urmează a fi determinați astfel încît funcțiile u_r să asigure o valoare extremă funcțiilor $I_r(\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rr}) = \int_{a_1}^{a_2} F[u_r(x), u_r'(x)]\, dx$, $r = 1, 2, \ldots$

Pentru aceasta, condiția necesară se exprimă prin ecuațiile $\frac{\partial I_r}{\partial \alpha_{ri}} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $r = 1, 2, \ldots$ care servesc la calcularea parametrilor α_{ri}.

Dacă șirul astfel găsit $u_1, u_2, \ldots$ este convergent, atunci limita sa este funcția extremală căutată $y^*(x)$, dacă realizează efectiv o valoare extremă a funcționalei date. În acest caz, $u_1, u_2, \ldots$ se numește *șir minimizant* al funcționalei respective. Termenii săi sînt aproximații din ce în ce mai bune ale extremalei $y^*(x)$.

Analog cu cele arătate în cazul examinat, metodele directe pot fi utilizate și la rezolvarea altor probleme variaționale, cu mai multe funcții necunoscute, cu mai multe variabile independente etc.

Diferitele variante ale metodelor directe se disting prin procedeul de construire a șirului minimizant. Astfel, în *metoda Ritz* — una dintre cele mai cunoscute și frecvent utilizate metode directe—, termenii șirului sînt funcții liniare de parametrii α_{ri} : $u_r = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ri}\varphi_i(x)$, funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ fiind liniar independente și $\alpha_{11} = 1$.

Obișnuit, funcțiile $\varphi_i(x)$ se iau astfel încît $\varphi_1(x)$ să satisfacă condițiile date pe frontieră $\varphi_1(a_1) = b_1$ și $\varphi_1(a_2) = b_2$, iar $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ să se anuleze la extremitățile intervalului $[a_1, a_2]$. Șirul $u_1, u_2, \ldots$ astfel construit nu este în general minimizant pentru orice alegere a funcțiilor φ_i, însă un termen u_r al șirului constituie de regulă o aproximație a soluției în problemele tehnice sau fizice, cu atît mai bună, cu cît indicele r are o valoare mai mare. Pentru a construi un șir minimizant $u_1, u_2, \ldots$ prin metoda Ritz, este necesar ca șirul de funcții $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ să satisfacă anumite condiții de ,,completitudine'' indicate în literatura de specialitate.

12. CALCULUL PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICA MATEMATICĂ

12.1. Noțiuni introductive. Cîmp de evenimente

Dezvoltarea *calculului probabilităților* ca disciplină matematică, a fost posibilă numai prin construirea pe cale axiomatică a unui model matematic care să descrie în mod adecvat ansamblurile de fenomene întîmplătoare (aleatoare) cu stabilitate statistică. Conceptele matematice ale calculului probabilităților sînt toate de origine experimentală, iar confruntarea permanentă a rezultatelor obținute cu faptele experimentale permite cuprinderea și interpretarea probabilistică a unei categorii tot mai întinse de fenomene, din toate domeniile științifice.

Cu ajutorul calculului probabilităților, *statistica matematică* studiază într-o formă abstractă, fără a ține seama de natura particulară a obiectelor cercetate, fenomenele de masă în care se manifestă întîmplarea.

Conceptele fundamentale ale calculului probabilităților sînt cele de ,,eveniment'' și ,,probabilitate''.

Un experiment natural sau provocat, efectuat în aceleași condiții, poate conduce la rezultate diferite. În calculul probabilităților, rezultatele unui experiment se consideră numai dintr-un singur punct de vedere și anume din punct de vedere al producerii sau neproducerii unui rezultat anumit. În acest sens, producerea sau neproducerea rezultatului anumit se numește *eveniment*.

Mulțimea K a evenimentelor $A, B, \ldots$, corespunzătoare unui experiment dat, poate fi organizată cu ajutorul *operațiilor logice* ,,sau'', ,,și'', ,,non'', ținînd seama de următoarele definiții și proprietăți.

Evenimentul *sau A sau B*, sau *reuniunea* evenimentelor A și B, este evenimentul care constă în apariția a cel puțin unuia din evenimentele A, B și se notează $A \cup B$.

Evenimentul *și A și B*, sau *intersecția* evenimentelor A și B, este evenimentul care constă în apariția ambelor evenimente A, B și se notează $A \cap B$.

Evenimentul contrar lui A (non A) sau *complementarul lui A*, constă din nerealizarea lui A și se notează A^c.

Evenimentul sigur sau *total E*, este evenimentul care are loc întotdeauna într-un experiment dat, sau este evenimentul care constă în apariția a cel puțin unuia dintre evenimentele $A, B, \ldots$ ale mulțimii K. Oricare ar fi A; $A \cup A^c = E$; $A \cup E = E$; $A \cap E = A$.

Evenimentul imposibil notat cu $\emptyset$, contrarul evenimentului sigur, constă în neapariția nici unuia dintre evenimentele $A, B, \ldots$ ale mulțimii K. Oricare ar fi A : $A \cap A^c = \emptyset$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Evenimentele A și B se numesc *incompatibile* sau *disjuncte* dacă $A \cap B = \emptyset$. Dacă $A \cap B \neq \emptyset$, A și B sînt *compatibile*.

Diferența evenimentelor A și B, notată $A - B$, este evenimentul constînd în realizarea lui A și nerealizarea lui B. $A - B = A \cap B^c$.

Evenimentul A *implică* evenimentul B, sau A este o *parte* a lui B, notîndu-se $A \subset B$, dacă atunci cînd se produce A se produc în mod necesar și B. Dacă A nu implică B, se scrie $A \not\subset B$. Oricare ar fi $A : A \subset A$; $A \subset E$. Dacă $A \subset B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Dacă simultan $A \subset B$ și $B \subset A$, evenimentele A și B sînt *echivalente* și se notează $A = B$.

O mulțime de evenimente, K, corespunzătoare unui experiment dat, se numește *cîmp de evenimente*, dacă sînt îndeplinite condițiile :

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } A \in K \Rightarrow A^c \in K \\ \text{b) } A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K \\ \text{c) } A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K \end{array}\right\} \qquad (I.17)$$

Rezultă : $E \in K$ și $\emptyset \in K$.

K este un cîmp *finit* sau *infinit*, după cum conține un număr finit sau o infinitate de evenimente distincte.

12.2. Sistem complet de evenimente

Fie m evenimente $A_j \in K$, $j=1, 2, \ldots, m$, și un eveniment $A \in K$. Dacă $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ și $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice $1 \leqslant i, j \leqslant m$ și $i \neq j$, evenimentele A_j constituie o *partiție* sau o *desfacere* a evenimentului A în evenimente incompatibile.

Dacă relațiile anterioare sînt satisfăcute pentru $A = E$, evenimentele A_j formează un *sistem complet de evenimente*. Cel mai simplu sistem de evenimente este format din A și A^c.

În general toate evenimentele unui cîmp K, afară de $\emptyset$, pot fi considerate ca reuniuni ale unor evenimente mai simple, ireductibile, numite ,,evenimente elementare". Mai precis, în mulțimea evenimentelor $\{A_j\}$ ale unui cîmp de evenimente K, există o submulțime $\{e_i\}$, numită *mulțimea evenimentelor elementare*, astfel încît pentru orice A_j are loc relația

$$\text{sau } e_i \cap A_j = \emptyset \text{ sau } e_i \subset A_j.$$

Evenimentele elementare sînt incompatibile unul cu altul. Evenimentul sigur E este în același timp reuniunea tuturor evenimentelor elementare și mulțimea formată din acestea, utilizîndu-se deseori notația $E = \{e\}$, e fiind un eveniment elementar

generic. Un eveniment oarecare $A \in K$ este sau un eveniment elementar sau o reuniune de evenimente elementare.

Mulţimea evenimentelor elementare este un caz particular de sistem complet de evenimente.

Operaţiile cu evenimente sînt operaţii de mulţimi (v. pct. 3.3), iar identitatea relaţiilor (I.2) cu condiţiile (I.17) arată că un cîmp finit de evenimente K, este constituit din mulţimea $\mathfrak{P}(E)$ a părţilor unei mulţimi finite $E = \{e\}$, care joacă în acest caz rolul mulţimii de bază (v. pct. 3.5).

12.3. Probabilităţi

12.3.1. Probabilitate şi frecvenţă relativă. Prin *probabilitate* se înţelege în general latura cantitativă a categoriei de posibilitate, respectiv măsura posibilităţii realizării unui anumit eveniment în anumite condiţii.

Noţiunea de probabilitate are în *frecvenţă relativă* un suport experimental, iar proprietăţile definitorii ale sale constituie o transpunere pe modelul matematic creat de calculul probabilităţilor, a proprietăţilor caracteristice ale frecvenţei relative.

Prin frecvenţă relativă a unui eveniment, se înţelege în cadrul efectuării aceluiaşi experiment, raportul între numărul de probe ale experimentului în care se produc evenimentul respectiv şi numărul total de probe.

Corelaţia dintre probabilitate şi realitate este dată de stabilitatea frecvenţei relative cu care un anumit eveniment apare într-un număr mare de probe. Această stabilitate este fundamentul apariţiei legilor statistice.

12.3.2. Cîmp finit de probabilitate. Se numeşte *probabilitate* a evenimentului $A \in K$, o funcţie $\boldsymbol{P}(A)$ reală, satisfăcînd următoarelor condiţii (denumite şi „axiome ale probabilităţii"):

1) $\boldsymbol{P}(A) \geqslant 0$ pentru orice $A \in K$; (I.18)

2) $\boldsymbol{P}(E) = 1$, E fiind evenimentul sigur;

3) $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$, dacă $A \in K$, $B \in K$ şi $A \cap B = \emptyset$.

Un cîmp de evenimente căruia i se asociază o probabilitate se numeşte cîmp de evenimente probabilizat sau *cîmp de probabilitate.*

Rezultă următoarele consecinţe directe ale definiţiei: $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$; $0 \leqslant \boldsymbol{P}(A) \leqslant 1$; $A \subset B$, A, $B \in K \Rightarrow \boldsymbol{P}(A) \leqslant \boldsymbol{P}(B)$; $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}(A_j) = 1$, unde $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ este mulţimea evenimentelor elementare, iar $\{A_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ este un sistem complet de evenimente.

12.3.3. Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente. Dacă producerea evenimentului B are loc numai în cazul apariţiei şi a evenimentului A, se spune că *probabilitatea evenimentului B este condiţionată de evenimentul A*, cu notaţia $\boldsymbol{P}(B/A)$ sau $\boldsymbol{P}_A(B)$ şi valoarea dată de expresia

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(A)}, \quad \boldsymbol{P}(A) \neq 0.$$

Utilizînd o expresie analoagă pentru $P(A/B)$, rezultă relația $P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A) = P(A/B)\,P(B)$.

Probabilitatea condiționată satisface condițiilor enumerate la definiția probabilității $P(B/A) = 0$; $P(E/A) = 1$; $P(B \cup C/A) = P(B/A) + P(C/A)$, pentru $A, B, C \in K$ și $B \cap C = \emptyset$.

Două evenimente A și B se numesc *independente* dacă $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. În acest caz $P(A/B) = P(A)$ dacă $P(B) \neq 0$ și $P(B/A) = P(B)$ dacă $P(A) \neq 0$, iar perechile de evenimente A și B^c, A^c și B, A^c și B^c sînt de asemenea independente.

12.3.4. Repartiție uniformă. Evenimente egal probabile. Notînd cu $p_i = P(e_i)$ probabilitățile evenimentelor elementare $e_i \in K$, tabloul

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots e_n \\ p_1 & p_2 & \ldots p_n \end{pmatrix}$$

se numește *repartiție*. Dacă $p_i = p$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, repartiția se numește *uniformă* iar evenimentele elementare e_i se numesc *egal probabile* sau *echiprobabile*.

Pentru un eveniment oarecare $A \in K$, $P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(e_i) = mp$, iar $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = pn = 1$. Rezultă $P(A) = m/n$, ajungîndu-se astfel la definiția „clasică" a probabilității unui eveniment, ca raportul dintre numărul de evenimente elementare egal probabile, favorabile evenimentului considerat și numărul total de evenimente elementare egal probabile.

Cercetările teoretice din ultimele 3—4 decenii au arătat că definiția „clasică" a probabilității nu poate fi acceptată ca principiu de bază la construirea unui model matematic satisfăcător al calculului probabilităților.

12.3.5. Probabilitatea evenimentelor legate prin relații logice.

1) *Nerealizarea evenimentului* $A \in K$: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

2) *Reuniunea evenimentelor* $A_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Evenimente incompatibile două cîte două: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$.

Evenimente compatibile:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right); \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Evenimente compatibile și independente în totalitate:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)].$$

3) *Intersecția evenimentelor* $A_i \in K$, $i = 1, 2 \ldots, n$

Evenimentele A_i sînt independente în totalitate, dacă pentru orice subșir $i_1, i_2, \ldots, i_r$ al șirului 1, 2, ..., n, sînt satisfăcute relațiile $P\left(\bigcap_{j=i_1}^{i_r} A_j\right) = \prod_{j=i_1}^{i_r} P(A_j)$.

Evenimente dependente: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\ P(A_2/A_1)\ P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots$ $\ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$. Inegalitatea lui Boole: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$.

12.3.6. **Formula probabilității totale și formula lui Bayes.** Fie $A_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$ un sistem complet de evenimente și $A \in K$ un eveniment oarecare. *Formula probabilității totale* este $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i)$.

Formula lui Bayes: $P(A_i/A) = \dfrac{P(A_i)P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(A/A_i)}$.

12.3.7. **Cîmp de probabilitate infinit.** Dacă mulțimea $\{A_i\}$ este infinită însă numărabilă, relațiile de definiție a cîmpului de evenimente (I. 17) și a probabilității (I.18) se completează cu: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, $A_i \in K$; $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $A_i \in K$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$.

12.4. Variabile aleatoare

Evenimentele unui cîmp de probabilitate nu sînt mărimi în înțelesul care se atribuie acestora în științele naturii. Evenimentele pot fi însă descrise, prin introducerea variabilelor aleatoare, cu ajutorul unor mărimi avînd valori numerice sau vectoriale și care sînt date în general, direct sau indirect, de măsurători. Principalul avantaj al acestei sistematizări constă în deschiderea largă pe calea dezvoltării teoriei probabilităților, a tuturor drumurilor oferite de analiza matematică.

Fie K un cîmp de evenimente, $E = \{e\}$ mulțimea evenimentelor elementare din K. R axa reală și $\mathscr{E}^n$ spațiul euclidian n-dimensional.

Se numește *variabilă aleatoare unidimensională*, o aplicație $\xi : E \to R$, avînd proprietatea $\{e : \xi(e) \leqslant a\} \in K$ pentru orice $a \in R$. Variabila aleatoare unidimensională se numește *discretă* sau *discontinuă* dacă valorile sale notate (în general, în ordine crescătoare): $x_{(1)} x_{(2)}, \ldots,$ sînt distincte, formînd o mulțime finită (*variabilă aleatoare simplă*, sau o mulțime infinită numărabilă — și se numește *continuă*, dacă valorile sale notate cu x umplu un interval finit sau infinit.

Se numește *variabilă aleatoare n-dimensională* sau *vector aleator n-dimensional*, o aplicație $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$; $E \to \mathscr{E}^n$, toate *coordonatele* sale $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fiind variabile aleatoare unidimensionale. Variabila aleatoare n-dimensională poate fi discretă sau continuă, după cum toate coordonatele sale posedă una din aceste două calități.

În cele ce urmează se vor utiliza prescurtările:

V.A., V.A.d., V.A.c. — variabilă aleatoare, variabilă aleatoare discretă, variabilă aleatoare continuă.

$-2, -n \ldots$ — bidimensional(ă), n-dimensional(ă).

$\sum_x y(x)$ — suma valorilor unei funcții $y(x)$ pentru toate valorile unei variabile aleatoare discrete $x_{(1)}\, x_{(2)}, \ldots$

12.5. Variabile aleatoare unidimensionale

12.5.1. **Funcție de repartiție, repartiție și densitate de repartiție.** Se numește *funcție de repartiție* a V.A. ξ, funcția $F: R \to R$, definită de relația $F(x) = \mathbf{P}(\{e : \xi(e) < x\})$ $x \in R$, sau cu notația mai simplă $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$, cu următoarele proprietăți caracteristice: 1) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2)$; 2) $F(x-0) = F(x)$; 3) $F(-\infty) = 0$; 4) $F(+\infty) = 1$; 5) $\mathbf{P}(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a)$ pentru $a < b$. Funcția de epartiție se definește atît pentru V.A.d.cît și pentru V.A.c.

12.5.1.1. **Variabilă aleatoare discretă.** Fie $x_{(i)}$, $i = 1,2,..,n$, valorile V.A. simple ξ. Oricărei valori $x_{(i)}$ îi corespunde în general o submulțime de evenimente elementare, a căror reuniune formează un eveniment $A \in K$, adică $A_i = \{e : \xi(e) = x_{(i)}\}$, $i = 1, 2, \ldots n$,

Deoarece $x_{(i)}$ sînt distincte, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ și $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$, evenimentele A_i formînd un sistem complet de evenimente. Probabilitatea de a se realiza A_i este egală cu probabilitatea ca ξ să ia valoarea $x_{(i)}$ adică $p_i = \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(\xi = x_{(i)})$, $i = 1,2, \ldots, n$, iar $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = \sum_x p(x) = \mathbf{P}(E) = 1$.

Funcția de repartiție a V.A. simple este determinată, dacă se cunosc valorile $x_{(i)}$ și probabilitățile p_i, care se indică într-un tablou (v. și pct. 12.3.4.) $\xi : \begin{pmatrix} x_{(1)} x_{(2)} & \ldots x_{(n)} \\ p_1 \;\; p_2 & \ldots p_n \end{pmatrix}$ numit *repartiția* V.A.ξ.

Graficul funcției de repartiție $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{x_{(i)} < x} p(x_{(i)})$ este un grafic în trepte, cu discontinuități de prima speță în dreptul valorilor $x = x_{(1)}, x_{(2)} \ldots$.

Dacă V.A.d. ξ ia o mulțime infinită numărabilă de valori, sumele $\sum_x$ se înlocuiesc cu serii, repartiția notîndu-se

$$\xi : \begin{pmatrix} x_{(1)} & \ldots & x_{(n)} & \ldots \\ p_1 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix} \text{ și } \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

12.5.1.2. **Variabilă aleatoare continuă.** Pentru o V.A.c. este caracteristică relația $\mathbf{P}(\xi = x) = 0$, care arată că probabilitatea ca o V.A.c. să ia o anumită valoare x este egală cu zero. Se spune că în acest caz evenimentul $\xi = x$ este „aproape" imposibil.

Dacă există o funcție nenegativă $f(x)$ care verifică pentru orice x egalitatea $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$, atunci $f(x)$ se numește *densitatea de repartiție* sau *densitatea de probabilitate* a V.A.c. ξ, cu proprietățile: $f(x) = dF(x)/dx \geqslant 0$, $\mathbf{P}(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

pentru $a<b$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Densitatea de repartiție ține locul tabloului repartiției, definit pentru o V.A.d.

12.5.2. **Caracteristici numerice.** *Valoarea medie a unei funcții* $y(\xi)$ de V.A.ξ este numărul

$$\mathfrak{M}[y(\xi)] = \begin{cases} \sum_x y(x)\; p(x) & \text{(V.A.d.)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\; f(x)\; dx & \text{(V.A.c.)}, \end{cases}$$

presupunînd că aceste expresii există în sensul convergenței absolute.

Valoarea medie a V.A.ξ sau *centrul repartiției*, este o caracteristică de poziție a repartiției probabilității: $\bar{x} = \mathfrak{M}(\xi)$.

Abaterea față de valoarea medie este funcția $\xi - \bar{x}$.

Dispersia este o caracteristică de împrăștiere a repartiției probabilității: $\mathfrak{D}(\xi) = \sigma^2 = \mathfrak{M}[(\xi - \bar{x})^2]$.

Abaterea medie pătratică: $\sigma = \sqrt{\mathfrak{D}(\xi)}$.

Momentul de ordinul r al V.A.ξ în raport cu numărul x^*: $\mathfrak{M}[(\xi - x^*)^r]$.

Momentul inițial de ordinul r al V.A. ξ: $\alpha_r = \mathfrak{M}(\xi^r)$.

Momentul central de ordinul r al V.A.ξ: $\mu_r = \mathfrak{M}[(\xi - \bar{x})^r]$.

Valoarea medie de ordinul r a V.A. ξ: $\mathfrak{M}_r(\xi) = [\mathfrak{M}(\xi^r)]^{1/r} = (\alpha_r)^{1/r}$. În particular $\mathfrak{M}_{-1}(\xi)$ se numește medie armonică, $\mathfrak{M}_1(\xi) = \mathfrak{M}(\xi)$, iar $\mathfrak{M}_2(\xi)$ se numește medie pătratică.

Relații între caracteristicile numerice:

$$\alpha_1 = \mathfrak{M}(\xi)\,;\; \mu_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i}\, C_r^i\, \alpha_1^{r-i}\, \alpha_i \;\text{ și în particular}: \mu_0 = \alpha_0 = 1,$$

$$\mu_1 = 0,\; \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mathfrak{D}(\xi) = \sigma^2\,;$$

$\mathfrak{M}_{r'}(\xi) \geqslant \mathfrak{M}_r(\xi)$, dacă $r' > r$ pentru valori pozitive ale V.A.ξ;

$a \leqslant \mathfrak{M}_r(\xi) \leqslant A$ unde $a > 0$ și $A > 0$ sînt valoarea cea mai mică, respectiv valoarea cea mai mare a V.A.ξ.

Valoarea modală a unei V.A.c. este valoarea $x_{(h)}$ pentru care $f(x)$ prezintă un maximum. Pentru o V.A.d., $x_{(h)}$ este valoare modală dacă $p(x_{(h-1)}) < p(x_{(h)}) > p(x_{(h+1)})$, $x_{(h-1)}$, $x_{(h)}$, $x_{(h+1)}$ fiind valori succesive ale V.A.d.ξ. O repartiție avînd una, două, sau mai multe valori modale, se numește *unimodală*, respectiv *bimodală*, *multimodală*.

12.6. Variabile aleatoare n-dimensionale

12.6.1. **Funcție de repartiție, repartiție, densitate de repartiție.** Se numește *funcție de repartiție* a V.A.$-n$ $\xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, funcția $F: \mathcal{E}^n \to R$, definită de relația $F(x_1, \ldots, x_n) = P(\{e : \xi_1(e) < x_1, \ldots, \xi_n(e) < x_n\})$ sau cu o notație mai simplă, $F(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}^n$.

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are următoarele proprietăți caracteristice: 1) $F(x_1, \ldots, x_n)$ este o funcție nedescrescătoare în raport cu fiecare argument; 2) $F(x_1, \ldots, x_n)$ este continuă la stînga, în raport cu fiecare argument; 3) $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, dacă cel puțin una din

variabilele $x_1,\ldots,x_n$ este egală cu $-\infty$; 4) $F(x_1, x_2,\ldots,x_n) = 1$, cînd toate variabilele $x_1,\ldots,x_n$ sînt egale cu $+\infty$; 5) $\boldsymbol{P}(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1,\ldots,a_n \leqslant \xi_n < b_n) = F(b_1,\ldots,b_n) - \sum_{i=1}^{n} q_i + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} q_{ij} - \ldots + (-1)^n F(a_1,\ldots, a_n)$, unde $q_{ij\ldots k}$ reprezintă valoarea funcției $F(x_1,\ldots,x_n)$ pentru $x_i = a_i,\ x_j = a_j,\ldots,x_k = a_k$, iar restul variabilelor x_s egale cu b_s. În particular pentru o V.A.—2, $\boldsymbol{P}(a_1 \leqslant \xi_1 < b_1,\ a_2 \leqslant \xi_2 < b_2) = F(b_1,\ b_2) - F(a_1,\ b_2) - F(b_1,\ a_2) + F(a_1, a_2)$

Funcțiile de repartiție corespunzătoare unui subsistem de $m < n$ coordonate, numite *funcții de repartiție marginale* în raport cu aceste m coordonate, se obțin din funcția F punînd $x_j = \infty$ pentru fiecare din cele $n-m$ argumente x_j care nu sînt cuprinse în subsistemul considerat, de exemplu $F_2(x_2) = \boldsymbol{P}(\xi_2 < x_2) = \boldsymbol{P}(\xi_1 < \infty,\ \xi_2 < x_2,\ \xi_3 < \infty,\ldots,\xi_n < \infty) = F(\infty, x_2, \infty,\ldots,\infty)$ și analog, $F_{12}(x_1,\ x_2) = F(x_1,\ x_2,\ \infty,\ldots,\infty)$ etc.

12.6.1.1. **Variabile aleatoare discrete.** Fie o V.A.d.—2 $\xi(\xi_1,\ \xi_2)$ cu un număr finit de valori. Prin *repartiție*, se înțelege la fel ca pentru cazul unidimensional, enumerarea valorilor posibile $(x_{1(i)},\ x_{2(j)})$ ale V.A. și a probabilităților corespunzătoare p_{ij}, $i = 1, 2,\ldots,r$ $j = 1,2,\ldots,s$. Repartiția se poate indica sub forma tabloului următor:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	$x_{2(1)}$	$\ldots$	$x_{2(j)}$	$\ldots$	$x_{2(s)}$	
$x_{1(1)}$	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
$\cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot$	$\ldots$	$\cdot\ \cdot$	$\ldots$	$\cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot$
$x_{1(i)}$	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{is}	$p_{i\cdot}$
$\cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot$	$\ldots$	$\cdot\ \cdot$	$\ldots$	$\cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot$
$x_{1(r)}$	p_{r1}	$\ldots$	p_{rj}	$\ldots$	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$\ldots$	$p_{\cdot j}$	$\ldots$	$p_{\cdot s}$	

Evenimentele $(\xi_1 = x_{1(i)},\ \xi_2 = x_{2(j)})$, $i = 1, 2,\ldots, r, j = 1, 2,\ldots,s$, formează un sistem complet de evenimente, deci $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$. Repartițiile fiecăreia dintre cele două coordonate ξ_1 și ξ_2 ale V.A.ξ, sînt date de expresiile: $\boldsymbol{P}(\xi_1 = x_1) = p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2)$;

$$p_{i\cdot} = \sum_{x_2} p(x_{1(i)},\ x_2) = \sum_{j=1}^{s} p_{ij};\ \sum_{i=1}^{r} p_{i\cdot} = \sum_{x_1} p_1(x_1) = 1 \text{ și } \boldsymbol{P}(\xi_2 = x_2) = p_2(x_2) =$$

$$= \sum_{x_1} p(x_1,\ x_2);\ p_{\cdot j} = \sum_{x_1} p(x_1,\ x_{2(j)}) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij};\ \sum_{j=1}^{s} p_{\cdot j} = \sum_{x_2} p_2(x_2) = 1,$$ fiind trecute pe ultima coloană și pe ultima linie a tabloului.

Trecerea la V.A.d. cu o mulțime numărabilă infinită de valori se obține în formulele anterioare, înlocuind sumele finite prin serii.

În cazul unei V.A.d. $-n\ \xi(\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$, probabilitatea este dată de $\boldsymbol{P}(\xi_1 = x_1,\ldots\xi_n = x_n) = p(x_1,\ldots,x_n), \sum_{x_1}\ldots\sum_{x_n} p(x_1,\ldots,x_n) = 1$.

Probabilitățile corespunzătoare unui subsistem de $m < n$ coordonate, numite *probabilități marginale*, se obțin însumînd $p(x_1,\ldots,x_n)$ pentru toate valorile celor $n-m$ coordonate necuprinse în subsistem. De exemplu : $\boldsymbol{P}(\xi_1 = x_1) = p_1(x_1) = \sum_{x_2}\sum_{x_3}\ldots\sum_{x_n} p(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ și $\boldsymbol{P}(\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2) = p_{12}(x_1, x_2) = \sum_{x_3}\sum_{x_4}\ldots\sum_{x_n} p(x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n)$ etc.

12.6.1.2. **Variabile aleatoare continue.** Se numește *densitate de repartiție* sau *densitate de probabilitate* a V.A.c.$-n\ \xi(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ o funcție $f:\mathscr{E}^n \to R$, astfel ca $F(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1\ldots,u_n)\,\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_n$, în cazul cînd această funcție există, cu proprietățile : $f \geqslant 0, \int_{\mathscr{E}^n} f(u_1,\ldots,u_n)\,\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_n = 1$ și $f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}$, dacă F este de n ori diferențiabilă.

Densitatea de repartiție m-dimensională pentru subsistemul de $m < n$ coordonate ale V.A.c.$-n\ \xi$, numită *densitate de repartiție marginală* în raport cu $\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_m$, este derivata parțială de ordinul m, în raport cu coordonatele subsistemului, a funcției de repartiție marginale corespunzătoare. De exemplu : $f_2(x_2) = \dfrac{\partial F_2(x_2)}{\partial x_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(u_1\, x_2, u_3,\ldots,u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3,\ldots,\mathrm{d}u_n$, și $f_{12}(x_1,x_2) = \dfrac{\partial^2 F_{12}(x_1,\ x_2)}{\partial x_1\ \partial x_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, u_3,\ldots,u_n)\mathrm{d}u_3,\ldots,\mathrm{d}u_n$ etc. , unde $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ este densitatea de repartiție n-dimensională definită anterior. Densitățile de repartiție marginală verifică relații analoage cu cele menționate în cazul n-dimensional, de exemplu $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 1$, etc.

12.6.2. **Caracteristici numerice.** În general fiind dată o funcție $y = y\ (\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)$ de n V.A. unidimensionale sau de coordonatele unei V.A.$-n\ \xi$, se numește *valoare medie a funcției* y :

$$\mathfrak{M}[y(\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_n)] = \begin{cases} \sum_{x_1}\sum_{x_2}\ldots\sum_{x_n} y(x_1 x_2,\ldots,x_n)\ \ p(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \text{(V.A.d)} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} y(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)\ \ f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)\ \ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n & \text{(V.A.c)} \end{cases}$$

presupunînd că aceste expresii există în sensul convergenței absolute.

Dacă y este funcție numai de un subsistem de $m < n$ V.A. $\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_m$, în formulele precedente intervin probabilitățile marginale $p_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2,\ldots, x_m)$, respectiv densitățile marginale $f_{1,2,\ldots,m}(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)$.

Pentru o V. A. — n, valorile medii pentru fiecare dintre coordonate $\mathfrak{M}(\xi_1) = \bar{x}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{M}(\xi_n) = \bar{x}_n$, determină un punct de coordonate $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, numit *centrul de repartiție a probabilității.*

Momentul de ordinul $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ *în raport cu punctul* $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ este $\mathfrak{M}[(\xi_1 - x_1^*)^{r_1} \ldots (\xi_n - x_n^*)^{r_n}]$.

Momentul inițial și *momentul centrat* de același ordin se definesc prin expresiile $\alpha_{r_1 \ldots r_n} = \mathfrak{M}(\xi_1^{r_1} \ldots \xi_n^{r_n})$, respectiv $\mu_{r_1 \ldots r_n} = \mathfrak{M}[(\xi_1 - \bar{x}_1)^{r_1} \ldots (\xi_n - \bar{x}_n)^{r_n}]$.

Momentele centrate de ordinul doi prezintă un interes deosebit și au următoarele denumiri și notații:

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = \mathfrak{M}[(\xi_i - \bar{x}_i)(\xi_k - \bar{x}_k)] = \begin{cases} \sigma_i^2 = \mathfrak{D}(\xi_i), \text{ pentru } i = k \\ \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_k), \text{ pentru } i \neq k \end{cases}$$

$\sigma_i^2 = \mathfrak{D}(\xi_i)$ se numește *dispersia* V. A. ξ_i.

$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_k)$ se numește *covarianță, moment centrat mixt de ordinul doi* sau *moment de corelație* între V. A. ξ_i și ξ_k.

Momentele λ_{ik} formează *matricea momentelor* $[\lambda_{ik}]$, iar determinantul $\det[\lambda_{ik}]$ se numește *dispersia generalizată* n-dimensională.

Expresia $\rho_{ik} = \rho_{ki} = \rho(x_i, x_k) = \dfrac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{kk}}} = \mathfrak{M}\left[\dfrac{\xi_i - \bar{x}_i}{\sigma_i} \cdot \dfrac{\xi_k - \bar{x}_k}{\sigma_k}\right]$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ se numește *coeficient de corelație* al V. A. ξ_i și ξ_k. Dacă toți $\sigma_i \neq 0$, matricea $[\rho_{ik}]$ se numește *matrice de corelație* n-dimensională.

12.6.3. **Independența variabilelor aleatoare.** Variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se numesc (reciproc) *independente*, dacă evenimentele $(\xi_1 < x_1), (\xi_2 < x_2), \ldots, (\xi_n < x_n)$ sînt independente în totalitate (v. pct. 12.3.5) pentru orice valori luate de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pentru aceasta este necesar și suficient ca $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)$ sau ca $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2) \ldots p_n(x_n)$ în cazul V.A. discrete și $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ în cazul V. A. continue.

Variabilele aleatoare independente *nu sînt corelate*, coeficienții de corelație corespunzători ρ_{ij} fiind nuli, pentru orice $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots n$. Afirmația reciprocă nu este însă adevărată.

În cazul a două V.A. ξ_1, ξ_2, $\mathfrak{M}(\xi_1\xi_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$, iar dacă ξ_1 și ξ_2 nu sînt corelate, valoarea medie a produsului $\xi_1\xi_2$ este egală cu produsul $\bar{x}_1\bar{x}_2$ al valorilor lor medii.

12.7. Funcții de variabile aleatoare

12.7.1. **Funcții de o variabilă aleatoare.** Repartiția probabilității funcției $\eta = \eta(\xi)$ de argumentul aleator ξ este complet determinată de repartiția probabilității V. A. ξ.

Dacă ξ și η sînt legate biunivoc prin $\eta = \eta(\xi)$ și $\xi = \xi(\eta)$, atunci:

1) Dacă $\eta(\xi)$ este funcție crescătoare, $F_y(y) = F_x[\xi(y)]$, $F_x(x) = F_y[\eta(x)]$.

2) Dacă ξ și η sînt continue, $f_y(y) = f_x[\xi(x)] \left|\dfrac{d\xi}{d\eta}\right|_{\eta=y}$ pentru toate valorile y ale lui η, pentru care derivata $d\xi/d\eta$ există și este continuă.

Observație. În expresiile anterioare, s-au notat cu $F_x, F_y, \ldots$ și $f_x, f_y, \ldots$, funcțiile de repartiție și densitățile de repartiție ale variabilelor $\xi, \eta \ldots$

În cazul unei funcții liniare $\eta = a\xi + b$, atunci $f_y(y) = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$; $\mathfrak{M}(a\xi+b) = a\,\mathfrak{M}(\xi) + b$; $\mathfrak{D}(a\xi + b) = a^2\,\mathfrak{D}(\xi)$.

12.7.2. **Funcție liniară de mai multe variabile aleatoare.**

$$\mathfrak{M}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{x}_i$$

$$\mathfrak{D}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k \rho_{ik}\sigma_i\sigma_k.$$

Dacă ξ_1 și ξ_2 sînt variabile aleatoare independente, atunci :

$$F_{x_1+x_2}(x) = F_1(x) * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x - x_1)\,\mathrm{d}F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - x_2)\,\mathrm{d}F_2(x_2)$$

$$p_{x_1+x_2} = p_1(x) * p_2(x) = \sum_{x_1} p_2(x - x_1)\,p_1(x_1) = \sum_{x_2} p_1(x - x_2)\,p_2(x_2)$$

(ξ_1, ξ_2, discrete)

$$f_{x_1+x_2} = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - x_1)\,f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_2)\,f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

(ξ_1, ξ_2, continue).

12.8. Exemple de repartiții

12.8.1. **Repartiții unidimensionale discrete.** În aplicațiile practice ale calculului probabilităților se utilizează mai frecvent următoarele tipuri de repartiții unidimensionale discrete.

12.8.1.1. **Repartiția binomială.** Considerînd un experiment format din s probe independente, în fiecare din acestea, probabilitatea producerii unui eveniment A fiind constantă și egală cu θ(deci $\mathrm{P}(A^c) = 1-\theta$), numărul de apariții ale evenimentului A este o variabilă aleatoare discretă avînd valorile posibile $x = 0, 1, \ldots, s$, cu probabilitățile $p_s(x) = C_s^x\theta^x(1 - \theta)^{s-x}$, $x = 0,1,2, \ldots, s$; $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Denumirea acestei repartiții provine din faptul că $p(x)$ este termenul general al dezvoltării binomului lui Newton $((1 - \theta) + \theta)^s$. Funcția de repartiție și caracteristicile numerice sînt :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{x} C_s^i\theta^i(1 - \theta)^{s-i};\ \bar{x} = s\theta;\ \sigma^2 = s\theta(1 - \theta),$$

$p_s(x)$ are valoarea maximă, dacă x este egal cu partea întreagă a numărului $(x + 1)\theta$, iar dacă acest număr este întreg, $p_s((s + 1)\,\theta) = p_s((s + 1)\,\theta - 1)$. Șirul $p_s(0)$, $p_s(1)$, $p_s(2)$, ... crește monoton dacă $\theta > s/(s + 1)$, descrește monoton dacă $p < 1/(s + 1)$, iar în celelalte cazuri repartiția binomială este unimodală.

În fig. I.13 sînt redate cîteva exemple de repartiții binomiale.

Probabilitatea $p(x)$ se mai poate defini drept probabilitatea obținerii de x elemente avînd caracteristica A_1, prin s extrageri succesive a cîte unui element dintr-o colectivitate de $N \geqslant s$ elemente, dintre care $N_1 = \theta N (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ elemente posedă calitatea A_1, iar celelalte nu o posedă, după fiecare extragere elementul respectiv fiind restituit colectivității (*schema* sau *urna lui Bernoulli, cu bila întoarsă*).

12.8.1.2. **Repartiția hipergeometrică.** Probabilitatea $p(x)$ se definește cu ajutorul *schemei* sau *urnei lui Bernoulli cu bila neîntoarsă*, unde după fiecare din cele s extrageri succesive, elementul extras nu este restituit colectivității sau, ceea ce este totuna, se extrag o singură dată s elemente.

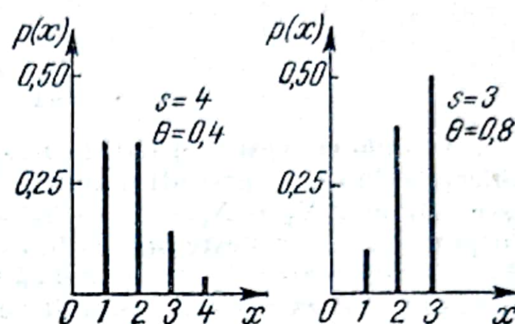


Fig. I.13

$$p_s(x) = C_{N_1}^{x} C_{N-N_1}^{s-x} / C_N^s, \; x = 0, 1, 2, \ldots s;$$

$$N \geqslant s \geqslant 0; \; N_1 = \theta N \geqslant 0;$$

$$\bar{x} = s\theta; \; \sigma^2 = s\theta(1-\theta)(N-s)/(N-1).$$

Repartiția hipergeometrică este utilă în problemele de verificări și de încercări de control efectuate asupra unui lot de s piese, cînd este necesar să se aprecieze întreg lotul după cantitatea x de piese necorespunzătoare din cele s piese ale lotului.

Dacă $N \to \infty$, s și $\theta = N_1/N$ fiind constante, repartiția hipergeometrică tinde către repartiția binomială.

12.8.1.3. **Repartiția Poisson.** Repartiția Poisson este o distribuție-limită a celei binomiale și a celei hipergeometrice, cînd $\theta N \to \infty$, $s \to \infty$, $\theta \to 0$, iar $\theta s \to \lambda = \text{const}$ și se utilizează cînd probabilitatea unei eveniment este foarte mică ($p \sim< 0,1$), repartiția fiind însă riguros uniformă.

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}; \quad x = 0,1,2, \ldots; \quad \lambda > 0$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}; \; \bar{x} = \sigma^2 = \lambda.$$

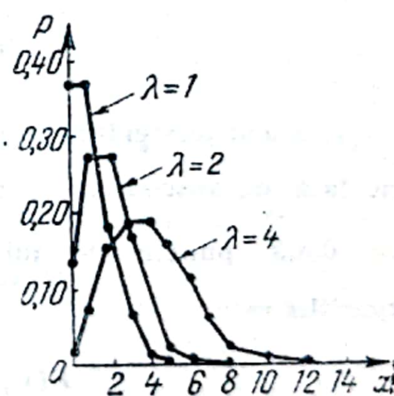


Fig. I. 14

În fig. I.14 sînt redate cîteva exemple de repartiții Poisson.

12.8.2. **Repartițiile *n*-dimensionale discrete.** Sînt generalizări ale repartițiilor unidimensionale discrete. Probabilitățile respective sînt date prin formulele următoare:

Repartiția polinomială

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{s!}{x_1!\, x_2\eta \ldots x_n!;} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \ldots \theta_n^{x_n}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = 0, 1,2, \ldots; \quad \sum_{i=0}^{n} x_i = s; \quad \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1; \quad \theta_i \geqslant 0, \quad i = 2, \ldots n.$$

Repartiția hipergeometrică n-dimensională

$$p(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{C_{N_1}^{x_1} C_{N_2}^{x_2} \ldots C_{N_n}^{x_n}}{C_N^s}; \quad x_1 x_2, \ldots x_n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = s, \quad \sum_{i=1}^{n} N_i = N.$$

Amîndouă aceste repartiții corespund schemei sau urnei lui Bernoulli care conține N obiecte avînd n proprietăți și anume N_1 obiecte cu proprietatea A_1, N_2 obiecte cu proprietatea A_2 etc. $N_1 + N_2 + .. + N_n = N$. Se fac s extrageri succesive de cîte un obiect, iar $p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ este probabilitatea ca din s obiecte extrase, x_1 să posede proprietatea A_1, x_2 proprietatea A_2 etc., știind că $\theta_1 = N_1/N$, $\theta_2 = N_2/N, \ldots$ Dacă după fiecare extragere, obiectul extras este restituit colectivității inițiale, se obține repartiția polinomială, iar dacă obiectul extras nu este restituit, se obține repartiția hipergeometrică n-dimensională.

Repartiția n-dimensională Poisson

$$p(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\lambda_1^{x_1} \lambda_2^{x_2} \ldots \lambda_n^{x_n}}{x_1! x_2! \ldots x_n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}, \; x_1, x_2, \ldots x_n = 0,1,2, \ldots$$

$$\lambda_k > 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

12.8.3. **Repartiții unidimensionale continue.** Se utilizează mai frecvent următoarele tipuri de repartiții unidimensionale continue.

12.8.3.1. **Repartiția normală** (Laplace, Gauss). Densitatea repartiției normale *cu centrul în valoarea medie* $\bar{x}$ *și dispersia* σ^2 este:

$$f(x; \bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}.$$

Graficul acestei funcții, cunoscut și sub denumirea de „clopotul lui Gauss”, este simetric față de abscisa $x = \bar{x}$ a valorii maxime $f(x = \bar{x}; \bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0,39894}{\sigma}$ și are două puncte de inflexiune la $x = \bar{x} \pm \sigma$, iar $\lim_{x \to \infty} f(x; \bar{x}, \sigma^2) = 0$. Funcția de repartiție este

$$F(x; \bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Obișnuit se găsesc intabulate funcțiile $f(u; 0,1)$ și $F(u; 0,1)$, notate mai simplu cu $f(u)$, respectiv $F(u)$, care definesc *repartiția normală normată* (fig. I.15). Trecerea la expresiile inițiale ale acestor funcții este dată de relațiile:

$$(x; \bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}; 0,1\right); \quad F(x; \bar{x}, \sigma^2) = F\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}; 0,1\right),$$

cu schimbarea de variabilă $u = (x - \bar{x})/\sigma$. Repartiția normală normată are centrul în $u = 0$ și dispersia egală cu 1.

Momentele centrate sînt : $\mu_r = \begin{cases} 0 & \text{dacă } r = 2p + 1 \\ (r-1)!\,\sigma^r, & \text{dacă } r = 2p;\ p = 1, 2 \ldots. \end{cases}$

12.8.3.2. **Repartiția Student cu m grade de libertate.** Este definită prin densitatea de repartiție

$$f_m(x) = \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-2}{2}\right)!\sqrt{m\pi}}\left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}},$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

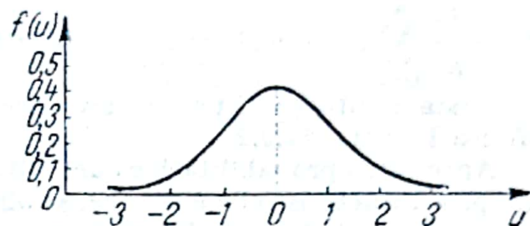


Fig. I.15

Cazul particular $m = 1$ definește *repartiția Cauchy.*

Graficul acestei funcții este mai aplatisat în comparație cu acela al densității repartiției normale și tinde către acesta pentru $m \to \infty$. Caracteristici numerice :

$$\bar{x} = 0;\ \sigma^2 = \frac{m}{m-2},\ (m > 2);\ \alpha_{2r} = \mu_{2r} = \frac{1.3 \ldots (2r-1)}{(m-2)(m-4)\ldots(m-2r)}\, m^r$$

$$(2r < m)$$

Repartiția Student poate fi interpretată ca repartiția de ansamblu a unei variabile aleatoare ξ avînd expresia $\xi = \xi_0 / \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2}$, unde $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ sînt variabile aleatoare independente, avînd repartiții normale și normate.

12.9. Noțiuni de statistică matematică

12.9.1. **Problemele statisticii matematice ; repartiții teoretice și empirice.** Obiectul statisticii matematice constă în prelucrarea metodelor de analizare a rezultatelor observațiilor fenomenelor de masă și în stabilirea metodelor de planificare a acestor observații. Spre deosebire de calculul probabilităților, care operează cu caracteristici ale repartițiilor teoretice ale mărimilor aleatoare, statistica matematică se ocupă cu obținerea, prelucrarea și interpretarea caracteristicilor *repartițiilor empirice* și găsirea unor repartiții teoretice de probabilitate, corespunzătoare acestora.

În unele cazuri, pe baza unor considerații generale teoretice, aspectul funcției de repartiție poate fi prognosticat, fiind necesar să se aproximeze apoi parametrii necunoscuți ai repartiției și să se evalueze intervalul de siguranță (sau de „încredere") al valorilor găsite Astfel, dacă se poate afirma anticipat că repartiția unei variabile aleatoare este normală, atunci problema constă în găsirea valorii medii și a dispersiei și mai exact, în stabilirea intervalului de încredere în care se situează acești parametri, cu o probabilitate impusă înainte.

Se presupune că rezultatele a n măsurători au dat *seria statistică* $x_1, x_2, \ldots x_n$, pentru variabila aleatoare ξ.

Caracteristicile cele mai importante ale unei repartiții empirice sînt *valoarea medie* $\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ și *evaluarea nedeplasată a dispersiei* $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^*)^2$. În afară de aceasta, se utilizează pentru descrierea repartiției empirice și alte caracteristici numerice definite la pct. 12.5.2.

Aprecierea probabilității ca anumite caracteristici teoretice să fie cuprinse în intervale date prin caracteristicile empirice, se obține prin utilizarea unor formule corespunzătoare, dintre care mai des folosită este:

$P\left(\bar{x}^* - \frac{t_1 s}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \bar{x}^* + \frac{t_2 s}{\sqrt{n}}\right) = F_{n-1}(t_2) - F_{n-1}(t_1)$, unde $F_n(t)$ este funcția de repartiție Student cu n grade de libertate.

12.9.2. **Evaluarea concordanței repartițiilor empirice cu cele teoretice.** Confruntarea și stabilirea unor criterii de concordanță a repartițiilor teoretice cu cele empirice reprezintă o problemă complexă a statisticii matematice. Simpla apropiere a celor două curbe, nu este suficientă pentru a hotărî asupra unei reprezentări reușite a repartiției empirice. Deoarece parametrii repartiției teoretice nu sînt cunoscuți anterior, urmează a se presupune că aceștia coincid cu valorile găsite empirice ale parametrilor. Însă aceste valori sînt mărimi aleatoare, susceptibile de o împrăștiere cu atît mai mare, cu cît numărul n al observațiilor este mai mic. O curbă teoretică de repartiție, construită după o anumită curbă empirică rezultată dintr-o serie statistică, poate să difere substanțial de curbele empirice construite după alte serii statistice ale aceleiași variabile aleatoare.

Există diferite procedee de evaluare a apropierii dintre două repartiții, numite *criterii de concordanță.*

Criteriul lui Kolmogorov, frecvent utilizat, permite de a stabili apropierea funcției de repartiție teoretică $F(x)$ de funcția de repartiție empirică $F^*(x)$, după diferența cea mai mare dintre ordonatele acestora $d_n = \max|F(x) - F^*(x)|$, presupunînd că cele două funcții sînt continue. Criteriul amintit dă probabilitatea

$$\lim_{n\to\infty} P\left(d_n \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = K(\lambda). \text{ unde } K(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Funcția lui Kolmogorov $K(\lambda)$ este intabulată în diferite lucrări [1].

Notînd cu q probabilitatea rezultatului $d_n > \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ se determină λ din condiția $q = P\left(d_n > \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = 1 - K(\lambda) \leqslant \varepsilon$. De obicei, ipotezele făcute asupra unei repartiții teoretice pe baza datelor statistice pot fi acceptate, dacă se ia $\varepsilon = 0{,}005$.

13. METODE NUMERICE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

13.1. Generalități

Metodele de rezolvare numerică a sistemelor liniare se împart în : 1) *metode exacte*, care conduc la rezolvarea problemei cu ajutorul unui număr finit de operații aritmetice simple și 2) *metode iterative*, care servesc la rezolvarea aproximativă a problemei, soluția sistemului de ecuații fiind limita unor aproximații succesive, obținute prin repetarea aceluiași algoritm.

Dintre sursele de erori asupra soluției, acelea care sînt legate de însăși structura sistemului de ecuații se datorează ,,nestabilității'' acestuia : variații mici ale termenilor liberi sau ale coeficienților necunoscutelor, produc variații mari ale soluției. Nestabilitatea sistemului este cauzată de o alcătuire necorespunzătoare a matricei acestuia. Matricea unui sistem nestabil de ecuații se numește ,,rău-condiționată''.

13.2. Condiționarea matricelor sistemelor de ecuații

Fie sistemul de ecuații $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, unde : $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{x} = [x_i]$, $\mathbf{b} = [b_j]$. Notînd $\mathbf{A}^{-1} = [\alpha_{ij}]$, influența variațiilor elementului a_{ij}, sau a termenului liber b_j, asupra necunoscutei x_k este dată de formulele $\partial x_k/\partial a_{ij} = -\alpha_{ki}\, x_j$ și $\partial x_k/\partial b_j = \alpha_{kj}$. Rezultă că o matrice inversă $\mathbf{A}^{-1}$ avînd elemente mari în valoare absolută, este în general rău-condiționată. Trebuie remarcat că o valoare absolută mică a $\det(\mathbf{A})$ are drept efect producerea de valori absolute mari ale elementelor matricei $\mathbf{A}^{-1}$; ca reper de comparație, valoarea $\det(\mathbf{A})$ trebuie comparată cu puterea a n—a a elementului matricei $\mathbf{A}$, avînd valoarea absolută maximă.

În literatura de specialitate se dau formule pentru diferiți *indici de rea-condiționare* a unei matrice $\mathbf{A}$, prezentînd mai mult o valoare informativă generală. Mai cunoscuți sînt următorii :

$$\nu(\mathbf{A}) = \frac{1}{n} N(\mathbf{A})\, N(\mathbf{A}^{-1})\,; \quad \mu(\mathbf{A}) = \frac{1}{n} M(\mathbf{A})\, M(\mathbf{A}^{-1})\,; \quad \rho(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|},$$

unde : $N(\mathbf{A}) = \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$, $M(\mathbf{A}) = n \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$, $\{\lambda_i\}$ fiind spectrul matricei $\mathbf{A}$. Între acești indici există relațiile : $\nu(\mathbf{A}) \leqslant \mu(\mathbf{A}) \leqslant n^2\, \nu(\mathbf{A})$; $\rho(\mathbf{A}) \leqslant n\, \nu(\mathbf{A})$.

Toți indicii menționați au valoarea minimă egală cu 1 și ating acest minim de exemplu pentru orice matrice ortogonală.

13.3. Metoda eliminării (Gauss)

Fie sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} E_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n &: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}\right\} \qquad (I.19)$$

Cu ajutorul ecuației E_1 se elimină x_1 din celelalte ecuații. Se împarte E_1 la $a_{11}(a_{11} \neq 0)$ și apoi se înmulțește pe rînd cu $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ și se scade din ecuațiile $E_2, E_3, \ldots, E_n$. Notîndu-se cu $S_n(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ sistemul inițial, prin operațiile menționate se obține sistemul $S_{n-1}\left(\frac{1}{a_{11}} E_1,\ E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1,\ E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1,\ \ldots,\ E_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} E_1\right)$ care se notează $S_{n-1}(E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, E_3^{(1)}, \ldots, E_n^{(1)})$. Coeficienții ecuațiilor modificate se notează cu același indice superior ca și aceste ecuații.

În continuare, cu ajutorul ecuației $E_2^{(1)}$ se elimină analog x_2 din ecuațiile $E_3^{(1)}, \ldots, E_n^{(1)}$, găsindu-se sistemul $S_{n-2}(E_1^{(1)}, E_2^{(2)}, E_3^{(2)}, \ldots, E_n^{(2)})$. Procedînd la fel mai departe, ultimul sistem $S_1(E_1^{(1)}, E_2^{(2)}, \ldots, E_n^{(n)})$ are o formă triunghiulară : $E_n^{(n)}$ conține numai necunoscuta x_n, $E_{n-1}^{(n-1)}$ conține x_{n-1} și x_n etc. Coeficienții $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)} \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$ cu care se împart ecuațiile pentru fiecare treaptă de eliminare, se numesc *elemente conducătoare*.

În etapa a doua se calculează necunoscutele, începînd cu ultima ecuație $E_n^{(n)}$, se trece apoi la $E_{n-1}^{(n-1)}$ etc.

Dacă la o anumită treaptă de eliminare, unii dintre coeficienții cu care trebuie împărțite ecuațiile sînt nuli sau au valori mici, este indicat să se aleagă ca element conducător, acel coeficient care este cel mai mare în modul.

Metoda eliminării mai are încă două variante :

1) Schema cu împărțire și scădere : la fiecare treaptă de eliminare, toate ecuațiile se împart cu coefiienții necunoscutei care trebuie eliminată și apoi una dintre ecuații se scade pe rînd din celelalte.

2) Schema cu înmulțire și scădere : la prima treaptă de eliminare, dacă trebuie de exemplu eliminată necunoscuta x_1 cu ajutorul ecuației E_1, se formează sistemul $S_{n-1}(E_1, a_{11}E_2 - a_{21}E_1, a_{11}E_3 - a_{31}E_1, \ldots, a_{11}E_n - a_{n1}E_1) = S_{n-1}(E_1, E_2^{(1)}, E_3^{(1)}, \ldots, E_n^{(1)})$, în care ecuațiile $E_2^{(1)}, E_3^{(1)}, \ldots, E_n^{(1)}$ nu mai conțin pe x_1. În continuare se procedează analog, până ce se obține sistemul final S_1, de formă triunghiulară.

Calculul unui determinant se poate efectua pe schema de calcul a primei variante, fără termenii liberi ai ecuațiilor, valoarea determinantului fiind egală cu produsul elementelor conducătoare : $\det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \ldots a_{nn}^{(n-1)}$.

13.4. Metoda compactă a eliminării

Această metodă se utilizează dacă minorii principali superiori $a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \det(\mathbf{A})$ sînt toți nenuli. În această metodă se transformă întîi matricea **A** a sistemului într-un produs de două matrice triunghiulare, $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, unde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, iar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Termenii liberi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se notează pentru uniformitate cu $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots a_{n,n+1}$. Elementele b_{ij} și c_{ij} se calculează cu formulele:

$$b_{i1} = a_{i1}; \quad b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}\, c_{kj}, \qquad i \geqslant j \geqslant 1,$$

$$c_{1j} = \frac{a_{ij}}{b_{11}}; \quad c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\, c_{kj}\right), \quad 1 < i < j.$$

Coloana necunoscutelor $\mathbf{x} = [x_i]$ se calculează din lanțul de ecuații $\mathbf{By} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Cx} = \mathbf{y} = [y_i]$, prin formulele:

$$y_1 = \frac{a_{1,n+1}}{b_{11}}; \quad y_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\, y_k\right), \quad i > 1$$

$$x_n = y_n; \; x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}\, x_k, \quad i < n.$$

Dacă matricea **A** este simetrică atunci $a_{ij} = a_{ji}$ și $c_{ij} = b_{ji}/b_{ii}$, $i < j$.

1	2	3	4	5	6
b_{11} 1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
b_{21}	b_{22} 1	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
b_{31}	b_{32}	b_{33} 1	c_{34}	c_{35}	c_{36}
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} 1	c_{45}	c_{46}

Mai sus, se dă un tabel pentru efectuarea calculelor, în cazul unui sistem de 4 ecuații. Coloana a 6-a este coloana de control. Asupra acesteia se efectuează aceleași operații ca și asupra coloanei a 5-a, a termenilor liberi. În prealabil, prin adunarea pe fiecare ecuație a sistemului, a coeficienților necunoscutelor și a termenilor liberi, se calculează o coloană $a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, care servește la calculul coloanei ultime a tabelului. Ca verificări: termenii din ultima coloană trebuie să fie egali cu 1 + suma pe fiecare linie a celorlalți termeni notați cu c; necunoscutele x_i^* calculate cu ultima coloană considerată drept termen liber al sistemului de ecuații, trebuie să satisfacă relațiile $x_i^* = x_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Același procedeu de verificare se utilizează și pentru metoda eliminării descrisă la punctul precedent.

13.5. Metoda iterației

Sistemul dat de ecuații, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, se pune sub „forma convenabilă pentru iterații" $\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$, unde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, $\mathbf{b} = [b_i]$, $\mathbf{c} = [c_i]$, $\mathbf{x} = [x_j]$. Cu ajutorul formulei de recurență $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{Bx}^{(k-1)} + \mathbf{c}$, $k = 1, 2, \ldots$, și plecînd de la o aproximație inițială $\mathbf{x}^{(0)}$, care de multe ori se ia egală cu $\mathbf{c}$, se calculează șirul de aproximații succesive $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$

Dacă aproximațiile succesive au o limită $\xi = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, procesul iterativ este convergent și $\xi = [\xi_i]$ este soluția sistemului dat. Condiția necesară și suficientă ca procesul iterativ descris să fie convergent pentru orice valoare a lui $\mathbf{x}^{(0)}$, este ca toate valorile proprii ale matricei **B** să fie în modul mai mici decît 1. Cum această condiție este greu de verificat, se utilizează următoarele *criterii de convergență*:

I. $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \mu < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ cu delimitarea erorii: $|\xi_i - x_i^{(k)}| \leqslant$

$$\leqslant \mu \max_j |\xi_j - x_j^{(k-1)}|$$

II. $\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \nu < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ cu $|\xi_i - x_i^{(k)}| \leqslant \nu \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - x_i^{(k-1)}|$

III. $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \leqslant \rho < 1,$ cu $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i^{(k)})^2 \leqslant \rho \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i^{(k-1)})^2.$

Metoda iterației se bucură de proprietatea însemnată de ,,autocorectare'': eventualele greșeli de calcul nu influențează rezultatul final, ci numai îl întîrzie, deoarece orice treaptă de iterație poate fi considerată drept aproximație inițială pentru un nou proces de iterație. Datorită acestei proprietăți, nu este necesar ca în primele trepte de iterație să se calculeze cu o exactitate mare (adică cu prea multe cifre semnificative).

Unele procedee practice de iterație nu calculează aproximațiile succesive $\mathbf{x}^{(k)}$ ale soluției, ci *corecțiile succesive* $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$. În acest caz, dacă se pune $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c}$ și $\Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, fomula de recurență a iterațiilor este $\Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{x}^{(k-1)}, k = 1,2, \ldots, \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{Bc}$, iar aproximația a m—a a soluției va fi $\mathbf{x}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$.

Prin acest procedeu, volumul efectiv de calcule se reduce, deoarece corecțiile succesive $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ își micșorează progresiv valoarea, totuși sub această formă, metoda iterației își pierde proprietatea de autocorectare, fapt care poate conduce la o acumulare de erori. Tot datorită lipsei de autocorectare, nu are nici un sens de a se mări precizia de calcul, odată cu creșterea ordinului treptelor de iterație.

13.6. Aducerea sistemelor de ecuații liniare la o formă convenabilă pentru iterație

Convergența procesului iterativ este cu atît mai rapidă, cu cît matricea **A** este mai ,,apropiată'' de matricea-unitate. Dacă această condiție nu este îndeplinită într-o măsură suficientă, o dată cu trecerea de la sistemul inițial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ la sistemul $\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$, este necesar să se procedeze la anumite operații preliminare, care să asigure o bună convergență a metodei. Un procedeu frecvent utilizat, este de a multiplica sistemul inițial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cu matricea nesingulară **H**, trecînd la sistemul echivalent $\mathbf{HAx} = \mathbf{Hb}$. Matricea **H** trebuie să fie cît mai ,,apropiată'' de $\mathbf{A}^{-1}$.

Dacă elementele de pe diagonala matricei **A** predomină ca valoare celelalte elemente, se ia $\mathbf{H} = \mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = [\diagdown a_{ii} \diagdown]$ și cu $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{HA}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$, sistemul $\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$ se scrie explicit

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -(a_{12}/a_{11})x_2 - (a_{13}/a_{11})x_3 - \ldots - (a_{1n}/a_{11})x_n + (b_1/a_{11}) \\ x_2 = -(a_{21}/a_{22})x_1 - (a_{23}/a_{22})x_3 - \ldots - (a_{2n}/a_{22})x_n + (b_2/a_{22}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -(a_{n1}/a_{nn})x_1 - (a_{n2}/a_{nn})x_2 - \ldots\ldots\ldots + (b_n/a_{nn}) \end{array}\right\}$$

Dacă matricea **A** este simetrică, cu $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, condiția necesară și suficientă de convergență a iterațiilor pe acest sistem de ecuații, este ca matricele **A** și $\bar{\mathbf{A}} = 2\mathbf{D} - \mathbf{A}$ să fie pozitiv definite. Cele trei *criterii de convergență* specificate anterior devin aici:

I'. $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}/a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

II'. $\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}/a_{ii}| < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$

III'. $\displaystyle\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} (a_{ij}/a_{ii})^2 < 1.$

Dacă are loc o predominare a elementelor principale asupra celorlalte elemente din matricea **A**, însă nu suficient de puternic, convergență poate fi îmbunătățită luîndu-se de exemplu matricea **H** egală cu inversa matricei cvasidiagonale $[\diagdown \mathbf{A}_i \diagdown]$ unde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \text{ etc., adică } \mathbf{H} = [\diagdown \mathbf{A}_i \diagdown]^{-1} = [\diagdown \mathbf{A}_i^{-1} \diagdown] \text{ cu:}$$

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{\Delta_1}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}, \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \det(\mathbf{A}_1) \text{ etc.}$$

13.7. Metoda Seidel

Metoda Seidel este o metodă modificată de iterație, astfel încît pentru calculul componentei $x_i^{(k)}$ se utilizează componentele $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ și $x_i^{(k-1)}, x_{i+1}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}$, formula de recurență pentru această componentă fiind deci $x_i^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i$. Cele trei criterii de convergență, sub prima sau sub a doua formă, sînt valabile și pentru această metodă, deși condițiile necesare și suficiente de convergență nu sînt aceleași.

13.8. Combinarea unei metode de iterație cu o metodă exactă (rezolvarea în două etape)

În unele cazuri, o parte a sistemului de ecuații nu satisface de loc sau satisface nemulțumitor criteriile de convergență, fiind indicat ca această parte să se rezolve printr-o metodă exactă. În acest scop, prin descompunerea în 4 celule a matricei sistemului $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, sistemul de ecuații $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se poate scrie

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}' + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}'' = \mathbf{b}' \text{ .. ecuațiile } 1, 2, \ldots, m & \text{(I.20 a)} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}' + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}'' = \mathbf{b}'' \text{ .. ecuațiile } m+1, \ldots n, & \text{(I.20 b)} \end{cases}$$

Submatricele $\mathbf{A}_{11}$ și $\mathbf{A}_{22}$ sînt pătrate de ordinul m, respectiv $n-m$, iar $\mathbf{x}' = [x_1\, x_2 \ldots x_m]^T$, $\mathbf{x}'' = [x_{m+1}\, x_{m+2} \ldots x_n]^T$, $\mathbf{b}' = [b_1\, b_2 \ldots b_m]^T$, $\mathbf{b}'' = [b_{m+1}\, b_{m+2} \ldots b_n]^T$.

Se presupune că primul subsistem (I.20 a) satisface mulțumitor criteriilor de convergență, iar al doilea subsistem (I.20 b) se rezolvă printr-o metodă exactă. Uneori, modul de divizare a sistemului inițial în două subsisteme este indicat în aplicațiile tehnice de însăși împărțirea necunoscutelor în două tipuri distincte ca semnificație fizică.

Există în principiu două variante de rezolvare în două etape a sistemului (I.20 a,b), după cum se rezolvă întîi subsistemul (I.20 b) sau subsistemul (I.20 a)

Varianta 1. În etapa I se rezolvă printr-o metodă exactă subsistemul (I.20 b), obținîndu-se $\mathbf{x}''$ în funcție de $\mathbf{x}'$ și soluția se înlocuiește în (I.20 a) iar în etapa II se aplică o metodă de iterație ecuațiilor (I.20 a), care acum conțin numai necunoscutele $\mathbf{x}'$. Acest procedeu este indicat dacă subsistemul (I.20b) poate fi rezolvat ușor printr-o metodă exactă, adică în cazurile cînd conține puține ecuații sau cînd matricea $\mathbf{A}_{22}$ este diagonală sau cvasidiagonală cu celulele de ordin redus.

Varianta 2. În etapa I se rezolvă iterativ subsistemul (I.20 a). În acest scop, se scrie sub forma $\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}' = \mathbf{b}' - \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}''$ și se rezolvă de $n - m + 1$ ori, pentru partea dreaptă egală cu: $\mathbf{b}', -\mathbf{A}_{12}\mathbf{e}^{(1)}, -\mathbf{A}_{12}\mathbf{e}^{(2)}, \ldots, -\mathbf{A}_{12}\mathbf{e}^{(n-m)}$, unde $\mathbf{e}^{(1)} = [1\,0\,0 \ldots 0]^T$, $\mathbf{e}^{(2)} = [0\,1\,0 \ldots 0]^T, \ldots, \mathbf{e}^{(n-m)} = [0\,0\,0 \ldots 1]^T$, găsindu-se soluțiile intermediare $\mathbf{x}'^{(0)}$, $\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}'^{(n-m)}$, astfel încît $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^{(0)} + \mathbf{x}'^{(1)} x_{m+1} + \mathbf{x}'^{(2)} x_{m+2} + \ldots + \mathbf{x}'^{(n-m)} x_n$.
În etapa II, se înlocuiește în (I. 20b) expresia lui $\mathbf{x}'$ în funcție de necunoscutele x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_n$, obținînd astfel un sistem de $n-m$ ecuații cu $n-m$ necunoscute, care se rezolvă printr-o metodă exactă. Valorile găsite pentru $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, servesc pentru calculul primelor m necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_m$, prin înlocuire în expresia lui $\mathbf{x}'$ calculată în prima etapă.

Trebuie remarcat că aceste două variante stau în principiu la baza unor nenumărate metode de calcul al structurilor, de multe ori justificarea algebrică precum și divizarea în două etape a rezolvării fiind mascate de interpretări fizice ale treptelor succesive de calcul.

PARTEA A DOUA

M E C A N I C A

14. PROBLEME GENERALE

14.1. Noţiuni introductive

14.1.1. Obiectul mecanicii. *Mecanica* este o ştiinţă a naturii. Ea studiază legile mişcării mecanice ale corpurilor materiale, prin *mişcare mecanică* înţelegîndu-se schimbarea în timp a poziţiei corpurilor în raport cu un corp numit *reper*. De reper se obişnuieşte a se lega solidar un *sistem de referinţă* sau *sistem de coordonate* (carteziene, polare, cilindrice etc.). Lipsa de mişcare a unui corp faţă de reper caracterizează starea de *repaus* a corpului faţă de acest reper.

În mecanică se neglijează uneori o dimensiune, două dimensiuni sau toate cele trei dimensiuni ale unui corp, în limitele impuse de obţinerea unor rezultate acceptabile într-o anumită problemă. Astfel se întîlnesc probleme privind *placa, bara*, respectiv *punctul material.*

Mecanica este o disciplină cu caracter deductiv, construită prin mijloace matematice pe baza unui sistem de noţiuni şi principii fundamentale de natură experimentală. În mecanică, ca în orice alte ştiinţe ale naturii, rezultatele obţinute pe cale deductivă trebuie confruntate permanent cu rezultatele experimentale.

14.1.2. Subdiviziunile mecanicii. Mecanica se împarte în trei mari ramuri : 1) *mecanica teoretică*, numită deseori *mecanica raţională* sau *mecanica generală*, care se ocupă cu studiul mişcării corpurilor admise ca fiind perfect rigide ; 2) *mecanica corpurilor solide deformabile* ; 3) *mecanica fluidelor.*

În cele ce urmează, mecanica teoretică sau raţională va fi desemnată pe scurt prin denumirea de **mecanică.**

Legat de evoluţia istorică a mecanicii, precum şi de consideraţii metodologice, studiul acestei ştiinţe se efectuează în trei etape : statica, cinematica şi dinamica. *Statica* studiază problemele de echilibru ale corpurilor. În *cinematică* se studiază mişcările posibile ale corpurilor şi parametrii care caracterizează aceste mişcări, fără a se lua în considerare dependenţa mişcărilor de forţele ce le condiţionează. *Dinamica* studiază mişcările efective ale corpurilor sub acţiunea forţelor. În mecanică mai intervin şi următoarele probleme generale, legate într-o anumită măsură cu întregul cuprins al disciplinei : *geometria maselor* (centru de greutate şi momente de inerţie), *probleme de echivalenţă a sistemelor de forţe* şi *probleme privind efectul legăturilor dintre corpuri.*

14.1.3. Noţiuni şi principii fundamentale ale mecanicii. Fără a discuta aici construcţia axiomatică a mecanicii şi conţinutul filozofic al noţiunilor de bază, se amintesc următoarele :

Noţiunile fundamentale ale mecanicii sînt : spaţiul, timpul şi masa, celelalte noţiuni ca : forţa, viteza, lucrul mecanic etc., numindu-se *noţiuni derivate.*

Principiile fundamentale sau *postulatele* mecanicii sînt: 1) *principiul inerției*: un punct material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă, atît timp cît nu intervine nici o forță care să-i modifice această stare. 2) *principiul acțiunii* este redat prin relația vectorială $m\bar{a} = \bar{F}$, unde $\bar{a}$ este accelerația imprimată de o forță $\bar{F}$, unui punct material liber de masă m. 3) *principiul acțiunilor reciproce*: acțiunile mecanice reciproce a două puncte materiale sînt egale și direct opuse. 4) *principiul paralelogramului forțelor* afirmă ca două forțe aplicate unui punct material au același efect mecanic ca rezultanta acestora, construită după regula paralelogramului, cunoscută din calculul vectorial (v. cap. 4).

14.1.4. **Forța.** În mecanică se admite că forța este o mărime fizică servind la măsurarea interacțiunii mecanice dintre corpuri. Însemnătatea acestui concept constă tocmai în faptul că el permite rezolvarea cantitativă a problemelor de mecanică, fără a fi necesar să se cunoască mecanismul intim al interacțiunii, însă condiționînd prezența forței de existență interacțiunii mecanice dintre corpuri. Forța, ca mărime fizică, se reprezintă vectorial printr-un vector alunecător, datorită corespondenței biunivoce dintre caracteristicile specifice ale forțelor și operațiile cu forțe, rezultate experimental și sintetizate în principiile fundamentale, și dintre caracteristicile specifice ale vectorilor alunecători și operațiile cu acești vectori.

Pentru a preciza și discuta acțiunea forțelor asupra corpurilor rigide, este necesar să se țină seama de mărimea mecanică numită *cuplu*, precum și de noțiunea de *moment al forței* (v. pct. 14.4).

14.1.5. **Sisteme de referință inerțiale.** Se numește *sistem de referință inerțial* sau *reper inerțial*, un sistem de referință față de care se verifică principiul inerției. În exprimările curente, se acceptă, adesea pentru sistemul inerțial, denumirea de „sistem fix", iar pentru cel neinerțial — denumirea de „sistem mobil". Posibilitatea existenței unui sistem inerțial este postulată în mecanica newtoniană prin extrapolarea rezultatelor generalizate ale experiențelor mecanice. Experimentele efective nu pot pune în evidență decît sisteme de referință mai mult sau mai puțin „aproximativ inerțiale". Astfel, se știe că pentru studierea majorității problemelor tehnice la suprafața Pămîntului, se poate considera drept inerțial, un sistem solidar cu Pămîntul, rezultatele problemelor rezolvate cu această ipoteză fiind suficient de apropiate (din acest punct de vedere) de rezultatele măsurate experimental. Pentru anumite probleme tehnice (măsurători geodezice, mișcări balistice pe distanțe mari, conducerea aeronavelor etc.), în problemele legate de conducerea navelor spațiale și în mecanica cerească, este însă necesar să se utilizeze un reper inerțial „mai bun" avînd originea în centrul de greutate al sistemului solar (care se găsește în apropierea centrului Soarelui) și axele îndreptate spre așa-numitele „stele fixe".

Orice sistem de referință avînd o mișcare de translație rectilinie și uniformă față de un sistem inerțial, este de asemenea un sistem inerțial.

14.1.6. **Observație asupra semnificației operațiilor vectoriale în mecanică.** Operațiile cu vectori sînt definite în calculul vectorial (v. cap. 4) ca operații asupra vectorilor liberi. Aceste operații sînt însă utilizate în mecanică și asupra mărimilor mecanice reprezentate prin vectori alunecători (forța, vectorul vitezei unghiulare etc.). sau prin vectori legați (viteza, accelerația etc.). Pentru ca astfel de operații să aibă sens în mecanică, trebuie înțeles că acestea se efectuează *ca și cînd* vectorii respectivi ar fi vectori liberi.

14.2. Notații și simboluri

Notațiile și simbolurile tradiționale în mecanică sînt definite la apariția acestora în text. Pentru a evita repetarea unor formulări sau precizări intervenind mai frecvent, se mai folosesc aici încă și următoarele notații și simboluri:

1) (. .) — notație care indică repetarea încă de două ori a expresiei după care este dispusă, prin permutări circulare ale coordonatelor x, y, z, sau ale altor trei simboluri asociate acestor trei coordonate.

2) $\sim$ — semn indicînd echivalența a două sisteme de forțe (v. pct. 14.4.1).

3) $Oxyz$ — sistem cartezian de coordonate, considerat inerțial (v. pct. 14.1.5), dacă nu se specifică altfel.

4) P — punct material avînd vectorul de poziție $\overline{OP} = \bar{r}(x, y, z)$ și masa m.

5) $\mathscr{P}$ — sistem mecanic (v. pct. 14.7.1) alcătuit din punctele materiale P_i, avînd vectorii de poziție $\overline{OP_i} = \bar{r}_i\ (x_i, y_i, z_i)$ și masele m_i, $i = 1,2, \ldots$.

6) C — corp rigid.

7) B — corp de bază sau corp de reazem, considerat convențional drept necondiționat fix în problema respectivă.

8) $\mathscr{S}$ — sistem mecanic (v. pct. 14.7.1) alcătuit din corpuri rigide, dintre care unele pot fi asimilate punctelor materiale.

9) G — centrul de greutate (centrul maselor) al unui sistem mecanic, cu vectoru de poziție $\overline{OG} = \bar{r}_G(x_G, y_G, z_G)$.

10) $\bar{F}(X, Y, Z)$ — forță aplicată în punctul material P.

11) $\mathscr{F}$ — sistem de forțe $\bar{F}_i(X_i, Y_i, Z_i)$, $i = 1, 2\ \ldots$

12) $\bar{\mathscr{M}}_0(\mathscr{M}_x, \mathscr{M}_y, \mathscr{M}_z)$ — a) momentul forței $\bar{F}$ în raport cu punctul O; b) momentul rezultant al forțelor unui sistem de forțe în raport cu punctul O.

13) $\bar{\mathscr{R}}(X, Y, Z)$ — Vectorul rezultant al unui sistem de forțe.

14) $\Sigma\mathscr{P}$ sau $\Sigma\mathscr{F}$ — sumă extinsă asupra sistemului mecanic $\mathscr{P}$, respectiv asupra sistemului de forțe $\mathscr{F}$.

15) M — masa totală a unui sistem mecanic $\mathscr{P}$ ($M = \Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i$), sau în particular, masa unui corp C.

16) $\bar{\mathscr{R}}^i$, $\bar{\mathscr{M}}_0^i$, $\mathscr{F}^i$ etc., respectiv $\bar{\mathscr{R}}^e$, $\bar{\mathscr{M}}_0^e$, $\mathscr{F}^e$ etc. — indicii superiori i sau e arată cuprinderea numai a forțelor interioare, respectiv exterioare, din totalitatea forțelor acționînd un anumit sistem sau subsistem mecanic.

17) $\bar{\mathscr{R}}^a$, $\bar{\mathscr{M}}_0^a$, etc., respectiv $\bar{\mathscr{R}}^l$, $\bar{\mathscr{M}}_0^l$ etc. — indicii superiori a sau l arată cuprinderea numai a forțelor active, respectiv numai a forțelor de legătură, din totalitatea forțelor acționînd un sistem sau un subsistem mecanic, un corp rigid sau un punct material.

14.3. Geometria maselor. (Centru de greutate și momente de inerție)

14.3.1. **Centru de greutate.** Un sistem mecanic dat $\mathscr{P}$ determină un punct G numit *centrul maselor*, avînd vectorul de poziție $\bar{r}_G = (\Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i \bar{r}_i)/M$ și coordonatele carteziene $x_G = (\Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i\, x_i)/M(\ldots)$. Rezultanta oricărui sistem de forțe masice (adică proporționale cu masele punctelor de aplicație) paralele și în particular a forțelor gravitaționale acționînd asupra unui sistem mecanic se aplică în centrul maselor acestui sistem. De aici, identitatea

dintre noţiunile de centru al maselor şi *centru de greutate.* În cadrul acestei secţiuni, se va utiliza în continuare numai denumirea de „centru de greutate".

Dacă sistemul $\mathscr{P}$ formează un corp C cu o distribuţie continuă a maselor, avînd masa specifică $\rho = \rho(x, y, z)$, atunci $x_G = \left(\int \rho x dv\right)/M(. .)$ pentru corpuri tridimensionale, $x_G = \left(\int \rho' x da\right)/M(. .)$ pentru plăci şi $x_G = \left(\int \rho'' x ds\right)/M(. .)$ pentru bare, unde s-a notat cu ρ' şi ρ'' masa specifică „superficială" a plăcilor, respectiv masa specifică „liniară" a barelor, iar cu dv, da, ds, elementul de volum, de arie şi respectiv de lungime; integralele se înţeleg extinse la volumul corpului V, respectiv la aria plăcii A sau la lungimea barei L. La un *corp omogen* (care are aceeaşi masă specifică în toate punctele sale):

$$x_G = \left(\int x dv\right)/V(. .),\ x_G = \left(\int x da\right)/A(. .) \text{ şi respectiv } x_G = \left(\int x ds\right)/L(. .).$$

14.3.2. **Proprietăţi geometrice ale centrului de greutate.** Centrul de greutate al unui sistem mecanic $\mathscr{P}$,

— rigid, este invariabil legat de aceste puncte;

— se găseşte în interiorul oricărei suprafeţe convexe închise care conţine toate punctele sistemului;

— coplanare sau colineare, este situat în acelaşi plan, respectiv pe aceeaşi dreaptă cu punctele sistemului;

— care admite un plan, sau o axă, sau un centru de simetrie materială, se găseşte pe acel plan, respectiv pe acea axă sau în acel centru;

— considerat descompus într-un număr de subsisteme mecanice $\mathscr{P}_j$ de mase M_j şi centre de greutate G_j, $j = 1, 2, \ldots,$ coincide cu centrul de greutate al maselor M_j presupuse concentrate în punctele G_j. Această proprietate este deosebit de importantă pentru calculul practic al poziţiei centrului de greutate. Astfel, un corp de formă oricît de complicată poate fi descompus în mai multe corpuri avînd exact sau aproximativ, forme geometrice simple, cu centrele respective de greutate de poziţii cunoscute sau uşor de calculat.

14.3.3. **Momente de inerţie.** Pentru un sistem de puncte materiale $\mathscr{P}$ se definesc următoarele momente de inerţie: $J_x = \Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i(y_i^2 + z_i^2)$ (. .) — *momente de inerţie axiale*, $J_0 = \Sigma_{\mathscr{P}} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ — *moment de inerţie polar*, $J_{xy} = \Sigma_{\mathscr{P}}\, m_j\, x_i\, y_i$ (. .) — *momente de inerţie centrifugale.* Relaţii: $2J_0 = J_x + J_y + J_z$, $J_x + J_y \geqslant J_z$ (. .) $J_x \geqslant 0$ (. .), $J_0 \geqslant 0$, $J_{xy} \lesseqgtr 0$(. .). Se numesc *raze de giraţie* axiale, respectiv polare, mărimile $i_x = \sqrt{J_x/M}$ (. .), $i_0 = \sqrt{J_0/M}$.

Dacă sistemul mecanic este un corp continuu, cele trei formule de definiţie, ale momentelor de inerţie devin: $J_x = \int (y^2 + z^2)\, \rho\, dv$ (. .), $J_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\rho\, dv$, $J_{xy} = \int xy\, \rho\, dv$ (. .), cu aceleaşi notaţii ca la pct. 14.3.1. În cazul plăcilor sau al barelor, ρ se înlocuieşte cu ρ', sau ρ'', iar dv se înlocuieşte cu da sau cu ds, analog cu cele arătate la pct. 14.3.1.

Pentru *corpuri omogene*, orice moment de inerţie poate fi scris sub forma $J = (\rho$, sau ρ', sau $\rho'')\, I$, unde I se numeşte *moment de inerţie geometric.*

În tabelul I. 11 sînt date ariile, centrele de greutate și momentele de inerție geometrice pentru figurile plane uzuale iar în tabelul I.12 sînt date ariile, volumele, centrele de greutate și momentele de inerție ale corpurilor geometrice.

14.3.4. Variația momentelor de inerție la schimbarea axelor. Este utilă stabilirea de formule pentru variația momentelor de inerție la schimbarea axelor.

14.3.4.1. Translația axelor. Triedrul $O'x'y'z'$ este paralel cu triedrul $Oxyz$, iar originea O' are coordonatele (a, b, c) față de $Oxyz$. Atunci : 1) $J_{x'} = J_x + M(b^2 + c^2) = J_x + Md_x^2$, dacă axa Ox trece prin G, d_x fiind distanța între axele Ox și $O'x'$ (. .); 2) $J_{0'} = J_0 + M(a^2 + b^2 + c^2) = J_0 + Md^2$, dacă O coincide cu G, d fiind distanța între O și O'; 3). $J_{x'y'} = J_{xy} + Mab$, dacă G este situat pe Oz (. .).

14.3.4.2. Rotația axelor. În raport cu o axă Δ prin O, avînd cosinușii directori α, β și γ : $J_\Delta = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\beta\gamma J_{yz} - 2\gamma\alpha J_{zx}$.

14.3.5. Elipsoid de inerție. Axe principale de inerție. Variația lui J_Δ pentru diferite poziții ale axei Δ trecînd prin O, se poate reprezenta geometric stabilind o corespondență între valorile J_Δ și lungimile unor segmente OQ luate pe Δ, prin relația $OQ = H/\sqrt{J_\Delta}$, unde H este o constantă de scară. Locul geometric al punctelor Q este *elipsoidul de inerție* corespunzător punctului O, avînd ecuația $J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = H^2$. Pentru diferite valori date lui H, se obțin elipsoide asemenea. Axele de simetrie ale elipsoidului de inerție, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, se numesc *axe principale de inerție*; acestea formează un triedru ortogonal și posedă următoarele două proprietăți echivalente una cu alta : în raport cu axele principale de inerție, 1) momentele centrifugale sînt nule, 2) momentele de inerție axiale, numite *momente principale de inerție*, au valori staționare, dacă se consideră mulțimea valorilor J_Δ față de toate axele Δ care trec prin O. Fiind dat un sistem mecanic $\mathscr{P}$, pentru orice punct O există un sistem de axe principale $O\xi\eta\zeta$. Dacă O coincide cu G, elipsoidul corespunzător se numește *elipsoid central de inerție*, iar axele sale de simetrie — *axe centrale principale de inerție*. Ecuația elipsoidului raportată la axele principale este $J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = H^2$.

14.3.6. Momente de inerție la sisteme plane de puncte materiale. Luînd planul Oxy în planul sistemului de puncte, formulele de definiție devin : $J_x = \Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i y_i^2$, $J_y = \Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i x_i^2$ $J_z = \Sigma_{\mathscr{P}} m_i(x_i^2 + y_i^2) = J_0$, $J_{xy} = \Sigma_{\mathscr{P}}\, m_i x_i y_i$, $J_{yz} = J_{zx} = 0$. Celelalte formule pentru corpuri continue (în cazul de față—plăci plane sau bare plane) neomogene sau omogene, se scriu analog cu formulele respective de la pct. 14.3.3. Variația momentelor de inerție axiale față de axe Δ din planul Oxy trecînd prin O, este dată de expresia $J_\Delta = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$, unde φ este unghiul dintre Ox și Δ.

Elipsa de inerție este intersecția cu planul Oxy a elipsoidului de inerție pentru punctul O. Raportată la axele principale $O\xi\eta$ și cu $H^2 = Mi_\xi^2 i_\eta^2$, ecuația elipsei de inerție este $(\xi^2/i_\eta^2) + (\eta^2/i_\xi^2) = 1$. Unghiul θ dintre axa Ox și axa $O\xi$ sau axa $O\eta$ este dat de formula $\operatorname{tg} 2\theta = 2J_{xy}/(J_y - J_x)$.

14.4. Probleme de echivalență a sistemelor de forțe

14.4.1. Sisteme echivalente de forțe. Un sistem de forțe $\mathscr{F}$ aplicat unui corp rigid, produce un anumit efect mecanic asupra acestuia (o anumită mișcare, o schimbare a mișcării existente, sau o stare de repaus), așa cum rezultă din studiul dinamic al acestei situații. Dacă un alt sistem $\mathscr{F}'$ produce în aceleași condiții, asupra aceluiași corp C, un efect mecanic identic, se spune că $\mathscr{F}$ și $\mathscr{F}'$ sînt *sisteme echivalente de forțe* și se notează $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}'$. Relația de echivalență este reflexivă : $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}$, simetrică : $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}' \Rightarrow \mathscr{F}' \sim \mathscr{F}$ și tranzitivă : $(\mathscr{F} \sim \mathscr{F}', \mathscr{F}' \sim \mathscr{F}'') \Rightarrow \mathscr{F} \sim \mathscr{F}''$.

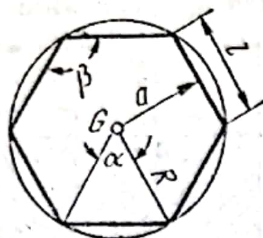
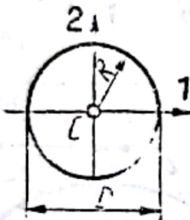
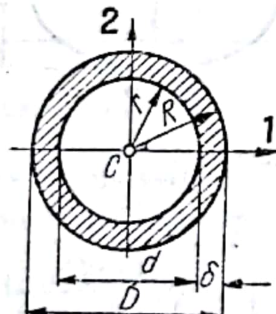
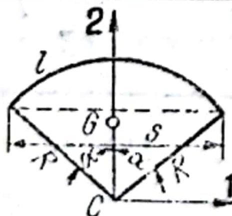
Tabelul 1.11

Caracteristici utilizate în Mecanica construcțiilor pentru figuri geometrice plane (sau secțiuni plane prin corpuri) și corpuri geomerice (arii, volume, centre de greutate, momente de inerție și module de rezistență)

A. Arii ș centre de greutate ale figurilor plane

Notații generale: h — înălțimea, R, r — raze ale unor cercuri

Denumire	Notații și relații	Aria, A	Poziția centrului de greutate, G
1 Triunghi	AA' — mediana din vîrful A; x_A și y_A, x_B și y_B, x_C și y_C — coordonatele vîrfurilor A, B, C, într-un sistem cartezian ortogonal de axe din planul triunghiului $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$	$A = \frac{1}{2}ah =$ $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$, $y_G = \frac{1}{2}(y_A + y_B + y_C)$ G este la intersecția medianelor $GA' = \frac{1}{3}AA'$; $h_G = \frac{h}{3}$
2 Paralelogram		$A = bh$	La intersecția diagonalelor AC și BD
3 Trapez		$A = \frac{a+b}{2}h$	La intersecția dreptelor MN $(AM = MB = \frac{b}{2}$, $CN = ND = \frac{a}{2})$ și EF $(BE = a$, $EF = b)$ $h_G = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$

4	 Poligon regulat	n-numărul laturilor $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (în radiani) $\beta = \frac{(n-2)\pi}{n}$ (în radiani) $l = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$ $a = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ — apotema	$A = \frac{nl^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} =$ $= \frac{nR^2}{2} \sin\alpha = \frac{n\,la}{2}$	În centrul cercului circumscris
5	 Cerc		$A = \pi R^2$	În centrul cercului
6	 Coroană circulară	$\rho = \frac{R + r}{2}$ — raza medie	$A = \pi(R^2 - r^2) = 2\pi\rho\delta$	În centrul C al coroanei
7	 Segment de cerc	$h = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$ $s = 2\sqrt{h(2R-h)} = 2R\sin\alpha$ $l = 2\alpha R$ — lungimea arcului	$A = \frac{R^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) =$ $= \frac{R(l-s) + sh}{2}$ Pentru α mic: $A \approx \frac{2}{3} sh$	$CG = \frac{s^3}{12A} = \frac{2R^3\sin^3\alpha}{3A}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.11 (continuare)

Denumire	Notaţii şi relaţii	Aria, A	Poziţia centrului de greutate G,
8 Sector de cerc	s, — idem ca la pct. 7	$A = \frac{1}{2} lR = R^2\alpha$ (α în radiani)	$CG = \frac{2Rs}{3l} = \frac{R^2 s}{3A} = \frac{2R \sin\alpha}{3\alpha}$ La semicerc: $CG = \frac{4R}{3\pi}$
9 Elipsă	Pentru $a \geq b$, axele *1* şi *2* după semiaxele a, respectiv b	$A = \pi ab$	În centrul elipsei
10 Semisegment de parabolă	Ecuaţia parabolei: $y^2 = \frac{b^2}{a} x$	$A_{OAB} = \frac{2}{3} ab$	$x_G = \frac{3a}{5}$, $y_G = \frac{3b}{8}$ $x_{G'} = \frac{3a}{10}$, $y_{G'} = \frac{3b}{4}$

B. Momente de inerție geometrice ale figurilor plane

Notații: Se utilizează aceleași notații arătate anterior, la denumiri identice ale figurilor. Axele *1* și *2* sînt axe principale de inerție

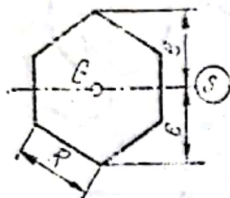
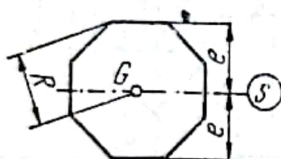
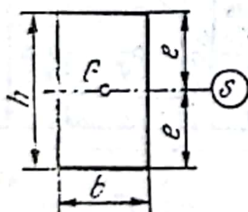
Denumire	Momente de inerție
11 Triunghi	$I_{x'} = \frac{Ah^2}{6}$, $I_{y'} = \frac{A(a_1^3 + a_2^3)}{6a}$, $I_{x''} = \frac{Ah^2}{18}$, $I_G = \frac{A(a^2 + b^2 + c^2)}{36}$
	Pentru orice axă Δ prin G: $I_\Delta = \frac{A(d_A^2 + d_B^2 + d_C^2)}{12}$, unde d_A, d_B, d_C sînt distanțele de la vîrfurile triunghiului la axa Δ
12 Cerc	$I_1 = I_2 = \frac{AR^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4}$
13 Coroană circulară	$I_1 = I_2 = \frac{A(R^2 + r^2)}{4} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$
14 Segment de cerc	$I_1 = \frac{AR^2}{4}\left(1 + \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2(2\alpha - \sin 2\alpha)}\right)$; $I_2 = \frac{AR^2}{4}\left(1 - \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{6(2\alpha - \sin 2\alpha)}\right)$
15 Sector de cerc	$I_1 = \frac{AR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$; $I_2 = \frac{AR^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$; $I_G = \frac{AR^2}{2}\left(1 - \frac{8s^2}{9l^2}\right)$
16 Elipsă	$I_1 = \frac{Ab^2}{4}$, $I_2 = \frac{Aa^2}{4}$
17 Semisegment de parabolă	$I_x = \frac{Ab^2}{5}$, $I_y = \frac{3Aa^2}{7}$, $I_{y'} = \frac{8Aa^2}{35}$, $I_{x''} = \frac{19Ab^2}{320}$, $I_{y''} = \frac{12Aa^2}{175}$

Tabelul I.11 (continuare)

C. Momente de inerție geometrice și module de rezistență ale secțiunilor plane uzuale

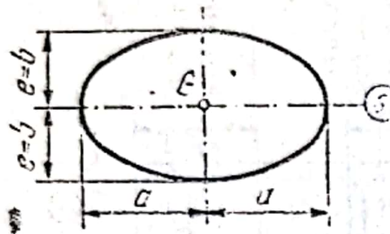
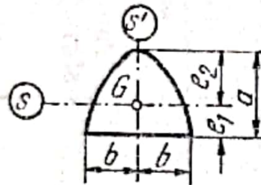
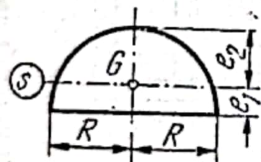
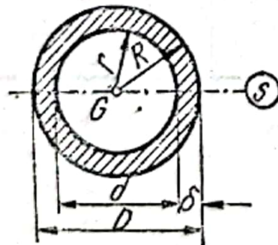
Notații: I, eventual și I' — momente de inerție în raport cu axele s, respectiv s', trecînd prin centrul de greutate G; $W = I/e$, $W' = I'/e'$, respectiv $W_1 = I/e_1$, $W_2 = I/e_2$ — module de rezistență; e, e', e_1, . . . — distanțe de la fibrele cele mai solicitate ale secțiunii la axele neutre s, respectiv s'; aceste distanțe sînt indicate numai în cazurile în care formulele de la pct. 1—10 nu permit calculul lesnicios al acestora

Secțiunea	I, I'; e, e', e_1, e_2; W, W', W_1, W_2
18 Triunghi	$I = \dfrac{bh^3}{36}$, $W_1 = \dfrac{bh^2}{24}$, $W_2 = \dfrac{bh^2}{12}$; La triunghi echilateral: $I \approx 0{,}0181\ b^4$, $e_1 \approx 0{,}5778\ b$, $W_1 \approx 0{,}0313\ b^3$
19 Trapez isoscel	$I = \dfrac{6\,b^2 + 6\,bc + c^2}{36\,(2b + c)}\,h^3$, $W = \dfrac{6\,b^2 + 6\,bc + c^2}{12\,(3\,b + 2\,c)}\,h^2$
20 Hexagon regulat	$I = \dfrac{5\sqrt{3}}{16}R^4 \approx 0{,}541\ R^4$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$, $W = \dfrac{5}{8}R^3 = 0{,}625\ R^3$

21  Hexagon regulat	I — idem ca la pct. 20, $e = R$, $W = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^3 \approx 0{,}5413\ R^3$
22  Octogon regulat	$I = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 \approx 0{,}6381\ R^4$, $e = R \cos \frac{\pi}{8} \approx 0{,}9239\ R$, $W \approx 0{,}6906\ R^3$ R — raza cercului circumscris
23  Dreptunghi	$I = \frac{bh^3}{12}$, $e = \frac{h}{2}$, $W = \frac{bh^2}{6}$
24 Pătrat	$I = \frac{a^4}{12}$; $e = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $W = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \approx 0{,}11785\ a^3$

Tabelul 1.11 (continuare)

Secţiunea	I, I'; e, e', e_1, e_2; W, W', W_1, W_2
25	$I = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$; $e = \frac{H}{2}$; $W = \frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$
26	$I = \frac{H^4 - h^4}{12}$; $e = \frac{H}{2}$; $W = \frac{H^4 - h^4}{6H}$
27	I — idem ca la pct. 26; $e = \frac{H}{2}\sqrt{2}$; $W = \frac{H^4 - h^4}{12\ H}\sqrt{2} \approx 0{,}1179\ \frac{H^4 - h^4}{H}$
28 Cerc	$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4} \approx 0{,}0491\ D^4 \approx 0{,}07854\ R^4$; $W = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi R^3}{4}$ $W \approx 0{,}0982\ D^3 \approx 0{,}7854\ R^3$

29  Elipsă	$I = \pi \frac{ab^3}{4} \approx 0{,}7854\ ab^3$; $W = \frac{\pi\ ab^2}{4} \approx 0{,}7854\ ab^2$
30  Segment de parabolă	$I = \frac{16}{175} a^3 b$; $I' = \frac{4}{15} ab^3$; $e_1 = \frac{2a}{5}$; $e_2 = \frac{3a}{5}$, $W_1 = \frac{8}{35} a^2 b$; $W_2 = \frac{16}{105} a^2 b$
31  Semicerc	$I = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4 \approx 0{,}1098\ R^4$; $e_1 = \frac{4R}{3\pi}$; $e_2 = R - e_1$, $W_1 \approx 0{,}2587\ R^3$; $W_2 \approx 0{,}1908\ R^3$
32  Coroană circulară	$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) \approx 0{,}0491\ (D^4 - d^4) \approx 0{,}7854\ (R^4 - r^4)$; $W = \frac{(D^4 - d^4)\ \pi}{32\ D} = \frac{(R^4 - r^4)\ \pi}{4\ R}$. Dacă $\delta \ll R$: $I \approx \pi R^3 \delta$; $W \approx \pi R^2 \delta$.

Tabelul I.11 (continuare)

	Secţiunea	$I,\ I';\ e,\ e';\ e_1,\ e_2;\ W,\ W',\ W_1,\ W_2$
33		$e = \frac{H}{2},\quad e' = \frac{(H-h)B^2 + h(B-b)^2}{2((H-h)B + h(B-b))},$ $I = \frac{BH^3 - bh^3}{12},\quad W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
34		$e_1 = \frac{aH^2 + bd^2}{2(aH + bd)},\quad e_2 = H - e_1,$ $e' = \frac{dB^2 + (H-d)a^2}{2(dB + (H-d)a)},\quad I = \frac{Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3}{3}$

Tabelul I.12

Arii, volume, centre de greutate şi momente de inerţie ale corpurilor geometrice

Notaţii generale: A — aria totală; A_L — aria laterală; V — volum; G — centru de greutate: I_1, I_2, I_3 — momente de inerţie principale geometrice în raport cu axe principale de inerţie *1, 2, 3*; B — baza unui corp sau aria sa; $B = B^*$ — cele două baze egale şi paralele ale unui corp sau ariile acestora: B_1, B_2—baze paralele şi neegale sau arii ale acestora: h—înălţime normală la B sau la B_1 şi B_2: S—secţiune plană prin corp sau arie a acesteia: g_B, g_S etc. — centrul de greutate al bazei B, al secţiunii S etc. R, R_1, R_2, r — raze de cercuri sau de sfere : p_B, p_S etc.—perimetrul bazei B, al secţiunii S etc.: $\perp$ — perpendicular pe ...: $\|$ — paralel cu ...;

Denumire, notaţii	Arii, volume, poziţii ale centrelor de greutate şi momente de inerţie
1 Prismă l — muchiile paralele şi egale ale prismei. $S \perp l$ La prisma dreaptă, $S = B$ şi $l = h$	$A_L = p_S l = p_B h$, $V = Bh = Sl$ G este la mijlocul segmentului $g_B\, g_{B^*}$
2 Corp poliedric obţinut dintr-o prismă, după îndepărtarea porţiunii cuprinse între B şi o secţiune S neparalelă cu B $d = g_B g_S$, $S \perp d$	$V = Sd$; G este la mijlocul segmentului d
3 Idem ca la pct. 2, prisma iniţială fiind triunghiulară l_1, l_2, l_3 — lungimile muchiilor paralele. $S \perp$ muchii	$V = \frac{1}{3}(l_1 + l_2 + l_3)S.$ G — idem ca la pct. 2 (aici d este paralel cu muchiile)
4 Idem ca la pct. 2, prisma iniţială fiind un paralelipiped $l_1 \neq l_2$ — lungimile a două muchii paralele opuse. S şi d — idem ca la pct. 2 ($d \parallel l_1, l_2$)	$V = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)S$ G — idem ca la pct. 2
5 Paralelipiped dreptunghiular l_1, l_2, l_3 — lungimile a trei muchii neparalele. Axele $G123$ sînt paralele cu muchiile	$A = 2(l_1l_2 + l_2l_3 + l_3l_1)$ $V = l_1l_2l_3$ — G este la intersecţia celor trei diagonale. $I_1 = \frac{l_1l_2l_3(l_2^2 + l_3^2)}{12}$ (..)

Tabelul I.12 (continuare)

Denumire, notații	Arii, volume, poziții ale centrelor de greutate și momente de inerție
6 Cub l — lungimea muchiei Axele $G123$ ca la pct. 5	$A = 6\,l^2$; $V = l^3$ G — idem ca la pct. 5 $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{l^5}{6}$
7 Piramidă	$V = \frac{Bh}{3}$; G este pe segmentul care unește vîrful piramidei cu g_B, iar g_BG = o pătrime din acest segment
8 Piramidă dreaptă regulată h' = înălțimea unei fețe laterale triunghiulare	$A_L = \frac{p_B h'}{2}$; V — idem ca la pct. 7 G — idem ca la pct. 7
9 Piramidă dreaptă cu baza un dreptunghi a, b — laturile bazei Axele $G123$ sînt paralele cu laturile a, b, și respectiv cu înălțimea h	A_L — idem ca la pct.8. V — idem ca la pct. 7 $I_1 = \frac{abh}{60}\left(b^2 + \frac{3h^2}{4}\right)$, $I_2 = \frac{abh}{60}\left(a^2 + \frac{3h^2}{4}\right)$ $I_3 = \frac{abh}{60}(a^2 + b^2)$
10 Tetraedru x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C — coordonatele a trei vîrfuri A, B, respectiv C, vîrful al patrulea fiind în originea unor axe de coordonate $Oxyz$	$V = \frac{Bh}{3} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$ G — idem ca la pct. 7, fiind situat la intersecția dreptelor care unesc vîrfurile cu centrele de greutate ale fețelor opuse

Tabelul 1.12 (continuare)

Denumire, notaţii	Arii, volume, poziţii ale centrelor de greutate şi momente de inerţie
11 Trunchi de piramidă	$V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$. G este pe dreapta $g_{B_1} g_{B_2}$, iar $g_{B_1} G = \frac{h(B_1 + 2\sqrt{B_1 B_2} + 3B_2)}{(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)4}$
12 Pană Baza B este un dreptunghi cu laturile a_1 şi b_1, iar muchia superioară a este paralelă cu a_1; h — înălţimea a B b_1 a_1	$V = \frac{(2a_1 + a)bh}{6}$. Înălţimea centrului de greutate faţă de B: $h_G = \frac{h(a_1 + a)}{2(2a_1 + a)}$
13 Obelisc Corp poliedric obţinut dintr-o pană, după îndepărtarea porţiunii cuprinse între o secţiune S paralelă cu baza şi muchia a. Baza penei iniţiale se notează acum cu B_1 (dreptunghi cu laturile a_1, b_1) iar S devine a doua bază B_2 (dreptunghi cu laturile a_2, b_2); h — înălţimea obeliscului.	$V = \frac{h}{6}\left((2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2\right)$ Înălţimea centrului de greutate faţă de B_1: $h_G = \frac{h}{2} \cdot \frac{a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2}{2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2}$
14 Cilindru q — generatoare a cilindrului $S \perp q$. La cilindrul drept: $S = B$ şi $q = h$	$A_L = p_S q = p_B h$. $V = Bh = Sq$ G — idem ca la pct. 1
15 Corp rotund obţinut dintr-un cilindru, după îndepărtarea porţiunii cuprinse între baza B şi o secţiune S neparalelă cu B $d = g_B g_S$, $S \perp d$	$V = Sd$, G este la mijlocul segmentului d

Tabelul I.12 (continuare)

Denumire, notații	Arii, volume, poziții ale centrelor de greutate și momente de inerție
16 Idem ca la pct. 15, cilindrul inițial fiind circular drept B — cerc cu centrul în C și raza R S — idem ca la pct. 15. $h_1 < h_2$ — înălțimea minimă, respectiv maximă a secțiunii S; $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) =$ $= g_B g_S (h \perp B)$; α — unghiul dintre B și S, $\text{tg}\alpha = (h_2 - h_1)/2R$. Axa Cz de-a lungul lui h, axa Cy în planul segmentelor paralele h_1, h_2, dirijată spre h_2.	$A_L = 2\pi Rh$; $V = \pi R^2 h$ $x_G = 0$; $y_G = \frac{R^2 \text{tg}\,\alpha}{4h} = \frac{R(h_2 - h_1)}{4(h_2 + h_1)}$; $z_G = \frac{h}{2} + \frac{R^2\, tg^2\,\alpha}{8h} = \frac{h_1 + h_2}{4} +$ $+ \frac{(h_2 - h_1)^2}{16(h_2 + h_1)}$
17 Cilindru circular drept La axele $G123$, axa 3 este dirijată după axa longitudinală a cilindrului	$A_L = 2\pi Rh$; $V = \pi R^2 h$ G este la mijlocul segmentului care unește cele două baze. $I_1 = I_2 = \frac{\pi R^2 h(3R^2 + h^2)}{12}$; $I_3 = \frac{\pi R^4 h}{2}$.
18 Copită cilindrică Axele $Cxyz$ sînt indicate în figură [figură: z, y, x, C, R, R, h]	$A_L = 2Rh$; $V = \frac{2R^2 h}{3}$ $x_G = 0$; $y_G = \frac{3\pi R}{16}$; $z_G = \frac{3\pi h}{32}$

Tabelul I.12 (continuare)

Denumire, notații	Arii, volume, poziții ale centrelor de greutate și momente de inerție
19 Con	V și G — idem ca la pct. 7
20 Con circular drept q — generatoare $q = \sqrt{R^2 + h^2}$ La axele $G123$, axa 3 este dirijată după axa de simetrie a conului	$A_L = \pi Rq$; $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ G este pe axa de simetrie a conului; $g_B G = \frac{h}{4}$ $I_1 = I_2 = \frac{\pi R^2 h}{20}\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right)$; $I_3 = \frac{\pi R^4 h}{10}$
21 Trunchi de con circular drept $R_1 > R_2$ — razele bazelor B_1, respectiv B_2. $q = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + h^2}$ — o generatoare. Axa $G3$ este după axa de simetrie a corpului	$A_L = \pi(R_1 + R_2)q$ $V = \frac{\pi}{3} h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$ G este pe dreapta $g_{B1}g_{B2}$: $g_{B_1}G = \frac{h(R_1^2 + 2R_1R_2 + 3R_2^2)}{4(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)}$ $I_3 = \frac{\pi h(R_1^5 - R_2^5)}{10(R_1 - R_2)}$
22 Sferă Axele $G123$ după trei diametre ortogonale	$A = 4\pi R^2$; $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ G este în centrul sferei $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{8\pi R^5}{15}$

Tabelul I.12 (continuare)

Denumire, notații	Arii, volume, poziții ale centrelor de greutate și momente de inerție
23 Zonă sferică $R_1 > R_2$, $R^2 = R_1^2 + \left(\frac{R_1^2 - R_2^2 - h^2}{2h}\right)^2$	$A_L = 2\pi Rh$; $V = \frac{\pi h}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$
24 Segment de sferă (calotă sferică). $R_1^2 = h(2R - h)$	$A_L = 2\pi\ Rh$; $V = \frac{\pi h}{6}(3R_1^2 + h^2) =$ $= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. $CG = \frac{3(2R - h)^2}{4(3R - h)}$ $I_3 = \frac{\pi h^3}{30}(20R^2 - 15Rh + 3h^2)$. Pentru semisferă : $CG = \frac{3R}{8}$; $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{8\pi R^5}{15}$
25 Sector de sferă	$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}$; $CG = \frac{3(1 + \cos\alpha)R}{8} =$ $= \frac{3(2R - h)}{8}$; $I_3 = \frac{2\pi R^2 h^2 (3R - h)}{15}$

Tabelul I.12 (continuare)

Denumire, notații	Arii, volume, poziții ale centrelor de greutate și momente de inerție
26 Elipsoid C — centrul elipsoidului a, b, c — semiaxele Axele $G123$ sînt de-a lungul semiaxelor a, b, respectiv c	$V = \frac{4\pi\, abc}{3}$; G este centrul C; $I_1 = \frac{4\pi\, abc\,(b^2 + c^2)}{15}$, (..)
27 Segment de paraboloid de rotație	$V = \frac{\pi R^2 h}{2}$; $CG = \frac{h}{3}$ $I_1 = I_2 = \frac{\pi R^2 h}{12}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$ $I_3 = \frac{\pi R^4 h}{15}$
28 Tor cu secțiune circulară	$A = 4\pi^2 Rr$; $V = 2\pi^2 Rr^2$ G este în centrul cercului ecuatorial de rază R $I_1 = I_2 = \frac{\pi^2 Rr^2}{4}(4R^2 + 5r^2)$ $I_3 = \frac{\pi^2 Rr^2}{2}\, 4R^2 + 3r^2)$
29 Gălcată (cadă) Cele două baze paralele B_1 și B_2 sînt elipse cu semiaxele a_1, b_1, respectiv a_2, b_2	$V = \frac{\pi h}{6}\left((2a_2 + a_1)b_2 + (2a_1 + a_2)b_1\right)$; G este pe segmentul $g_{B_1}g_{B_2} = h$, iar $g_{B_1}G = \frac{h(2a_2 + a_1)}{3(a_2 + a_1)}$

Tabelul I.12 (continuare)

Denumire, notații	Arii volume, poziții ale centrelor de greutate și momente de inerție
30 Butoi	Pentru doage circulare: $V \approx \frac{\pi l}{12}(2D^2 + d^2)$. Pentru doage parabolice: $V = \frac{\pi l}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right)$

Dacă un sistem de forțe nu conține nici o forță, se numește *sistem nul de forțe*, notîndu-se $\mathscr{F} = 0$. Dacă $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}'$ și $\mathscr{F}' = 0$, sistemul $\mathscr{F}$ se numește *echivalent cu zero* și se notează $\mathscr{F} \sim 0$.

Studiul problemelor de echivalență a sistemelor de forțe are drept obiectiv găsirea unor metode de recunoaștere directă a echivalenței dintre două sisteme $\mathscr{F}$ și $\mathscr{F}'$, atît în cazul general (*problema generală de echivalență*), cît și în cazul particular cînd $\mathscr{F}' = 0$ (*problema echivalenței cu zero*). Aceste două probleme capătă o rezolvare foarte simplă, dacă se studiază în prealabil *problema reducerii unui sistem de forțe*, care astfel dobîndește o însemnătate deosebită față de celelalte probleme de echivalență. Prin reducerea unui sistem de forțe $\mathscr{F}$ se înțelege găsirea unui alt sistem $\mathscr{F}' \sim \mathscr{F}$, avînd o alcătuire cît mai simplă.

14.4.2. **Operații elementare de echivalență.** Cele mai simple operații efectuate asupra unui sistem $\mathscr{F}$, fără a-i modifica efectul mecanic asupra unui corp rigid, se numesc *operații elementare de echivalență*; acestea sînt: 1) înlocuirea unei forțe $\overline{F}$ prin altă forță $\overline{F}' = \overline{F}$, avînd același suport cu $\overline{F}$, însă puncte de aplicație diferite; 2) înlocuirea a două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, cu punct de aplicație comun, prin rezultanta lor $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ aplicată în același punct, conform principiului paralelogramului forțelor. Această operație se numește „compunere". Caz particular: dacă $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$, cele două forțe pot fi înlăturate, avînd rezultanta nulă; 3) operația inversă celei precedente: înlocuirea unei forțe $\overline{F}$ aplicate într-un punct, prin două componente ale sale $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, construite pe baza principiului paralelogramului forțelor și aplicate în același punct cu forța dată. Această operație se numește „descompunere". Caz particular: aplicarea asupra aceluiași punct a două forțe egale în modul și direct opuse $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2 = -\overline{F}_1$.

Dacă $\mathscr{F} \sim \mathscr{F}'$, atunci $\mathscr{F}$ poate fi transformat în $\mathscr{F}'$ numai printr-o succesiune de operații elementare de echivalență.

14.4.3. **Momentul unei forțe în raport cu un punct.** *Momentul unei forțe* $\overline{F}$ aplicate în punctul P, *în raport cu un punct* O, este vectorul $\overline{\mathscr{M}}_0(\overline{F}) = \overline{\mathscr{M}}_0 = \bar{r} \times \overline{F}$, aplicat convențional în punctul O, unde $\bar{r} = \overline{OP}$. Vectorul $\overline{\mathscr{M}}_0$ are: 1) direcția — normală la planul $(O, \overline{F})$; 2) sensul — conform regulii șurubului indicate în fig. I.16, *b*, sau regulii observatorului indicate în fig. I.16, *c*; 3) modulul — dat prin expresia $|\overline{\mathscr{M}}_0| = |\overline{F}|\, d$, unde cu d

s-a notat distanţa de la O la suportul forţei (fig. I. 16, *a*). Dacă $\overline{F} \neq 0$, atunci $\overline{\mathcal{M}}_0 = 0$, în cazul şi numai în cazul cînd punctul O este pe suportul forţei. Notînd cu x, y şi z coordonatele punctului P, proiecţiile carteziene ale vectorului $\overline{\mathcal{M}}_0$ sînt: $\mathcal{M}_x = yZ - zY$ (. .).

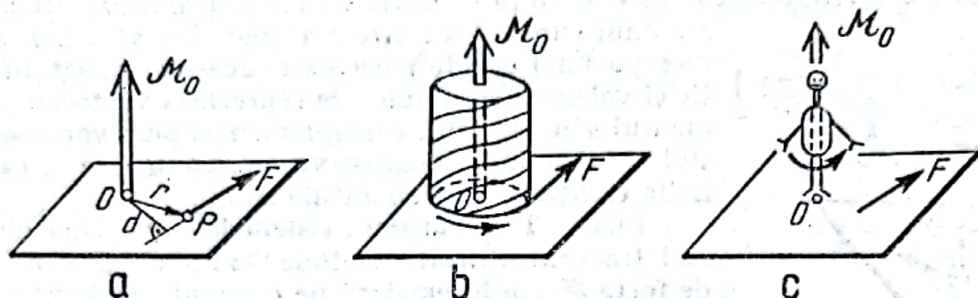


Fig. I. 16

Momentul rezultant al unui sistem de forţe $\mathcal{F}$ în raport cu punctul O, este vectorul $\overline{\mathcal{M}}_0 = \sum_{\mathcal{F}} \overline{\mathcal{M}}_{0i} = \sum_{\mathcal{F}} \overline{r}_i \times \overline{F}_i$ aplicat în O. Proiecţiile sale carteziene sînt: $\mathcal{M}_x = \sum_{\mathcal{F}}(y_i Z_i - z_i Y_i)$ (. .). Operaţiile elementare de echivalenţă asupra sistemului $\mathcal{F}$ lasă invariabil momentul rezultant.

14.4.4. **Momentul unei forţe în raport cu o axă.** Momentul $\mathcal{M}_\Delta(\overline{F}) = \mathcal{M}_\Delta$ al unei forţe $\overline{F}$ în raport cu o axă Δ orientată prin versorul $\overline{u}$, este proiecţia pe această axă a momentului forţei $\overline{\mathcal{M}}_0(\overline{F})$, luat în raport cu un punct O de pe axă (fig. I.17) şi nu depinde de poziţia punctului O pe Δ. $\mathcal{M}_\Delta$ are expresia $\mathcal{M}_\Delta = (\overline{OP} \times \overline{F}) \cdot \overline{u} = [\overline{OP}, \overline{F}, \overline{u}]$ şi se anulează pentru $\overline{F} \neq 0$, dacă şi numai dacă forţa $\overline{F}$ şi axa Δ sînt coplanare.

$\mathcal{M}_\Delta$ mai poate fi calculat, utilizînd una din următoarele două proprietăţi: 1) $|\mathcal{M}_\Delta| = |\overline{F}'|d'$, unde $\overline{F}'$ este componenta ortogonală a forţei $\overline{F}$ pe un plan (π) normal la axa Δ ($\overline{F}'$ este un vector alunecător în spaţiul bidimensional al planului (π)), iar d' este distanţa de la punctul de intersecţie O' al axei Δ cu planul (π), la suportul componentei $\overline{F}'$ (v. fig. I. 17); 2) $|\mathcal{M}_\Delta| = |\overline{F}|\,\underline{d}\,|\sin\alpha|$, unde s-a notat cu d, distanţa dintre Δ şi suportul forţei $\overline{F}$ (normală la Δ şi la $\overline{F}$) şi cu α, unghiul dintre Δ şi $\overline{F}$. Dacă se utilizează una dintre aceste două proprietăţi, semnul lui $\mathcal{M}_\Delta$ se găseşte conform regulilor arătate la pct. 14.4.3.; de exemplu, se presupune că $\overline{F}$ acţionează asupra unui şurub a cărui axă coincide cu Δ iar dacă sensul de înaintare a şurubului este acelaşi cu sensul versorului $\overline{u}$, $\mathcal{M}_\Delta$ are semnul pozitiv.

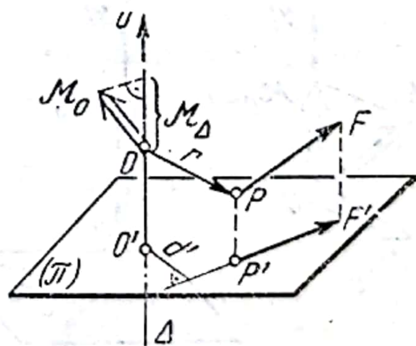


Fig. I.17.

Momentele forţei $\overline{F}$ în raport cu axele triedrului $Oxyz$ sînt proiecţiile vectorului $\overline{\mathcal{M}}_0$ pe aceste axe, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$, ale căror expresii au fost indicate la pct. 14.4.3.

Momentul rezultant în raport cu o axă Δ, orientată prin versorul $\overline{u}$, al unui sistem de forţe $\mathcal{F}$, se obţine fie prin însumarea algebrică a momentelor fiecărei forţe în raport cu Δ, fie prin proiectarea momentului rezultant în raport cu O, pe axa Δ.

14.4.5. **Cuplu.** Un *cuplu* este un sistem de două forţe egale în valoare, paralele şi de sens contrar. Se va utiliza pentru cuplu notaţia $[\overline{F}, \overline{F}']$, înţelegîndu-se implicit că $\overline{F} = -\overline{F}'$. *Momentul unui cuplu* este momentul rezultant al celor două forţe în raport cu un punct O, se notează cu $\overline{\mathcal{M}}[\overline{F}, \overline{F}']$ (fig. I. 18) sau mai simplu cu $\overline{\mathcal{M}}$ şi are expresia $\overline{AA'} \times \overline{F}'$, A şi A'

fiind punctele de aplicaţie ale forţelor $\overline{F}$ şi $\overline{F}'$. Această expresie nu depinde de poziţia punctului O, deci $\overline{\mathcal{M}}$ este un *vector liber*. $|\overline{\mathcal{M}}| = |\overline{F}|\, d$ se numeşte *valoarea cuplului*, unde d este distanţa dintre forţe.

Cuplul este o mărime mecanică deosebită calitativ de forţă. *Caracteristicile esenţiale* ale unui cuplu sînt: direcţia planului său, indicată prin direcţia unei drepte normale la acest plan, sensul de rotaţie şi valoarea sa. Cuplul se reprezintă vectorial prin momentul său, datorită corespondenţei biunivoce ce se poate stabili între cuplu şi acest vector, cu privire la caracteristicile esenţiale şi la operaţiile simple.

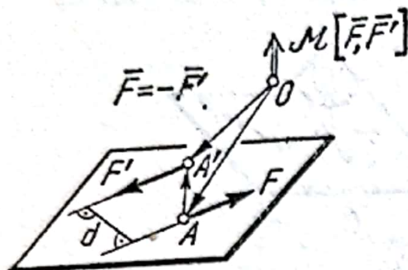


Fig. I.18

14.4.6. Torsorul unui sistem de forţe. Una dintre cele mai frecvent utilizate metode de reducere a unui sistem de forţe $\mathcal{F}$, se întemeiază pe calculul prealabil al următorilor doi vectori: *vectorul rezultant* $\overline{\mathcal{R}} = \sum_{\mathcal{F}} \overline{F}_i$ şi *momentul rezultant* în raport cu un punct O, $\overline{\mathcal{M}}_0 = \sum_{\mathcal{F}} \overline{r}_i \times \overline{F}_i$. Proiecţiile carteziene ale vectorilor $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}_0$ sînt: $X = \sum_{\mathcal{F}} X_i$ (. .), respectiv $\mathcal{M}_x = \sum_{\mathcal{F}}(y_i Z_i - z_i Y_i)$ (. .).

Ansamblul vectorilor $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}_0$ se numeşte *torsorul* în punctul O al sistemului $\mathcal{F}$ şi se notează $\tau_0(\mathcal{F}) = (\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_0)$ sau $\tau(\mathcal{F}) = (\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}})$, dacă nu este necesar a se indica punctul O denumit *origine a torsorului* sau *punct de reducere*. Operaţii elementare de echivalenţă efectuate asupra unui sistem $\mathcal{F}$, lasă neschimbat torsorul $\tau(\mathcal{F})$. Dacă pentru acelaşi sistem $\mathcal{F}$ se schimbă originea torsorului, din O în O', atunci $\tau_{0'}(\mathcal{F}) = (\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_{0'})$, unde $\overline{\mathcal{M}}_{0'} = \overline{\mathcal{M}}_0 + \overline{O'O} \times \overline{\mathcal{R}}$; în particular, $\overline{\mathcal{M}}_{0'} = \overline{\mathcal{M}}_0$, dacă $\overline{\mathcal{R}} = 0$, sau pentru $\overline{\mathcal{R}} \neq 0$, dacă $\overline{O'O} \parallel \overline{\mathcal{R}}$. În raport cu schimbarea originii torsorului, un sistem $\mathcal{F}$ posedă doi *invarianţi*: vectorul rezultant $\overline{\mathcal{R}}$ şi produsul scalar $\overline{\mathcal{R}} \cdot \overline{\mathcal{M}}_0 = X\mathcal{M}_x + Y\mathcal{M}_y + Z\mathcal{M}_z$ denumit *invariantul scalar* sau *trinomul invariant*.

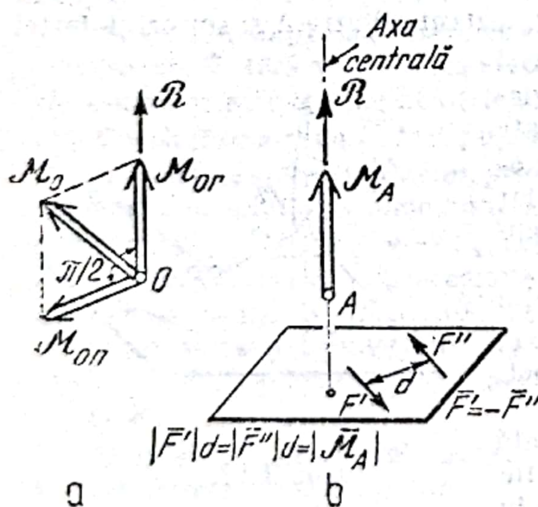


Fig. I.19

Dacă $\overline{\mathcal{R}} \neq 0$, mulţimea tuturor punctelor de reducere pentru care vectorii $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}$ sînt colineari, formează o dreaptă numită *axă centrală* avînd ecuaţiile $(\mathcal{M}_x - yZ + zY) / X = (\mathcal{M}_y - zX + xZ) / Y = (\mathcal{M}_z - xY + yX)/Z$, unde x, y, z sînt coordonatele unui punct curent al acestei drepte.

Teorema generală de echivalenţă: $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}' \Leftrightarrow \tau(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F}')$. Egalitatea din partea dreaptă are sens numai dacă $\tau(\mathcal{F})$ şi $\tau(\mathcal{F}')$ au o origine comună, fiind definită în acest caz prin condiţiile: $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}'$ şi $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}'$. În particular: $\mathcal{F} \sim 0 \Leftrightarrow \tau(\mathcal{F}) = 0$, egalitatea din dreapta însemnînd $\overline{\mathcal{R}} = 0$ şi $\overline{\mathcal{M}} = 0$ pentru un punct oarecare de reducere.

14.4.7. Reducerea unui sistem de forţe. *Cazul general* este caracterizat prin $\overline{\mathcal{R}} \cdot \overline{\mathcal{M}} \neq 0$; sistemul $\mathcal{F}$ se reduce la o forţă egală cu $\overline{\mathcal{R}}$, al cărei suport trece prin originea O a torsorului şi la un cuplu avînd momentul egal cu $\overline{\mathcal{M}}_0$. Dacă O este pe axa centrală, $\overline{\mathcal{R}}$ este normal la planul cuplului (fig. I.19).

Cazurile particulare sînt caracterizate prin $\bar{\mathscr{R}}\cdot\bar{\mathscr{M}} = 0$. 1) Dacă $\bar{\mathscr{R}} \neq 0$, $\mathscr{F}$ se reduce la o forță egală cu $\bar{\mathscr{R}}$, numită *rezultantă* și situată pe axa centrală. Printre sistemele de forțe care pot fi reduse la o rezultantă (dacă $\bar{\mathscr{R}} \neq 0$), se găsesc și sistemele de forțe concurente, de forțe coplanare și de forțe paralele. 2) Dacă $\bar{\mathscr{R}} = 0$ și $\bar{\mathscr{M}} \neq 0$, $\mathscr{F}$ se reduce la un cuplu avînd momentul egal cu $\bar{\mathscr{M}}$. 3) Dacă $\bar{\mathscr{R}} = 0$ și $\bar{\mathscr{M}} = 0$, atunci $\mathscr{F} \sim 0$.

14.4.8. **Sisteme particulare de forțe.** 1) Un sistem de *forțe concurente* într-un punct O, se reduce, dacă $\bar{\mathscr{R}} \neq 0$, la o forță rezultantă egală cu $\bar{\mathscr{R}}$, al cărei suport trece prin O. Dacă $\bar{\mathscr{R}} = 0$, sistemul este echivalent cu zero.

2) Pentru un *sistem de forțe coplanare* situate în planul Oxy, Z, $\mathscr{M}_x$ și $\mathscr{M}_y$ sînt identic nule. Dacă $\bar{\mathscr{R}} \neq 0$, $\mathscr{F}$ se reduce la o rezultantă egală cu $\bar{\mathscr{R}}$, situată în planul forțelor pe dreapta de ecuație $\mathscr{M}_z - xY + yX = 0$. Cînd $\bar{\mathscr{R}}=0$ și $\mathscr{M}_z \neq 0$, forțele se reduc la un cuplu în planul Oxy, iar dacă $\bar{\mathscr{R}} = 0$ și $\mathscr{M}_z = 0$, $\mathscr{F} \sim 0$.

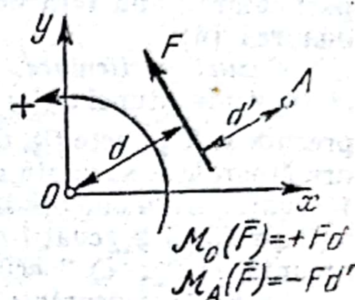


Fig. I. 20

La forțele coplanare, momentul unei forțe F în raport cu un punct A din același plan, poate fi considerat mai simplu, drept o mărime pseudoscalară [1], notîndu-se obișnuit fără bară de vector, deoarece $\mathscr{M}_A(\bar{F})$ este complet determinat prin valoarea sa, prevăzută cu semnul plus sau minus, după cum $\bar{F}$ tinde să rotească față de A, în sens trigonometric, sau invers trigonometric (fig. I.20). Cu această observație, $\mathscr{M}_z(\bar{F})$ poate fi înlocuit prin $\pm\mathscr{M}_0(\bar{F})$.

3) La un *sistem de forțe paralele*, dacă se ia de exemplu axa Oz paralelă cu forțele, atunci X, Y și $\mathscr{M}_z$ sînt identic nule. Dacă $\bar{\mathscr{R}} \neq 0$, sistemul se reduce la o rezultantă egală cu $\bar{\mathscr{R}}$ și paralelă cu forțele. În acest caz, există pe suportul rezultantei un punct Γ denumit *centrul forțelor paralele*, definit prin proprietatea că suportul rezultantei trece în permanență prin Γ, dacă forțele sistemului își schimbă oricum direcția, rămînînd însă mereu paralele și aplicate în aceleași puncte. Coordonatele punctului Γ sînt: $x_\Gamma = (\sum_{\mathscr{F}} F_i x_i)/\sum_{\mathscr{F}} F_i$ (..), unde $\bar{F}_i = F_i\bar{u}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bar{u}$ fiind un versor paralel cu forțele sistemului.

Dacă $\bar{\mathscr{R}} = 0$, $\mathscr{M}_0 \neq 0$, sistemul se reduce la un cuplu situat într-un plan paralel cu forțele, iar cînd $\bar{\mathscr{R}} = 0$, $\bar{\mathscr{M}} = 0$, sistemul de forțe este echivalent cu zero.

14.5. Echivalența cu zero a sistemelor de forțe. Ecuații de echilibru

Problema echivalenței cu zero a unui sistem de forțe $\mathscr{F}$ prezintă o însemnătate centrală în mecanică și cu deosebire în statică. Așa cum s-a arătat mai înainte, $\mathscr{F} \sim 0$, dacă și numai dacă $\bar{\mathscr{R}} = 0$ și $\bar{\mathscr{M}}_0 = 0$ în raport cu un punct de reducere oarecare O. În raport cu un triedru $Oxyz$, aceasta revine la satisfacerea relațiilor

$$\textstyle\sum_{\mathscr{F}} X_i = 0, (..), \sum_{\mathscr{F}} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \ (..). \qquad \text{(I.21)}$$

[1] Spre deosebire de mărimea scalară, mărimea pseudoscalară își schimbă semnul la schimbarea orientării sistemului de referință. Produsul mixt a trei vectori (v. pct. 4.3) este de asemenea o mărime pseudoscalară, însă în spațiul tridimensional.

Deoarece despre un sistem de forţe $\mathcal{F} \sim 0$ se obişnuieşte frecvent a se spune că este în echilibru, relaţiile precedente se numesc *ecuaţii de echilibru* ale sistemului $\mathcal{F}$ (în coordonate carteziene).

Se demonstrează [6] că luînd şase axe $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$, ecuaţiile (I.21) pot fi înlocuite cu următoarele patru variante de ecuaţii de echilibru: 1) 3 ecuaţii de proiecţii pe Δ_1, Δ_2, Δ_3 şi 3 ecuaţii de momente în raport cu Δ_4, Δ_5, Δ_6; 2) 2 ecuaţii de proiecţii în raport cu Δ_1, Δ_2 şi 4 ecuaţii de momente în raport cu Δ_3, Δ_4, Δ_5 Δ_6; 3) 1 ecuaţie de proiecţii pe Δ_1 şi 5 ecuaţii de momente în raport cu $\Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_6$. 4) 6 ecuaţii de momente în raport cu $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$. Ecuaţiile de echilibru ale fiecăreia dintre aceste patru variante sînt independente numai dacă cele şase axe nu sînt dispuse în anumite poziţii particulare una faţă de alta; aceste situaţii particulare sînt studiate şi enumerate în lucrarea [6].

Cazuri particulare: 1) *Forţe coplanare* situate în planul Oxy. Ecuaţiile de echilibru (I.21) devin atunci: $\sum_{\mathcal{F}} X_i = 0$, $\sum_{\mathcal{F}} Y_i = 0$, $\sum_{\mathcal{F}} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$. Luînd 2 axe Δ_1 şi Δ_2 precum şi 3 puncte O_1, O_2 şi O_3 în planul forţelor, ecuaţiile precedente pot fi înlocuite cu următoarele 3 variante de ecuaţii de echilibru: a) 2 ecuaţii de proiecţie pe Δ_1 şi Δ_2 şi 1 ecuaţie de momente în raport cu 0_1, Δ_1 nefiind paralelă cu Δ_2; b) 1 ecuaţie de proiecţii pe Δ_1 şi 2 ecuaţii de momente în raport cu O_1 şi O_2, unde Δ_1 nu este normală la dreapta O_1O_2; c) 3 ecuaţii de momente în raport cu punctele necolineare O_1, O_2, O_3.

2) *Forţe concurente* în originea triedrului $Oxyz$. Ecuaţiile de echilibru (I.21) iau forma $\sum_{\mathcal{F}} X_i = 0$, $\sum_{\mathcal{F}} Y_i = 0$, $\sum_{\mathcal{F}} Z_i = 0$.

Observaţie. În cele ce urmează, ecuaţiile de echilibru ale unui sistem de forţe $\mathcal{F}$, fie sub forma generală (I.21), fie sub diferite variante sau forme particulare, vor fi uneori notate simbolic prin condiţia $\mathcal{F} \sim 0$.

14.6. Legături şi reazeme

14.6.1. **Legături.** Îngrădirea libertăţii a două corpuri C şi C' de a ocupa în spaţiu orice poziţie a unuia faţă de celălalt, se numeşte *legătură* între aceste corpuri. O astfel de legătură limitează deopotrivă posibilităţile de mişcare relativă a unui corp faţă de altul. Se admite, aşa cum se vede în marea majoritate a cazurilor practice, că o legătură a corpului C cu corpul C' se realizează printr-un contact [1] între C şi C'; astfel, iau naştere interacţiuni mecanice între cele două corpuri, al căror efect este pus în evidenţă prin:

Principiul forţelor de legătură: efectul mecanic produs de o legătură între două corpuri poate fi înlocuit prin efectul unor forţe numite *forţe de legătură*, aplicate celor două corpuri.

Ţinînd seama de acest principiu, putem proceda — în imaginaţie — la suprimarea tuturor legăturilor unui corp C, cu alte corpuri, înlocuind efectele mecanice ale acestor legături prin forţele respective de legătură; se spune atunci că am efectuat *eliberarea* de legături a corpului C, care astfel urmează a fi considerat liber şi tratat ca atare.

Principiul forţelor de legătură introduce în mecanică o clasificare a forţelor în *forţe active* sau *forţe date* şi *forţe pasive* sau *forţe de legătură*. Forţele de legătură sînt iniţial necunoscute într-o problemă de mecanică. Ele pot fi determinate în cadrul diferitelor procedee de rezolvare a problemelor, prin impunerea de condiţii ca poziţiile de echilibru, respectiv mişcările corpurilor eliberate, să fie permise de legături.

---

1) În mecanica analitică, noţiunea de legătură se defineşte dintr-un punct de vedere mai general (v. pct. 19.1.2).

Contactul între două corpuri C și C', datorită existenței unei legături, are loc întotdeauna prin intermediul unor regiuni de contact (fig. I.21, *a*). Pe aceste regiuni, cîte un punct $a \in C$ vine în contact cu alt punct $a' \in C'$, iar în toate perechile de puncte a și a' iau naștere forțe elementare de legătură, egale și direct opuse (fig. I. 21,*b*); acestea alcătuiesc două sisteme de forțe de legătură, repartizate pe cele două regiuni de contact. Studiul repartiției forțelor elementare de legătură pe regiunile de contact, depinde de numeroși factori fizici și este deosebit de complex, neîncadrîndu-se în domeniul de cercetare cuprins de mecanică. În mecanică, se ține seama în mod global de aceste două sisteme de forțe elementare de legătură, considerîndu-le reduse în raport cu două puncte în contact $A \in C$ și $A' \in C'$ (fig. I.21, *c*), la cîte o forță și la cîte un cuplu, torsorii respectivi fiind $\tau_A^l = (\bar{\mathcal{R}}_A^l, \bar{\mathcal{M}}_A^l)$ și $\tau_{A'}^{l'} = (\bar{\mathcal{R}}^{l'}, \bar{\mathcal{M}}_{A'}^{l'})$. Întrucît $\tau_A^l = -\tau_{A'}^{l'}$, este suficient a ne referi în continuare numai la torsorul τ_A^l.

14.6.2. Reazeme. Un corp care este dat convențional ca fiind necondiționat fix într-o anumită problemă, se numește *corp de bază,* sau *bază,* sau *corp de reazem* și va fi notat cu B, Dacă între corpurile C și C' există o legătură și dacă $C' \equiv B$, atunci se obișnuiește a se atribui acestei legături, precum și forțelor de legătură aplicate corpului C, denumirile particulare de *reazem* și respectiv de *reacțiuni*.

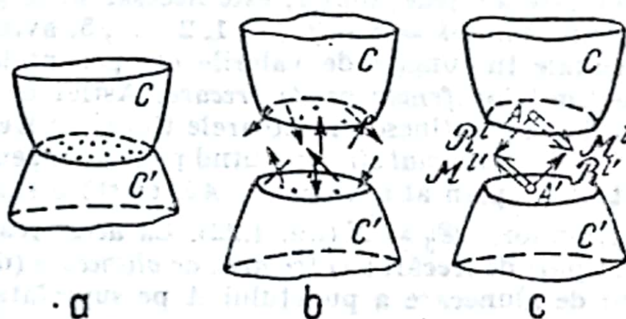


Fig. I 21

În cele ce urmează, ne mărginim acolo unde aceasta este suficient, numai la probleme generale privind reazemele, deoarece caracteristicile și tipurile reazemelor sînt identice cu cele ale legăturilor dintre două corpuri oarecare. Fie deci $\tau_A^l = (\bar{\mathcal{R}}_A^l, \bar{\mathcal{M}}_A^l)$ *torsorul reacțiunilor* exercitate de baza B asupra corpului C, avînd originea în punctul A numit *punct teoretic de reazem.*

Utilizarea principiului forțelor de legătură și a ecuațiilor de echilibru (v. cap. 15) sau de mișcare (v. cap. 17) nu este suficientă pentru rezolvarea completă a unei probleme de mecanică, dacă nu se ține seama și de unele particularități tipice privind realizarea materială a reazemelor, obținîndu-se în modul acesta, informații suplimentare asupra torsorului reacțiunilor. În interesul precizării efectului mecanic al diferitelor tipuri de reazeme, se folosește un triedru cartezian $A123$, orientat în funcție de particularitățile reazemului (v. tabelul I.13). Componentele vectorilor $\bar{\mathcal{R}}^l$ și $\bar{\mathcal{M}}_A^l$ după aceste axe, $\bar{\mathcal{R}}_1^l$, $\bar{\mathcal{R}}_2^l$, $\bar{\mathcal{R}}_3^l$, $\bar{\mathcal{M}}_1^l$, $\bar{\mathcal{M}}_2^l$, $\bar{\mathcal{M}}_3^l$ vor fi denumite *componente ale reacțiunilor*, iar vectorii $\bar{\mathcal{R}}^l$ și $\bar{\mathcal{M}}_A^l$ vor fi denumiți *reacțiune* și respectiv *momentul cuplului de reacțiune*. Experimental, se constată că datorită prezenței reazemului, fiecare componentă $\bar{\mathcal{R}}_1^l$, $\bar{\mathcal{R}}_2^l$ sau $\bar{\mathcal{R}}_3^l$ apare ca urmare a interzicerii uneia dintre deplasările elementare $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$ sau $\bar{\delta}_3$ ale punctului A de-a lungul axelor $A1$, $A2$ și respectiv $A3$ și că fiecare componentă $\bar{\mathcal{M}}_1^l$, $\bar{\mathcal{M}}_2^l$ sau $\bar{\mathcal{M}}_3^l$ apare ca urmare a interzicerii uneia dintre rotațiile elementare $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ sau $\bar{\theta}_3$ ale corpului C în raport cu axele $A1$, $A2$ și respectiv $A3$. Acest efect de anulare a uneia dintre mărimile $\bar{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2$, $\bar{\delta}_3$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ sau $\bar{\theta}_3$ se numește *legătură simplă* a corpului C în raport cu baza B. Un reazem al corpului C în punctul A poate consta dintr-o legătură simplă sau dintr-o grupare în A de cel mult 6 legături simple distincte. Studierea realizării materiale a reazemelor conduce la următoarele constatări generale :

1) După cum o componentă a reacțiunilor poate avea oricare dintre cele două sensuri posibile, sau poate avea un singur sens, legătura simplă respectivă se numește *legătură simplă bilaterală*, respectiv, *legătură simplă unilaterală*. O legătură simplă bilaterală se exprimă analitic printr-o *ecuație de legătură* (v. și pct. 19.1), iar o legătură simplă unilaterală — printr-o *inegalitate de legătură*.

2) În unele cazuri, se observă că anumite componente ale reacțiunilor sînt practic identic nule, celelalte putînd lua teoretic valori nelimitat de mari. *Clasificarea principală* a reazemelor rezultă din combinațiile distincte care se pot efectua între $j = 1, 2, \ldots, 6$ componente ale reacțiunilor de valori nelimitate; nulitatea identică a celorlalte $6 - j$ componente, caracterizează *reazemele fără frecare*. Tipurile mai cunoscute ale reazemelor fără frecare sînt indicate în tabelul I.13.

3) În tehnică intervin uneori reazeme la care în afară de componentele de valori nelimitate ale reacțiunilor, este necesar să se țină seama și de un număr $k \geqslant 1$ de componente, unde $k = 6 - j, j = 1, 2, \ldots, 5$, avînd valori maxime date prin formule experimentale în funcție de valorile componentelor nelimitate; acestea apar ca urmare a așa-numitelor *fenomene de frecare*. Astfel de reazeme se numesc *reazeme cu frecare*. Mai des, se întîlnesc următoarele tipuri de frecări:

— La *reazemul simplu*, luînd planul tangent comun în A la cele două regiuni de contact drept plan al axelor $A1$, $A2$, există o singură componentă de valoare nelimitată a reacțiunilor, $\overline{\mathscr{R}}_3^l = \overline{N}$ (fig. I.22). La acest reazem pot apărea simultan sau nesimultan, trei tipuri de frecări: a) *frecarea de alunecare* (denumită și „frecare uscată") se opune mișcării de alunecare a punctului A pe suprafața bazei B, prin componentele reacțiunilor $\overline{\mathscr{R}}_1^l$ și $\overline{\mathscr{R}}_2^l$ notate aici cu $\overline{T}_1$, respectiv $\overline{T}_2$, unde $\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2$ se numește *forță de frecare* (la alunecare); b) *frecarea de rostogolire* se opune mișcării de rostogolire[1)] a corpului C pe baza B, datorită componentelor reacțiunilor $\overline{\mathscr{M}}_1^l$ și $\overline{\mathscr{M}}_2^l$ notate aici cu $\overline{\mathscr{M}}_{r1}$, respectiv $\overline{\mathscr{M}}_{r2}$, unde $\overline{\mathscr{M}}_r = \overline{\mathscr{M}}_{r1} + \overline{\mathscr{M}}_{r2}$ se numește *momentul cuplului de frecare la rostogolire*; c) *frecarea de pivotare* se opune mișcării de pivotare a corpului C, adică a mișcării sale de rotație în raport cu axa $A3$, prin componenta $\overline{\mathscr{M}}_3^l$ notată aici cu $\overline{\mathscr{M}}_p$ și denumită *momentul cuplului de frecare la pivotare*.

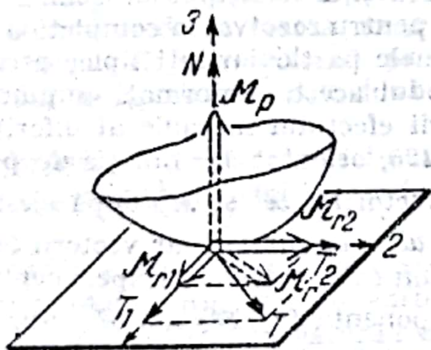


Fig. I.22

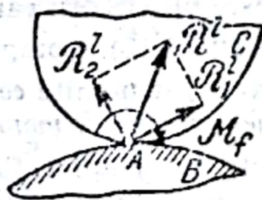


Fig. I.23

— La *reazemul articulat plan* (sau *reazem cilindric*), componentele de valori nelimitate ale reacțiunilor sînt $\overline{\mathscr{R}}_1^l$ și $\overline{\mathscr{R}}_2^l$ cu rezultanta $\overline{\mathscr{R}}^l = \overline{\mathscr{R}}_1^l + \overline{\mathscr{R}}_2^l$, notațiile fiind cele din fig. I.23. La o rotație a corpului C în raport cu axa $A3$ normală la planul fig. I.23, se opune

1) Prin *mișcarea de rostogolire* a unui corp C în raport cu un corp considerat fix B, se înțelege acea mișcare în care cîmpul de viteze este în orice moment identic cu un cîmp de viteze de rotație față de o axă instantanee de rotație (v. pct. 16.2) trecînd prin A și conținută în planul $A12$. Această mișcare este bineînțeles posibilă, numai pe porțiunile suficient de regulate ale suprafețelor corpurilor C și B.

Tabelul I.13

Tipuri uzuale de reazeme fără frecare

Nr. crt.	Denumire și reprezentare schematică	Deplasări elementare anulate prin efectul rezemării	Componente neidentic nule ale reacțiunilor	Reprezentare simplificată uzuală
1	2	3	4	5
		1) Corp rigid. Probleme spațiale		
1	Reazem simplu [1], [3]	$\delta_3 = 0$	$\mathcal{R}_3^l$	
2	Reazem articulat (sferic) [1]	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$ $\delta_3 = 0$	$\mathcal{R}_1^l$ $\mathcal{R}_2^l$ $\mathcal{R}_3^l$	

Tabelul I.13 (continuare)

1	2	3	4	5
3	Reazem articulat cilindric [1])	$\delta_2 = 0,\ \delta_3 = 0$ $\theta_2 = 0,\ \theta_3 = 0$	$\mathcal{R}_2^l,\ \mathcal{R}_3^l$ $\mathcal{M}_2^l,\ \mathcal{M}_3^l$	
4	Reazem încastrat [1]), [5])	$\delta_1=0,\ \delta_2=0,\ \delta_3=0$ $\theta_1=0,\ \theta_2=0\ \theta_3=0$	$\mathcal{R}_1^l,\ \mathcal{R}_2^l,\ \mathcal{R}_3^l$ $\mathcal{M}_1^l,\ \mathcal{M}_2^l,\ \mathcal{M}_3^l$	

Tabelul I.13 (continuare)

1	2	3	4	5
		2) *Corp rigid. Probleme plane*		
5	Reazem simplu [4]	$\delta_2 = 0$	$\mathcal{R}^l_2$	
6	Reazem articulat	$\delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0$	$\mathcal{R}^l_1$, $\mathcal{R}^l_2$	
7	Reazem încastrat [6]	$\delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0$ $\theta_3 = 0$	$\mathcal{R}^l_1$, $\mathcal{R}^l_2$ $\mathcal{M}^l_A (\equiv \mathcal{M}^l_3)$	

Tabelul I.13 (continuare)

1	2	3	4	5
		3) *Punct material. Probleme spațiale*		
8	Punct pe suprafață [1],[7]	$\delta_1 = 0$	$\mathcal{R}_1^l$	
9	Punct pe linie [1],[8]	$\delta_2 = 0$ $\delta_3 = 0$	$\mathcal{R}_2^l$ $\mathcal{R}_3^l$	
10	Punct fix [1],[2]	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$ $\delta_3 = 0$	$\mathcal{R}_1^l$ $\mathcal{R}_2^l$ $\mathcal{R}_3^l$	

Tabelul 1.13 (continuare)

1	2	3	4	5
		4) *Punct material. Probleme plane*		
11	Punct pe linie[1), 9)]	$\delta_2 = 0$	$\mathcal{R}_2^l$	
12	Punct fix, [1), 2)]	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = 0$	$\mathcal{R}_1^l$ $\mathcal{R}_2^l$	

Observații

1) La reazemele corpului rigid în problemele spațiale, precum și la reazemele punctului material, reprezentările grafice simplificate nu sînt uniformizate.

2) La reazemele nr. *10* și *12* nu există reprezentări schematice uzuale, acestea depinzînd de specificul tehnic al problemei respective.

3) Axa *A3* este normală la suprafața corpului *C* sau/ și la suprafața corpului de reazem *B*.

4) Axa *A2* este normală la conturul corpului *C* sau/și la conturul corpului de reazem *B*.

5) Dacă suprafața de contact între corpurile *C* și *B* este plană, se obișnuiește a se lua axa *A3* normală la această suprafață, în centrul de greutate al suprafeței.

6) S-a reprezentat aici situația curentă cînd corpul *C* este o bară. În acest caz, axa *A1* se ia tangentă în *A* la axa barei, iar M_A^l se numește *moment de încastrare*.

7) Axa *1* este normală la suprafața de reazem.

8) Planul π este normal la linia de reazem. Axele *2* și *3* se iau obișnuit după normala principală și binormala la linia de reazem.

9) Axele *1* și *2* se iau obișnuit după tangenta și normala la linia de reazem.

frecarea de lagăr prin componenta reacțiunilor $\overline{\mathcal{M}}_3^l$ notată aici cu $\overline{\mathcal{M}}_f$ și denumită *momentul cuplului de frecare pe lagăr*.

Referitor la valorile componentelor reacțiunilor $\overline{T}$, $\overline{\mathcal{M}}_r$, $\overline{\mathcal{M}}_p$ și $\overline{\mathcal{M}}_f$, trebuie avute în vedere două situații :

1) Faptul că într-o problemă de statică sau de dinamică nu are loc mișcarea la care se opune o anumită frecare, se recunoaște prin satisfacerea pentru fiecare tip de fre-

care în parte, a următoarelor inegalități: $|\overline{T}| \leqslant f|\overline{N}|$, $|\overline{\mathcal{M}}_r| \leqslant s|\overline{N}|$, $|\overline{\mathcal{M}}_p| \leqslant p|\overline{N}|$, $|\overline{\mathcal{M}}_f| \leqslant r\mu|\overline{\mathcal{R}}^l|$, denumite generic, *inegalități de frecare*. Factorii f, s, p și μ se numesc *coeficienți de frecare în repaus*, la alunecare, la rostogolire, la pivotare și respectiv în lagăr și se determină experimental pentru diferite cazuri intervenind în problemele tehnice În tabelul I.14 sînt indicate cîteva valori uzuale ale coeficientului f. Coeficientul s ia valori cu atît mai mici, cu cît cele două corpuri în contact sînt mai puțin deformabile pe porțiunile din apropierea contactului. Astfel, pentru roțile vehiculelor de cale ferată pe șine, $s = 0{,}005\ldots0{,}05$ cm, iar pentru rulmenți de oțel în lagăr, $s \approx 0{,}001$ cm. În legătură cu frecarea de alunecare, rezultatele experimentale au condus cu unele aproximații, la următoarele constatări atribuite lui *Coulomb* și denumite *legi ale frecării*, conform cărora $|\overline{T}|_{max}$: a) nu depinde de mărimea suprafețelor în contact; b) depinde de natura corpurilor și de starea suprafețelor în contact; c) este proporțională cu $|N|$. La frecarea de lagăr, r este raza lagărului.

Tabelul I.14

Valori uzuale ale coeficientului de frecare f

Natura corpurilor	Starea suprafețelor	f
Oțel pe oțel	Uscate	0.15 — 0,30
	Unse	0,10
Oțel pe fontă	Uscate	0,19
sau pe bronz	Unse	0,10
Oțel pe gheață	—	0,03
Lemn pe piatră	Uscate	0,70
	Unse	0,40
Lemn pe lemn	Uscate	0,40 — 0,60
	Unse	0,16
Cauciuc pe asfalt	Uscate	0,70
Curea de piele pe fontă	Puțin unse	0,27
Cărămidă pe cărămidă	Uscate	0,50 — 0,60

2) Dacă în unele probleme de dinamică apare necesitatea de a se analiza și posibilitatea producerii de mișcări pe direcțiile la care se opun fenomenele de frecare amintite, atunci pentru fiecare tip de frecare în parte, în locul inegalităților de frecare menționate anterior, se folosesc egalitățile: $|\overline{T}| = f'|\overline{N}|$, $|\overline{\mathcal{M}}_r| = s'|\overline{N}|$, $|\overline{\mathcal{M}}_p| = p'|\overline{N}|$, $|\overline{\mathcal{M}}_f| = r\mu'|\overline{\mathcal{R}}^l|$. *Coeficienții de frecare în mișcare* f', s', p', μ' se determină de asemenea experimental, avînd în general valori diferite de valorile coeficienților de frecare în repaus.

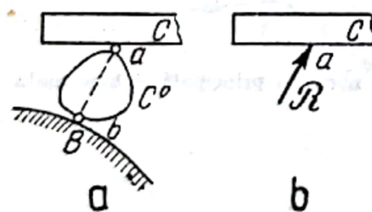


Fig. I.24

14.6.3. Reazeme figurate prin bare dublu articulate. Un corp $C°$ neacționat de nici o forță activă și legat de corpul C prin articulația a și de baza B prin articulația b (fig. I.24, a), poate fi considerat în problemele de statică drept reazem simplu fără frecare al corpului C în punctul a, reacțiunea avînd direcția ab (fig. I.24, b). Această simplificare se poate admite și în dinamică, dacă masa corpului $C°$ este neglijabilă. Deoarece forma unui astfel de corp $C°$ nu prezintă însemnătate, acesta se figurează de multe ori ca bară rectilinie dublu articulată la extremități.

În Statica construcţiilor se utilizează frecvent reprezentări schematice ale reazemelor, construite ca grupări de bare dublu articulate.

14.6.4. **Reazeme ale punctului material.** Asimilînd un corp cu un punct material P, se admite, consecvent cu aceeaşi ipoteză simplificatoare, că regiunile de contact dintre P şi baza B se reduc la cîte un singur punct. În consecinţă, torsorul reacţiunilor va lua forma particulară a unei reacţiuni $\overline{\mathscr{R}}^l$, aplicate punctului P, iar între punctul material P şi baza B se poate produce un singur fenomen de frecare şi anume, frecarea de alunecare. În tabelul I.13 sînt indicate tipurile de reazeme ale punctului material.

14.7. Sistem mecanic

14.7.1. **Generalităţi.** Mai multe corpuri rigide (unele putînd fi asimilate punctelor materiale) între care se exercită interacţiuni mecanice prezentînd interes într-o anumită problemă, formează un *sistem mecanic* notat în general cu $\mathscr{S}$. Corpul de bază B nu aparţine sistemului mecanic. Un sistem material va putea fi de asemenea privit drept un ansamblu de puncte materiale în cadrul anumitor capitole ale mecanicii, fiind desemnat în acest caz prin simbolul $\mathscr{P}$. O *parte* sau un *subsistem* din $\mathscr{S}$ se va nota cu S; în particular, S poate fi alcătuit dintr-un singur corp, sau dintr-un singur punct material, sau poate fi identic cu $\mathscr{S}$.

Totalitatea forţelor $\mathscr{F}(S)$ active şi de legătură (prin aplicarea principiului forţelor de legătură), care acţionează o parte S, pot fi clasificate în *forţe interioare* $\mathscr{F}^i(S)$ în raport cu S, care îşi au perechea în puncte aparţinînd lui S şi *forţe exterioare* $\mathscr{F}^e(S)$ în raport cu S, care îşi au perechea în puncte materiale neaparţinînd lui S. Această clasificare, deşi convenţională deoarece depinde de criteriile după care a fost desemnată partea S din $\mathscr{S}$, totuşi este deosebit de utilă întrucît întotdeauna $\mathscr{F}^i(S) \sim 0$ şi deci $\mathscr{F}(S) \sim \mathscr{F}^e(S)$.

A izola o parte $S \subset \mathscr{S}$, înseamnă a reţine în vederea aplicării unor metode sau a unor ecuaţii din statică sau din dinamică, numai subsistemul S împreună cu forţele aferente $\mathscr{F}(S)$, cealaltă parte $\mathscr{S} - S$ fiind considerată ca şi inexistentă. De fapt, cînd izolăm partea S, este necesar să aplicăm principiul forţelor de legătură numai legăturilor exterioare în raport cu S, legăturile interioare în raport cu S rămînînd nedesfăcute, deoarece aşa cum s-a arătat, $\mathscr{F}(S) \sim \mathscr{F}^e(S)$.

14.7.2. **Numărul gradelor de libertate. Coordonate generalizate. Legături.** Numărul n al parametrilor scalari independenţi necesari în vederea determinării oricărei poziţii posibile a unui sistem $\mathscr{S}$ faţă de o bază B, se numeşte *numărul gradelor de libertate* al sistemului. La fel ca şi în mecanica analitică (v. cap. 19), aceşti parametri, obişnuit distanţe sau unghiuri, vor fi notaţi cu $q_1, q_2, \ldots, q_n$ şi denumiţi *coordonate generalizate*. În problemele de mişcare, coordonatele generalizate sînt funcţii de timp.

Pentru un sistem $\mathscr{S}$ liber de orice legături şi alcătuit din N puncte materiale şi N' corpuri rigide, $n = 3N + 6N'$ (în plan, $n = 2N + 3N'$). Prezenţa unor legături la sistemul S micşorează numărul n. Fie un sistem $\mathscr{S}$ avînd l' legături simple şi n' grade de libertate. Dacă prin suprimarea oricărei legături simple, n' se măreşte cu o unitate, cele l' legături simple împreună cu ecuaţiile corespunzătoare de legătură sînt *independente*. Dacă există o legătură simplă a cărei suprimare nu conduce la mărirea cu o unitate a numărului n', atunci cele l' legături simple împreună cu ecuaţiile corespunzătoare de legătură sînt *dependente* sau *nedistincte*.

Conform principiului forţelor de legătură şi potrivit celor arătate în paragraful 14.6 al acestui capitol, la o legătură simplă între două corpuri C şi C' corespunde o pereche de componente ale forţelor de legătură, de valori egale şi direct opuse, aplicate corpurilor C şi C'. În ecuaţiile scalare ale problemelor de dinamică şi ale problemelor de statică, componentele forţelor de legătură intervin întotdeauna sub forma liniară, ca ne-

cunoscute scalare. După cum legăturile simple ale unui sistem $\mathcal{S}$ sînt distincte sau nedistincte, componentele forțelor de legătură apar în aceste ecuații ca fiind *liniar independente*, sistemul $\mathcal{S}$ numindu-se *static determinat*, sau respectiv apar ca fiind *liniar dependente*, $\mathcal{S}$ numindu-se sistem *static nedeterminat*. La sistemele static nedeterminate, forțele de legătură pot fi calculate numai prin metodele Rezistenței materialelor sau ale Staticii construcțiilor, luîndu-se în considerație proprietățile de deformabilitate ale corpurilor.

În cele ce urmează, ne vom ocupa dacă nu se specifică altfel, numai de sisteme static determinate. Fie deci un astfel de sistem $\mathcal{S}$ cu N puncte materiale și N' corpuri rigide, supus la l legături simple. Atunci $n = 3N + 6N' - l$ (în plan, $n = 2N + 3N' - l$).

Un sistem $\mathcal{S}$ se numește *invariabil*, dacă poziția sa este bine determinată datorită unui număr suficient de legături, prin însuși enunțul problemei respective. În acest caz $n = 0$, iar numărul necesar și suficient de legături simple, egal cu numărul componentelor forțelor de legătură, este egal cu $l_0 = 3N + 6N'$ (în plan, $l_0 = 2N + 3N'$). În tabelul I.15 se indică posibilitățile de rezemare invariabilă a unui corp rigid, folosind reazeme de

Tabelul I.15

Grupări ale reazemelor indicate în tabelul I.13, necesare în vederea obținerii unei rezemări invariabile a corpului rigid

Tipul de reazem	Grupări de reazeme						
	Probleme spațiale				Probleme plane		
	I	II	III	IV	I	II	III
Reazem simplu	6	3	2	—	3	1	—
Reazem articulat	—	1	—	—	—	1	—
Reazem articulat cilindric	—	—	1	—			
Reazem încastrat	—	—	—	1		—	1

tipuri frecvent întîlnite fără frecare. La grupările respective de reazeme, trebuie evitate anumite dispoziții particulare corespunzînd unei dependențe a legăturilor, deși numărul legăturilor simple rămîne egal cu l_0. Pentru problemele spațiale, aceste cazuri sînt studiate și enumerate în lucrarea [6]. În problemele plane, trebuie evitate următoarele situații: a) la gruparea I (trei reazeme simple), suporturile reacțiunilor nu trebuie să fie nici concurente nici paralele; b) la gruparea II (un reazem articulat și un reazem simplu), suportul reacțiunii reazemului simplu nu trebuie să treacă prin reazemul articulat.

14.7.3. Necunoscutele scalare ale unei probleme de mecanică. Numărul necunoscutelor scalare independente ale unei probleme de mecanică este egal cu $3N + 6N'$ (în plan, $2N + 3N'$). Dintre acestea, $n = 3N + 6N' - l$ (în plan, $n = 2N + 3N' - l$) sînt coordonate generalizate, iar l sînt componente ale forțelor de legătură. În statică, se cere calcularea valorilor acestor necunoscute pentru pozițiile de echilibru ale sistemului mecanic, iar în dinamică — găsirea necunoscutelor ca funcții de timp.

O utilizare sistematică și eficientă a coordonatelor generalizate la rezolvarea problemelor este deosebit de favorabilă, însă nu poate fi obținută în cazurile mai complicate, decît prin metodele proprii mecanicii analitice (v. cap. 19). Mecanica analitică permite de asemenea separarea sistemului general de $3N + 6N'$ ecuații de echilibru sau de mișcare, în două subsisteme de ecuații, primul dintre acestea conținînd ca necunoscute, numai coordonatele generalizate.

15. STATICA

15.1. Echilibrul corpului rigid

Fie C un corp liber sau eliberat de legături în virtutea principiului forțelor de legătură, dacă inițial era supus la legături și fie $\mathscr{F}(C)$ ansamblul forțelor (active și eventual de legătură) aplicate corpului C. Condiția necesară și suficientă de echilibru a corpului C este $\mathscr{F}(C) \sim 0$.

15.2. Echilibrul sistemului mecanic

15.2.1. **Metoda izolării corpurilor.** Un sistem $\mathscr{S}$ este în echilibru dacă și numai dacă fiecare corp $C \in \mathscr{S}$ este în echilibru (unele corpuri putînd fi asimilate punctelor materiale). Aceasta revine la scrierea pentru fiecare corp $C \in \mathscr{S}$, după izolarea acestuia, a ecuațiilor de echilibru $\mathscr{F}(C) \sim 0$. Acest procedeu se numește *metoda izolării corpurilor*. La un sistem alcătuit din N puncte materiale și N' corpuri rigide, se obțin astfel $3N + 6N'$ (în plan, $2N + 3N'$) ecuații de echilibru, servind la determinarea unui număr egal de necunoscute, conform celor specificate la pct. 14.7.3.

15.2.2. **Teorema solidificării.** Fie o parte $S \subset \mathscr{S}$ și forțele respective $\mathscr{F}(S) \sim \mathscr{F}^e(S)$ (v. pct. 14.7.1). *Teorema solidificării* afirmă următoarele: O condiție necesară de echilibru a sistemului $\mathscr{S}$ este ca $\mathscr{F}^e(S) \sim 0$ pentru o parte $S \subset \mathscr{S}$. Denumirea teoremei provine din faptul că ecuațiile de echilibru $\mathscr{F}^e(S) \sim 0$ sînt aceleași ca și cum partea S ar forma un singur corp rigid. Teorema solidificării se poate utiliza simultan la diferite părți ale lui $\mathscr{S}$ și în particular atît pentru un singur corp $C \in \mathscr{S}$ (asimilat eventual cu un punct material), cît și la întreg sistemul $\mathscr{S}$.

Teorema solidificării pentru o parte $S \subset \mathscr{S}$ conduce la scrierea a 6 ecuații de echilibru în cazul general sau a 3 ecuații de echilibru la problemele plane. Este evident deci că utilizarea teoremei pentru o parte $S \subset \mathscr{S}$ nu ne poate furniza o condiție suficientă de echilibru a sistemului $\mathscr{S}$ (ci numai necesară, așa cum se afirmă în enunț). O excepție o constituie cazul în care $S \equiv \mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ fiind un sistem mecanic rigid.

15.2.3. **Probleme de echilibru.** Într-o problemă de echilibru al unui sistem $\mathscr{S}$, necunoscutele ecuațiilor de echilibru sînt componentele forțelor de legătură care apar întotdeauna sub formă liniară și coordonatele generalizate ale poziției sistemului, care în general intervin sub formă neliniară. Problema are o singură soluție dacă $\mathscr{S}$ este un sistem invariabil și poate avea mai multe soluții dacă $\mathscr{S}$ nu este invariabil.

Metoda generală de rezolvare a problemelor de echilibru pentru un sistem oarecare $\mathscr{S}$ alcătuit din N puncte materiale și N' corpuri rigide, este metoda izolării corpurilor; sistemul de ecuații astfel rezultat conține toate cele $3N + 6N'$ (în plan, $2N + 3N'$) necunoscute ale problemei. Există însă multe probleme în care se pretinde aflarea numai a unui număr de necunoscute, mai mic decît cel total. În astfel de cazuri, este avantajos pentru economia calculelor, să se scrie un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor cerute, ecuații care să nu conțină și alte necunoscute. Aceasta nu este însă posibil în general prin metoda izolării corpurilor, ci numai prin utilizarea teoremei solidificării la anumite părți ale sistemului $\mathscr{S}$, folosind uneori concomitent și unele ecuații rezultate din izolarea cîtorva corpuri. Stabilirea unui sistem cît mai simplu de ecuații, corespunzînd acestor cerințe, se analizează obișnuit în Statica construcțiilor pentru sisteme mecanice simple, sau avînd alcătuiri tipice folosite în construcții; în cazul sistemelor mecanice mai complexe, realizarea acestui deziderat depinde în mare parte de îndemînarea calculatorului și de experiența rezolvării unor probleme cît mai variate.

16. CINEMATICA

16.1. Cinematica punctului

16.1.1. Generalităţi. În raport cu un sistem de referinţă oarecare, mişcarea unui punct P se consideră cunoscută, dacă este posibil să se determine la orice moment t, poziţia punctului faţă de sistemul de referinţă respectiv. Proprietăţile caracteristice ale mişcării se studiază prin intermediul *elementelor cinematice ale mişcării*: traiectoria, viteza şi acceleraţia.

Traiectoria, ca orişice curbă, se exprimă analitic prin *ecuaţiile traiectoriei*, fie parametric (de exemplu în coordonate carteziene, $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$, $z = z(\sigma)$, parametrul σ fiind funcţie de timp, $\sigma = \sigma(t)$, sau frecvent, $\sigma \equiv t$), fie neparametric (de exemplu în coordonate carteziene prin ecuaţiile $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$.

Dacă $\bar{r} = \overline{OP}$, O fiind originea sistemului de referinţă, *viteza* $\bar{v} = \mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t = \dot{\bar{r}}$ este un vector aplicat în P, tangent la traiectorie, avînd proiecţiile carteziene $v_x = \dot{x}$, (..).

Acceleraţia $\bar{a} = \mathrm{d}\bar{v}/\mathrm{d}t = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$ este un vector aplicat în P, de proiecţii carteziene $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, (..). Proiecţiile vitezei şi acceleraţiei pe *triedrul lui Frenet* cu originea în punctul P(v. cap. 6) sînt: $v_\tau = \dot{s} = v$, $v_\nu = 0$, $v_\beta = 0$, respectiv $a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}$, $a_\nu = v^2/\rho$, $a_\beta = 0$.

Prin *condiţii iniţiale* ale mişcării, se înţeleg poziţia şi viteza la momentul t_0 (obişnuit, $t_0 = 0$), notate cu $\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, respectiv $\bar{v}(t_0) = \bar{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$; acestea servesc în unele probleme, dacă este cazul, la determinarea constantelor de integrare.

16.1.2. Mişcări particulare. Dacă $|\bar{v}| =$ const mişcarea, este *uniformă*; rezultă: $s = vt + s_0$, $a_\tau = 0$. $a = a_\nu$. Dacă $a_\tau =$ const, mişcarea este *uniform variată*; rezultă:

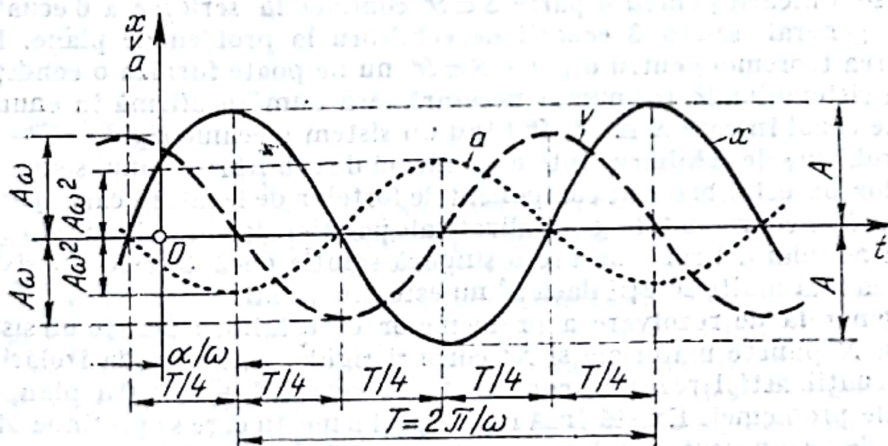


Fig. I.25

$v = a_\tau t + v_0$, $s = \frac{1}{2} a_\tau t^2 + v_0 t + s_0$. În *mişcarea rectilinie* de-a lungul axei Ox: $v = \dot{x}$, $a = \dot{v} = \ddot{x}$. *Mişcarea rectilinie oscilatorie armonică* de-a lungul axei Ox se defineşte prin $x = A\cos(\omega t - \alpha)$, unde; x este elongaţie, A — amplitudine, ω — pulsaţie, α — fază iniţială. Rezultă: $v = -A\omega\sin(\omega t - \alpha)$, $a = -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha) = -\omega^2 x$ (fig. I.25). Mişcarea este periodică, cu perioada $T = 2\pi/\omega$, frecvenţa fiind $f = 1/T = \omega/2\pi$.

Mişcarea circulară pe un cerc cu rază R; cu notaţiile din fig. I.26, $s(t) = \breve{A}P = R\varphi(t)$, $v = R\omega$, $a_\tau = R\varepsilon$, $a_\nu = R\omega^2$, unde $\omega = \dot{\varphi}$ este viteza unghiulară, iar $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ este acceleraţia unghiulară.

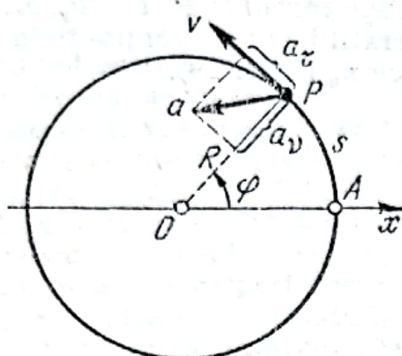


Fig. I.26

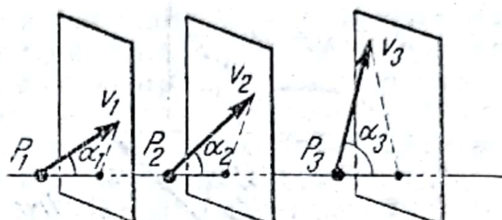


Fig. I.27

16.2. Cinematica corpului rigid

16.2.1. **Probleme generale.** Mişcarea unui corp este cunoscută dacă se cunoaşte mişcarea oricărui punct al său. Datorită proprietăţii de rigiditate a corpului, mişcările diferitelor puncte ale acestuia nu pot fi total independente una de alta, ci sînt supuse unor legături exprimate fie *geometric*, distanţa între două puncte oarecare ale corpului este invariabilă în timp, fie *cinematic*, proiecţiile vitezelor punctelor unei drepte orientate aparţinînd corpului, pe această dreaptă, sînt egale. Cu notaţiile din fig. I.27, ultima condiţie se formulează: $|v_1| \cos \alpha_1 = |v_2| \cos\alpha_2 = |v_3| \cos \alpha_3 = \dots$, sau vectorial pentru două puncte P_i, P_j, $\bar{v}_i . \overline{P_iP_j} = \bar{v}_j . \overline{P_iP_j}$.

Totalitatea vectorilor-viteze ale punctelor corpului, la un moment oarecare al mişcării, alcătuiesc *cîmpul (vectorial al) vitezelor* sau *distribuţia (instantanee a) vitezelor*. Denumiri analoage se utilizează şi pentru totalitatea vectorilor-acceleraţii. Studiul acestor două cîmpuri vectoriale constituie obiectul problemei de bază a cinematicii corpului rigid. Notînd în continuare cu P un punct arbitrar (sau punct curent) al corpului, cîmpul vitezelor poate fi exprimat prin formula generală $\bar{v}_P = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$, în funcţie de doi vectori, viteza $\bar{v}_0$ a unui punct O al corpului şi *vectorul vitezei unghiulare* $\bar{\omega}$, unde $\bar{r} = \overline{OP}$.

16.2.2. **Mişcări simple.** În *mişcarea de translaţie*, orice segment de dreaptă aparţinînd corpului ocupă în timpul mişcării poziţii paralele. Traiectoriile punctelor corpului sînt curbe identice care pot fi suprapuse prin translaţii geometrice. Distribuţiile vitezelor şi acceleraţiilor sînt date prin formulele $\bar{v}_P = \bar{v}_0$, respectiv $\bar{a}_P = \bar{a}_0$. În mişcarea de translaţie este suficient deci să se cunoască mişcarea unui singur punct al corpului.

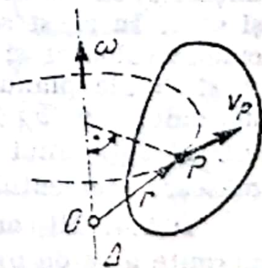


Fig. I.28

În *mişcarea de rotaţie*, o dreaptă Δ aparţinînd corpului (sau legată rigid de acesta), numită *axă de rotaţie*, rămîne (convenţional) fixă tot timpul mişcării. Orice punct P descrie o traiectorie circulară în plan normal la Δ şi cu centrul pe Δ, viteza unghiulară ω fiind aceeaşi pentru toate punctele P. Distribuţia vitezelor este dată de $\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \bar{r}$, cu notaţiile din fig. I.28, vectorul vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ dispunîndu-se convenţional pe axa Δ.

16.2.3. **Mişcarea plană.** Un corp rigid are o *mişcare plană* (sau *plan-paralelă*) dacă există un plan π solidar cu acest corp, care în tot timpul mişcării alunecă pe un plan (convenţional) fix π_0, numit *planul mişcării*. În mişcarea plană este suficient să se studieze mişcările punctelor din planul π, deoarece toate punctele corpului P, P_1, $P_2, \ldots,$ situate pe o normală la π_0, au traiectorii, viteze şi acceleraţii identice, conţinute în planele π, respectiv $\pi_1, \pi_2, \ldots,$ duse prin P_1, $P_2, \ldots$- paralel cu π_0 (fig. I.29).

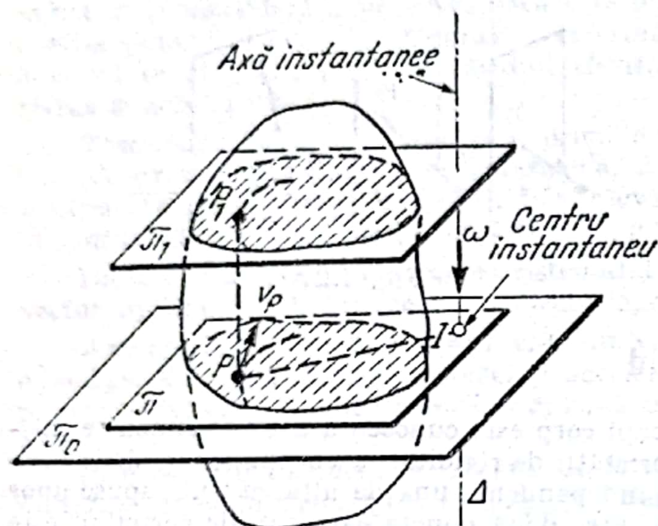


Fig. I.29

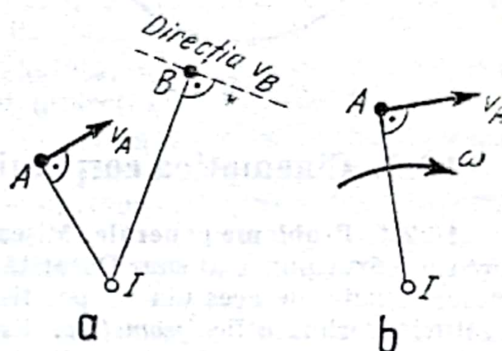


Fig. I.30

În orice moment t al mişcării, există o dreaptă mobilă Δ, normală la π_0, numită *axă instantanee de rotaţie* (v. fig. I.29), caracterizată prin următoarea proprietate: orice punct al corpului situat pe Δ la momentul t are viteza nulă în acest moment. Punctul I al dreptei Δ situat în planul mişcării se numeşte *centru instantaneu de rotaţie*. Distribuţia vitezelor punctelor planului π poate fi privită ca o distribuţie de viteze de rotaţie în raport cu I, conform formulei $\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \overline{IP}$, vectorul $\bar{\omega}$ considerîndu-se dispus convenţional pe Δ. Vectorul $\bar{v}_P$ este conţinut în planul mişcării şi este normal la segmentul IP numit *rază instantanee de rotaţie*, iar $|\bar{v}_P| = |\bar{\omega}|\,|\overline{IP}|$ (v. fig. I.29). Distribuţia vitezelor în planul mişcării poate fi deci construită, ştiind poziţia punctului I şi viteza unghiulară ω ca valoare şi sens. În acest scop se folosesc metode grafice (sau geometrice). Astfel: a) dacă se cunosc valoarea şi direcţia vitezei $\bar{v}_A$, precum şi direcţia vitezei $\bar{v}_B$ pentru două puncte A şi B ale planului π (fig. I.30, *a*), centrul instantaneu I se găseşte la intersecţia normalelor pe $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ în A şi B, iar $\omega = v_A/IA$; b) dacă se cunosc direcţia şi valoarea vitezei $\bar{v}_A$ a unui punct A, precum şi ω, se duce o normală în A pe $\bar{v}_A$, pe care se măsoară segmentul $AI = v_A/\omega$ (fig. I.30, *b*).

16.2.4. **Mişcarea generală a corpului rigid.** Formula generală $\bar{v}_P = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP}$ permite a se da următoarea interpretare distribuţiei instantanee a vitezelor într-o mişcare oarecare: cîmpul vitezelor unui corp rigid, $\bar{v}_P$, poate fi privit ca sumă vectorială a unui cîmp de viteze de translaţie $\bar{v}_0$ împreună cu un punct O al corpului şi a unui cîmp de viteze de rotaţie $\bar{\omega} \times \overline{OP}$ în raport cu o axă Δ prin O, considerată ca suport al vectorului vitezei unghiulare $\bar{\omega}$. În formula precedentă vectorul $\bar{\omega}$ rămîne neschimbat, dacă se ia alt punct de referinţă O' în locul punctului O.

16.3. Raportarea mişcării la sisteme de referinţă diferite

16.3.1. Introducere. Spre deosebire de dinamică (v. pct. 14.1.5. şi 17.4), valabilitatea formulelor teoretice de bază din cinematică, expuse anterior, nu impune raportarea mişcării la un sistem de referinţă avînd vreo calitate deosebită. Orice sistem de referinţă este egal îndreptăţit în acest scop. Recunoaştem însă uşor, că prin schimbarea sistemului de referinţă, se vor schimba şi unele caracteristici particulare ale elementelor cinematice (traiectorie, viteză şi acceleraţie) pentru un acelaşi caz concret de mişcare.

În cele ce urmează, vom ţine seama de mai multe sisteme de referinţă $O_0x_0y_0z_0$, $O_1x_1y_1z_1$, $O_2,x_2,y_2z_2,\ldots$, solidare cu corpurile rigide $C_0, C_1, C_2, \ldots$, în mişcare unul faţă de altul. În general, o mişcare a unui punct sau a unui corp raportată la un corp C_i, se numeşte *mişcare relativă* în raport cu C_i. Uneori, se obişnuieşte convenţional a se desemna unul dintre aceste corpuri drept ,,corp fix'', celelalte fiind numite ,,corpuri mobile''. În acest caz, mişcarea raportată la corpul fix se numeşte *mişcare absolută*.

16.3.2. Mişcarea punctului. Fie un corp fix C_0, un corp mobil C_1 şi un punct mobil P. Se consideră cunoscute mişcarea lui C_1 faţă de C_0 şi mişcarea relativă a lui P, fiind necesar să se găsească mişcarea absolută a punctului P. Viteza şi acceleraţia în mişcarea relativă a lui P se notează $\bar{v}_r$, respectiv $\bar{a}_r$, iar în mişcarea sa absolută $\bar{v}_a$, respectiv $\bar{a}_a$. Se numeşte *viteză de transport* $\bar{v}_t$ a punctului P şi *acceleraţie de transport* $\bar{a}_t$ a aceluiaşi punct, viteza şi respectiv acceleraţia unui punct Q al corpului C_1, care la momentul t coincide cu punctul P. Vitezele şi acceleraţiile menţionate satisfac următoarelor relaţii: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$, $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$, unde $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r$ se numeşte *acceleraţia lui Coriolis* (sau *acceleraţia complementară*), vectorul $\bar{\omega}$ referindu-se la mişcarea corpului C_1.

16.3.3. Mişcarea corpului rigid. Se cunosc distribuţiile de viteze ale corpurilor C_i în raport cu C_{i-1}, fiind date vitezele $\bar{v}_{i,\,i-1}$ ale punctelor O_i în raport cu C_{i-1} şi vectorii vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_{i,\,i-1}$ ale corpurilor C_i în raport cu C_{i-1}, $i=1, 2, \ldots, n$. Se cere a se găsi distribuţia vitezelor corpului C_n faţă de C_0, prin determinarea vitezei $\bar{v}_{n0}$ a punctului O_n în raport cu C_0 şi a vectorului $\bar{\omega}_{n0}$. Se va indica în continuare soluţia acestei probleme pentru două cazuri particulare frecvent întîlnite în unele metode ale Staticii construcţiilor.

16.3.3.1. Compuneri de translaţii. Prin ipoteză $\bar{\omega}_{i,\,i-1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mişcarea corpului C_n raportată la C_0 este o translaţie ($\bar{\omega}_{n,\,0} = 0$) cu viteza $\bar{v}_{n,\,0} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_{i,\,i-1}$.

16.3.3.2. Compuneri de mişcări plane paralele cu acelaşi plan fix π_0. Distribuţia de viteze a unui corp C_i faţă de C_{i-1} este aceeaşi ca şi cum C_i ar avea o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_{i,\,i-1}$ în raport cu o axă $\Delta_{i,\,i-1}$ normală la π_0, numită *axă instantanee de rotaţie relativă*. Toate axele $\Delta_{i,\,i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$ sînt paralele, iar vectorii $\omega_{i,\,i-1}$ se consideră vectori alunecători dispuşi pe aceste axe. Punctele axelor $\Delta_{i,\,i-1}$ situate în planul mişcării se numesc *centre instantanee de rotaţie relativă* şi se notează cu $I_{i,i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Dacă se iau punctele O_i astfel încît la un moment oarecare să se găsească pe axele $\Delta_{i,\,i-1}$ sau în particular să coincidă cu centrele $I_{i,\,i-1}$, atunci în acel moment $\bar{v}_{i,\,i-1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mişcarea corpului C_n în raport cu C_0 este de asemenea o mişcare plană paralelă cu π_0. Distribuţia vitezelor corpului C_n faţă de C_0 se caracterizează într-un

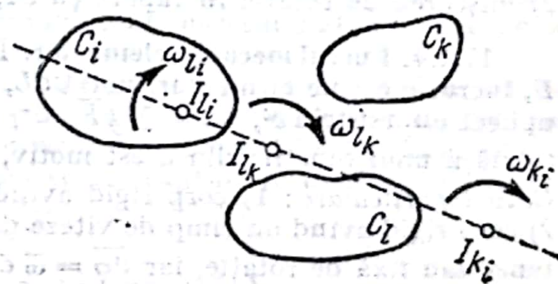


Fig. I.31

caz general prin axa instantanee de rotație relativă $\Delta_{n,0}$ la care corespunde centrul instantaneu de rotație relativă $I_{n,0}$, și prin vectorul $\overline{\omega}_{n,0}$ dispus pe această axă. Vectorul $\overline{\omega}_{n,0}$ se obține ca vector rezultant al vectorilor alunecători paraleli $\overline{\omega}_{1,0}, \overline{\omega}_{2,1}, .., \overline{\omega}_{n,n-1}$, conform regulilor de reducere a forțelor paralele (v. pct. 14.4.7). În cazul particular cînd $\overline{\omega}_{n,0} = 0$, distribuția căutată a vitezelor este aceeași ca într-o mișcare de translație.

Teorema colinearității a trei centre instantanee relative: dacă trei corpuri C_i, C_k și C_l au mișcări plane paralele cu același plan fix, atunci cele trei centre instantanee de rotație relativă I_{li}, I_{lk} și I_{ki} sînt colineare (fig. I.31).

17. DINAMICA

17.1. Noțiuni introductive în dinamică

17.1.1. Cantitatea de mișcare (numită și *impuls*) se notează $\overline{H}$. Pentru un punct material P, $\overline{H} = m\overline{v}$. Pentru un sistem de puncte materiale $\mathcal{P}$: $\overline{H} = \sum_{\mathcal{P}} m_i \overline{v}_i = M\overline{v}_G$.

17.1.2. Momentul cinetic. Momentul cinetic în raport cu originea O a unui triedru $Oxyz$ se notează $\overline{K}_0$. Pentru P, $\overline{K}_0 = \overline{r} \times m\overline{v}$. Pentru $\mathcal{P}$: $\overline{K}_0 = \sum_{\mathcal{P}} \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i$. *Teorema lui König*: $\overline{K}_0 = \overline{r}_G \times M\overline{v}_G + \overline{K}_{Gr}$($\overline{K}_{Gr}$ se calculează pentru mișcarea relativă a sistemului $\mathcal{P}$ în raport cu triedrul $Gx'y'z'$ care are o mișcare de translație față de $Oxyz$. *Cazuri particulare*: a) mișcarea de translație, $\overline{K}_0 = \overline{r}_G \times M\overline{v}_G = \overline{r}_G \times M\overline{v}$; b) mișcarea de rotație în raport cu Oz care este axă principală de inerție, $\overline{K}_0 = J_z \omega \overline{k}$.

17.1.3. Energia cinetică. Energia cinetică în raport cu un triedru $Oxyz$ se notează E (în mecanica analitică se notează T, v. cap. 19). Pentru $P: E = \frac{1}{2} mv^2$. Pentru $\mathcal{P}: E = \sum_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} m_i v_i^2$. *Teorema lui König*: $E = \frac{1}{2} Mv_G^2 + E_{Gr}$($E_{Gr}$ este energia cinetică a sistemului $\mathcal{P}$ în mișcarea sa relativă față de triedrul $Gx'y'z'$ care are o mișcare de translație în raport cu $Oxyz$). *Cazuri particulare*: 1) mișcarea de translație, $E = \frac{1}{2} Mv^2$; 2) mișcarea de rotație în raport cu Oz, $E = \frac{1}{2} J_z \omega^2$.

17.1.4. Lucrul mecanic elementar. În cazul unei forțe $\overline{F}$ aplicate unui punct material P, lucrul mecanic elementar, notat dL, are expresia d$L = \overline{F} . \mathrm{d}\overline{r}$. În cazul unui sistem $\mathcal{F}$ aplicat unui sistem $\mathcal{P}$, $\mathrm{d}L = \sum_{\mathcal{F}} \overline{F}_i \cdot \mathrm{d}\overline{r}_i = \sum_{\mathcal{P}} \overline{F}_i \cdot \mathrm{d}\overline{r}_i$[1]. d$L$ nu este în general o diferențială totală a unui funcții; din acest motiv, în unele lucrări se notează mai corect cu d$'L$. *Cazuri particulare*: 1) corp rigid avînd un cîmp de viteze de translație, $\mathrm{d}L = \overline{\mathcal{R}}^e . \mathrm{d}\overline{r}$; 2) corp rigid avînd un cîmp de viteze de rotație, $\mathrm{d}L = \mathcal{M}_\Delta^e \mathrm{d}\varphi$, unde Δ este axă instantanee sau fixă de rotație, iar $\overline{\mathrm{d}\varphi} = \overline{\omega}\, \mathrm{d}t$; 3) d$L$ al forțelor interioare la un corp rigid este nul; 4) dL al forțelor de legătură corespunzătoare legăturilor scleronome și ideale (v. cap. 19) este nul.

17.1.5. Lucrul mecanic finit. Lucrul mecanic finit efectuat într-un interval finit de timp $[t_1, t_2]$ $t_1 < t_2$ se obține prin integrarea lucrului mecanic elementar de-a lungul tra-

[1] În continuare, pentru lucrul mecanic vom omite într-un caz general, scrierea unui indice la semnul de însumare Σ.

iectoriei punctului material, respectiv al traiectoriilor punctelor materiale între pozițiile[1]) A_1 și A_2 ocupate la t_1, respectiv la t_2.

17.2.6. **Forțe conservative.** Dacă există o funcție de coordonatele punctelor de aplicație ale unui sistem de forțe, $U = U(x_1, y_1, z_1, \ldots x_N, y_N, z_N)$, uniformă, finită și derivabilă în domeniul considerat al spațiului, astfel încît $X_i = \partial U/\partial x_i(\ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, atunci forțele $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_N$ se numesc *forțe conservative* sau *forțe potențiale*, U se numește *funcție de forță* și se determină cu aproximația unei constante aditive, iar $V = -U$ se numește *energie potențială*. În acest caz, lucrul mecanic elementar al acestor forțe este o diferențială totală a funcției U, $\mathrm{d}L = \mathrm{d}U$, iar lucrul mecanic finit între pozițiile A_1 și A_2 depinde numai de aceste poziții și anume, $L_{A_1A_2} = U(A_2) - U(A_1)$, unde prin $U(A_1)$ și $U(A_2)$ se înțelege valoarea funcției U, calculată în poziția A_1 și respectiv A_2. *Cazuri particulare*: 1) forțe gravitaționale, $U = \pm Gz_G + C$ (C = const), luîndu-se semnul plus sau minus, după cum axa verticală Oz este dirijată în jos, respectiv în sus; 2) pentru forța elastică $\overline{F} = -k\overline{r}$ (v. pct. 18.1.2.), $U = -kr^2/2$.

17.2. Dinamica punctului material

Observație. Atît în ecuația fundamentală a dinamicii, $m\overline{a} = \overline{F}$, cît și în relațiile și teoremele care se deduc din aceasta, este necesar a se considera că mișcarea se raportează la un sistem de referință inerțial (v. pct. 14.1.5.).

Prin proiectarea ecuației fundamentale a dinamicii, $m\overline{a} = \overline{F}$, pe un triedru cartezian, se obține un sistem de trei ecuații: $m\ddot{x} = X$, $m\ddot{y} = Y$, $m\ddot{z} = Z$. Dacă se cunoaște $\overline{F}$ și se cere a se găsi mișcarea punctului material, ecuațiile precedente se numesc *ecuații diferențiale de mișcare* (în coordonate carteziene); aceste ecuații se pot scrie și în orice alt sistem de coordonate. Fiecare ecuație fiind de ordinul doi, soluția generală $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ va depinde de șase constante de integrare care se determină cu ajutorul condițiilor inițiale ale mișcării (v. pct. 16.1.1.).

Anumite proprietăți ale unei mișcări apar cîteodată mai evidente din studierea variației în timp a cantității de mișcare (a impulsului), a momentului cinetic, sau a energiei cinetice, potrivit celor *trei teoreme generale*: 1) *teorema cantității de mișcare* (sau a *impulsului*), $\dot{\overline{H}} = \overline{F}$; 2) *teorema momentului cinetic*, $\dot{\overline{K}}_0 = \overline{\mathcal{M}}_0$; 3) *teorema energiei cinetice*, $dE = dL$. Dacă forța $\overline{F}$ este conservativă, ultima teoremă ia forma particulară a *teoremei conservării energiei mecanice* $E + V = h$ = const., unde $E + V$ se numește *energie mecanică*, h fiind *constanta energiei*. Teoremele generale sînt consecințe ale ecuației fundamentale a dinamicii.

Dacă punctul material este supus la legături, atunci în termenul din dreapta a ecuației fundamentale cît și a ecuațiilor diferențiale de mișcare se includ și forțele de legătură respective, prin aplicarea principiului forțelor de legătură (v. pct. 14.6.1.). În acest caz, la rezolvarea problemei trebuie să se țină seama și de ecuațiile respective de legătură (v. pct. 19.1.2.).

17.3. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Considerînd un sistem $\mathcal{P}$ de puncte materiale acționate de forțe active cunoscute și supus la legături (sau în particular, fără legături), mișcările punctelor, precum și forțele de legătură pot fi determinate prin integrarea unui sistem de $3N$ ecuații diferen-

[1]) Prin "poziția unui sistem de puncte" se înțelege ansamblul pozițiilor tuturor punctelor, ocupate la un anumit moment.

țiale de mișcare — de exemplu în coordonate carteziene, $m_i\ddot{x}_i = X_i^l + X_i^a(\ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, — ținînd seama de ecuațiile de legătură (v. pct. 19.1.2), precum și de condițiile inițiale ale mișcărilor.

Teoremele generale sînt : 1) *teorema cantității de mișcare* (sau a *impulsului*), $\dot{\overline{H}} = \overline{\mathscr{R}}^e$; echivalentă cu aceasta este *teorema mișcării centrului de greutate*, $M\overline{a}_G = \overline{\mathscr{R}}^e$; 2) *teorema momentului cinetic*, $\dot{\overline{K}}_0 = \overline{\mathscr{M}}_0^e$; 3) *teorema energiei cinetice*, $dE = dL$. Analog cu cazul mișcării unui punct material, se pot enunța și aici teoreme de conservare a energiei mecanice, după cum forțele interioare și/sau forțele exterioare sînt conservative.

17.4. Dinamica mișcării relative a punctului material. Echilibru relativ

Dacă se consideră un sistem de referință inerțial (v. pct. 14.1.5) și altul neinerțial, atunci ecuația vectorială a mișcării relative — adică a mișcării punctului material față de sistemul neinerțial — este $m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{F}_t + \overline{F}_c$, unde termenii $\overline{F}_t = -m\overline{a}_t$ și $\overline{F}_c = -m\overline{a}_c$ se numesc *forță de transport*, respectiv *forță a lui Coriolis*. Acești termeni poartă în mod *convențional* denumirea de „forțe", nerezultînd din acțiuni mecanice între corpuri.

În partea de statică a Mecanicii, se presupune implicit că pozițiile de echilibru se raportează la un sistem de referință inerțial. În cazul studiului echilibrului punctului material față de un sistem neinerțial — adică a *echilibrului relativ* — condiția vectorială de echilibru devine $\overline{F} + \overline{F}_t = 0$.

17.5. Metoda cinetostatică

17.5.1. **Principiul lui d'Alembert.** Ecuația fundamentală a dinamicii punctului material P, $m\overline{a} = \overline{F}$, scrisă sub forma $\overline{F} + \overline{F}^* = 0$, unde $\overline{F}^* = -m\overline{a}$, ar putea exprima o situație de echilibru a punctului, P, dacă termenul $\overline{F}^*$ denumit *forță de inerție* ar reprezenta o forță real aplicată punctului P. În virtutea acestei constatări, se enunță *principiul lui d'Alembert*: La orice moment al mișcării unui punct material, forțele reale (forțele active și forțele de legătură) și forța de inerție $\overline{F}^* = -m\overline{a}$ satisfac condițiilor de echilibru al punctului. Trebuie subliniat aici că aplicarea în cadrul principiului lui d'Alembert a unei forțe egale cu $\overline{F}^* = -m\overline{a}$ asupra punctului material P este *fictivă*, situația de echilibru menționată de acest principiu fiind deci de asemenea *fictivă*. În cazul unui sistem $\mathscr{P}$, principiul lui d'Alembert se exprimă prin N relații vectoriale $\overline{F}_i + \overline{F}_i^* = 0$, $i = 1,2,\ldots,N$, unde $\overline{F}_i^* = -m_i\overline{a}_i$.

Avantajele utilizării principiului lui d'Alembert constau în posibilitatea de stabilire a ecuațiilor diferențiale de mișcare pentru un sistem mecanic, prin folosirea metodelor de rezolvare a problemelor de echilibru și anume : 1) prin procedeele staticii, expuse la cap. 15., conducînd la *metoda cinetostatică*; 2) cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual (v. pct. 19.2). Din punctul de vedere al mecanicii analitice (v. cap. 19), principiul lui d'Alembert capătă o însemnătate deosebită tocmai prin reunirea acestuia cu principiul lucrului mecanic virtual, permițînd astfel, într-o primă etapă de calcul, eliminarea forțelor de legătură pentru o clasă cuprinzătoare de probleme. Vor rezulta astfel, „ecuația generală a dinamicii", precum și prin trecerea la coordonate generalizate, „ecuațiile lui Lagrange de speța a doua" (v. pct. 19.3.2).

17.5.2. **Expresii generale în metoda cinetostatică.** Aplicarea principiului lui d'Alembert la sisteme discrete de puncte materiale nu prezintă dificultăți în principiu. La corpurile rigide continue, forțele de inerție ale tuturor particulelor corpurilor pot fi introduse

însă în ecuațiile respective de echilibru fictiv, numai după reducerea acestora pentru fiecare corp în parte. Drept care, este necesar să se stabilească pentru forțele de inerție ale unui corp rigid C, formule ușor utilizabile ale vectorului rezultant $\overline{\mathscr{R}}^* = -\sum_C m_i \bar{a}_i$ și ale momentului rezultant $\overline{\mathscr{M}}_0^* = -\sum_C \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i$. Condițiile de echilibru fictiv ale corpului C se exprimă atunci prin ecuațiile vectoriale $\overline{\mathscr{R}} + \overline{\mathscr{R}}^* = 0$, $\overline{\mathscr{M}}_0 + \overline{\mathscr{M}}_0^* = 0$. Vectorul rezultant $\overline{\mathscr{R}}^*$ are o expresie generală simplă, $\overline{\mathscr{R}}^* = -M\bar{a}_G$. Calculul vectorului $\overline{\mathscr{M}}_0^*$ conduce însă la expresii mai simple, numai pentru mișcări particulare ale corpului C.

17.5.3. **Cazuri particulare.** 1) În *mișcarea de translație*, forțele de inerție se reduc la o rezultantă $\overline{\mathscr{R}}^* = -M\bar{a}_G = -M\bar{a}$, aplicată în centrul de greutate al corpului.

2) În *mișcarea de rotație în raport cu o axă fixă* Δ, luînd $Oz \equiv \Delta$ și axele Ox, Oy solidare cu corpul C, se ajunge la următoarele relații : $\overline{\mathscr{R}}^* = M(x_G\omega^2 + y_G\dot{\omega})\bar{i} + M(y_G\omega^2 - x_G\dot{\omega})\bar{j}$, $\overline{\mathscr{M}}_0^* = (J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\,\omega^2)\,\bar{i} + (J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2)\,\bar{j} + (-J_z\dot{\omega})\bar{k}$. De aici rezultă că ecuația de momente în raport cu Oz pentru echilibrul fictiv, este o ecuație diferențială de ordinul doi, $J_z\ddot{\varphi}(=J_z\dot{\omega}=J_z\varepsilon) = \mathscr{M}_z^a$, referitoare la o singură funcție necunoscută — unghiul de rotație $\varphi(t)$ și denumită *ecuația diferențială de rotație*. Dacă corpul C are un plan de simetrie materială (în particular, cazul unei plăci plane) normal la axa de rotație, invariantul scalar $\overline{\mathscr{R}}^* . \overline{\mathscr{M}}^*$ este nul, iar dacă și $\overline{\mathscr{R}}^* \neq 0$, atunci forțele de inerție se reduc la o rezultantă al cărui suport este conținut în planul de simetrie și taie dreapta OG în punctul A (fig. I.32), astfel încît $OA = J_z/Mr_G$, unde $r_G = OG$.

În tehnică intervine frecvent necesitatea realizării unei *echilibrări dinamice* a pieselor care au mișcări de rotație, adică a egalității dintre reacțiunile în stare dinamică și cele în stare de repaus. Pentru aceasta este necesar și suficient ca axa de rotație să fie axă principală centrală de inerție (adică $x_G = y_G = 0$, $J_{xz} = J_{yz} = 0$).

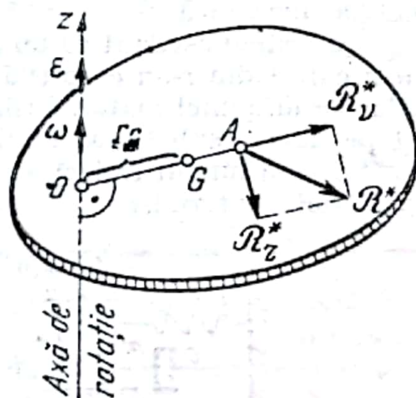


Fig. I.32

3) *În mișcarea plană a unui corp avînd un plan de simetrie materială* (în particular, cazul unei plăci plane) *paralel cu planul mișcării*, reducînd forțele de inerție în raport cu G, vectorul $\overline{\mathscr{R}}^* = -M\bar{a}_G$ este situat în planul de simetrie, iar $\overline{\mathscr{M}}_G^* = -J_z\dot{\omega}\bar{k}$, axa Oz fiind normală la planul de simetrie. Deoarece $\overline{\mathscr{R}}^* \cdot \overline{\mathscr{M}}^* = 0$, dacă și $\overline{\mathscr{R}}^* \neq 0$, atunci forțele de inerție se reduc la o rezultantă situată în planul mișcării.

18. OSCILAȚII LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE

18.1. Considerații generale

18.1.1. **Mișcări oscilatorii și sisteme oscilante.** În cadrul acestei secțiuni, se tratează oscilațiile[1)] liniare cu un singur grad de libertate ale sistemelor mecanice formate fie dintr-un punct material, fie dintr-un corp rigid avînd o mișcare de translație, caz care se asimilează cu cel al punctului material, fie dintr-un corp rigid avînd o mișcare de rotație față

[1)] *Dicționarul limbii romîne moderne* (Edit. Acad. R.S.R. 1958) la cuvintele "oscilație" și "vibrație", confirmă o anumită sinonimie între aceste două denumiri utilizate pentru a defini o anumită mișcare mecanică. Trebuie observat însă că de preferință denumirea de "vibrație" se folosește în cadrul ramurilor aplicative ale dinamicii (dinamica mașinilor, dinamica construcțiilor etc.), iar denumirea de "oscilație" — în cadrul dinamicii ca parte din mecanică.

de o axă fixă. Aceste sisteme vor fi denumite *sisteme oscilante simple cu un grad de libertate*. Problemele mai complexe de oscilații, cu unul, sau cu mai multe grade de libertate, se dezvoltă în cadrul secțiunii IX.

Mișcarea oscilatorie a unui sistem mecanic se distinge prin variații alternative în timp, în raport cu anumite valori de referință, ale unor mărimi cinematice (parametri de poziție, viteze și accelerații) sau dinamice (forțe, energie cinetică, energie potențială etc.) atașate sistemului. Mișcarea oscilatorie este *periodică* dacă elementele sale cinematice se repetă după același interval de timp minim T, numit *perioadă*. *Sistemele oscilante* sînt alcătuite din elemente care acumulează energia potențială prin deformațiile acestora (arcuri, resoarte, corpuri deformabile, structuri de rezistență etc.), din elemente care acumulează energia cinetică (mase și momente de inerție) și din elemente în care are loc o pierdere continuă de energie mecanică (amortizori). Din punct de vedere energetic, mișcarea oscilatorie se caracterizează printr-o schimbare alternativă a energiei mecanice, între forma cinetică și cea potențială. Pierderile de energie mecanică pot fi compensate periodic printr-o sursă exterioară de energie, producîndu-se în acest caz, *oscilații staționare*; dacă energia furnizată nu egalează periodic energia pierdută, mișcarea oscilatorie este *tranzitorie*.

Oscilațiile libere se produc în absența unei surse exterioare de energie, ca rezultat al unei perturbații inițiale. Deși fenomenul de amortizare nu poate fi înlăturat total prin nici un mijloc, totuși *oscilațiile neamortizate* pot de multe ori aproxima *oscilațiile amortizate*, mai ales dacă fenomenul de amortizare este suficient de slab. *Oscilațiile forțate* ale unui sistem oscilant se produc datorită unei surse exterioare de energie mecanică; caracterul acestora depinde de modul în care sursa exterioară furnizează în timp, energia mecanică.

Un sistem oscilant cu un grad de libertate poate fi schematizat printr-un *model mecanic* alcătuit dintr-un corp rigid de masă m avînd o mișcare de translație rectilinie și asimilat cu un punct material (fig. I.33), dintr-un element elastic de masă nulă, deseori figurat pe desene sub forma unui resort, precum și eventual dintr-un amortizor. Dispunînd axa Ox de-a lungul traiectoriei, se poate lua drept parametru al mișcării, abscisa x a punctului material.

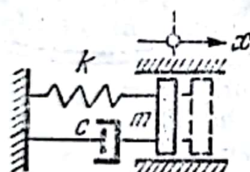


Fig. I.33

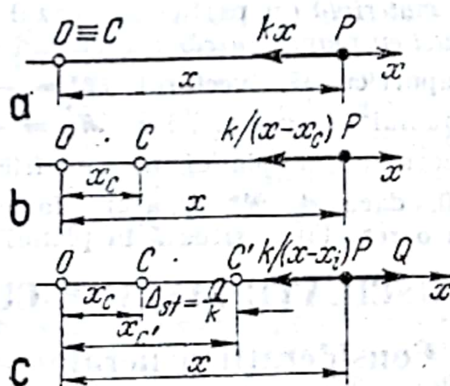


Fig. I.34

18.1.2. Forța elastică. Elementul elastic are rolul de a atrage punctul material P al modelului mecanic către un punct fix numit *centru de atracție*, cu o forță $\overline{F}$ numită *forță de rapel*. Poziția de echilibru a punctului P acționat de $\overline{F}$ coincide cu centrul C. Forța de rapel proporțională cu depărtarea între P și C se numește *forță elastică* și are expresia $\overline{F} = F\overline{i} = -k(x - x_C)\overline{i}$, unde $OP = x$ și $OC = x_C$ (fig. I.34). Coeficientul de proporționalitate constant k este pozitiv, se măsoară în unități de forță/unități de lun-

gime și se numește *constantă elastică*. Dacă la forța elastică $\overline{F}$ se adaugă o forță constantă $\overline{Q} = Q\overline{i}$, rezultanta $\overline{F}' = \overline{F} + \overline{Q} = -k(x - x_{C'})\overline{i}$ este de asemenea o forță elastică, centrul de atracție și poziția de echilibru fiind însă deplasate din C în C' pe distanța $x_{C'} - x_C = Q/k$, notată Δ_{st} și denumită *deplasare în stare statică* (sub acțiunea forței constante Q). În continuare, așa cum se obișnuiește frecvent, vom lua originea absciselor în poziția de echilibru a punctului P, astfel încît forța elastică va avea întotdeauna expresia $\overline{F} = F\overline{i} = -kx\overline{i}$.

Forțele de rapel întîlnite în problemele tehnice pot fi considerate cu aproximație acceptabilă drept funcții liniare de distanța la poziția de echilibru, numai dacă această distanță este suficient de mică. O forță de rapel are forma $\overline{F} = F(x)\overline{i}$, $F(x)$ fiind o funcție continuă, uniformă și strict descrescătoare pe un interval al absciselor x conținînd originea O, funcție care se anulează numai pentru $x = 0$. Dezvoltarea în serie de puteri în jurul poziției de echilibru $x = 0$, $F(x) = F(0) + xF'(0) + (x^2/2)F''(0) + \ldots$ cu $F(0) = 0$, arată că pentru x suficient de mic se obține într-adevăr expresia forței elastice $\overline{F} = -kx\overline{i}$, dacă se neglijează termenii de grad mai mare ca unu și dacă se pune $F'(0) = -k$[1].

Modelul mecanic definit anterior (v. fig. I.33) se numește *oscilator liniar*, dacă forța de rapel este (liniar—) elastică, iar oscilațiile respective se numesc *oscilații liniare*.

18.1.3. Analogie între oscilațiile de rotație și oscilațiile modelului mecanic. Mișcările oscilatorii de rotație se studiază de asemenea pe oscilatorul liniar din fig. I.33, ca urmare a analogiei ce poate fi stabilită prin compararea ecuațiilor diferențiale respective. În tabelul I.16 sînt indicate cîteva corespondențe rezultate din această analogie, între diferite mărimi mecanice care intervin în studiul celor două tipuri de oscilații.

Tabelul I.16

Analogie între oscilațiile de rotație ale unui corp rigid și oscilațiile rectilinii ale unui punct material

Oscilațiile rectilinii ale unui punct material		Oscilațiile de rotație ale unui corp rigid	
← Corespondențe →			
Deplasare liniară (parametrul mișcării)	x	Deplasare unghiulară (parametrul mișcării)	φ
Viteză	$v = \dot{x}$	Viteză unghiulară	$\omega = \dot{\varphi}$
Accelerație	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	Accelerație unghiulară	$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Forță	F	Cuplu avînd momentul	$\mathcal{M}_\Delta$
Constantă elastică	k	Constantă elastică	k_r
Forță elastică (poziția de echilibru corespunde abscisei $x = 0$)	$-kx$	Cuplu elastic avînd momentul (poziția de echilibru corespunde unghiului $\varphi = 0$)	$-k_r\varphi$
Coeficient de amortizare	c	Coeficient de amortizare	c_r
Forță de amortizare viscoasă	$-c\dot{x}$	Cuplu de amortizare viscoasă avînd momentul	$-c_r\dot{\varphi}$
Masă	m	Moment de inerție axial în raport cu axa de rotație Δ	J_Δ
Energie cinetică	$mv^2/2$	Energie cinetică	$J_\Delta\omega^2/2$
Lucru mecanic elementar	Fdx	Lucru mecanic elementar	$\mathcal{M}_\Delta d\varphi$

[1] Riguros, forța de rapel proporțională cu distanța la centrul de atracție se numește "forță liniar-elastică". Pentru simplificare, în mecanică această forță este denumită obișnuit "forță elastică", dacă astfel nu se pot produce confuzii.

18.2. Oscilații libere

18.2.1. **Oscilații libere fără amortizare.**[1] Ecuația diferențială a mișcării, $m\ddot{x}+kx=0$, are drept soluție ecuația (finită) de mișcare $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, care se mai poate scrie $x = A \cos(\omega t - \alpha)$, unde $\omega^2 = k/m$. Cu condițiile inițiale $x = x_0$ și $v = v_0$ la $t = 0$, constantele de integrare C_1, C_2 și respectiv A, α, capătă expresiile: $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/\omega$, $A = \sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$, $\alpha = \text{arctg}\,(v_0/\omega x_0)$. Mișcarea se numește *oscilație armonică*, iar ω și $f = 1/T = \omega/2\pi$ se numesc *pulsație proprie*, respectiv *frecvență proprie*.

Forța elastică fiind conservativă, oscilațiile armonice satisfac teoremei conservării energiei mecanice (v.pct.17.2), $E + V = h = E_0 + V_0 = E_{max} = V_{max}$, unde $E = \frac{1}{2} E_{max} \sin^2(\omega t - \alpha)$, $V = \frac{1}{2} V_{max} \cos^2(\omega t - \alpha)$, E_0 și V_0 fiind valorile inițiale ale acestor funcții iar $E_{max} = V_{max} = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$.

18.2.2. **Oscilații libere cu amortizare proporțională cu viteza.** În afară de forța elastică, asupra punctului material P situat pe axa Ox acționează și o forță opusă vitezei, de mărime proporțională cu viteza, $-c\dot{x}\bar{i}$, numită obișnuit *forță de amortizare viscoasă*. Factorul constant c se numește *coeficient de amortizare*. Acest mod de exprimare matematică a forței de amortizare permite o rezolvare simplă a problemei și totodată aproximează mulțumitor, dacă viteza este mică, anumite situații practice ca: mișcarea într-un mediu lichid cu viscozitate mică sau într-un mediu gazos, mișcarea de alunecare a unui corp pe alt corp, între acestea găsindu-se un strat lubrifiant etc.

Soluția ecuației diferențiale a mișcării, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, depinde de valoarea raportului $\zeta = c/c_c$ numit *fracțiunea din amortizarea critică*, $c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega$ fiind *coeficientul de amortizare critic*, iar $\omega = \sqrt{k/m}$ — pulsația oscilațiilor în absența amortizării. Astfel, se deosebesc următoarele trei cazuri:

1) *Amortizare mică*, numită și *subcritică*, $\zeta<1$. Mișcarea este oscilatorie avînd ecuația $x = A(t) \cos(\omega' t - \alpha)$, unde $A(t) = Ae^{-\zeta\omega t}$ este amplitudinea[2] variabilă a oscilațiilor, $\omega' = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$, iar A și α sînt constante de integrare. Perioada[2] oscilațiilor este $T' = 2\pi/\omega'$. În fig. I.35. este trasată diagrama $x = x(t)$. Logaritmul raportului a două amplitudini succesive de același semn este constant, $\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t + T')} = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} = \pi c/m\omega'$ și se numește *decrement logaritmic*.

Dacă $\zeta \ll 1$, se poate lua $\omega' \approx \omega$, $T' \approx T$ și $\delta \approx 2\pi\zeta$. Cu această aproximație, *energia disipată* ΔE datorită amortizării, este în timpul unei perioade $\Delta E = \pi c\omega A^2$. Raportul $\Delta E/E = 2\delta$ este utilizat uneori în Rezistența materialelor pentru caracterizarea fenomenului de disipare a energiei interioare la corpurile deformabile.

2) *Amortizare mare*, numită și *supracritică*, $\zeta > 1$. Mișcarea nu este oscilatorie, avînd ecuația $x = e^{-\zeta\omega t}(C_1 e^{\omega'' t} + C_2 e^{\omega'' t})$, unde $\omega'' = \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$, C_1 și C_2 fiind constante de integrare. Diagrama $x = x(t)$ este una dintre cele trei curbe trasate în fig. I.36, corespunzător diferitelor condiții inițiale ale mișcării.

3) *Amortizare critică*, $\zeta = 1$. La fel ca în cazul precedent, mișcarea nu este oscilatorie, avînd ecuația $x = e^{-\zeta\omega t}(C_1 + C_2 t)$, diagrama $x = x(t)$ avînd aceleași aspecte ca în

---

[1] Semnificațiile diferitelor mărimi și notații care intervin la acest punct sînt indicate la pct. 16.1.2

[2] Termenii "amplitudine" și „perioadă" sînt utilizați obișnuit și aici. Prin abuz de limbaj, deși mișcarea nu este strict periodică. Unii autori folosesc pentru $A(t)$ și T', termenii mai corecți de "pseudoamplitudine" și „pseudoperioadă".

fig. I.36, corespunzător condițiilor inițiale ale mișcării. Pentru toate cele trei tipuri de amortizări, $\lim_{t \to \infty} x = 0$.

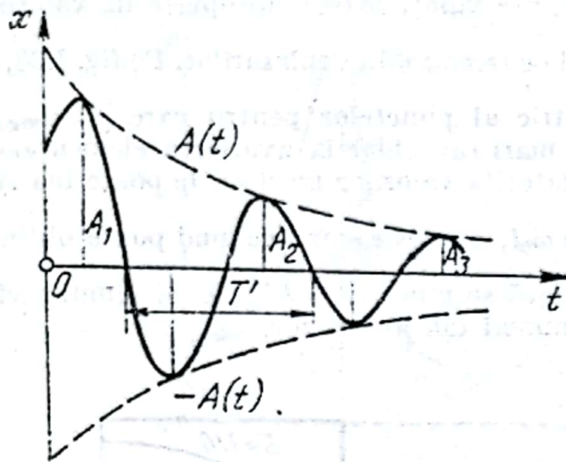


Fig. I.35

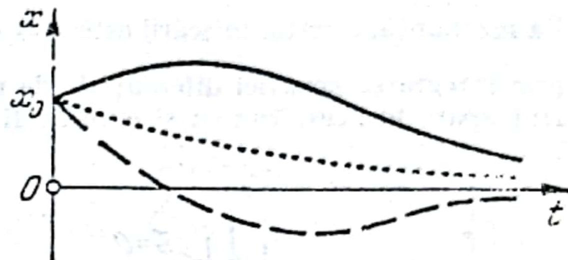


Fig. I.36

18.3. Oscilații forțate cu amortizare proporțională cu viteza

Oscilațiile forțate se produc datorită furnizării în timp a energiei mecanice dintr-o sursă exterioară, adică a *excitării* oscilatorului liniar. Cazurile cele mai frecvent întîlnite (și cele mai ușor de tratat) se referă la excitații avînd o variație armonică în timp. Această excitație se poate aplica oscilatorului în mai multe moduri. În calculul dinamic al construcțiilor, survin obișnuit situații de *excitare printr-o forță aplicată masei punctiforme* conform schemei din fig. I.37, *a*, precum și de *excitare cinematică a centrului de atracție* conform fig. I.37, *b*.

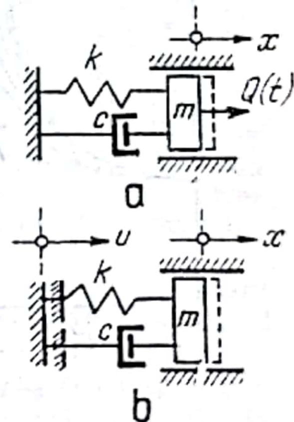


Fig. I.37

18.3.1. Excitare printr-o forță cu variație armonică. Forța excitatoare este, $\bar{Q} = Q\bar{i}$, unde $Q = Q_0 \cos \omega_0 t$. Forța $\bar{Q}$ și ω_0 se numesc *forță perturbatoare*, respectiv *pulsație perturbatoare*. Soluția ecuației diferențiale a mișcării, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Q_0 \cos \omega_0 t$, indică o suprapunere de oscilații libere amortizate care se sting repede și de oscilații armonice cu pulsația perturbatoare ω_0. După încetarea (practică) a oscilațiilor libere amortizate, rămîn numai oscilațiile staționare date de ecuația $x = A \cos (\omega_0 t - \alpha)$, unde $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{2\zeta\, \omega_0/\omega}{1 - \omega_0^2/\omega^2}$.

Amplitudinea mișcării în regim staționar poate fi exprimată $A = \mu\Delta_{st}$, unde $\Delta_{st} = Q_0/k$ este deplasarea în stare statică a punctului, dacă ar fi acționat de forța constantă $Q_{max} = Q_0$, μ fiind *factorul dinamic de amplificare* avînd formula $\mu = 1 \Bigg/ \sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2\zeta\omega_0}{\omega}\right)^2}$. În fig. I.38 *a*, *b* sînt reprezentate diagramele $\mu(\omega_0/\omega)$ și $\alpha(\omega_0/\omega)$ pentru diferite valori ale lui ζ. Pe diagrama factorului dinamic μ, se observă trei situații important de a fi subliniate:

1) $\omega_0 \ll \omega$, *acordare „înaltă" a resortului*; μ este apropiat de unitate. Ecuația mișcării poate fi aproximată prin expresia $x = (Q_0/k) \cos \omega_0 t$. Sistemul oscilant se comportă

ca și cum $m \approx 0$ și $c \approx 0$, deplasarea x produsă de forța perturbatoare Q fiind determinată numai din condiția de ,,echilibrare'' a acesteia de către forța elastică.

2) $\omega_0 = \omega$. Acest caz în care $\mu = \mu_r = 1/2\zeta$ are valori foarte apropiate de valorile maxime $\mu_{max} = \frac{1}{2}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$. definește fenomenul de *rezonanță* a deplasărilor. Pe fig. I.38, *a* s-a trasat cu o linie întreruptă, locul geometric al punctelor pentru care $\mu = \mu_{max}$. Apariția rezonanței conduce deseori la solicitări mari sau chiar la avarierea elementelor de rezistență ale mașinilor și ale construcțiilor, datorită valorilor mari ce le poate lua A. La rezonanță, ecuația mișcării este $x = -\frac{Q_0}{c\omega_0}\sin\omega_0 t$, expresie care se mai poate obține prin integrarea ecuației diferențiale de mișcare, dacă se pune $m = k = 0$. Sistemul oscilant apare în acest caz ca și cum ar fi format numai din amortizor.

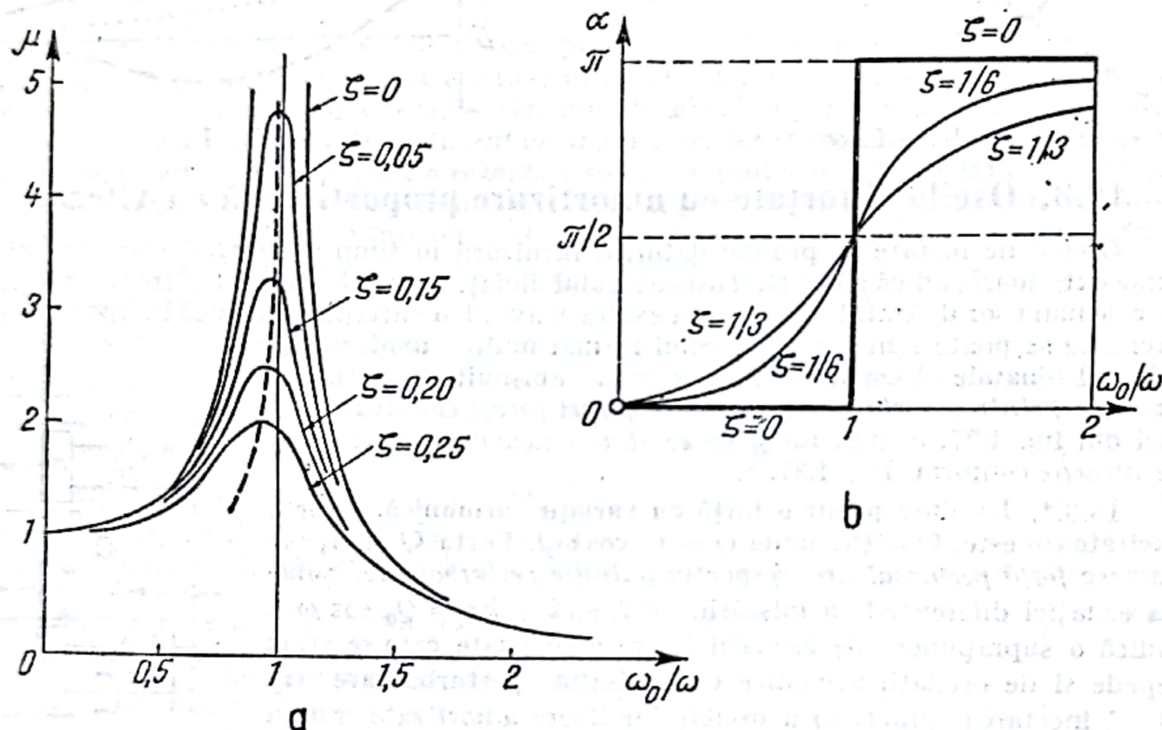


Fig. I.38

3) $\omega_0 \gg \omega$, *acordare ,,joasă'' a resortului*; factorul μ are valori foarte mici. Ecuația mișcării este aproximativ $x = \frac{-Q_0}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t$ și se poate găsi din ecuația diferențială a mișcării, cu $k = c = 0$. Sistemul oscilant se comportă ca și cum ar fi format numai din masa sa.

În unele probleme tehnice, prezintă interes calculul forței F_T care se transmite prin resort la punctul de fixare a acestuia. Dacă se pune $F_T = \mu_T Q_0 \cos(\omega_0 t - \alpha_T)$, *factorul* μ_T *de transmisibilitate a forței excitatoare* are expresia $\mu_T = \mu\sqrt{1 + (2\zeta\omega_0/\omega)^2}$, diferența de fază fiind $\alpha_T = \operatorname{arctg}\frac{2\zeta(\omega_0/\omega)^3}{1 - (\omega_0/\omega)^2 - (2\zeta\omega_0/\omega)^2}$. În fig. I.39 se indică reprezentarea fac-

torului μ_T în funcţie de ω_0/ω, pentru diferite valori ale lui ζ. Se observă din această figură, că pentru $\omega_0/\omega > \sqrt{2}$, la o mărire a amortizării, corespunde o creştere a factorului μ_T.

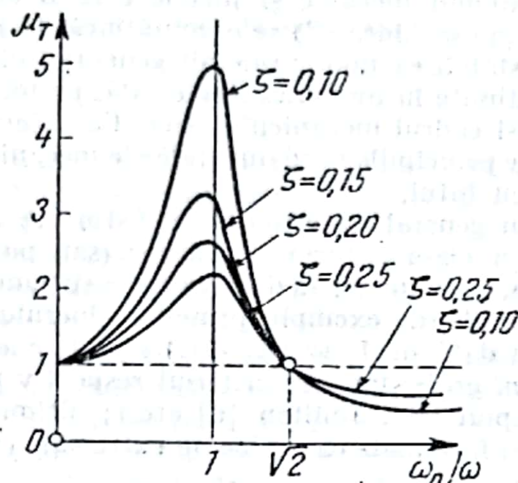


Fig. I.39

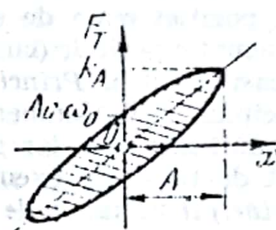


Fig. I.40

Între forţa F_T şi deplasarea x se poate stabili o relaţie independentă de timp, figurată grafic printr-o elipsă (fig. I.40) şi care reprezintă fenomenul de *histerezis elastic*, cunoscut din Rezistenţa materialelor. Aria $\Delta E = (\pi Q_0^2/k)\,\mu \sin \alpha$ a acestei elipse, este energia mecanică disipată la un ciclu al mişcării, egală cu energia furnizată de forţa perturbatoare. Aceasta ia la rezonanţă valoarea maximă $\Delta E_r = (\pi Q_0^2)/2k\zeta$.

18.3.2. Excitare printr-o forţă periodică nearmonică. O forţă perturbatoare $Q(t)$ periodică cu perioada $T = 2\pi/\omega_0$, poate fi dezvoltată în serie Fourier (v. pct. 8.4), de exemplu utilizînd numai funcţia cosinus: $Q(t) = Q_0 + Q_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1) + Q_2 \cos(2\omega_0 t + \beta_2) + \ldots$. Obişnuit, este suficient să se păstreze numai cîţiva termeni din această serie. Ecuaţia diferenţială a mişcării fiind liniară, oscilaţia forţată în regim staţionar se va obţine prin suprapunerea unor oscilaţii forţate componente, cu pulsaţiile ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0, \ldots$, corespunzătoare fiecărui termen păstrat în dezvoltarea în serie Fourier. Fenomenul de rezonanţă poate interveni aici, dacă pulsaţia proprie este egală cu una din valorile ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0, \ldots$

18.3.3. Excitare cinematică armonică prin centrul de atracţie. Sistemul oscilant din fig. I.37, *b* este excitat prin mişcarea armonică $u = u_0 \cos \omega_0 t$, efectuată de suportul comun al resortului şi al amortizorului. Ecuaţia diferenţială a mişcării este $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u} + ku$. Oscilaţiile staţionare ale masei m sînt date de $x = \overline{\mu}_T u_0 \cos(\omega_0 t - \alpha_T)$, unde factorul μ_T şi diferenţa de fază α_T au expresii identice cu cele indicate la transmiterea forţei, în cazul tratat la pct. 18.3.1.

19. ELEMENTE DIN MECANICA ANALITICĂ

19.1. Noţiuni de bază ale mecanicii analitice

19.1.1. Obiectul mecanicii analitice. Dezvoltarea elementelor teoretice ale mecanicii cu ajutorul instrumentului matematic, plecînd de la principiile fundamentale şi ajungînd la teoremele generale şi ţinînd seama tot timpul în calcule de forţele de legătură ale sistemului material, alcătuieşte obiectul de studiu al aşa-numitei *mecanici vectoriale*; aici, metodele de tratare a diferitelor probleme atît teoretice cît şi aplicative au perma-

nent în vedere proprietățile vectoriale ale unor mărimi ca : forța, viteza, accelerația etc. În *mecanica analitică*, se studiază mișcarea și echilibrul sistemelor mecanice, pe baza proprietăților unor mărimi scalare (energia cinetică, energia potențială, funcția lui Lagrange etc.) care caracterizează global sistemul mecanic și forțele care îl acționează, iar forțele de legătură (legăturile fiind presupuse ,,ideale'') se elimină încă de la început din calcule. Mecanica analitică urmărește stabilirea unor principii generale, din care să se deducă în particular toate rezultatele obținute în mecanica vectorială, permițînd chiar abordarea unor probleme ce ar putea depăși cadrul mecanicii clasice. Caracterul de evidență al acestor principii — spre deosebire de principiile fundamentale ale mecanicii — este mai redus, sau poate să lipsească uneori cu totul.

Principiile mecanicii analitice indică în general un criteriu de distingere a mișcării reale (sau a poziției reale de echilibru) din clasa tuturor mișcărilor (sau pozițiilor de echilibru) cinematic posibile (cu alte cuvinte, care nu contrazic legăturile sistemului material) în aceleași condiții. *Principiile diferențiale* (de exemplu principiul lucrului mecanic virtual, principiul lui d'Alembert sub forma dată de Lagrange etc.) stabilesc acest criteriu la un anumit moment, iar *principiile integrale* stabilesc criteriul respectiv pentru un interval finit de timp (de exemplu : principiul lui Hamilton [6] etc.) ; ultimele se mai numesc și *principii variaționale* deoarece sînt formulate ca probleme extremale (v. cap. 11) ale unei anumite mărimi fizice.

Una dintre trăsăturile principale ale mecanicii analitice constă în folosirea sistematică a coordonatelor generalizate, rezultînd astfel avantaje însemnate de calcul, cu deosebire în cazul sistemelor mecanice supuse la legături.

19.1.2. **Legături și ecuații de legătură.** În mecanica analitică se obișnuiește a se dezvolta partea teoretică, plecînd, pentru generalitate, de la un sistem mecanic — notat aici cu $\mathcal{P}$ — alcătuit din N puncte materiale P_i, $i = 1,2,\ldots, N$. Sistemul $\mathcal{P}$ este supus la *legături* (v. pct. 14.6) exprimate analitic prin *ecuații de legătură* avînd forma generală $\varphi_k(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_N, y_N, z_N ; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1,\ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N ; t)=0$, $k = 1,2,\ldots$, în cazul legăturilor bilaterale (v. pct. 14.6.2). Față de mecanica vectorială, conceptul de legătură este tratat în mecanica analitică dintr-un punct de vedere mai general, nefiind subordonat neapărat prezenței unui contact dintre corpuri.

Dacă timpul t apare explicit într-o ecuație de legătură, legătura se numește *reonomă* sau *nestaționară* ; caracteristicile geometrice și cinematice ale acestei legături sînt variabile în timp. În caz contrar, legătura se numește *scleronomă* sau *staționară*.

La o problemă de echilibru, este în general necesar ca toate legăturile sistemului să fie staționare.

Se spune că *o legătură este dată geometric*, dacă se exprimă printr-o ecuație finită de legătură asupra coordonatelor și eventual a timpului t, de exemplu ecuațiile (I.22). *Legătura este dată cinematic*, dacă se exprimă printr-o ecuație diferențială de legătură asupra coordonatelor punctelor, derivatelor acestora și eventual a timpului t. Orice legătură dată geometric admite întotdeauna o exprimare cinematică obținută prin derivarea în raport cu timpul t a ecuației respective. În schimb, afirmația inversă nu este în general valabilă și anume în cazurile în care ecuația diferențială de legătură nu este integrabilă. Această constatare justifică următorul nou criteriu de clasificare a legăturilor : o legătură dată geometric sau o legătură dată cinematic printr-o ecuație diferențială integrabilă de legătură, se numește *olonomă* ; dacă legătura este dată cinematic printr-o ecuație diferențială neintegrabilă de legătură, atunci ea se numește *neolonomă*. În cadrul de față, ne vom limita la sistemele avînd numai legături olonome.

19.1.3. **Coordonate generalizate.** Coordonatele generalizate ale unui sistem mecanic au fost definite la pct. 14.7.2 și notate cu $q_1, q_2,\ldots,q_n$. Numărul acestora pentru un sistem $\mathcal{P}$ supus la l legături distincte date prin ecuațiile

$$\varphi_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N ; t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l \qquad (I.22)$$

este $n = 3N - l$ (sau $n = 2N - l$ la problemele plane). În funcţie de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, coordonatele carteziene ale punctelor sistemului $\mathcal{P}$ se pot exprima prin relaţii generale de forma

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n ; t), \ (\ldots), \ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{I.23}$$

iar proiecţiile carteziene ale vitezelor punctelor prin:

$$\dot{x}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \ (\ldots), \ i = 1, 2, \ldots, N \tag{I.24}$$

Dacă toate legăturile sistemului $\mathcal{P}$ sînt scleronome, relaţiile de transformare (I.23) pot fi întotdeauna astfel stabilite, încît să nu conţină explicit t. În acest caz, termenii $\partial x_i / \partial t$ din (I.24) sînt identici nuli.

Libertatea deplină în alegerea coordonatelor generalizate permite o adaptare optimă a acestora la particularităţile fiecărei probleme, în vederea obţinerii unei reduceri maxime a dificultăţilor de rezolvare.

19.1.4. Deplasări virtuale, lucru mecanic virtual. Un ansamblu de deplasări elementare, compatibile cu legăturile, care face să treacă sistemul mecanic de la poziţia sa reală avută la momentul t, la o poziţie convenţională infinit apropiată, timpul considerîndu-se constant, se numesc *deplasări virtuale* şi se notează cu $\delta\bar{r}_i(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Deplasările virtuale $\delta\bar{r}_i$ sînt identice cu diferenţialele vectorilor de poziţie $d\bar{r}_i(dx_i, dy_i, dz_i)$, în cazul problemelor de echilibru, precum şi în cel al problemelor de dinamică a sistemelor supuse numai la legături scleronome.

Prin diferenţierea relaţiilor (I.23) pentru $t =$ const şi după înlocuirea simbolului d prin δ, se găsesc expresii pentru *variaţiile coordonatelor carteziene* x_i, y_i, z_i, în funcţie de *variaţiile coordonatelor generalizate*:

$$\delta x_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \delta q_h, \ (\ldots), \ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{I.25}$$

Numărul gradelor de libertate al unui sistem mecanic se definşete riguros ca fiind egal cu numărul variaţiilor independente ale coordonatelor generalizate. La sistemele olonome, acest număr coincide cu numărul n al coordonatelor generalizate.

Lucrul mecanic virtual efectuat de toate forţele (active şi de legătură) care acţionează un sistem $\mathcal{P}$ se notează δL şi se defineşte prin:

$$\delta L = \sum_{\mathcal{P}} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{\mathcal{P}} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i). \tag{I.26}$$

19.1.5. Legături ideale. În mecanica vectorială, noţiunea de legături fără frecare se întemeiază pe raţiuni experimentale. Mecanica analitică generalizează această noţiune prin conceptul de esenţă axiomatică al legăturilor ideale, introdus pe cale analitică prin următoarea definiţie: legăturile unui sistem mecanic $\mathcal{P}$ se numesc *legături ideale*, dacă lucrul mecanic virtual efectuat de forţele respective de legătură este nul pentru orice deplasare virtuală a sistemului:

$$\sum_{\mathcal{P}} \bar{F}_i^l \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{\mathcal{P}} (X_i^l \delta x_i + Y_i^l \delta y_i + Z_i^l \delta z_i) = 0. \tag{I.27}$$

19.1.6. Forţe generalizate. Ţinînd seama de relaţiile (I.25) şi (I.27), expresia lucrului mecanic virtual (I.26) va conţine numai forţele active aplicate sistemului $\mathcal{P}$:

$$\delta L = \sum_{\mathcal{P}} \bar{F}_i^a \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{\mathcal{P}} (X_i^a \delta x_i + Y_i^a \delta y_i + Z_i^a \delta z_i) = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{I.28}$$

unde factorii

$$Q_h = \sum_{\mathcal{P}} \bar{F}_i^a \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \sum_{\mathcal{P}} \left(X_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + Y_i^a \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + Z_i^a \frac{\partial z_i}{\partial q_h} \right) \tag{I.29}$$

se numesc *forțe generalizate* corespunzătoare fiecărei coordonate generalizate q_h, $h = 1,2, \ldots, n$.

Forțele generalizate se pot afla cu formulele (I.29), folosind inițial un sistem cartezian de coordonate. Foarte utilizat în Statica construcțiilor, este următorul procedeu de calcul succesiv al forțelor generalizate: în vederea găsirii de exemplu a lui Q_h, se consideră $\delta q_h \neq 0$, iar $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{h-1} = \delta q_{h+1} = \ldots = \delta q_n = 0$, sistemul inițial transformîndu-se astfel într-un sistem cu un singur grad de libertate, ale cărui puncte vor avea deplasări virtuale depinzînd numai de δq_h. Lucrul mecanic virtual corespunzător este $\delta L_h = Q_h \delta q_h$, de unde rezultă $Q_h = \delta L_h / \delta q_h$.

Dacă forțele active sînt conservative, atunci conform relațiilor (I.25), funcția de forțe ia forma $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, iar $Q_h = \partial U / \partial q_h$, $h = 1, 2, \ldots, n$.

19.2. Principiul lucrului mecanic virtual

Enunțul *principiului lucrului mecanic virtual* este: condiția necesară și suficientă ca o poziție a unui sistem mecanic supus la legături ideale, să fie poziție de echilibru, este ca lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor active aplicate sistemului să se anuleze pentru orice deplasare virtuală din această poziție.

În coordonate carteziene, principiul se exprimă prin ecuația $\delta L = \sum_{\mathcal{P}} (X_i^a \delta x_i + Y_i^a \delta y_i + Z_i^a \delta z_i) = 0$, dificil de utilizat sub această formă, deoarece mărimile δx_i, δy_i, δz_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, nu sînt independente, datorită legăturilor. Trecînd însă la coordonate generalizate, ecuația precedentă este echivalentă cu *n ecuații de echilibru în coordonate generalizate*

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots, Q_n = 0. \tag{I.30}$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații desemnează pozițiile de echilibru ale sistemului mecanic. Dacă forțele active sînt conservative, ecuațiile (I.30) iau forma $\partial U / \partial q_h = 0$, $h = 1, 2, \ldots, n$, arătînd că funcția de forțe U capătă o valoare staționară (v. cap. 10), pentru valori ale argumentelor sale corespunzînd unei poziții de echilibru a sistemului mecanic.

Principiul lucrului mecanic virtual permite de asemenea găsirea forțelor de legătură la sistemele static determinate, procedîndu-se în modul următor: se determină mai întîi, așa cum s-a arătat înainte, valorile mărimilor $q_1, q_2, \ldots, q_n$ pentru o poziție de echilibru a sistemului (dacă sistemul este fix datorită legăturilor, poziția sa de echilibru este dată prin enunțul problemei, iar $n = 0$). Apoi, în scopul aflării unei anumite componente a torsorului forțelor de legătură într-un punct A unde există o legătură, se suprimă condiția (sau ecuația) corespunzătoare de legătură din A, înlocuindu-se cu componenta menționată, conform principiului forțelor de legătură. Sistemul mecanic dobîndește astfel un grad suplimentar de libertate și deci o nouă coordonată generalizată q_{n+1}. Punînd acum $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_n = 0$ și $\delta q_{n+1} \neq 0$, se calculează δL_{n+1}, iar din ecuația $Q_{n+1} = \delta L_{n+1} / \delta q_{n+1} = 0$, se găsește componenta căutată.

19.3. Principiul lui d'Alembert sub forma dată de Lagrange. Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua

19.3.1. Principiul lui d'Alembert sub forma dată de Lagrange. Acest principiu rezultă din utilizarea principiului lucrului mecanic virtual în situația de echilibru convențional, corespunzătoare principiului lui d'Alembert și se exprimă analitic prin *ecuația generală a dinamicii*, $\sum_{\mathcal{P}} [(X_i^a - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i^a - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i^a - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0$.

19.3.2. Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua. La fel ca și pentru problemele de echilibru, este deosebit de favorabil aici să se treacă la coordonate generalizate. În acest

caz, ecuaţia generală a dinamicii se desparte în n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi în raport cu funcţiile necunoscute $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$, denumite *ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua* [1]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, 2, \ldots, n, \tag{I.31}$$

cu ajutorul cărora se poate rezolva complet problema determinării mişcării unui sistem mecanic. În aceste ecuaţii, forţele generalizate sînt în general funcţii de forma $Q_h = Q_h(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t)$, iar energia cinetică [2] $T = \frac{1}{2}\sum_{\mathscr{P}} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{\mathscr{P}} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$ se consideră exprimată în funcţie de coordonatele şi vitezele generalizate, conform formulelor (I.24). Dacă toate legăturile sînt scleronome, T este o formă pătratică pozitiv definită (v. pct. 5.10) de $\dot{q}_1 \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$.

După rezolvarea ecuaţiilor (I.31), deci după determinarea mişcării sistemului mecanic, forţele de legătură se calculează obişnuit fie cu ajutorul celor 3 N ecuaţii diferenţiale de mişcare ale sistemului $\mathscr{P}$ (v. pct. 17.3), fie prin metoda cinetostatică (v. pct. 17.5).

Dacă forţele active sînt conservative, ecuaţiile lui Lagrange capătă forma $\frac{d}{dt}(\partial T/\partial \dot{q}_h) - \partial T/\partial q_h = \partial U/\partial q_h$, $h = 1, 2, \ldots, n$. Aici se obişnuieşte să se introducă *funcţia lui Lagrange* $\mathscr{L}$, denumită şi *potenţial cinetic*, definită prin $\mathscr{L} = T + U$ sau $\mathscr{L} = T - V$, unde $V = -U$ este energia potenţială (v. pct. 17.1.6). Astfel, ecuaţiile lui Lagrange se pot scrie $\frac{d}{dt}(\partial \mathscr{L}/\partial \dot{q}_h) - \partial \mathscr{L}/\partial q_h = 0$, $h = 1, 2, \ldots, n$. Funcţia $\mathscr{L}$ poate fi privită drept cea mai importantă mărime din mecanica analitică. Această funcţie conţine implicit toate informaţiile necesare studierii mişcării unui sistem mecanic supus la legături ideale şi acţionat de forţe conservative.

19.4. Stabilitatea echilibrului

19.4.1. **Definiţia stabilităţii echilibrului.** Echilibrul unui sistem mecanic, într-un interval finit de timp $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, se caracterizează prin poziţia sa, precum şi prin faptul că vitezele punctelor sale sînt nule în intervalul $[t_1, t_2]$. Factorii perturbatori ai echilibrului pot fi de natură foarte variată; din acest motiv, ei sînt luaţi în considerare în teoria stabilităţii echilibrului, prin intermediul efectului lor de perturbare a celor două elemente caracteristice echilibrului: poziţia de echilibru şi ansamblul vitezelor nule ale sistemului mecanic.

Prin urmare, noţiunea de stabilitate a echilibrului va fi legată de studierea poziţiilor şi vitezelor punctelor sistemului $\mathscr{P}$, după intervenţia la un moment t_0, $t_1 \leqslant t_0 < t_2$, a unor perturbaţii sub formă de deplasări iniţiale şi de viteze iniţiale. Dacă există astfel de perturbaţii suficient de mici, încît la orice moment $t \geqslant t_0$, punctele sistemului $\mathscr{P}$ să rămînă oricît de apropiate de poziţiile de echilibru, avînd viteze oricît de mici, poziţia respectivă de echilibru a sistemului $\mathscr{P}$ este *stabilă*; în caz contrar, poziţia de echilibru este *instabilă*.

Definirea riguroasă a stabilităţii echilibrului se exprimă astfel: fie un sistem mecanic $\mathscr{P}$ a cărui poziţie depinde de coordonatele generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$; se consideră fără nici o particularizare că acestea toate iau valori nule pentru o anumită poziţie de echilibru a siste-

---

[1]) În continuare, se va utiliza denumirea prescurtată "ecuaţiile lui Lagrange".
[2]) În mecanica analitică, energia cinetică se notează tradiţional cu T.

mului $\mathscr{P}$. Echilibrul este stabil în această poziție, dacă fiind date două numere oricît de mici $\varepsilon'>0$ și $\varepsilon''>0$, se pot găsi două numere $\eta'>0$ și $\eta''>0$, funcții de ε' și ε'', astfel încît pentru orice $t \geq t_0$, să fie satisfăcute condițiile $|q_h(t)|<\varepsilon'$ și $|\dot{q}_h(t)|<\varepsilon''$, $h=1,2,\ldots,n$, știind că valorile inițiale ale coordonatelor și ale vitezelor generalizate satisfac condițiilor $|q_h(t_0)|<\eta'$ și $|\dot{q}_h(t_0)|<\eta''$, $h=1,2,\ldots,n$.

În problemele simple, stabilitatea echilibrului poate fi verificată prin aplicarea definiției enunțate, pe ecuațiile finite ale mișcării produse de deplasările și vitezele inițiale. În problemele mai complicate din punct de vedere matematic, un astfel de studiu direct al stabilității echilibrului devine foarte dificil și adesea chiar imposibil. Datorită acestui fapt, au fost stabilite diferite teoreme mai mult sau mai puțin generale, permițînd recunoașterea stabilității sau instabilității echilibrului, fără implicarea integrării prealabile a ecuațiilor diferențiale de mișcare. Cîteva din aceste teoreme sînt indicate în continuare.

19.4.2. Teoreme de stabilitate a echilibrului. *Teorema Lagrange-Dirichlet*: dacă pentru o anumită poziție a unui sistem mecanic supus la legături ideale și staționare și acționat de forțe conservative, energia potențială V are un minimum izolat, atunci această poziție este o poziție de echilibru stabil.

Afirmația inversă — că o poziție de echilibru a sistemului menționat este nestabilă, dacă energia potențială V nu ia o valoare minimă în această poziție — a fost demonstrată de Liapunov în cîteva situații particulare indicate la punctul următor.

În tehnică intervin deseori forțe neconservative de forma $\overline{F}_i = \overline{F}_i(\overline{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, aplicate punctelor sistemului $\mathscr{P}$, astfel încît $\overline{F}_i \cdot \overline{v}_i < 0$, denumite *forțe disipative*. Privitor la *stabilitatea echilibrului sistemelor acționate de forțe conservative și de forțe disipative*, se demonstrează următoarea *teoremă*: dacă poziția de echilibru a unui sistem mecanic este stabilă în condițiile teoremei Lagrange-Dirichlet, atunci stabilitatea echilibrului în această poziție se menține și după introducerea unor forțe disipative.

19.4.3. Teoremele lui Liapunov asupra nestabilității echilibrului.

1) Dacă valoarea staționară a energiei potențiale V într-o poziție de echilibru nu este minimă, iar lipsa acestui minimum este indicată numai prin valorile luate în poziția de echilibru de derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției V, atunci poziția respectivă de echilibru este nestabilă.

2) Dacă energia potențială V are o valoare maximă într-o poziție de echilibru, iar prezența acestui maximum poate fi stabilită numai după valorile luate de derivatele parțiale de ordin mai mare ca doi ale funcției V, atunci poziția respectivă de echilibru este nestabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. Ciucu, G., Craiu, V. *Introducere în teoria probabilităților și statistică matematică*. București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
2. Faure, R., Kaufmann, A., Denis-Papin, M. *Mathématiques nouvelles* Paris, Dunod 1964.
3. Gantmaher, F. R. *Teoria matricilor* (trad. din l. rusă), București, Editura Academiei R. S. R. 1955.
4. Owen, G. F. *Initiation aux mathématiques appliquées*, Paris, Dunod, 1964.
5. Richardson, M. *Eléments de mathématiques modernes*. Paris, Dunod, 1963.
6. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. *Mecanica teoretică*. București, Editura tehnică, 1959.
7. Vernet, J. F. *Eléments de mécanique générale pour l'ingenieur*. Paris, Masson, 1964.

SECȚIUNEA II

ELEMENTE DE PROGRAMARE LA CALCULATOARE ELECTRONICE

Prof. dr. ing. GHEORGHE ILIE
CRIȘAN IONESCU

CUPRINS

1. INTRODUCERE

1.1. Structura unui calculator electronic numeric

Calculatorul electronic numeric este o instalaţie de calcul complexă caracterizată prin :
a) rapiditate, precizie şi siguranţă în efectuarea unui mare volum de calcule ;
b) posibilitatea efectuării automate a unui proces de calcul pe baza unui ansamblu de reguli de prelucrare a datelor, memorat de către calculator sub forma unui program de calcul ;
c) posibilitatea prelucrării informaţiei numai după codificarea acesteia într-o formă numerică.

Principalele părţi componente ale unui calculator electronic numeric (sistem de calcul) sînt : unităţile de intrare, unităţile de ieşire, unitatea centrală (fig. II.1).

Unităţile de intrare au rolul de a prelucra informaţia înregistrată pe un anumit mediu purtător de informaţie (bandă perforată, cartelă perforată, bandă magnetică, disc magnetic etc.) şi de a o transmite unităţii centrale. Echipamentele corespunzătoare sînt cititorul de bandă, cititorul de cartele şi unităţile de disc sau bandă magnetică.

Unităţile de ieşire preiau rezultatele intermediare sau finale şi le înregistrează pe mediile externe purtătoare de informaţie (benzi sau cartele perforate, benzi sau discuri magnetice, hîrtie etc.). Echipamentele de ieşire sînt perforatoarele de bandă sau cartele, unităţile de disc sau bandă magnetică şi imprimanta cu ajutorul căreia datele de ieşire sînt tipărite pe hîrtie.

Echipamentele utilizate la intrare/ieşire şi care fac parte nemijlocită din sistemul de calcul poartă numele de periferice „on line".

Comunicarea directă între om şi calculator, activarea sau dezactivarea sistemului de calcul este asigurată prin intermediul *consolei* calculatorului.

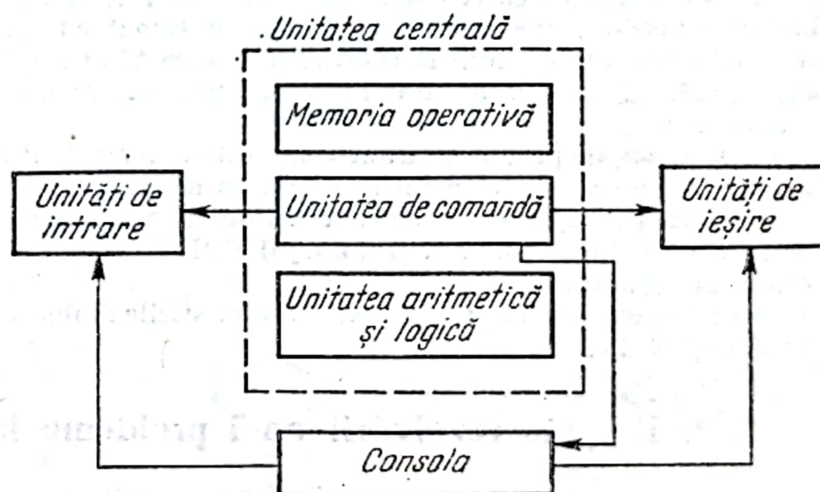


Fig. II.1

Utilizarea unui sistem de calcul implică şi folosirea unor periferice independente („off line") necesare în special în procesul de înregistrare a informaţiei pe medii externe (perforator de cartele, de bandă etc.).

Unitatea centrală are rolul de a efectua procesul de calcul conform programului dat. La rîndul ei se compune din :

a) memoria operativă destinată memorării programului şi datelor de calcul ; capacitatea memoriei se exprimă în kilo-octeţi 1 k = 1024 octeţi), un octet avînd opt poziţii binare ;

b) unitatea de comandă care analizează fiecare instrucţiune a programului şi supraveghează modul de desfăşurare a procesului de calcul în ansamblul său ;

c) unitatea aritmetică şi logică în care se execută operaţiile aritmetice şi logice asupra datelor programului.

În afara memoriei operative, sistemele mari de calcul pot dispune şi de una sau mai multe unităţi de *memorie auxiliară* constituite din benzi sau discuri magnetice cu o mare capacitate de înmagazinare a informaţiei, dar cu un timp de acces mai lung. Din acest motiv, între memoria operativă şi memoriile auxiliare transferul de informaţie se realizează în grupuri numite ,,blocuri de informaţie'' sau ,,înregistrare''.

1.2. Programarea automată

Calculatoarele electronice numerice efectuează un anumit proces de calcul pe baza unui program memorat alcătuit dintr-o succesiune de instrucţiuni codificate prin intermediul unui limbaj de programare într-o formă accesibilă calculatorului.

Fiecare calculator are un limbaj specific numit limbaj-maşină (cod-maşină) care are la bază numai simboluri numerice; cu acestea sînt alcătuite instrucţiunile programului descriindu-se în detaliu fiecare operaţie care trebuie executată. Limbajul-maşină este ,,înţeles'' şi executat în mod nemijlocit de către calculator într-un timp minim, însă din punct de vedere al programării prezintă o serie de dezavantaje printre care: lipsa oricărei similitudini cu limbajul matematic uzual şi imposibilitatea utilizării aceluiaşi limbaj de programare pentru tipuri diferite de calculatoare.

În scopul facilitării programării sistemelor de calcul şi al evitării dezavantajelor limbajelor-maşină, au fost create limbaje de programare automate. Acestea sînt caracterizate prin posibilitatea utilizării simbolurilor alfanumerice în scrierea instrucţiunilor, permiţînd exprimarea într-o formă apropiată de cea uzuală; instrucţiunile sînt echivalente cu un şir de instrucţiuni scrise în limbaj-maşină, ceea ce reduce atît timpul de întocmire cît şi posibilitatea de apariţie a unor erori la redactarea programului.

Programul scris într-un limbaj de programare automată (program sursă) nu este direct executabil de către calculator. Pentru a fi ,,înţeles'' este necesară traducerea sa în limbajul maşinii, operaţie ce se execută automat cu ajutorul unui program translator (program compilator) scris în cod-maşină. Această operaţie poartă numele de ,,compilare'' avînd ca produs un program în limbaj-maşină (program obiect) şi este executată de către calculator.

Un limbaj de programare automată este independent de tipul calculatorului fiind utilizabil la orice sistem de calcul înzestrat cu un compilator adecvat.

Printre limbajele de programare automată avînd aplicabilitate în probleme cu caracter tehnico-ştiinţific se numără şi limbajul FORTRAN (FORmula TRANslation) apărut în prima sa variantă în anul 1957.

În această secţiune vor fi descrise caracteristicile limbajului considerînd ca bază versiunea FORTRAN IV.

1.3. Etapele rezolvării unei probleme la calculator

Rezolvarea unei probleme implică următoarele etape principale:

1) Stabilirea algoritmului de calcul, care constă în analiza procesului de rezolvare a problemei, stabilirea succesiunii operaţiilor (aritmetice, logice, de intrare, de ieşire), definirea grupurilor de operaţii cu caracter repetitiv (rutine sau proceduri externe), precum şi a tuturor variantelor posibile de rezolvare în diferite ipoteze de lucru (dacă este cazul);

2) Întocmirea unei scheme logice de calcul, adică reprezentarea grafică, simbolică a tuturor operaţiilor componente ale algoritmului de calcul, cu indicarea legăturilor cerute

de ordinea logică de desfăşurarea a calculelor; uneori această etapă poate lipsi sau poate fi tratată într-o formă simplificată;

3) Codificarea algoritmului de calcul, implică scrierea instrucţiunilor corespunzătoare diferitelor operaţii (stabilite în etapele anterioare) într-un limbaj accesibil calculatorului obţinîndu-se programul de calcul;

4) Testarea programului, se realizează pe baza unor exemple de control calculate manual; cu aceleaşi date problema este rezolvată la calculator, folosindu-se programul întocmit; rezultatele obţinute trebuie să concorde. În această etapă se poate interveni cu corecturile necesare pentru punerea la punct a programului.

5) Pregătirea setului de date, constă în ordonarea datelor necesare rezolvării problemei, conform specificaţiilor programului;

6) Executarea programului la calculator şi obţinerea rezultatelor problemei.

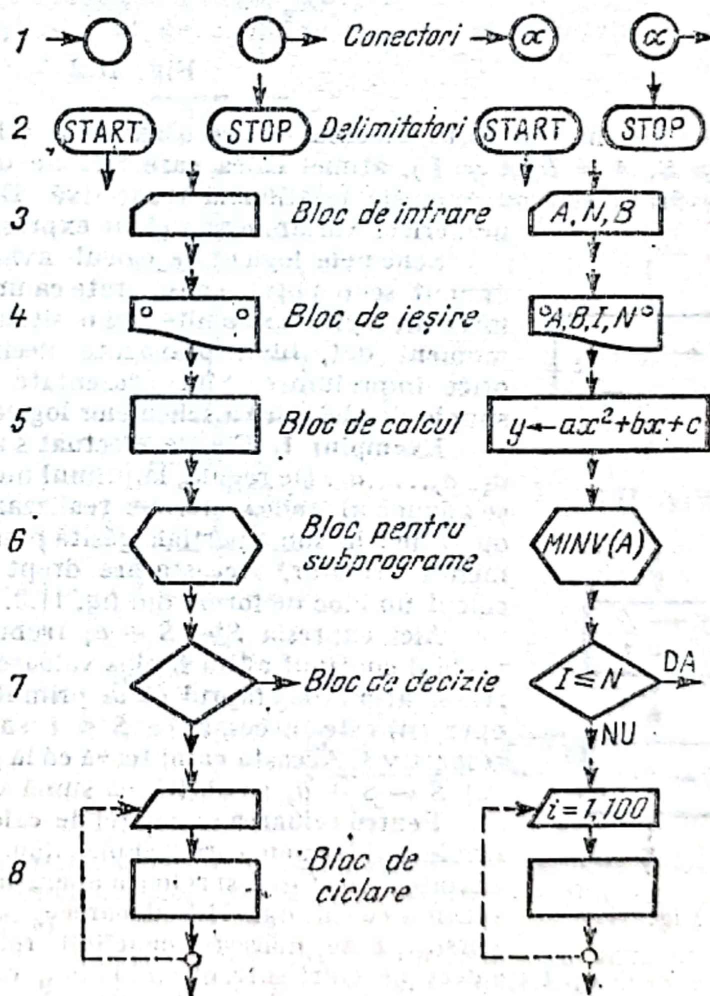
2. SCHEME LOGICE DE CALCUL

Prima etapă în rezolvarea unei anumite probleme este stabilirea algoritmului de rezolvare. Este necesară o analiză logică minuţioasă care să conducă la un algoritm de rezolvare corect, care ia în considerație toate situaţiile ce pot apărea în cursul procesului de calcul. Apariţia unor situaţii neprevăzute în program poate conduce la erori mai mult sau mai puţin grave.

Schemele logice de calcul sînt forme de exprimare grafică a algoritmului de rezolvare. Ele facilitează înţelegerea şi urmărirea algoritmului de rezolvare precum şi scrierea programului de calcul. Pentru exemple simple se poate trece direct la scrierea programului de calcul (fără redactarea schemei logice) dar pentru probleme mai complicate sau la lucrul în echipă (cînd acelaşi program este redactat pe părţi de către mai mulţi programatori) utilizarea schemelor logice de calcul devine indispensabilă.

Tabelul următor prezintă simbolurile utilizate în redactarea schemelor logice de calcul şi semnificaţia acestora. În diverse alte lucrări se utilizează forme uşor modificate pentru aceste simboluri. Diferenţele nu sînt însă esenţiale.

Pentru conectori se foloseşte uneori altă formă geometrică în cazul în care sînt utilizaţi pentru a desemna o legătură între două puncte ale schemei, situate în pagini diferite.



În utilizarea blocurilor de decizie logică există mai multe posibilități ilustrate cel mai bine de exemplele din fig. II.2.

Atunci cînd în interiorul unui bloc de decizie logică este scrisă numai o expresie aritmetică, conectarea în continuare la diverse puncte ale schemei logice de calcul depinde de semnul acelei expresii sau de faptul dacă este nulă sau nu.

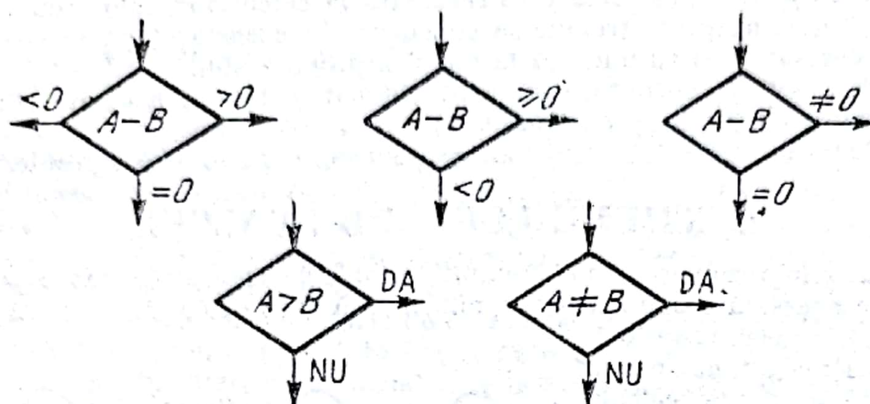


Fig. II.2

Cînd în interiorul blocului apare o expresie relațională ($A < B$, $A \leqslant B$, $A > B$, $A \geqslant B$, $A = B$, $A \neq B$), atunci calea care trebuie urmată depinde de faptul dacă este adevărată sau nu expresia relațională respectivă. De remarcat că A și B pot fi valori numerice, variabile sau chiar expresii.

Schemele logice de calcul avînd ca obiectiv îndeplinirea unui anumit scop pot fi considerate ca un plan de acțiune atît de minuțios întocmit încît nu se omite nici o situație care ar putea interveni la un moment dat, fiind prevăzute decizii conforme cu scopul propus în orice împrejurare. Sînt prezentate în continuare trei exemple foarte simple de alcătuire a schemelor logice de calcul.

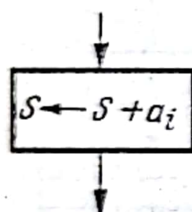


Fig. II.3

Exemplul 1. Fie de efectuat suma a n valori numerice cunoscute: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. De regulă, la primul număr se adaugă al doilea, la rezultat se adaugă al treilea etc. Se realizează deci în mod curent următoarea operație: la suma parțială găsită pînă la un moment dat se adaugă termenul următor. Aceasta are drept corespondent în schema logică de calcul un bloc de forma din fig. II.3.

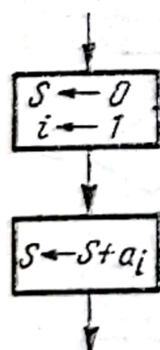


Fig. II.4

Aici expresia $S \leftarrow S + a_i$ trebuie interpretată în felul următor: vechiul conținut al lui S plus valoarea lui a_i sînt atribuite lui S. Trebuie remarcat în plus faptul că la primul pas (la prima efectuare a acestei operații) este necesar ca S și i să fie inițializate: cu valorile 0 și respectiv 1. Aceasta garantează că la prima parcurgere a blocului de calcul $S \leftarrow S + a_i$ se obține ca sumă valoarea lui a_1 (fig. II.4).

Pentru reluarea secvenței de calcul, în care se va lua în considerație următorul termen care trebuie adăugat, va trebui mărit indicele i cu o unitate: $i \leftarrow i + 1$ și reluată operația. Nu ar fi corect însă să redactăm schema ca în fig. II.5 deoarece calculul ar intra într-un ciclu fără sfîrșit: i se mărește nedefinit reluîndu-se de fiecare dată operația $S \leftarrow S + a_i$. Este deci necesară introducerea unui control al indicelui: ultima valoare admisă în calcul pentru i poate fi n. Rezultă schema din fig. II.6. Nu trebuie omis

faptul că toate datele inițiale (adică numărul de valori n și mărimile $a_1, a_2, \ldots, a_n$) trebuie să fie transmise calculatorului, iar în final, rezultatul să fie exteriorizat. De asemenea, este indicat ca imediat după primirea datelor să se facă o tipărire a lor la imprimantă pentru a avea un control asupra introducerii lor corecte în calculator. Atunci, schema logică completă poate fi cea din fig. II.7.

De remarcat că această schemă logică nu este unică. Se mai poate scrie la fel de bine schema logică din fig. II.8. sau cea din fig. II.9.

Analizînd utimele trei scheme logice rezultă că din punct de vedere al algoritmului de calcul cele trei variante prezentate în fig. II.10 sînt absolut identice.

Observație. În locul notației $i \leftarrow i + 1$ se mai folosește și $i = i + 1$. Aceasta nu trebuie înțeleasă ca o egalitate (ar fi lipsită de sens) ci în sensul că valoarea calculată pentru expresia din membrul drept este atribuită variabilei din membrul stîng. Dacă înainte de executarea acestei instrucțiuni, i, avea de exemplu valoarea 5, după parcurgerea ei va avea valoarea 6. Un alt limbaj de programare automată ALGOL folosește pentru acest simbol de atribuire semnul := (în cazul de față $i := i + 1$.

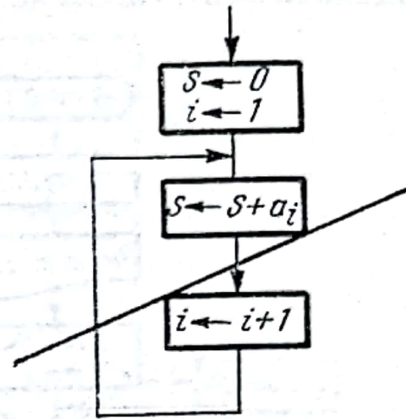


Fig. II.5

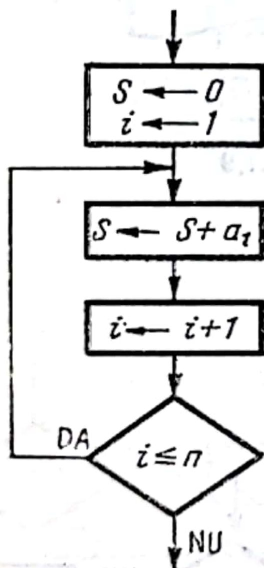


Fig. II.6

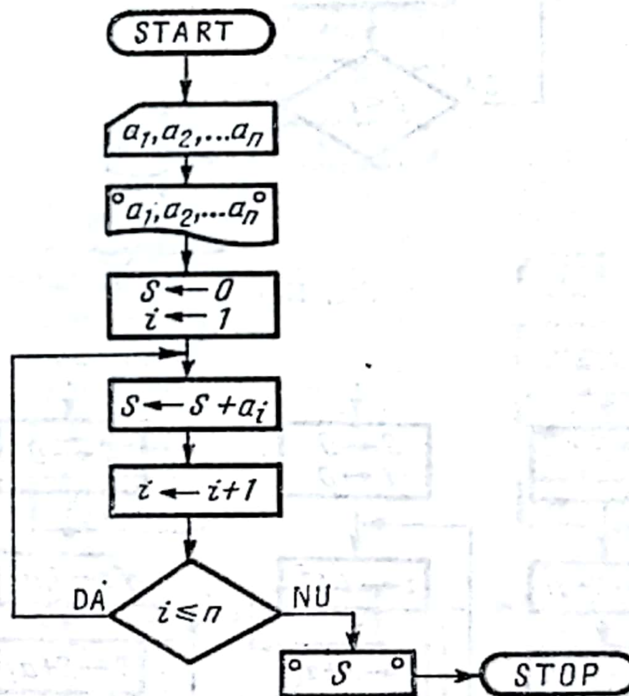


Fig. II.7.

Exemplul 2. Dintre n valori numerice date: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ să se determine valoarea maximă. Se va crea o variabilă care se va denumi MAX a cărei valoare va trebui să reprezinte în final valoarea maximă căutată).

Pentru inițializare, se va atribui lui MAX valoarea primului număr. Apoi se parcurge în continuare șirul valorilor numerice comparînd de fiecare dată valoarea lui MAX cu

termenul curent. Atunci cînd se găseşte o valoare mai mare decît maximul determinat pînă în acel moment, se atribuie valoarea respectivă lui MAX (fig. II.11).

Schema logică de calcul completă poate fi considerată oricare din cele două variante prezentate în fig. II.12.

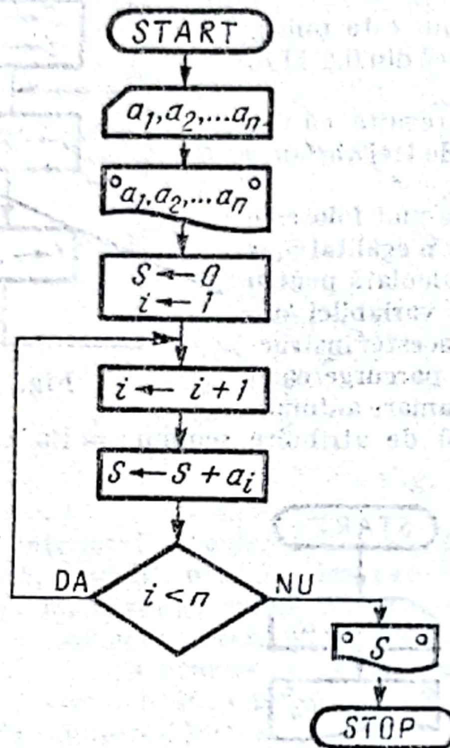


Fig. II.8

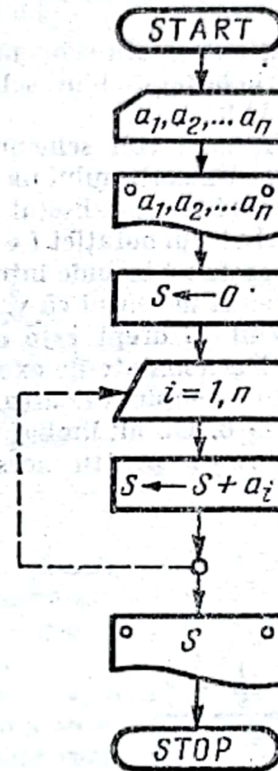


Fig. II.9

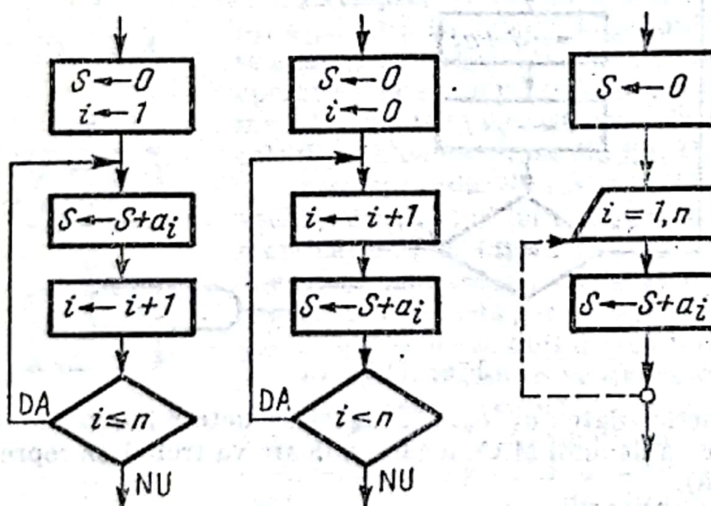


Fig. II.10

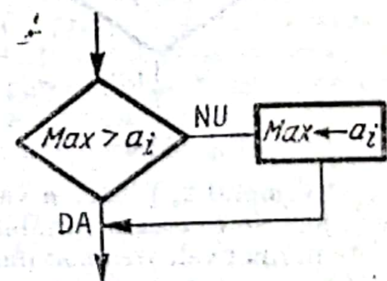


Fig. II.11

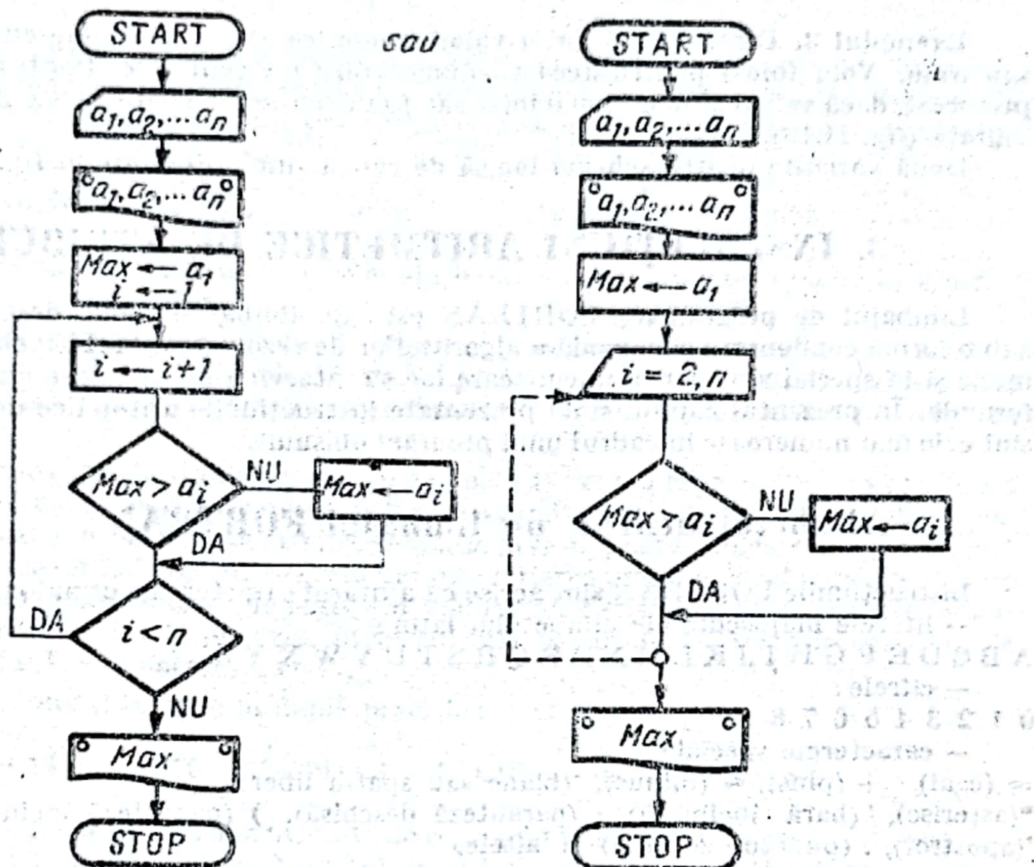


Fig. II.12

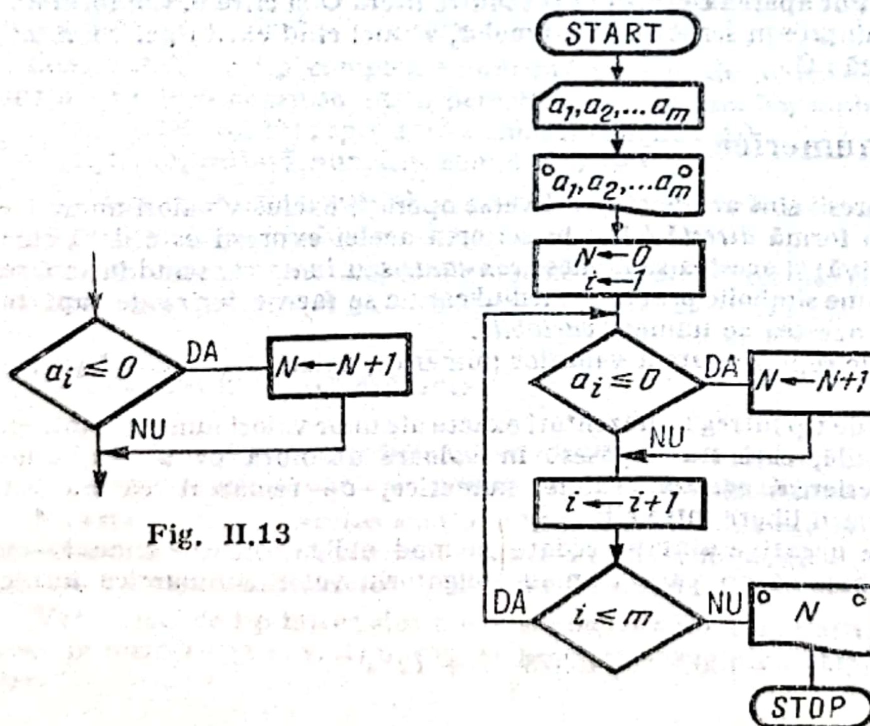


Fig. II.13

Fig. II.14

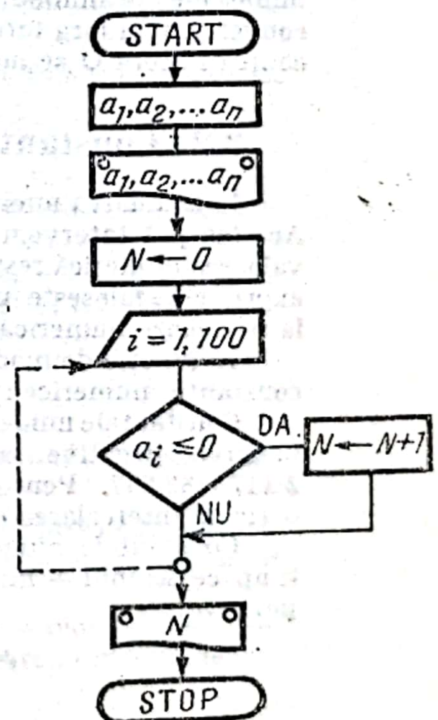


Fig. II.15

Exemplul 3. Dintr-o listă de m valori numerice să se determine cîte sînt negative sau nule. Vom folosi pentru această numerotare un contor N. Pentru fiecare număr prelucrat, dacă valoarea sa este mai mică sau egală cu zero, contorul va fi majorat cu o unitate (fig. II.13).

Două variante pentru schema logică de calcul sînt prezentate în fig. II.14 și II.15.

3. INSTRUCȚIUNI ARITMETICE DE ATRIBUIRE

Limbajul de programare FORTRAN este un limbaj simbolic destinat exprimări sub o formă condensată și comodă a algoritmilor de rezolvare a problemelor de calcul numeric și în special a acelor probleme care fac să intervină un mare număr de variabile și formule. În prezentul capitol sînt prezentate instrucțiunile aritmetice de atribuire care sînt cele mai numeroase în cadrul unui program obișnuit.

3.1. Alfabetul utilizat de limbajul FORTRAN

Instrucțiunile FORTRAN sînt acrise cu ajutorul caracterelor următoare :

— literele majuscule ale alfabetului latin :

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

— cifrele :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

— caracterele speciale :

= (egal), + (plus), — (minus), (blanc sau spațiu liber),
*(asterisc), / (bară înclinată), ((paranteză deschisă),) (paranteză închisă) , (virgula), '(apostrof), . (punctul zecimal) și altele.

De remarcat că adeseori se folosește pentru desemnarea spațiului liber (blanc) simbolul b. De asemenea, spre deosebire de ALGOL, limbajul FORTRAN nu folosește caracterele minuscule ale alfabetului. Pot apărea confuzii în text între litera O și cifra 0. Conform unei convenții mai larg întrebuințate în scrierea programelor, atunci cînd există pericolul unei confuzii litera O se notează : Ø.

3.2. Constante numerice

În evaluarea unei expresii sînt antrenate în diverse operații exclusiv valori numerice. Acestea pot interveni sub formă *directă* (cînd în scrierea acelei expresii este dată chiar valoarea numerică respectivă) și acestea se numesc *constante* sau *indirectă* (cînd în scrierea expresiei se folosește un nume simbolic prin intermediul căruia se face referire de fapt tot la o valoare numerică) și acestea se numesc *variabile*.

În funcție de modul de reprezentare a valorilor numerice, există mai multe tipuri de constante numerice :

Constantele numerice de tip întreg reprezentări exacte ale unor valori numerice întregi, pozitive, negative sau nule, care nu depășesc în valoare absolută pe $2^{31}-1$, adică 2 147 483 647. Pentru scrierea acestor valori numerice, de remarcat că nu este permisă intercalarea de spații libere între cifre.

Constantele numerice negative sînt precedate în mod obligatoriu de semnul — în timp ce semnul + nu trebuie să preceadă în mod obligatoriu valorile numerice întregi pozitive.

Exemple : —1007 45578 + 1234

Constantele numerice de tip real sînt reprezentări aproximative ale valorilor numerice de tip real (care comportă şi parte fracţionară) şi se deosebesc întotdeauna de constantele numerice de tip întreg prin prezenţa punctului zecimal care delimitează partea întreagă a numărului de partea fracţionară.

Exemple: − 1007. 45.765 + 0.0006758 .056

Primul şi ultimul exemplu pun în evidenţă în ce condiţii cifra zero poate lipsi din reprezentare.

Pentru valorile numerice cu ordin de mărime prea mare sau prea mic este posibilă o reprezentare care utilizează un factor de scară. Astfel în loc de 0.00000123 se poate scrie 0.123E-05 sau 1.23E-06 sau 123.OE-08. Aici simbolul ,,E'' are semnificaţia : ,,înmulţit cu 10 la puterea''.

Avînd lungimea standard de 1 cuvînt (patru octeţi) pentru reprezentare, o constantă numerică reală nu poate depăşi numărul de 7 cifre semnificative. Dacă necesităţile impun efectuarea unor calcule cu mai multe cifre semnificative se poate utiliza o lungime dublă pentru reprezentarea în calculator. Aceasta permite scrierea unui număr de pînă la 15 cifre semnificative însoţite de factorul de scară corespunzător. Constantele de acest tip se numesc constante reale în dublă precizie. În specificarea factorului de scară la acest tip de constante simbolul E se înlocuieşte cu D.

Exemple de constante reale în dublă precizie:

1.23D+14 345678·765432D-03 1.D-16 −0.123456789D-08

Numărul de cifre semnificative utilizate de reprezentarea numerelor reale influenţează direct precizia cu care se efectuează operaţiile aritmetice specificate. Factorul de scară nu are implicaţii directe asupra preciziei efectuării calculelor.

În toate cazurile utilizării factorului de scară el trebuie să respecte condiţia ca modulul numărului real specificat să se înscrie în intervalul $(10^{-75}, 10^{75})$.

Constantele de tip complex reprezintă perechi de numere reale separate între ele printr-o virgulă şi cuprinse într-o pereche de paranteze. Exemple:

(1.23E-06,789.45) reprezintă numărul complex 0,00000123+789,45i

(1.,1.) reprezintă numărul complex 1 + i

O altă categorie de constante o reprezintă constantele logice despre care se vor face referiri în paragraful 5.2.

Constantele alfanumerice, octale şi hexazecimale reprezintă categorii mai puţin uzuale de constante despre care se pot găsi detalii în manualul de referinţă FORTRAN.

3.3. Variabile numerice

Variabilele sînt nume simbolice (sau identificatori) alcătuite din 1 pînă la 6 caractere alfanumerice din care obligatoriu primul caracter trebuie să fie o literă.

Nu este permisă inserarea spaţiului liber (blanc) sau a caracterelor speciale în scrierea unui nume de variabilă. Sistemul de calcul Felix C-256 permite utilizarea unei lungimi de 1 pînă la 8 caractere în scrierea unui nume de variabilă.

Variabilele de tip întreg sînt nume simbolice cărora li se atribuie în mod automat un spaţiu în memorie (1 cuvînt) în care se poate reprezenta exact o valoare numerică de tip întreg.

O primă regulă care permite să se distingă faptul că este vorba de o variabilă numerică de tip întreg este :
primul caracter să fie una dintre literele I, J. K, L, M sau N.
Această regulă (numită şi regula IJKLMN) se reţine uşor dacă ne gîndim la primele două litere ale cuvîntului INtreg.
Exemple de variabile de tip întreg :

L11, MASA, I, LAMBDA etc.

Există un ordin special care permite să se facă abatere de la această convenţie iniţială : este ordinul

INTEGER

care folosit ca în exemplul următor determină considerarea ca variabile de tip întreg şi a unor identificatori care au primul caracter diferit de I. J, K, L, M sau N

INTEGER RO, X11, TAU

Ca o consecinţă directă a acestui ordin de specificare, în tot restul programului respectiv, variabilele RO, X11 şi TAU vor fi considerate ca reprezentînd valori numerice de tip întreg.
Forma generală a acestei instrucţiuni de specificare este deci

INTEGER lista

O menţiune importantă este aceea că instrucţiunea de specificare INTEGER (la fel ca oricare altă instrucţiune de specificare) trebuie să preceadă orice instrucţiune executabilă.

Variabilele de tip real sînt nume simbolice analoage celor folosite de variabilele de tip întreg la care prima literă trebuie să fie diferită de I, J, K, L, M sau N.

Ca şi în cazul precedent, această convenţie iniţială poate fi încălcată dacă se foloseşte un ordin de specificare REAL. Forma generală este

REAL lista

unde prin „lista" se înţelege ca şi în cazul precedent o suită de nume de variabile separate între ele prin virgulă. Nici un semn de punctuaţie nu trebuie să separe cuvîntul cheie REAL de prima variabilă din listă după cum nici după ultima variabilă din listă nu trebuie să apară nimic.

Exemplu : REAL M1, KAPA, JI

Regula IJKLMN de specificare a tipului unei variabile se mai numeşte şi regula de specificare implicită a tipului unei variabile. Utilizînd această regulă se pot specifica doar două tipuri de variabile : întregi şi reale. Pentru specificarea celorlalte tipuri de variabile numerice nu rămîne decît posibilitatea utilizării unei definiri explicite. Acestea sînt

DOUBLE PRECISION lista
pentru specificarea variabilelor reale în dublă precizie,

COMPLEX lista
pentru specificarea variabilelor de tip complex.

Deşi nu este vorba de variabile numerice, în rîndul instrucţiunilor explicite de specificare a tipului se mai menţionează şi ordinul

LOGICAL lista
pentru variabilele logice.

De menționat că unele calculatoare admit înlocuirea ordinului DOUBLE PRECISION cu REAL*8 iar pentru reprezentarea numerelor întregi utilizînd numai jumătate din lungimea standard (deci numai pe 2 octeți) instrucțiunea

INTEGER*2 lista

Avantajul utilizării unor asemenea reprezentări este faptul că se folosește mai economic spațiul disponibil în memoria operativă. Dezavantajul constă în limitarea valorii absolute maxime a numerelor întregi reprezentate la $2^{15}-1$.

Exemple:

DOUBLE PRECISION ILUM, AP, VM
REAL*8 ILUM, AP, VM
LOGICAL VADV, AD1, AD2
INTEGER*2 MATE, MATB
COMPLEX ALFA, BETA

3.4. Variabile indexate

Adesea este necesar ca sub un nume de variabilă să se facă referire nu numai la o singură valoare numerică (așa cum a fost cazul în exemplele prezentate mai înainte) ci la un ansamblu de valori. Astfel un nume poate reprezenta un vector, o matrice cu două, trei sau mai multe dimensiuni. Pentru a discerne între diferitele componente ale unei variabile indexate se face apel la indici. Componentele unui vector $\bar{a}$ notate în mod uzual $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vor fi scrise în FORTRAN A(1), A(2), A(3), ..., A(N).

De remarcat din acest exemplu faptul că pentru specificarea indicilor, în FORTRAN, se folosesc parantezele. Cînd apar mai mulți indici, aceștia vor fi separați între ei prin virgulă. De exemplu: MATR(5,7) reprezintă componenta de pe linia 5 și coloana 7 a matricei notate simbolic cu MATR.

Indicii specificați în interiorul parantezei nu pot avea *niciodată valori negative sau zero.*

În funcție de intervalul de variație a indicilor variabilei indexate respective trebuie reținut loc în memorie pentru a se asigura posibilitatea reprezentării tuturor componentelor. Cum memoria operativă este de capacitate limitată, este necesar ca la începutul fiecărui program să se declare care este spațiul maxim solicitat în memorie pentru reprezentarea fiecărei variabile indexate. În ipoteza că programul în cauză cere un spațiu care depășește capacitatea memoriei operative, compilatorul tipărește la imprimantă un mesaj corespunzător și rularea programului respectiv este întreruptă.

Toate componentele unei variabile indexate au același tip de reprezentare care decurge fie din aplicarea regulii implicite de stabilire a tipului, fie din aplicarea unei instrucțiuni de stabilire explicită a tipului variabilei.

Cînd tipul variabilei indexate este stabilit prin regula implicită (regula IJKLMN), atunci definirea faptului că un anumit nume reprezintă o variabilă indexată și reținerea unui spațiu în memorie suficient pentru reprezentarea tuturor componentelor se face cu ajutorul instrucțiunii

DIMENSION

Forma generală de utilizare este

DIMENSION $N_1(n_1, n_2, \ldots), N_2(m_1, m_2, \ldots), \ldots, N_k(p_1, p_2, \ldots)$

unde $N_1, N_2, \ldots, N_k$ reprezintă nume de variabile indexate iar indicii din paranteză sînt constante întregi pozitive care reprezintă valori limită pentru indicii utilizați în cadrul programului. Astfel specificarea

DIMENSION A(10), MAT(5,7), V(10,10)

arată că A este o variabilă indexată cu un singur indice (vector) de tip real (conform regulii implicite) care solicită 10 locații standard (10 cuvinte) pentru reprezentarea în memorie a componentelor respective; MAT este o matrice cu două dimensiuni, cu maximum 5 linii și 7 coloane, deci pentru care se reține un spațiu de 35 de cuvinte; V este o matrice de tip real care solicită un spațiu maxim de 100 cuvinte. Depășirea de către indicii unei variabile indexate a valorilor limită specificate mai înainte conduce fie la erori de calcul fie la întreruperea executării programului.

Pentru declararea variabilelor indexate mai este posibil să se utilizeze și instrucțiunile de specificarea tipului. Astfel

DIMENSION A(10), MAT (5,7), V(10, 10)

este echivalentă cu

REAL A(10), V(10, 10)

INTEGER MAT(5,7)

Se pot combina instrucțiunile de specificare explicită a tipului unei variabile indexate cu instrucțiunea DIMENSION ca în exemplul următor

REAL MA, L

DIMENSION MA(10,5), L(20)

dar este posibil (și de preferat) să se scrie doar

REAL MA (10,5), L(20)

În acest mod se pot folosi atît pentru specificarea tipului cît și pentru declararea variabilelor indexate instrucțiunile

INTEGER, REAL, DOUBLE PRECISION, COMPLEX, LOGICAL.

În cadrul fiecărei asemenea declarații este posibilă și reafectarea tipului unei reprezentări. De exemplu, în instrucțiunea

INTEGER A(5), MAT(10, 10), VMIN variabila MAT,

deși ar fi fost considerată și în virtutea regulii IJKLMN tot de tip întreg, apare numai pentru specificarea sa ca variabilă indexată, cu valorile limită pentru primul și al doilea indice 10.

Din considerente legate de structura logică a modului de lucru al calculatorului, specificarea variabilelor, indexate sau nu, trebuie să se facă respectînd ordinea descrescătoare a lungimii afectate reprezentării lor.

De exemplu:

DOUBLE PRECISION A(100), T, VP(5,5)

REAL MATR(3, 3, 5), TM(45)

INTEGER PROD(10)

INTEGER*2 AH(100), BH(50)

De remarcat că nu orice calculator acceptă instrucțiunea INTEGER*2.

Utilizarea variabilelor indexate în cadrul unui program mai este posibilă și în afara instrucțiunilor de specificare date mai înainte, prin utilizarea instrucțiunii COMMON prezentată la pct. 9.1.1.

Ordinea în care sînt memorate componentele unei variabile indexate este în cazul variabilelor monoindexate chiar ordinea componentelor iar în cazul variabilelor cu doi indici este cea corespunzătoare citirii „pe coloane" a matricei, primul indice fiind deci acela care variază cel mai repede. La o matrice cu trei dimensiuni dacă prin primul

indice ne referim la linie, prin al doilea la coloană şi prin al treilea la plan, atunci ordinea de memorare va fi tot aceea a citirii pe coloane dar mai întîi în primul plan, apoi în al doilea plan etc.

Figurile II.16 şi II.17 prezintă ordinea de memorare a variabilelor cu două şi trei dimensiuni cu ajutorul a două exemple.

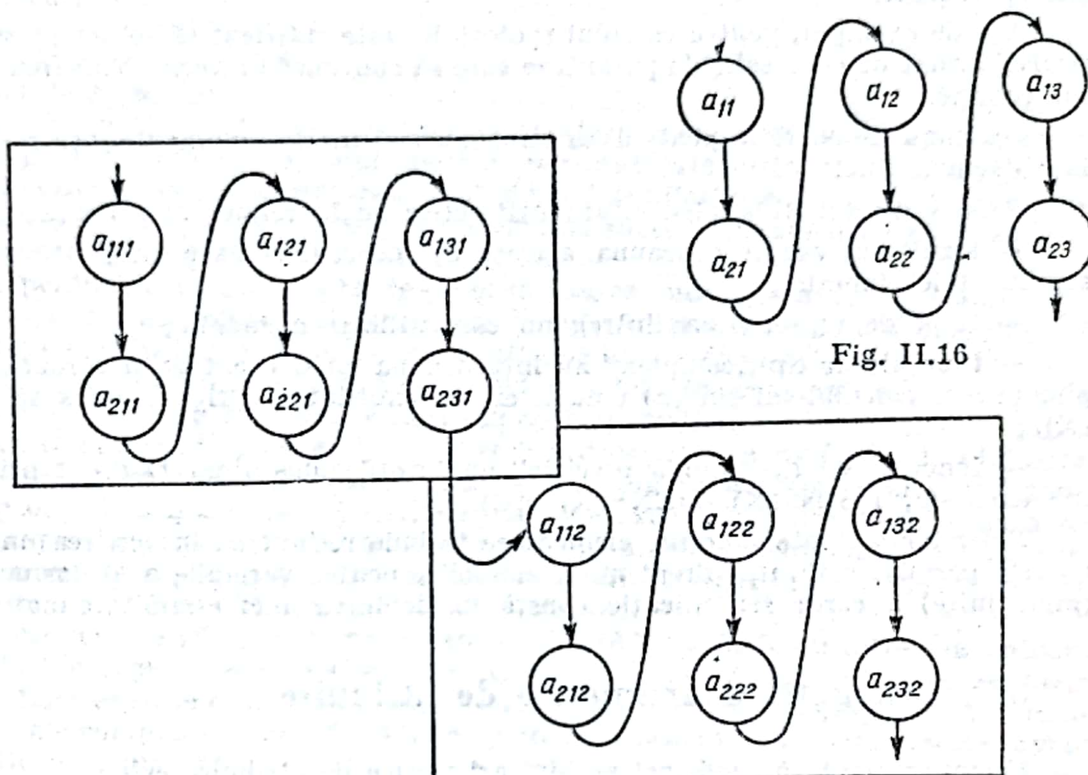


Fig. II.16

Fig. II.17

3.5. Operatori aritmetici

Operatorii aritmetici sînt aceia care permit executarea operaţiilor uzuale: adunarea, scăderea, înmulţirea, ridicarea la putere (exponenţierea). Codificările acestora sînt:

adunarea	+
scăderea	—
înmulţirea	*
împărţirea	/
exponenţierea	**

3.6. Funcţii elementare

Funcţiile elementare sînt de două categorii:

a) funcţii matematice (care permit calculul unui radical, logaritm, sinus, exponenţială sau alte funcţii uzuale)

b) funcţii utilitare (care permit o serie de operaţii cum ar fi: determinarea valorii absolute, determinarea valorii maxime dintre două sau mai multe argumente, conversiunea tipului de reprezentare etc.)

O listă completă a acestor funcţii elementare, numite şi funcţii interne, este dată în paragraful 8.2.

Funcţiile elementare au nume predefinite, cunoscute de către compilator şi simpla lor inserare în scrierea unei expresii aritmetice antrenează în mod automat calculul funcţiei specificate.

Aşa de exemplu, pentru calculul radicalului este suficient să se scrie cuvîntul cheie SQRT urmat de o pereche de paranteze care să conţină în interior valoarea argumentului funcţiei.

O funcţie elementară poate avea unul sau mai multe argumente însă rezultatul este întotdeauna unic.

Relativ la funcţiile elementare aritmetice mai trebuie menţionat:

— rezultatul are întotdeauna acelaşi tip de reprezentare ca şi argumentul (sau argumentele) funcţiei;

— tipul de reprezentare întreg nu este utilizat niciodată;

— funcţiile de tip ,,complex'' au întotdeauna un C drept prim caracter (de exemplu, pentru calculul lui sin (x) cînd x este o cantitate de tip complex se scrie CSIN (X));

— funcţiile de tip ,,dublă precizie'' au întotdeauna litera D drept prim caracter (de exemplu, DSIN (X), DEXP(X) etc.).

Referitor la toate funcţiile elementare trebuie reţinut că în scrierea unui program nu este permisă utilizarea drept nume simbolice pentru variabile a acelor cuvinte cheie (predefinite) a căror semnificaţie constă în definirea unei anumite funcţii.

3.7. Instrucţiuni aritmetice de atribuire

Forma generală a unei instrucţiuni aritmetice de atribuire este

$$v = E$$

unde v reprezintă un nume de variabilă numerică iar E este o expresie aritmetică.

O expresie aritmetică se poate defini în felul următor:

a) o constantă numerică este o expresie aritmetică;

b) o variabilă numerică este o expresie aritmetică;

c) o funcţie elementară conţinînd cuvîntul cheie respectiv urmat de specificarea argumentului (sau argumentelor) este o expresie aritmetică;

d) compunerea a două expresii aritmetice prin intermediul unui operator aritmetic reprezintă de asemenea o expresie aritmetică;

e) încadrarea unei expresii aritmetice într-o pereche de paranteze conduce de asemenea la o expresie aritmetică.

Exemple de expresii aritmetice:

```
60700 * (ERF(IT) + 1824.5)/EL(IT)
−B + SQRT (B * * 2−4.*A * C)/2.
```

Ordinea de evaluare a unei expresii aritmetice respectă priorităţile cunoscute ale operatorilor aritmetici precum şi restricţiile impuse de folosirea parantezelor.

Atunci cînd parantezele nu sînt utilizate pentru a interverti ordinea de efectuare a operatorilor ci pentru a specifica eventual argumentul (sau argumentele) unei funcții elementare, ordinea de efectuare a operațiilor este următoarea:

1) Evaluarea funcțiilor elementare.
2) Exponențierile.
3) Semnul — (minus) unitar.
4) Înmulțirile și împărțirile.
5) Adunările și scăderile.

Prin semnul—unitar se înțelege utilizarea operatorului nu pentru a desemna operația de scădere ci pentru a schimba semnul valorii numerice atașate unei variabile sau expresii.

În cazul în care se succed operatori cu același nivel de prioritate, ordinea de evaluare este de la stînga la dreapta, exceptînd cazul cînd se succed operatorii de exponențiere unde ordinea de evaluare este inversă.

Nu este permisă (ca fiind lipsită de sens) utilizarea succesivă a doi operatori (de exemplu, A+/B nu are sens). Se exceptează cazul utilizării succesive a operatorului * unde de fapt este vorba de definirea unui alt operator (exponențierea).

Deoarece nu se încadrează în definiția dată mai înainte, constantele și variabilele logice nu pot fi utilizate în scrierea unei expresii aritmetice.

O deosebită suplețe în scrierea unei expresii aritmetice este conferită de utilizarea parantezelor care permit să se forțeze ordinea de evaluare a unei expresii în sensul dorit de programator. În interiorul unei paranteze, dacă nu există altă paranteză, ordinea de evaluare a expresiei este cea dictată de ierarhia operatorilor menționată mai înainte. Cînd apar paranteze suprapuse, prioritatea cea mai mare în ceea ce privește ordinea de evaluare o au parantezele situate cît mai în interior.

Pentru primele variante de compilatoare FORTRAN utilizate de către calculatoare a fost valabilă o regulă restrictivă numită regula de omogenitate care cerea ca toate operațiile aritmetice ce se executau să aibă operanzii cu același tip de reprezentare. Variantele actuale ale compilatoarelor FORTRAN permit utilizarea valorilor numerice avînd tipuri diferite de reprezentare dar trebuie ținut seama că aceasta poate conduce la erori.

Regula generală de evaluare a expresiei este următoarea: a) în funcție de prezența parantezelor și de ierarhia operatorilor folosiți este stabilită o anumită ordine de evaluare a expresiei;

b) în ordinea stabilită la pct. a) atunci cînd operanzii sînt de tip diferit de reprezentare se procedează la modificarea tipului de reprezentare al unuia dintre operanzi conform tabelului alăturat și apoi se aplică operatorul respectiv.

	I	R	D	C
I	I	R	D	C
R	R	R	D	C
D	D	D	D	*
C	C	C	*	C

Astfel, dacă trebuie evaluată expresia A+IM se convertește valoarea numerică a variabilei de tip întreg IM la tipul de reprezentare real și aceasta se adună cu valoarea variabilei A rezultînd un număr avînd tipul de reprezentare real. Tabelul arată că nu este posibilă compunerea cu ajutorul unui operator a unei valori de tip real în dublă precizie cu o valoare de tip complex.

Un exemplu de evaluare eronată a expresiei este:

$$5/2 * 4 + 2.5$$

Respectînd ordinea de evaluare are loc întîi operația de împărțire 5/2 unde, ambi operanzi fiind de tip întreg, și rezultatul este de tip întreg, deci se obține valoarea 2 care înmulțită în continuare cu 4 dă rezultatul 8 (cu tipul de reprezentare de asemenea;

întreg). În continuare se adună 8 cu 2.5 dar numai după ce 8 a primit tipul de reprezentare real (devine deci 8.0) și rezultă 10.5 valoare diferită de rezultatul exact al evaluării care este 12.5.

Este necesară deci în scrierea expresiilor o deosebită atenție la efectuarea împărțirilor între două numere de tip întreg.

Executarea unei instrucțiuni aritmetice de atribuire are două etape distincte:

— evaluarea expresiei situate în dreapta semnului egal;

— atribuirea valorii găsite pentru expresia respectivă variabilei situate în stînga semnului egal. Indiferent de tipul de reprezentare a valorii găsite după evaluarea expresiei respective, atribuirea acestei valori variabilei situate în stînga semnului egal are loc numai după ce în prealabil acest rezultat al evaluării a primit ca tip de reprezentare, tipul variabilei situate în stînga semnului egal.

De exemplu, în executarea instrucțiunii

$$I = A + 3/DV$$

evaluarea expresiei conduce la o valoare de tip real, aceasta este convertită în tipul de reprezentare întreg (prin trunchierea părții fracționare) și abia după aceea numărul întreg rezultat este atribuit variabilei I.

Ținînd seama de acest mod de executare a instrucțiunilor are sens și instrucțiunea

$$I = I + 1$$

care are următoarea semnificație: la valoarea existentă pentru variabila I se adaugă o unitate iar rezultatul devine noua valoare a variabilei. I. Dacă variabila I avea valoarea 7, după executarea acestei instrucțiuni ea va primi valoarea 8.

4. ÎNTRERUPEREA NECONDIȚIONATĂ A SECVENȚEI DE CALCUL

4.1. Instrucțiunea GO TO

Acest ordin are ca efect întreruperea executării secvențiale a instrucțiunilor din program (una după alta, în ordinea în care au fost scrise) și reluarea secvenței de calcul dintr-un anumit loc al șirului de instrucțiuni.

Forma generală este:

GO TO *n*

unde *n* este un număr de instrucțiune (etichetă) care trebuie să existe efectiv în scrierea programului. Instrucțiunea la care se face trimiterea poate fi situată oriunde înainte sau după această instrucțiune GO TO.

Mai există două forme ale acestei instrucțiuni, mai rar utilizate: GO TO calculat și GO TO impus a căror semnificație și mod de întrebuințare se poate vedea în manualul de referință FORTRAN pentru sistemul de calcul folosit de beneficiar.

4.2. Instrucțiunea STOP

Instrucțiunea STOP determină întreruperea lucrului la programul respectiv și determină calculatorul să treacă la compilarea și executarea următorului set de cartele. Deoarece în scrierea programului este posibilă utilizarea mai multor instrucțiuni STOP este

posibilă scrierea după instrucțiunea STOP a unui număr întreg format din 1 pînă la 5 cifre. Odată cu terminarea lucrului la programul respectiv apare tipărit acest ordin STOP însoțit de numărul respectiv indicîndu-se în acest mod prin care anume instrucțiune STOP a luat sfîrșit executarea programului.

Instrucțiunea STOP corespunde instrucțiunii CALL EXIT din varianta inițială a limbajului FORTRAN.

4.3. Instrucțiunea PAUSE

Înainte de a se trece propriu-zis la efectuarea programului se poate ca să fie necesare o serie de manevre pe care trebuie să le facă operatorul care supraveghează calculatorul (de exemplu: punerea hîrtiei într-un anumit număr de exemplare la imprimantă, montarea unui anumit disc pe o anumită unitate periferică etc.).

Pentru acestea este posibilă oprirea efectivă a calculatorului prin instrucțiunea PAUSE. Cînd apar mai multe asemenea instrucțiuni în cadrul unui singur program, pentru a le distinge este posibil ca să fie însoțite de 1 pînă la 5 cifre. Deci forma generală

PAUSE sau PAUSE *nnnnn*

unde *nnnnn* reprezintă o constantă numerică de tip întreg, fără semn, de cel mult cinci cifre.

Este indicat să se folosească această instrucțiune numai dacă este absolut necesar deoarece atrage după sine oprirea fizică a calculatorului cu toate consecințele care decurg.

4.4. Instrucțiunea END

Această instrucțiune este obligatoriu ultima instrucțiune a fiecărei unități de program. Ea marchează sfîrșitul geografic al listei de instrucțiuni a programului executiv și este utilizată numai de compilator pentru a sesiza unde ia sfîrșit lista de instrucțiuni.

De regulă ea trebuie să fie precedată de instrucțiunea STOP. Dacă aceasta lipsește (dintr-o omisiune) atunci instrucțiunea END se dedublează în mod automat în STOP și apoi END.

5. ÎNTRERUPEREA CONDIȚIONATĂ A SECVENȚEI DE CALCUL

Pentru executarea întreruperii condiționate a secvenței de calcul se utilizează instrucțiunea IF (în traducere: dacă). Această instrucțiune poate avea două forme: IF aritmetic și IF logic.

5.1. Instrucțiunea IF aritmetic

Această instrucțiune permite efectuarea unui transfer în cadrul listei de instrucțiuni către două sau trei puncte posibile. Forma generală este:

$$IF(e)n_1,\ n_2,\ n_3$$

unde :

— *e* este o expresie aritmetică de tip întreg, real sau dublă precizie;
— n_1, n_2, n_3 sînt 3 etichete de instrucţiuni executabile situate în aceeaşi unitate de program.

Etapele executării acestei instrucţiuni sînt :

— în primul rînd se evaluează expresia din paranteză;
— dacă expresia are o valoare strict negativă se continuă executarea programului începînd cu instrucţiunea cu eticheta n_1;
— dacă expresia are valoarea zero se continuă de la eticheta n_2;
— dacă expresia are valoare strict pozitivă, se continuă cu instrucţiunea cu eticheta n_3

Exemplu :

IF (VMIN — 15) 11,43,14

În scrierea acestei instrucţiuni este obligatoriu ca să apară 3 etichete de instrucţiuni. Două dintre acestea pot coincide. Este lipsit de sens ca toate aceste trei etichete să coincidă deoarece pentru acest caz este mult mai simplu de folosit instrucţiunea GO TO.

Deoarece după executarea unei instrucţiuni IF aritmetic se trece în continuare la una din cele trei etichete specificate, rezultă că la instrucţiunea care urmează imediat după IF în listă nu se poate ajunge decît dacă are o etichetă.

Lipsa etichetei (numărului de instrucţiune) la instrucţiunea care urmează în listă atît după ordinul GO TO cît şi după IF aritmetic, este depistată de către compilator ca o greşeală şi specificată ca atare.

Exemple de utilizare a instrucţiunii IF aritmetic :

a) fie de adunat primele 10 componente ale vectorului A :

```
      DIMENSION A(10)
      S = 0
      I = 1
13    S = S + A(I)
      I = I + 1
      IF (I—10) 13, 13, 14
14    continuarea listei
```

b) fie de efectuat separat pentru aceleaşi componente ale variabilei A suma componentelor strict pozitive şi suma componentelor strict negative :

```
      REAL A(10)
      S = 0
      SN = 0
      I = 1
11    IF (A(I)) 12, 13, 14
12    SN = SN + A(I)
```

```
      GO TO 13
   14 S = S + A(I)
   13 I = I + 1
      IF (I — 10) 11, 11, 15
   15 continuarea listei
```

Observație. Avînd în vedere că singurele valori numerice reprezentate exact în calculator sînt cele de tip întreg, nu se recomandă folosirea instrucțiunii IF aritmetic pentru a se testa egalitatea a două valori de tip real deoarece acestea sînt reprezentate aproximativ. Se poate întîmpla astfel ca aceeași valoare numerică 4 să aibă în calculator reprezentări care în notația uzuală le putem scrie: 4,0 sau 4,000001 sau 3,999999.

5.2. Instrucțiunea IF logic

S-au prezentat pînă acum ca tipuri de expresii utilizate de limbajul FORTRAN, expresiile aritmetice. În general însă, există trei feluri de expresii utilizate de acest limbaj:

— expresii aritmetice;
— expresii relaționale;
— expresii logice.

Expresiile relaționale sînt acele expresii care în limbajul curent utilizează simbolurile $<$, $\leqslant$, $=$, $>$, $\geqslant$ sau $\ngtr$, pentru a compara două expresii aritmetice.

Deoarece alfabetul FORTRAN nu conține aceste simboluri, pentru codificarea lor se utilizează abrevieri de la denumirile în limba engleză ale acestor simboluri avînd obligatoriu, de o parte și de alta cîte un punct. Astfel:

simbolul $<$ se codifică .LT.
simbolul $\leqslant$ se codifică .LE.
simbolul $=$ se codifică .EQ.
simbolul $>$ se codifică .GT.
simbolul $\geqslant$ se codifică .GE.
simbolul $\neq$ se codifică .NE.

Exemple de expresii relaționale:

A.EQ.B   A.GT.(3*X/5 — 4.)   I.LT.N

În rîndul tipurilor de constante utilizate de FORTRAN mai trebuie să fie considerate și constantele logice, care sînt numai două:

.TRUE. — pentru valoarea logică „adevărat"
.FALSE. — pentru valoarea logică „fals".

Evaluarea unei expresii logice se va vedea că nu poate conduce decît la una din aceste două valori (orice afirmație nu poate fi decît adevărată sau falsă).

Cînd se evaluează o expresie aritmetică rezultă o valoare numerică de un anumit tip. Cînd se evaluează o expresie relațională rezultă una din cele două constante logice (.TRUE. sau .FALSE.)

Etapele evaluării unei expresii relaționale sînt:

1) Evaluarea fiecărei expresii aritmetice în parte, rezultînd astfel două cantități numerice.

2) Se aduc (dacă este cazul) ambele cantități numerice la același tip de reprezentare (dacă de exemplu o valoare este de tip întreg și cealaltă este de tip real, se convertește variabila de tip întreg în real).

2) Se efectuează comparația respectivă și se atribuie expresiei relaționale valoarea .TRUE. sau .FALSE. după cum afirmația prezentată de expresia relațională este adevărată sau falsă.

Observație. Avînd în vedere faptul că mulțimea numerelor complexe nu este ordonată, rezultă că numerele complexe nu pot fi utilizate pentru comparații în cadrul expresiilor relaționale.

Variabilele logice sînt variabile care nu pot avea decît cele două valori logice (.TRUE. și .FALSE.). Numele unei asemenea variabile trebuie să respecte restricțiile impuse : să fie alcătuit din 1 pînă la 6 caractere alfanumerice din care primul trebuie să fie obligatoriu o literă. Deoarece regula IJKLMN nu poate conduce decît la crearea tipurilor de variabile : întreg și real, definirea variabilelor logice se poate face numai explicit, cu ajutorul instrucțiunii LOGICAL.

Forma generală este :

LOGICAL lista

Exemplu :

LOGICAL I2, ADV (5), VP

În scrierea unei expresii logice sînt utilizați :

— termeni ;
— operatori logici.

Termen, într-o expresie logică, poate fi :

— o constantă logică ;
— o variabilă logică ;
— o expresie relațională.

Operatorii logici utilizați în construirea expresiilor logice sînt operatorii logici cunoscuți : negația, conjuncția și disjuncția. În lipsa unor simboluri corespunzătoare în cadrul alfabetului FORTRAN, codificarea lor se face sub forma :

.NOT. pentru negație (non)

.AND. pentru conjuncție (și)

.OR. pentru disjuncție (sau)

X	.NOT. X
.TRUE.	.FALSE.
.FALSE.	.TRUE.

Primul operator logic, .NOT. acționează numai asupra unei singure valori logice și are proprietatea de a o converti în valoarea logică complementară, ca în tabelul de mai sus :

Operatorii de conjuncție și disjuncție se referă întotdeauna la două valori logice și se definesc în felul următor :

X	Y	X. AND. Y	X. OR. Y
.FALSE.	.FALSE.	.FALSE.	.FALSE.
.FALSE.	.TRUE.	.FALSE.	.TRUE.
.TRUE.	.FALSE.	.FALSE.	.TRUE.
TRUE.	.TRUE.	.TRUE.	.TRUE.

O expresie logică se poate defini atunci astfel:

1) Un termen, așa cum a fost definit mai înainte, este o expresie logică.
2) Dacă E este o expresie logică .NOT.E este de asemenea o expresie logică.
3) Dacă E și F sînt expresii logice, atunci

E.AND.F și E.OR.F

sînt de asemenea expresii logice.

În evaluarea unei expresii logice, prioritățile operatorilor folosiți sînt în ordine:

1) .NOT.
2) .AND.
3) .OR.

În ceea ce privește ordinea de efectuare a operațiilor specificate într-o expresie logică, trebuie să se respecte următoarele reguli:

— în primul rînd se evaluează valorile expresiilor aritmetice care intervin în expresiile relaționale;

— se evaluează apoi expresiile relaționale, acordîndu-li-se valoarea logică de adevăr corespunzătoare.

— în continuare se aplică operatorii logici ținînd seama de ordinea de prioritate specificată mai înainte. În cazul în care apar doi operatori logici cu același nivel de prioritate, ordinea de evaluare este cea de la stînga la dreapta.

— în construirea expresiilor logice se acceptă utilizarea parantezelor, prezența acestora dînd posibilitatea de a modifica ordinea de aplicare a operatorilor specificată mai înainte. O paranteză va reprezenta întotdeauna un termen. Acest termen nu poate fi utilizat decît după evaluarea întregii expresii din interior. Aceasta are ca efect imediat faptul că evaluarea parantezelor, în cazul cînd se suprapun, are loc de la interior către exterior.

Exemplu de evaluare a unei expresii logice:

(A(I).LT.EPS).OR.(I.GT.100)

Termenului A(I).LT.EPS i se va atribui valoarea logică de adevăr .TRUE. sau .FALSE. după cum, în notație uzuală $a_i < \varepsilon$ sau $a_i \geqslant \varepsilon$. Apoi se evaluează termenul I.GT.100 care va primi valoarea .TRUE. dacă $i > 100$ sau .FALSE. dacă $i \leqslant 100$.

Există acum create toate elementele necesare pentru a defini instrucțiunea IF logic.

Forma generală a acestei instrucțiuni este:
IF(expresie logică) instrucțiune executabilă.
Exemplu

IF(I.LE.N)S = S + A(I)

Execuția unei asemenea instrucțiuni are loc astfel:

1) Se determină valoarea logică atribuită expresiei logice scrisă în paranteză.

2) Dacă valoarea expresiei este .TRUE. atunci se dă curs instrucțiunii executabile scrisă în continuare (pe același rînd) iar după executarea ei se continuă parcurgerea listei de instrucțiuni. Dacă expresia are valoarea. FALSE., instrucțiunea executabilă scrisă în cadrul aceluiași rînd este ignorată, trecîndu-se la executarea următoarei instrucțiuni din listă.

Observație. Instrucțiunea executabilă care este scrisă pe aceeași linie cu instrucțiunea IF logic nu poate fi o altă instrucțiune IF logic sau o instrucțiune DO.

De fapt, a scrie consecutiv două instrucțiuni IF logic, cum ar fi de exemplu:

IF(A.GT.B)IF(C.LE.D)N = N + 1 INCORECT

nici nu ar avea sens deoarece putem realiza aceleași condiții cu ajutorul unei singure instrucțiuni IF logic astfel:

IF((A.GT.B).AND.(C.LE.D)) N = N + 1 CORECT

Exemplu de utilizare a instrucțiunii IF logic: fie de calculat cîte componente strict pozitive are vectorul A din totalul de 10 componente:

```
  REAL A(10)
  N = 0
  I = 1
1 IF(A(I).GT.O.)N = N + 1
  I = I + 1
  IF(I.LE.10)GO TO 1
  continuarea listei
```

6. INSTRUCȚIUNI DE CICLARE. INSTRUCȚIUNEA DO

Executarea repetată (ciclarea) a unei instrucțiuni sau a unui grup de instrucțiuni dintr-un program poate fi realizată fie prin utilizarea instrucțiunii DO, fie prin intermediul instrucțiunilor de transfer condiționat IF sub una din cele două forme (IF aritmetic sau IF logic).

Instrucțiunea DO este o instrucțiune de control a desfășurării secvenței de calcul, specifică pentru executarea ciclărilor.

Forma generală a instrucțiunii este:

$$m \text{ DO } n\ i = k_i, k_f, k_r$$

unde: m este eticheta instrucțiunii (opțională);

n — eticheta instrucțiunii terminale din grupul de instrucțiuni (ciclu) ce se execută sub controlul ordinului DO;

i — un nume de variabilă de tip întreg (variabilă de control) avînd rolul unui indice de ciclare;

k_i — o constantă sau o variabilă de tip întreg avînd rolul de a reprezenta valoarea inițială a indicelui de cilcare;

k_f — idem, reprezentînd valoarea limită superioară a indicelui de ciclare;

k_r — idem, reprezentînd pasul (rația) cu care crește indicele de ciclare la fiecare reluare a buclei.

Restricții privind elementele unei instrucțiuni DO:

1) n nu poate fi eticheta unei instrucțiuni terminale de forma GO TO, IF aritmetic, RETURN, STOP, PAUSE, IF logic care conține una din instrucțiunile precedente, DO.

2) Parametrii k_i, k_f, k_r trebuie să ia valori strict pozitive şi nu pot reprezenta expresii.

Observaţii

— Dacă parametrul $k_r = 1$ atunci nu mai este necesară specificarea sa şi instrucţiunea poate avea forma :

$$m \text{ DO } n\ i = k_i,\ k_f$$

— Eticheta n poate fi atribuită unei instrucţiuni CONTINUE avînd forma :

$$n \text{ CONTINUE}$$

şi care joacă rolul de instrucţiune terminală a ciclului. Această instrucţiune nu determină efectuarea nici unei operaţii ci serveşte numai drept punct de referinţă în lista de instrucţiuni. Utilizarea ei este indicată în vederea evitării situaţiilor menţionate la restricţia de la pct. 1.

Modul de executare al unei instrucţiuni DO este următorul :

Se defineşte ca domeniu al unui ciclu (bucle) ansamblul tuturor instrucţiunilor executabile cuprinse între instrucţiunea DO şi instrucţiunea terminală a ciclului corespunzător, inclusiv aceasta.

Executarea instrucţiunii DO cuprinde următoarele faze :

— indicelui de ciclare i se atribuie valoarea iniţială k_i ;

— se execută (secvenţial) toate instrucţiunile din domeniul ciclului (buclei) pînă la instrucţiunea terminală inclusiv. În timpul executării ciclului valoarea indicelui de ciclare i poate fi utilizată fără a fi modificată ;

— valoarea indicelui de ciclare este majorată cu raţia k_r ; dacă noua valoare este mai mică sau egală cu k_f, se reia ciclul cu prima instrucţiune executabilă din domeniul buclei. În caz contrar controlul executării programului trece la instrucţiunea executabilă imediat următoare instrucţiunii terminale a ciclului.

În timpul executării unei secvenţe de program sub controlul unei instrucţiuni DO, valorile parametrilor k_i, k_f, şi k_r nu pot fi modificate.

Exemple de instrucţiuni DO :

DO 10 I = 1,3 sau DO 10 I = 1,3,1	Ultima instrucţiune executabilă a ciclului are eticheta 10. Indicele de ciclare I primeşte succesiv valorile : 1, 2, 3. Se execută 3 ciclări.
DO 12 NI=1,5,2,	Ultima instrucţiune executabilă a ciclului are eticheta 12. Indicele de ciclare NI primeşte succesiv valorile 1,1 + 2 = 3, 3+2=5. Se execută trei ciclări.
DO 12 NJ=2,9,3	Indicele de ciclare NJ primeşte succesiv valorile 2,2 + 3 = 5, 5+3=8. A patra parcurgere nu are loc deoarece indicele ar depăşi valoarea limită superioară. De remarcat că valoarea k_f nu este în mod obligatoriu valoarea pe care o ia indicele la ultima parcurgere a buclei.

DO 121 NK=5,3 Deşi limita superioară este inferioară valorii iniţiale a indicelui, parcurgerea buclei are loc totuşi, o singură dată, pentru NK=5.

DO 121 J =L, K Indicele de ciclare variază între valorile atribuite lui L şi lui K, avînd raţia egală cu unitatea. Variabilele L şi K nu pot avea valori negative sau nule.

Exemplu de utilizare a instrucţiunii DO:

Să se formeze elementele unui vector cu 10 componente obţinut prin scăderea elementelor corespunzătoare ale altor doi vectori de aceeaşi lungime. Relaţia de calcul este:

$$a_i = b_i - c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Se pot utiliza următoarele instrucţiuni:

```
      DO 11  I = 1,10
   11 A(I) = B(I) - C(I)
```

sau

```
      DO 11  I = 1,10
      A(I) = B(I) - C(I)
   11 CONTINUE
```

Observaţie. În cazul îndeplinirii unor condiţii prestabilite privind executarea instrucţiunilor din domeniul unui ciclu DO este posibilă întreruperea secvenţei de calcul şi abandonarea ciclării înainte de epuizarea efectului instrucţiunii DO. Această ieşire forţată din ciclu se poate comanda cu o instrucţiune de tipul IF sau GO TO. La ieşirea din ciclu, valoarea indicelui de ciclare se conservă putînd fi utilizată ca atare în continuare.

Exemple de ieşiri forţate din buclă:

```
      S = 0
      DO 11  I = 1,100
      IF(A(I).LT.1.E-10)GO TO 12
   11 S = S + A(I)
   12 CONTINUE
```

Suma S a celor 100 de componente ale vectorului A se execută atît timp cît nici o valoare A(I) nu este mai mică decît 10^{-10}. În caz contrar are loc ieşirea din bucla DO.

```
      DO 111  I = 1, 15, N
      IF(I - 4)111, 120, 111
  111 A(I) = B(I)/2 + C(I)
      GO TO 121
  120 A(I) = B(I)
  121 CONTINUE
```

În funcţie de valoarea lui N, indicele I poate lua în unele cazuri valoarea 4; în acest caz este abandonat ciclul DO, executîndu-se instrucţiunea 120. În cazul ieşirii normale din bucla DO instrucţiunea 120 nu se execută.

```
      DO 14  J = 1,10
      ...........
      IF(R) 11, 12, 11
   11 ............
   12 ...........
      GO TO 15
   14 CONTINUE
   15 ............
```

Ieşirea forţată din bucla DO are loc dacă variabila R primeşte o valoare nenulă; în acest caz se execută instrucţiunea 11 şi prin intermediul instrucţiunii GO TO 15 se părăseşte ciclul DO.

Există posibilitatea suprapunerii ciclurilor. Două cicluri sînt suprapuse cînd instrucţiunea DO a unuia din ele face parte din domeniul celeilalte. Domeniul instrucţiunii DO interioare trebuie să reprezinte un subansamblu al domeniului instrucţiunii DO exterioare (fig. II.18). Cele două domenii pot avea aceeaşi terminaţie (fig. II.19) dar nu se pot intersecta (fig. II.20) În interiorul domeniului unui ciclu DO pot exista mai multe alte cicluri DO, nesuprapuse (fig. II.21) sau mai multe cicluri DO ce se pot suprapune succesiv (fig. II.22).

Cu excepţia intrărilor sau ieşirilor forţate, la executarea fiecărei ciclări a unei bucle DO exterioare, se efectuează toate ciclările comandate de bucla DO interioară.

Indicii buclelor suprapuse trebuie să respecte următoarele restricţii :

— indicele de ciclare al unei instrucţiuni DO oarecare dintr-un pachet de cicluri suprapuse nu poate fi utilizat ca indice de ciclare într-o altă instrucţiune a pachetului ;

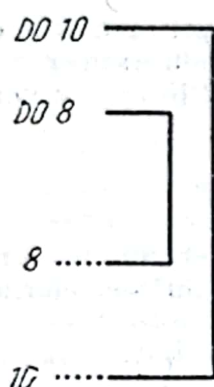


Fig. II.18

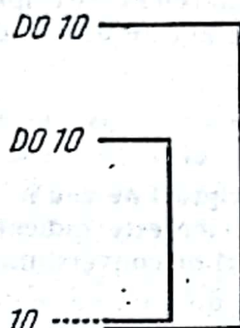


Fig. II.19

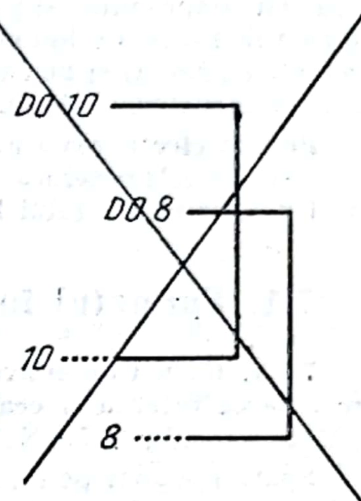


Fig. II.20

— valoarea unui indice al unei bucle exterioare nu este permis să fie modificată în cadrul unei bucle interioare acesteia.

Ca o consecinţă a regulilor de formare a ciclurilor suprapuse şi ţinînd seama de restricţiile privind parametrii instrucţiunilor DO intrările şi ieşirile forţate sînt permise numai în situaţiile prezentate în fig. II. 23.

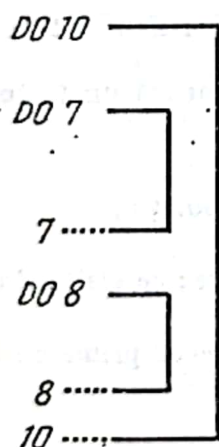


Fig. II.21

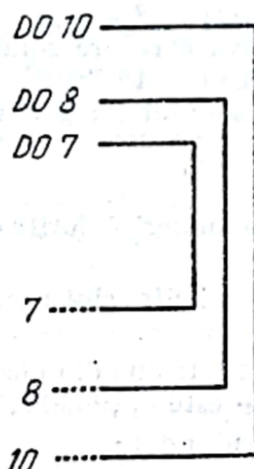


Fig. II.22

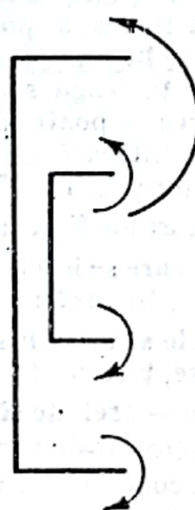


Fig. II.23

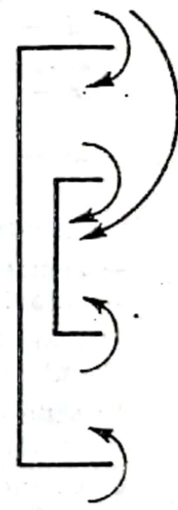


Fig. II. 24

Intrările din exterior către interiorul unei bucle DO nu sînt permise (fig. II. 24). Există o excepţie : cazul cînd intrarea a fost precedată de o ieşire din bucla respectivă (deci bucla a fost amorsată).

7. INSTRUCŢIUNI DE INTRARE/IEŞIRE

Instrucţiunile de intrare/ieşire facilitează schimbul de informaţii între unitatea centrală şi unităţile periferice ale sistemului de calcul. În cele ce urmază vor fi prezentate modalităţile de introducere şi extragere a datelor prin unităţile de intrare/ieşire : cititor de cartele, imprimantă şi perforator de cartele. Pentru indicaţii detaliate asupra posibilităţilor de realizare a schimbului de informaţii între memoria centrală şi memoriile externe magnetice (discuri şi benzi) se poate consulta manualul de referinţă pus la dispoziţie de firma constructoare a fiecărui sistem de calcul.

Pentru efectuarea transferului de date între calculator şi exterior prin unităţile de intrare/ieşire este necesară atît specificarea datelor care urmează să fie introduse sau extrase cît şi descrierea modului în care sînt prezentate aceste date (formatul înregistrărilor).

7.1. Formatul înregistrărilor

7.1.1. Coduri de conversiune şi descriptori de zonă. Tipul de conversiune între reprezentarea internă şi cea externă a datelor este indicat printr-unul din simbolurile : F, E, D, G, I, L, A, H, X, T, numite coduri de conversiune.

Spaţiul ocupat pe un mediu purtător de informaţie de către şirul de caractere care alcătuieşte o dată oarecare formează zona acelei date. Corespunzător codurilor de conversiune, în FORTRAN sînt admise următoarele tipuri principale de descriptori de zonă :

1) Descriptorul de tip F este utilizat pentru date numerice de tip real, avînd forma generală :

$$mPrFw \cdot d$$

unde : w este o constantă întreagă pozitivă şi diferită de zero care reprezintă lungimea zonei (numărul de caractere al reprezentării externe) ;
d — constantă întreagă pozitivă care reprezintă numărul de cifre al părţii fracţionare în reprezentarea externă ($d \leqslant w$) ;
r — constantă întreagă strict pozitivă care are rolul unui factor de repetiţie ; specificarea sa poate fi omisă dacă $r = 1$;
m — constantă întreagă asociată simbolului P ; grupul mP formează un factor de scară (opţional).

Utilizarea descriptorului F la intrare :

— zona externă în care se înscrie valoarea numerică dorită conţine w poziţii ;
— caractere admise în zonă :

a) blancurile — cele situate în stînga primei cifre sînt nesemnificative ; celelalte sînt interpretate drept zerouri ;

b) semnul algebric — trebuie să fie situat într-una din poziţiile ce preced prima cifră a numărului ; specificarea semnului + este opţională ;

c) cifrele zecimale componente ale numărului dat ;

d) punctul zecimal — înscrierea punctului zecimal este opţională ; prezenţa sa anulează efectul specificării d a descriptorului ; în cazul cînd punctul zecimal nu este înscris se consideră drept parte fracţionară a numărului, ultimele d caractere din zonă ;

— efectul factorului de scară constă în multiplicarea valorii date cu 10^{-m}.

Exemple :

Descriptor	Lungimea zonei	Reprezentarea în zonă	Valoarea numerică după conversiune
F8.2	8 caractere	bb154621 bbb16.3b b-b14155 b17.2341	1546.21 16.30 −141.55 17.2341
2PF7.2	7 caractere	bbbb156 bb-7.34	0.0156 −0.0734

Utilizarea descriptorului F la ieșire :

— zona externă în care se înscrie valoarea numerică este formată din *w* poziții ;

— partea fracționară ocupă ultimele *d* poziții din zonă ;

— punctul zecimal este reprezentat în mod obligatoriu în poziția imediat precedentă acestor *d* caractere ;

— semnul algebric negativ este reprezentat în prima poziție din stînga primei cifre a numărului ; semnul + este înlocuit printr-un blanc ;

— pozițiile libere din stînga sînt completate cu blancuri ; pozițiile libere din dreapta sînt completate cu zerouri.

Observații. Dacă partea fracționară a numărului reprezentat are mai mult decît *d* cifre, atunci se renunță la zecimalele suplimentare avînd loc o rotunjire la valoarea cea mai apropiată. Dacă partea întreagă a numărului are mai mult de $w-d-1$ cifre (cînd numărul este pozitiv) sau $w-d-2$ cifre (cînd numărul este negativ) atunci nu se poate efectua reprezentarea și are loc înserarea în zonă a *w* caractere *.

— efectul factorului de scară constă în multiplicarea valorii interne cu 10^m.

Exemple :

Descriptor	Lungimea zonei	Valoare numerică	Ce apare tipărit
F8.3	8 caractere	− 12.21 − 810.554 − 9.2168 10424.5	bb12.210 -810.554 bb-9.217
3PF6.1	6 caractere	1.72 0.00429	1720.0 bbb4.3

Atît la intrare cît și la ieșire, dacă este necesară repetarea aceleiași forme de reprezentare pentru mai multe valori numerice, se poate utiliza un factor de repetiție al descriptorului.

Pentru înregistrarea a 5 valori succesive cu specificarea F7.3 se poate utiliza descriptorul 5F7.3 iar pentru înregistrarea a 3 valori succesive cu specificarea 2PF5.1 poate fi utilizat descriptorul 2P3F5.1.

2) Descriptorul de tip E este utilizat în special pentru date de tip real scrise ca un produs între o valoare numerică şi o putere a lui 10. Forma generală a descriptorului este :

$$mPrEw{\cdot}d$$

în care parametrii *w*, *d*, *r*, *m* şi simbolul P au aceleaşi semnificaţii ca şi în cazul descriptorului F.

Utilizarea descriptorului E la intrare :

— zona externă în care se înscrie valoarea numerică şi exponentul său conţine *w* poziţii ;

— ultimele două pînă la patru poziţii din zonă sînt rezervate părţii exponenţiale : aceasta poate fi formată din : simbolul E urmat de semnul + (opţional) sau semnul — şi una sau două cifre zecimale care reprezintă exponentul propriu-zis (blancurile din dreapta exponentului sînt interpretate drept zero) ;

— caracterele admise în zonă sînt :

a) blancurile (în aceleaşi condiţii ca la descriptorul F) ;

b) semnul algebric (idem) ;

c) cifre zecimale componente ale numărului dat ;

d) punctul zecimal a cărui înscriere poate anula efectul specificării *d* ; dacă punctul zecimal nu este înscris se consideră drept parte fracţionară ultimele *d* caractere din zonă situate imediat la stînga grupului de caractere ce definesc exponentul ;

— efectul factorului de scară constă în multiplicarea valorii date cu 10^{-m} ; prezenţa punctului zecimal în zonă anulează efectul factorului de scară.

Exemple :

Descriptor	Lungimea zonei	Reprezentarea în zonă	Valoarea numerică după conversiune
E9.2	9 caractere	bb145E-02 b-1.355E2 bbb12E + 14	1.45×10^{-2} -1.3×10^{2} 0.12×10^{14}
3PE9.2	9 caractere	bb145E-b2 bbb12E+14 b-1.3bbE2	$(1.45 \times 10^{-2})\times 10^{-3}$ $(0.12\times 10^{14})\times 10^{-3}$ -1.3×10^{2}

Utilizarea descriptorului E la ieşire :

— valoarea numerică internă este în mod automat multiplicată cu un exponent corespunzător $10^{\pm e}$ astfel încît partea întreagă a numărului reprezentat să fie zero iar partea fracţionară să înceapă cu o cifră diferită de zero (forma normalizată) ; exponentul cu care se operează pentru a se obţine valoarea iniţială apare şi el înscris în zona externă ;

— zona externă în care se înscrie valoarea numerică şi exponentul său conţine *w* caractere ;

— ultimele 4 poziţii din zonă sînt afectate părţii exponenţiale ; aceasta este formată din simbolul E urmat de semnul exponentului (semnul + se înlocuieşte prin blanc) şi două cifre zecimale) dacă exponentul are o valoare mai mică decît 10 prima cifră este zero) ;

— partea fracţionară a numărului rezultat după conversiune, ocupă *d* poziţii din zonă, situate imediat la stînga grupului de caractere de formează exponentul.

Observaţie. Partea fracţionară este trunchiată prin rotunjirea la valoarea sa cea mai apropiată, reţinîndu-se numai *d* cifre;

— punctul zecimal este reprezentat în mod obligatoriu în poziţia imediat precedentă acestor *d* caractere;

— semnul algebric negativ este reprezentat imediat în stînga punctului zecimal; semnul algebric pozitiv nu se reprezintă (în acest caz, în stînga punctului zecimal apare cifra 0);

— poziţiile libere din stînga sînt completate cu blancuri;

— efectul factorului de scară constă în multiplicarea cu 10^m a valorii numerice rezultată după normalizare; valoarea astfel obţinută este reprezentată în zona externă; în acest caz, dacă $m > 0$ se va rezerva pentru partea întreagă un număr de *m* poziţii în zonă.

Exemple:

Descriptor	Lungimea zonei	Valoarea numerică internă	Reprezentare externă
E12.4	12 caractere	15.23 — 8.4258 0.0002	bb0.1523Eb02 bb-.8426Eb01 bb0.2000E-03
2PE14.4	14 caractere	15.23 — 8.4258 0.0002	b15.2300E00 -84.2580E-01 b20.0000E-05

3) Descriptorul de tip D este utilizat în general pentru date numerice în dublă precizie. Utilizarea sa este similară cu cea a descriptorului de tip E cu diferenţa că simbolul E este înlocuit cu simbolul D.

4) Descriptorul de tip G are forma generală;

$$mPrGw \cdot d$$

în care parametrii utilizaţi au aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul descriptorului F.

Utilizarea descriptorului G la intrare: se poate adopta oricare din formele de reprezentare externă corespunzătoare descriptorilor F, E sau D.

Exemplu:

Descriptor	Lungimea zonei	Reprezentarea în zonă	Valoarea numerică după conversiune
G10.2	10 caractere	bbb1427915 bb14279.15 1427.915E1 14279.15DO	14279.15 14279.15 1427.915×10^1 14279.15×10^0
2PG10.3	10 caractere	bbbbb26791 bbb26791bb bbb268E+b2 bb268.D-30	0.26791 0.26791 $(0.268 \times 10^2) \times 10^{-2}$ 268.0×10^{-30}

Utilizarea descriptorului G la ieşire: reprezentarea externă depinde de ordinul de mărime al valorii numerice interne N.

Exemple:

Valoarea internă	Tipul de conversiune aplicat în reprezentarea externă
$10^{d-i-1} < N < 10^{d-i}$ pentru 0 i d	$F(w-4) \cdot i$, 4X
$N > 10^d$ sau $N < 0.1$	mPE$w.d$

Observaţie. Descriptorul 4X are semnificaţia inserării a 4 blancuri la dreapta valorii numerice externe.

Exemple:

Descriptor	Valoarea numerică internă	Conversiune echivalentă	Reprezentare externă	Lungimea zonei
2PG12.3	4353.2	2PE12.3	bbb43.532E+02	12 caractere
	43.53	F8.1,4X	bbbb43.5bbbb	
	−4.353	F8.2,4X	bbb-4.35bbbb	
	0.4353	F8.3,4X	bbb0.435bbbb	
	0.04353	2PE12.3	bb43.530E-03	

Descriptorul G poate fi utilizat şi la introducerea şi extragerea datelor de tip întreg sau logic; în aceste cazuri, specificaţia *d* a descriptorului este ignorată şi el acţionează ca un descriptor de tip I sau L.

5) Descriptorul de tip I este utilizat pentru date numerice de tip întreg avînd forma generală:

$$r\,\mathrm{I}\,w$$

cu aceeaşi semnificaţie a parametrilor ca mai înainte.

Utilizarea descriptorului I la intrare:

— zona externă conţine *w* poziţii;

— caractere admise în zonă:

a) blancuri (vezi descriptorul F);

b) semnul algebric (idem);

c) cifre zecimale componente ale numărului dat.

Exemplu:

Descriptor	Lungimea zonei	Reprezentarea în zonă	Valoarea numerică după conversiune
I6	6 caractere	bbb354	354
		bb-35b	−350
		b-bb2b	− 20

Utilizarea descriptorului I la ieșire :

— zona externă conține *w* poziții ;

— valoarea numerică este reprezentată cu aliniere la dreapta ; semnul algebric negativ precede valoarea numerică, semnul algebric pozitiv nu este reprezentat ;

— pozițiile libere din stînga sînt completate cu blancuri ; dacă valoarea numerică (inclusiv semnul algebric) depășește lungimea de *w* caractere, sînt inserate asteriscuri * în toate pozițiile zonei.

Exemple :

Discriptor	Lungimea zonei	Valoarea numerică internă	Reprezentare externă
I5	5 caractere	27	bbb27
		325	bb325
		— 115	b-115
		— 2424	-2424
		—10552	*****

6) Descriptorul de tip L este utilizat pentru date de tip logic. Forma generală a descriptorului este :

$$rLw$$

cu aceeași semnificație a parametrilor ca mai înainte.

Utilizarea descriptorului L la intrare :

— zona externă conține *w* poziții ;

— caractere admise în zonă :

a) simbolurile literale : T (pentru „adevărat" — „TRUE") sau F (pentru „fals" — „FALSE") ;

b) blancuri ;

c) orice caractere alfanumerice situate în dreapta simbolurilor T sau F.

Exemple :

Descriptor	Lungimea zonei	Reprezentarea în zonă	Valoarea numerică după conversiune
L6	6 caractere	bbTb1A	.TRUE.
		bTA5B4	.TRUE.
		Fbbbbb	.FALSE.
		bbbbbF	.FALSE.

Utilizarea descriptorului L la ieșire :

— zona externă conține $w-1$ blancuri urmate de unul din simbolurile T sau F.

Exemplu:

Descriptor	Lungimea zonei	Valoare logică internă	Reprezentare externă
L6	6 caractere	.TRUE.	bbbbbT
		.FALSE.	bbbbbF

7) Descriptorul de tip A este utilizat pentru date de tip Hollerith (şiruri de caractere) şi are forma generală:

$$rAw$$

cu aceeaşi semnificaţie a parametrilor ca mai înainte.

Utilizarea descriptorului A la intrare:

Fie g numărul de caractere ce pot fi reprezentate pentru un element al listei de intrare/ /ieşire.

— zona externă conţine w poziţii;

— în această zonă sînt admise oricare din caracterele acceptate de compilator;

— dacă $w \geqslant g$, reprezentarea internă (după conversiune) este formată din ultimele g caractere ale şirului extern;

— dacă $w < g$, reprezentarea internă este formată din ultimele w caractere ale şirului extern, urmate de $g-w$ blancuri.

Exemple (pentru $g = 4$):

Şirul extern	Reprezentare internă pentru descriptorul		
	A6	A4	A2
AB7521FK	21FK	21FK	FKbb
ABCD	ABCD	ABCD	CDbb
R	bbbR	bbbR	bRbb

Utilizarea descriptorului A la ieşire:

— zona externă conţine w poziţii;

— dacă $w > g$ şirul extern este format din ultimele g caractere ale şirului intern aliniate la dreapta şi precedate de $w-g$ blancuri;

— dacă $w \leqslant g$ şirul extern este format din primele w caractere ale şirului intern.

Exemple (pentru $g = 4$):

Şirul intern	Reprezentarea externă pentru descriptorul		
	A6	A4	A2
ABCD	bbABCD	ABCD	AB

8) Descriptorul de tip H este utilizat pentru conversiunea şirurilor de caractere Hollerith. Forma generală a descriptorului este:

$$nHh_1h_2 \ldots h_i \ldots h_n$$

în care : n este o constantă întreagă strict pozitivă care indică numărul de caractere ale şirului iar h_i sînt caractere acceptate de compilator.

Utilizarea descriptorului H la intrare :

— şirul extern este format din n caractere (inclusiv blancurile).

— efectul conversiunii H constă în înlocuirea celor n caractere din şirul component al descriptorului cu cele n caractere din şirul extern.

Exemple :

Descriptor	Şirul extern	Descriptorul după conversiune
5H12ABC	ABREV	5HABREV
4Hbbbb	1212	4H1212
6HUbbbOM	OAMENI	6HOAMENI

Utilizarea descriptorului H la ieşire :

— şirul extern este format din cele n caractere ale şirului intern component al adescriptorului.

Exemple :

Descriptor	Şir extern după conversiune
4H1212	1212
6HbAbBbC	bAbBbC

9) Descriptorul de tip X este utilizat pentru şiruri de caractere. Singurele caractere dmise sînt blancurile. Forma generală este :

$$nX$$

în care n este numărul de blancuri din şir.

Utilizarea descriptorului X la intrare :

— nu sînt luate în considerare n caractere ale înregistării externe.

Utilizarea descriptorului X la ieşire :

— sînt inserate n blancuri în înregistrarea externă.

10) Specificaţia '...' (apostrof) este utilizată pentru reprezentarea şirurilor de caractere şi are forma generală :

$$'h_1h_2h_3 \ldots h_i \ldots h_n'$$

în care h_i este oricare din caracterele admise de compilator.

Observaţie. Dacă în şirul de caractere figurează şi un apostrof, el trebuie să fie imediat urmat de un alt apostrof.

Utilizarea specificaţiei la intrare :

— şirul de caractere al specificaţiei este înlocuit prin şirul de caractere extern.

Exemple:

Specificația înainte de conversiune	Șirul de caractere extern	Specificația după conversiune
'CARTE'	CAIET	'CAIET'
'L' 'HOSPITAL'	DETERMINARE	'DETERMINARE'

Utilizarea specificației la ieșire:

— șirul de caractere al specificației este reprezentat în zona externă; semnele de apostrof marginale nu fac parte din șir.

— apostroful dublu ('') din interiorul șirului este reprezentat printr-un singur caracter (') în zona externă.

Exemple:

Specificația înainte de conversiune	Șirul de caractere extern
'EXTERNb24'	EXTERNb24
'D' 'ALBON'	D'ALBON

11) Descriptorul de tip T este utilizat pentru organizarea înregistrărilor avînd forma generală:

$$Tw$$

în care w este o constantă întreagă pozitivă ce reprezintă poziția la care începe o înregistrare. Un descriptor de tip T este întotdeauna asociat cu unul sau mai mulți descriptori de alt tip care se referă la această înregistrare.

Utilizarea descriptorului T la intrare:

— înregistrarea începe din poziția w;

— caracterele aflate în primele $w-1$ poziții sînt ignorate.

Utilizarea descriptorului T la ieșire:

— înregistrarea începe din poziția w dacă ieșirea este comandată pe cartele;

— înregistrarea începe din poziția $w-1$ dacă ieșirea este comandată la imprimantă;

— fiecare descriptor T își exercită efectul în mod independent asupra înregistrării care urmează.

7.1.2. **Grupe elementare de descriptori de zonă.** O grupă elementară de descriptori de zonă are următoarea structură generală;

$$r(gd_1s_1d_2s_2d_3s_3 \ldots d_ns_ng)$$

unde: r este o constantă întreagă și pozitivă avînd rolul unui factor de repetiție; dacă $r = 1$ acesta se omite;

g — limitator format dintr-o bară (/) sau mai multe bare (// .. /); poate fi omis;

s_i — separator format dintr-o virgulă (,) o bară (/) sau mai multe bare (// . . /);

d_i — descriptor de zonă.

7.1.3. **Grupe compuse din descriptori de zonă.** O grupă compusă are structura generală:

$$r(ge_1s_1e_2s_2e_3s_3 \ldots e_ns_ng)$$

unde e_i reprezintă un descriptor de zonă sau o grupă elementară de descriptori de zonă.

7.1.4. Instrucţiunea FORMAT. Este o instrucţiune neexecutabilă care indică modul de reprezentare a datelor şi de realizare a conversiunii acestora la intrare/ieşire. Forma generală a instrucţiunii FORMAT este:

$$k \text{ FORMAT } (ge_1s_1e_2s_2e_3s_3\ldots e_ns_ng)$$

unde: k este eticheta (obligatorie) a instrucţiunii;

s_i sint separatori (virgulă sau una sau mai multe bare);

e_i este o grupă compusă sau elementară de descriptori de zonă, sau un descriptor de zonă.

Observaţii

— Fiecare descriere de zonă comandă introducerea (extragerea) uneia sau mai multor date.

— În interiorul specificaţiei formatului sînt admise cel mult două nivele de paranteze.

— Bara este utilizată pentru a indica sfîrşitul unei reprezentări; fiecare bară comandă citirea sau scrierea articolului de înregistrare care urmează. În consecinţă, prezenţa a două bare succesive indică o înregistrare vidă şi comandă citirea sau scrierea înregistrării următoare; se sare în acest fel peste o înregistrare.

— Specificaţia formatului trebuie astfel alcătuită încît să nu solicite unei înregistrări mai multe caractere decît conţine ea.

Exemple:

124 FORMAT (/2X, 2(4F5.2, 2E15.3)/F8.3, 2PE20.7/1X, 'END')

Prima bară comandă trecerea la înregistrarea următoare apoi înserarea a două blancuri şi înregistrarea a două grupe formate din 4 elemente înscrise cu descriptorul F5.2 şi 2 elemente înscrise cu descriptorul E15.3; se trece apoi la înregistrarea următoare compusă din două articole; ultima înregistrare conţine un blanc în prima poziţie urmat de şirul de caractere alfanumerice END.

15 FORMAT (3(4A4, F5.1,2(E10.5, F8.3)))

Înregistrarea este alcătuită din trei grupe avînd structura următoare: 4 articole înscrise cu A4, un articol cu F5.1 şi două grupe cu cîte 2 articole înscrise respectiv cu E10.5 şi F8.3.

7.1.5. Controlul imprimantei. Primul caracter dintr-o înregistrare la imprimantă nu este niciodată afişat: acest caracter este interpretat ca un caracter de comandă privind acţiunea dispozitivului de imprimare. Caracterele special utilizate în acest sens precum şi efectul lor sînt indicate în tabelul următor.

Caracter	Efectul asupra imprimantei
1	Trecerea la începutul unei pagini noi
0	Deplasarea cu două rînduri (inserarea unui rînd liber)
+	Oprirea deplasării hîrtiei (imprimare pe acelaşi rînd)
Blanc sau orice alt caracter diferit de cele de mai sus	Deplasarea normală a hîrtiei (trecerea la rîndul următor)

Exemplu :
155 FORMAT('1', 2X, 8HSOLUŢII =)
Utilizarea acestui FORMAT asociat cu o instrucţiune de scriere la imprimantă are ca efect trecerea la o nouă pagină ; pe primul rînd al acesteia este tipărit şirul de caractere SOLUŢII = începînd din poziţia a patra.

7.2. Liste de intrare/ieşire

Aceasta specifică numele de variabile, tablouri sau elemente de tablouri cărora le sînt afectate valori la intrare sau ale căror valori sînt transmise la ieşire (tablou = variabilă indexată).

O listă elementară poate fi formată dintr-un nume de variabilă, un nume de tablou sau un element de tablou.

O listă compusă este formată din două sau mai multe liste elementare separate prin virgulă.

O listă de intrare/ieşire poate fi formată dintr-o listă elementară, o listă compusă şi (sau) dintr-una sau mai multe liste cu autoindexare separate prin virgulă.

Exemple :

A, B, R
SA(7), SA(8), R, D, K

7.2.1. **Liste cu autoindexare.** Sînt liste care permit citirea/scrierea elementelor unei variabile indexate (tablou) prin utilizarea unei instrucţiuni de tipul DO. Specificaţia DO implicit este de forma :

$$i = k_i,\ k_f,\ k_r \text{ sau } i = k_i,\ k_f \text{ (dacă avem } k_r = 1)$$

în care i este numele indicelui unui element al tabloului, ceilalţi parametri avînd aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul instrucţiunii DO. Domeniul instrucţiunii DO implicit este lista cu autoindexare.

Autoindexarea prin DO implicit se poate referi la unul sau mai mulţi indici ai elementelor tabloului ; în cel de-al doilea caz instrucţiunile DO implicit formează un pachet de cicluri suprapuse, fiecare ciclu interior trebuind să fie delimitat prin paranteze faţă de ciclul exterior lui şi separat prin virgulă.

Instrucţiunile DO implicit se execută similar cu instrucţiunile DO, urmînd aceleaşi condiţii de utilizare.

7.2.2. **Structura unei liste cu autoindexare.** Lista cu autoindexare simplă :

$$(l_1(i),\ l_2(i),\ \ldots,\ l_n(i),\ i = k_i,\ k_f,\ k_r)$$

în care l_1, l_2, l_3, ... sînt nume de tablouri iar i este numele indicelui (o variabilă de tip întreg).

Lista cu indexare dublă :

a) cînd indicele i_2 comandă bucla exterioară :

$$((l_1(i_1, i_2),\ l_2(i_1, i_2),\ \ldots l_n(i_1, i_2),\ \ i_1 = k_{i1},\ k_{f1},\ k_{r1}),\ \ i_2 = k_{i2},\ k_{f2},\ k_{r2})$$

b) cînd indicele i_1 comandă bucla exterioară :

$$((l_1(i_1, i_2),\ l_2(i_1, i_2),\ \ldots l_n(i_1, i_2),\ i_2 = k_{i2},\ k_{f2},\ k_{r2}),\ i_1 = k_{i1},\ k_{f1},\ k_{r1})$$

Lista cu indexare multiplă are o structură similară cu cea a listei cu indexare dublă.

Exemple :

(A(I), I = 1, 20, 2)
((B(I, J), I = 1, 15), J = 1, 20)
(A(I), B(I), I = 1, K)
(((A(I, J, K), I = 1, 10), J = 1, N), K = K1, K2, K3)

7.3. Instrucţiunile de intrare/ieşire cu format

7.3.1. **Instrucţiunea READ.** Este o instrucţiune executabilă utilizată la intrare avînd forma generală :

$$m \text{ READ}(u, k, \text{END} = k_1, \text{ERR} = k_2) \text{ lista}$$

în care : u este identificatorul unităţii periferice la care se efectuează citirea datelor (de exemplu cititorul de cartele) poate fi o variabilă de tip întreg sau o constantă întreagă pozitivă ;
k — eticheta instrucţiunii FORMAT asociată sau un identificator de tablou (a se vedea „formate variabile") ;
m — eticheta (opţională) instrucţiunii READ ;
END — specificaţie opţională indicînd trecerea controlului execuţiei programului la instrucţiunea cu eticheta k_1 atunci cînd este citit un indicator de sfîrşit de fişier ;
ERR — specificaţie opţională indicînd trecerea controlului execuţiei programului la instrucţiunea cu eticheta k_2 atunci cînd la citirea datelor se produce o eroare ce nu poate fi corectată prin sistemul de exploatare.

Observaţii

— Dacă u este o variabilă de tip întreg trebuie să i se atribuie valoarea corespunzătoare numărului simbolic al unităţii periferice printr-o instrucţiune care precede instrucţiunea READ.

— Între lista de intrare şi specificaţiile formatului asociat trebuie să existe compatibilitate atît în ce priveşte tipul datelor cît şi lungimea înregistrărilor

— Dacă există o listă de intrare nevidă, trebuie să existe în instrucţiunea FORMAT cel puţin un descriptor diferit de H şi X.

Exemple :

READ(1, 24) A,B,K

24 FORMAT(2F.2, I3)

Se citesc variabilele A şi B cu descriptorul F5.2 şi variabila K cu descriptorul I3.

READ (1, 252)A, R(10), (C(I), I = 1, 15)

15 FORMAT (E10.2/F8.3/(15F5.2))

Fiecare bară indică trecerea la înregistrarea următoare, deci : prima cartelă conţine valoarea variabilei A înscrisă cu descriptorul E10.2, a doua cartelă conţine valoarea lui R(10) cu descriptorul F8.3 ; ultima înregistrare conţine cele 15 valori ale elementelor variabilei indexate C înscrise cu descriptorul F5.2.

7.3.2. **Instrucţiunea READ/FORTRAN II/.** Este de forma generală :

m READ *k*, lista

avînd semnificaţia parametrilor *m* şi *k* definită mai înainte. Instrucţiunea se referă numai la cititorul de cartele.

7.3.3. **Instrucţiunea WRITE.** Este o instrucţiune executabilă utilizată la ieşire şi avînd forma generală :

m WRITE(*u*, *k*) lista

în care *u* este identificatorul unităţii de ieşire iar celeilalţi parametri avînd semnificaţia definită mai înainte. Sînt valabile aceleaşi observaţii ca şi în cazul instrucţiunii READ.

Exemple :

```
   WRITE(3, 11) ((A(I, J), I = 1, 2), J = 1, 5)
11 FORMAT (2X, 10F7.3//)
```

Sînt inserate două blancuri apoi sînt scrise în ordine A(1, 1), A(2, 1), A(1, 2), A(2, 2), A(1, 3), A(2, 3), A(1, 4), A(2, 4), A(1, 5), A(2, 5) cu descriptorul F7.3. La sfîrşit, se sare peste o înregistrare (se adaugă o înregistrare vidă)

```
    WRITE(3, 100)
100 FORMAT (2X, 5HTITLU///)
```

Lista este vidă. Efectul instrucţiunii WRITE constă în înscrierea caracterelor TITLU după ce se lasă mai întîi două blancuri. La sfîrşit se sare peste două înregistări (se adaugă două înregistrări vide).

7.3.4. **Instrucţiunea PRINT/FORTRAN II/.** Este de forma generală :

m PRINT *k*, lista

şi se referă numai la imprimantă.

7.3.5. **Instrucţiunea PUNCH/FORTRAN II/.** Este de forma generală :

m PUNCH *k*, lista

şi se referă numai la perforatorul de cartele.

7.4. Formate variabile

Instrucţiunile READ şi WRITE cu format pot conţine în locul parametrului *k* (eticheta formatului), un nume de tablou. Elementele tabloului sînt compuse din şiruri de caractere admise de compilator, care alăturate în ordine naturală alcătuiesc o specificaţie de format. Sînt admise toate tipurile de descriptori de zonă cu excepţia descriptorului de tip H. Elementelor tabloului în care se înscrie specificaţia formatului li se pot atribui valori fie printr-o instrucţiune de iniţializare a datelor (a se vedea instrucţiunea DATA) fie printr-o instrucţiune de citire.

Exemplu :

```
   DIMENSION B(20)
   . . . . . . . . . .
14 READ(1, 15) (B(I), I = 1, 7)
```

```
15 FORMAT (20A4)
   . . . . . . . . .
16 READ(1, B)A, RKD(1), (RLD(I), I = 1, 9)
   . . . . . . . . .
```

Şirul de caractere care formează specificaţia formatului înserat în tabloul B este înregistrat cu descriptorul A4 după cum urmează:

(F8.3, 5(E10.2, 1X, E10.4)//)

În consecinţă, elementelor tabloului B li se vor atribui următoarele valori:

B(1) = (F8. B(2) = 3, 5 (B(3) = E10. B(4) = 2, 1X
B(5) = , E10 B(6) = .4)/ B(7) = /)bb

care alcătuiesc specificaţia formatului instrucţiunii 16.

Utilizarea acestei proceduri permite modificarea formatului de intrare/ieşire prin cartelele de date, fără a se afecta programul propriu-zis.

Observaţii finale

— Procesul de explorare a instrucţiunii FORMAT este declanşat prin instrucţiunile READ, WRITE etc. corespunzătoare.

— Specificaţia formatului este interpretată de la stînga la dreapta.

— Fiecărui element din listă îi corespunde un descriptor din tipurile; F, E, D, G, I, A sau L; pentru numere complexe trebuie să apară cîte doi descriptori; pentru descriptori H şi X nu există nici un corespondent în listă.

— Dacă lista este mai scurtă decît specificaţia formatului, explorarea formatului încetează odată cu ultimul element al listei; dacă lista este mai lungă decît numărul de specificaţii din format, se reia parcurgerea acestuia de la ultima paranteză deschisă de nivel 1 iar în lipsă, controlul revine la începutul specificaţiei formatului.

Exemple:

```
FORMAT(...(...)...(...)...)
                  ↑
              punct de revenire
FORMAT(...(...)...5(...)...)
                  ↑
              punct de revenire
FORMAT(...(...)...(...(...)...(...) )...)
                  ↑
              punct de revenire
FORMAT(.......)
      ↑
  punct de revenire
```

8. SUBPROGRAME

Una sau mai multe instrucţiuni ce alcătuiesc în mod independent o procedură de calcul repetabilă în cadrul execuţiei unei program constituie un subprogram. Există următoarele categorii de subprograme:

1) Subprograme de tip funcţie:

— funcţii definite aritmetic;

— funcţii interne (de bibliotecă);
— funcţii externe.
2) Subprograme de tip subrutină.

8.1. Funcţii definite aritmetic

Atunci cînd în interiorul unei unităţi de program o anumită formulă se repetă de mai multe ori, modificîndu-se de fiecare dată doar parametrii care intră în componenţa ei, este posibilă scrierea acestei formule, utilizînd parametri fictivi, înainte de a se trece la prima instrucţiune executabilă din unitatea de program, sub un nume ales convenabil, astfel încît în restul programului cînd mai este necesară formula respectivă se indică doar numele atribuit ei, urmat de specificarea în paranteză a valorilor ce vor înlocui în ordine parametri fictivi ce apar în scrierea formulei.

Exemplu:

```
XNORM3(A, B, C) = SQRT (A*A + B*B + C*C)
. . . . . . .
T = 5.67 × XNORM3(X(1), X(2), X(3) )/2.
. . . . . . . . . . .
AP = XNORM3(1., P, Q) — XNORM3(1., R, Z)
. . . . . . . .
```

În utilizarea acestui tip de funcţie definită aritmetic trebuie să se respecte următoarele restricţii:

— definirea funcţiei trebuie să apară în program înaintea oricărei instrucţiuni executabile;

— numele funcţiei trebuie să respecte aceleaşi restricţii ca şi un nume de variabilă;

— toate funcţiile al căror rezultat trebuie exprimat în dublă precizie, complex sau logic trebuie ca în prealabil să aibă numele respectiv declarat într-o instrucţiune DOUBLE PRECISION, COMPLEX sau LOGICAL;

— fiecare funcţie nu poate reprezenta decît o singură formulă; dacă este necesar pentru scrierea acestei formule se pot utiliza cartele de continuare;

— funcţia poate utiliza constante, variabile indexate sau nu, funcţii de bibliotecă sau alte funcţii aritmetice definite în prealabil;

— în momentul apelării funcţiei, parametrii fictivi utilizaţi în descrierea formei funcţiei sînt înlocuiţi prin valorile specificate în lista de apel.

8.2. Funcţii interne (sau funcţii de bibliotecă)

Sînt funcţii definite implicit care realizează calculul unor funcţii curente. Numele lor simbolice sînt predefinite pentru compilator avînd o semnificaţie bine precizată în următoarele condiţii:

— numele lor nu apare într-o instrucţiune EXTERNAL şi nu este numele unui tablou sau al unei funcţii definită aritmetic;

— numele lor nu apare într-o instrucţiune de tip contravenind tipului specificat pentru funcţia respectivă;

— numele lor este însoţit de o listă adecvată de parametri efectivi cuprinsă între paranteze.

Lista principalelor funcţii de bibliotecă este prezentată în tabelul următor.

Funcția		Parametri		Definire
Nume	Tip	Număr	Tip	
ABS IABS DABS	R I D	1 1 1	R I D	Valoare absolută a parametrului
AINT INT IDINT	R I I	1 1 1	R R D	Trunchiere prin suprimarea părții fracționare a parametrului
AMOD MOD DMOD	R I D	2 2 2	R I D	Restul împărțirii primului parametru la al doilea
AMAXO AMAX1 MAXO MAX1 DMAX1	R R I I D	2 2 2 2 2	I R I R D	Alege parametrul cu valoarea cea mai mare și (eventual) schimbă tipul
AMINO AMIN1 MINO MIN1 DMIN1	R R I I D	2 2 2 2 2	I R I R D	Alege parametrul cu valoarea cea mai mică și (eventual) schimbă tipul
FLOAT	R	1	I	Conversiune din întreg în real
IFIX	I	1	R	Conversiune din real în întreg
DIM IDIM	R I	2 2	R I	Diferența celor 2 parametri
SNGL	R	1	D	Conversiune din dublă precizie în real
DBLE	D	1	R	Conversiune din real în dublă precizie
SIGN ISIGN DSIGN	R I D	2 2 2	R I D	Transfer de semn: valoarea absolută a parametrului 1 cu semnul parametrului 2
REAL AIMAG	R R	1 1	C C	Reține partea reală a unui parametru complex
CMPLX	C	2	R	Formează un număr complex din doi parametri reali
CONJG	C	1	C	Efectuează conjugarea unui parametru complex

Funcţia		Parametri		Definire
Nume	Tip	Număr	Tip	
EXP DEXP CEXP	R D C	1 1 1	R D C	Exponenţială de forma e^a
ALOG DLOG CLOG	R D C	1 1 1	R D C	Logaritm natural
ALOG10 DLOG10	R D	1 1	R D	Logaritm zecimal
SIN DSIN CSIN	R D C	1 1 1	R D C	Sinus trigonometric
COS DCOS CCOS	R D C	1 1 1	R D C	Cosinus trigonometric
TAN DTAN	R D	1 1	R D	Tangenta trigonometrică
SINH DSINH	R D	1 1	R D	Sinus hiperbolic
COSH DCOSH	R D	1 1	R D	Cosinus hiperbolic
TANH DTANH	R D	1 1	R D	Tangentă hiperbolică
ARSIN DARSIN	R D	1 1	R D	Arcsinus
ARCOS DARCOS	R D	1 1	R D	Arccosinus
ATAN DATAN	R D	1 1	R D	Arctangentă
ATAN2 DATAN2	R D	2 2	R D	Arctangentă pentru raportul celor doi parametri
SQRT DSQRT CSQRT	R D C	1 1 1	R D C	Rădăcina pătrată
CABS	R	1	C	Modulul unui număr complex

8.3. Funcţii externe

Sînt definite în afara unităţii de program care le apelează şi formează o unitate de program independentă. Constau dintr-una sau mai multe instrucţiuni (din care cel puţin una este executabilă) care definesc procedura, precedate de o instrucţiune FUNCTION şi avînd la sfîrşit o instrucţiune END.

8.3.1. **Instrucţiunea FUNCTION.** Defineşte funcţia externă şi este de forma:

$$t \text{ FUNCTION } f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

în care: t este o specificaţie de tip; dacă lipseşte, atunci tipul funcţiei este definit implicit; aceasta trebuie să corespundă tipului definit în unitatea de program apelantă;

f — numele simbolic al funcţiei;

a_i — parametru (argument) formal ce poate fi: numele unei variabile, numele unui tablou, numele unei proceduri externe.

Observaţii

— Între parametrii formali (fictivi) şi parametrii efectivi trebuie să existe corespondenţă ca ordine de semnificaţie, tip şi număr; lista de parametri nu poate fi vidă.

— Parametrii formali nu pot apărea într-o instrucţiune DATA, COMMON sau EQUIVALENCE.

— Subprogramul nu poate conţine o instrucţiune de tipul: BLOCK DATA, FUNCTION, SUBROUTINE sau oricare altă instrucţiune care direct sau indirect face referire la funcţia în curs de definire (deoarece limbajul FORTRAN nu permite definirea de funcţii recursive).

— Numele simbolic f trebuie să apară în interiorul procedurii la stînga semnului egal, în cadrul unei instrucţiuni de atribuire.

— Un subprogram de tip FUNCTION trebuie să conţină cel puţin o instrucţiune RETURN.

8.3.2. **Instrucţiunea RETURN.** Comandă revenirea în unitatea de program apelantă. Forma generală a instrucţiunii este:

$$k \text{ RETURN}$$

unde k este o etichetă opţională. Instrucţiunile RETURN marchează sfîrşitul logic al subprogramului. O instrucţiune RETURN nu poate apărea într-un program principal.

8.3.3. **Apelarea funcţiilor externe.** Se efectuează prin utilizarea numelui său însoţit de o listă de parametri (argumente) efectivi într-o expresie aritmetică sau logică din programul apelant. Un parametru efectiv poate fi: o constantă, numele unui element de tablou, numele unui tablou, o expresie de acelaşi tip cu parametrul formal corespondent, un nume de procedură externă care apare într-o instrucţiune EXTERNAL. Cînd într-o instrucţiune a programului apelant este întîlnită o referire la numele unei funcţii, controlul execuţiei trece la procedura de definiţie a funcţiei, fiecare parametru formal fiind înlocuit prin parametrul efectiv corespondent.

La terminarea execuţiei subprogramului funcţiei, controlul revine la programul apelant, funcţia avînd valoarea atribuită în cursul execuţiei subprogramului.

Dimensiunile tablourilor din subprogram trebuie să fie cel puţin egale cu ale tablourilor corespondente din programul apelant.

Exemplu:

Programul principal

```
DIMENSION B(100)
. . . . . . . . . .
. . . . . . . . . .
V = A + SUM(B, N)
. . . . . . . . .
. . . . . . . . .
END
```

Subprogramul funcţie

```
   FUNCTION SUM(A,I)
   DIMENSION A(100)
   R = 0
   DO 10 IND = 1,I
10 R = R + A (IND)
   SUM = R
   RETURN
   END
```

8.4. Subrutine

Un subprogram de tip subrutină este definit ca o unitate de program independentă externă unităţii de program care o apelează. Constă dintr-una sau mai multe instrucţiuni (cel puţin una executabilă) care definesc procedura, precedate de o instrucţiune SUBROUTINE şi avînd la sfîrşit o instrucţiune END.

8.4.1. Instrucţiunea SUBROUTINE. Este de forma:

$$\text{SUBROUTINE } s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

în care: s este numele simbolic al subrutinei (respectă aceleaşi restricţii ca şi un nume de variabilă obişnuit; nu are importanţă tipul de reprezentare);

a_i — parametru formal ce poate fi: un nume de variabilă, un nume de tablou, un nume de procedură externă, un asterisc.

Observaţii

— Sînt valabile primele trei observaţii de la instrucţiunea FUNCTION (excepţie: lista poate fi şi vidă).

— Numele simbolic s nu poate să apară în nici o altă instrucţiune a subprogramului.

— Instrucţiunea SUBROUTINE nu poate fi etichetată.

— Un subprogram de tip SUBROUTINE trebuie să conţină cel puţin o instrucţiune RETURN.

8.4.2. Apelarea subrutinelor. Se efectuează prin utilizarea în programul apelant a unei instrucţiuni de forma:

$$m \text{ CALL } s(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

în care: m este o etichetă opţională;

s — numele simbolic al subrutinei;

e_i — parametru efectiv ce poate fi o constantă, un nume de variabilă, numele unui tablou, un element de tablou, o expresie de acelaşi tip cu parametrul formal corespondent, un nume de procedură care apare într-o instrucţiune EXTERNAL.

Executarea instrucţiunii CALL provoacă transferul controlului asupra subrutinei, fiecare parametru formal fiind înlocuit prin parametrul efectiv corespondent din listă. Executarea subrutinei ia sfîrşit la întîlnirea unei instrucţiuni RETURN, controlul revenind în programul apelant la instrucţiunea imediat următoare instrucţiunii CALL.

În cursul transferului, între programul apelant şi subrutină, şi invers, unii parametri joacă rolul unor date de intrare iar alţii rolul unor date de ieşire. În acest fel, un subpro-

gram de tip subrutină se diferenţiază de un subprogram de tip funcţie prin aceea că poate furniza programului apelant mai mult decît o singură valoare calculată.

Exemplu :

Programul principal

```
DIMENSION B(10), R(10)
. . . . . . . . .
CALL COPY (N, B, R)
. . . . . . . . .
. . . . . . . . .
END
```

Subprogram

```
  SUBROUTINE COPY(M, X, Y)
  DIMENSION X(10), Y(10)
  DO 1 K = 1,M
1 Y(K) = X(K)
  RETURN
  END
```

Observaţii

— O subrutină nu se poate apela pe ea însăşi.

— Dimensiunile tablourilor din subprogram trebuie să fie cel puţin egale cu ale tablourilor corespondente din programul apelant.

— Se poate utiliza ca parametru efectiv în instrucţiunea CALL o constantă de tip Hollerith (aceasta este cazul utilizării instrucţiunii RETURN i în subrutină).

8.4.3. **Instrucţiunea RETURN i.** Permite revenirea în programul apelant la o altă instrucţiune decît cea care urmează instrucţiunii CALL. Instrucţiunea este de forma ;

m RETURN *i*

în care : *m* este o etichetă (opţională) ;

i — constantă întreagă şi pozitivă indicînd numărul de ordine al etichetei specificate în lista de parametri, la care urmează să se facă revenirea în programul apelant.

Instrucţiunea RETURN *i* se utilizează în următoarele condiţii :

— eticheta instrucţiunii din programul apelant la care se efectuează revenirea figurează în lista de parametri efectivi ai instrucţiunii CALL, fiind imediat precedată de un simbol & ;

— în lista de parametri formali ai instrucţiunii SUBROUTINE apare ca parametru corespondent simbolul *

Exemplu :

Programul principal

```
   . . . . . . . .
   CALL MULTI (A, N, & 11, & 14)
   . . . . . . . .
11 . . . . . . . .
   . . . . . . . .
14 . . . . . . . .
   . . . . . . . .
   END
```

Subprogram

```
   SUBROUTINE MULTI (X, M, *, *)
   . . . . . . . .
 9 RETURN
   . . . . . . . .
10 RETURN 1
   . . . . . . . .
12 RETURN 2
   END
```

Observaţie. La executarea instrucţiunii 9 din subrutină, controlul revine în programul principal la instrucţiunea imediat următoare instrucţiunii CALL. La executarea instrucţiunii 10 din subrutină, controlul revine în programul principal la instrucţiunea a cărei etichetă figurează prima în lista de parametri — deci la instrucţiunea 11 : similar, după executarea instrucţiunii 12 din subrutină, controlul revine la instrucţiunea 14 din programul principal. Alegerea uneia din cele trei căi posibile de revenire în programul principal depinde de calculele ce se efectuează în subrutină.

8.5. Facilități privind utilizarea subprogramelor externe

8.5.1. **Instrucțiunea ENTRY.** Este o instrucțiune neexecutabilă ce poate apărea numai într-un subprogram și care permite definirea mai multor puncte de intrare în acel subprogram. Forma generală a instrucțiunii este:

$$\text{ENTRY } p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

în care: p este numele simbolic al punctului de intrare
a_i — parametru formal (lista de parametri poate fi vidă).

Observație. Între lista de parametri ai instrucțiunii ENTRY și lista de parametri ai subprogramului în care apare, poate să nu existe nici o similitudine.

Transferul controlului asupra unei instrucțiuni ENTRY se efectuează printr-o instrucțiune de tip CALL a programului apelant, în care figurează numele simbolic al punctului de intrare urmat de lista parametrilor efectivi. Între lista de parametri efectivi și lista parametrilor formali ai instrucțiunii ENTRY apelată, trebuie să existe corespondență ca ordine, tip și număr.

Restricție: o instrucțiune ENTRY nu poate figura în interiorul unei bucle DO.

Exemplu:

Programul principal	Subprogram
. . . .	SUBROUTINE ALFA(X, Y, Z)
CALL ALFA (A, B, C)	. . . .
. . . .	ENTRY BETA(I, J, S)
	. . . .
CALL BETA (N, K, R)	ENTRY GAMA (X, I)
. . . .	. . . .
	RETURN
CALL GAMA (A, N)	END
. . . .	

8.5.2. **Instrucțiunea EXTERNAL.** Este o instrucțiune neexecutabilă de forma:

$$\text{EXTERNAL } s_1, s_2, \ldots, s_n$$

Instrucțiunea nu poate fi etichetată. Fiecare s_i este un nume simbolic al unei funcții externe sau al unei subrutine care apare ca parametru efectiv într-o instrucțiune de apel la o altă procedură externă.

Nici un nume al unei proceduri externe nu poate figura ca parametru efectiv dacă nu a fost în prealabil declarat într-o instrucțiune EXTERNAL din unitatea de program apelantă.

Instrucțiunea EXTERNAL trebuie să preceadă primei instrucțiuni executabile a unității de program în care apare.

Exemplu:

Program principal	Subprogram
EXTERNAL SUB	SUBROUTINE (X, DIF)
. . . .	. . . .
CALL PROG (A, SUB)	X = DIF(R, S + 2.)
. . . .	. . . .
END	RETURN
	END

9. OPTIMIZAREA PROGRAMELOR

9.1. Instrucţiuni de organizare a memoriei

9.1.1. Instrucţiunea COMMON. Este o instrucţiune neexecutabilă care permite alocarea aceloraşi zone de memorie pentru mai multe variabile ce apar în unităţi de program diferite. Forma generală a instrucţiunii este :

$$\text{COMMON}/n_1/e_1/\ldots/n_m/e_m$$

în care : n_i este nume simbolic sau vid ;
e_i — listă de nume de variabile, nume de tablouri sau declaratori de tablouri.

Instrucţiunea nu poate fi etichetată. Trebuie, de asemenea, să preceadă prima instrucţiune executabilă a programului.

Observaţii

— Zona de date comune este divizată în blocuri, fiecare bloc avînd un nume simbolic n_i. Dacă există efectiv un nume simbolic n_i, atunci blocul respectiv este denumit ,,bloc de COMMON etichetat'' iar dacă n_i este vid, atunci blocul se numeşte ,,bloc de COMMON blanc''.

— Pentru blocurile de COMMON blanc barele înclinate se scriu alăturat sau, dacă acest bloc este primul în cadrul unei instrucţiuni, ele pot lipsi.

— Un nume de bloc (inclusiv blanc) poate apărea de mai multe ori într-o instrucţiune sau în mai multe instrucţiuni COMMON din aceeaşi unitate de program ; blocul complet se obţine prin alăturarea fiecărei părţi a blocului respectiv, în ordinea lor de apariţie.

— Un nume de variabilă dintr-o listă e_i nu poate apărea decît o singură dată şi numai într-o singură instrucţiune COMMON din aceeaşi unitate de program.

— Dacă o listă e_i conţine un declarator de tablou, atunci acesta nu trebuie să apară şi într-o instrucţiune DIMENSION.

— O listă e_i nu poate conţine un parametru formal al unei proceduri externe (funcţie externă sau subrutină).

— Dacă mai multe unităţi de program conţin o referire la un acelaşi bloc COMMON, atunci variabilele din lista corespunzătoare blocului respectiv, situate în toate unităţile de program implicate, vor fi puse în corespondenţă prin alocarea aceloraşi zone de memorie.

— Ordinea de dispunere a blocurilor în cadrul instrucţiunii (instrucţiunilor) este indiferentă ; ordinea de scriere a variabilelor în listă este esenţială.

— Referirea la un anumit bloc se face prin numele său ; corespondenţa între variabilele din unităţi de program diferite se realizează prin poziţia ocupată în lista cumulată a fiecărui bloc ; variabilele care îşi corespund prin intermediul zonei comune trebuie însă să fie de acelaşi tip.

— Dimensiunile unui bloc trebuie să fie aceleaşi în toate unităţile de program în care apare ; uneori acest lucru se poate realiza prin introducerea artificială a unor nume de variabile neutilizate efectiv.

Exemple :

Unitatea de program 1	Unitatea de program 2	Unitatea de program 3
. . . .	. . . .	. . . .
COMMON A, B, C	COMMON A, X, D	COMMON B(3)
. . . .	. . . .	. . . .

În acest exemplu, blocul de COMMON este neetichetat (COMMON blanc). Corespondența în memorie este următoarea:

A	A	B(1)
B	X	B(2)
C	D	B(3)

Unitatea de program 1	Unitatea de program 2
COMMON A/B1/C(3), B	COMMON/B1/A(4)/B2/R, S, T
COMMON/B2/P(3)//C, D	COMMON U, V, W

În acest exemplu se realizează următoarea corespondență:

Zona COMMON blanc		Blocul B1		Blocul B2	
A	U	C(1)	A(1)	P(1)	R
C	V	C(2)	A(2)	P(2)	S
D	W	C(3)	A(3)	P(3)	T
		B	A(4)		

Prin modul de operare al instrucțiunii COMMON este posibilă transmiterea informațiilor între două unități diferite de program (de exemplu programul principal și un subprogram) fără a se mai utiliza în acest scop listele de parametri ai subprogramului. Se realizează astfel o optimizare a programului în ansamblul prin scurtarea sa statică și dinamică.

Exemplu: Instrucțiunile următoare:

```
Program principal                 Subprogram
COMMON A(100), N, M, B(3)         SUBROUTINE ROUTIN
. . . . . . . . .                 COMMON R(100), I, J, S(3)
. . . . . . . . . .               . . . . . . . . . .
CALL ROUTIN                       RETURN
. . . . . . . . . .               END
```

au aceleași efect ca și instrucțiunile:

```
DIMENSION A(100), B(3)            SUBROUTINE ROUTIN (R, S, I, J)
. . . . . . . .                   DIMENSION R(100), S(3)
CALL ROUTIN (A, B, N, M)          . . . . . . . . .
. . . . . . . .                   RETURN
END                               END
```

9.1.2. Instrucțiunea EQUIVALENCE. Este o instrucțiune neexecutabilă care permite alocarea acelorași zone de memorie pentru mai multe variabile ce apar în cadrul aceleiași unități de program. Forma generală a instrucțiunii este:

$$\text{EQUIVALENCE } (e_1), (e_2), \ldots, (e_n)$$

în care e_i este o listă de nume de variabile sau nume de elemente de tablou. Instrucțiunea nu poate fi etichetată. Ea trebuie să preceadă prima instrucțiune executabilă a programului.

Observații

— Tuturor elementelor unei liste e_i li se afectează aceeași zonă de memorie.

— Elementele unei liste pot fi cantități de tipuri diferite.

— Un element al unui tablou cu mai multe dimensiuni poate fi reprezentat în listă printr-un indice care indică poziția acelui element în ansamblul tabloului.

— Două elemente ale aceluiași tablou nu pot fi echivalente.

— Aceiași variabilă poate apărea în mai multe liste cu condiția respectării compatibilității echivalențelor.

— Echivalența elementelor tablourilor se realizează în secvență începînd cu pozițiile menționate în listă.

— Echivalențele trebuie astfel întocmite încît înaintea sau între variabilele care ocupă două unități de memorie să nu se creeze spații care nu sînt multiplu de două unități de memorie.

— Numele simbolice a două variabile care sînt echivalente nu pot apărea simultan într-o instrucțiune COMMON din aceeași unitate de program.

— O instrucțiune EQUIVALENCE conjugată cu o instrucțiune COMMON poate avea ca efect extinderea blocului COMMON; extinderea este permisă numai în partea finală a blocului.

Exemple:

```
EQUIVALENCE (A, B, C), (R, D)
```

— Variabilele A, B și C primesc aceeași locație în memorie; de asemenea variabilele R și D

```
DIMENSION A(10,10), B(3)
EQUIVALENCE (A(1, 1),B(1))
```

— Elementele A(1, 1) și B(1) sînt puse în echivalență; în continuare A(2, 1) și B(2) și apoi A(3, 1) și B(3) vor ocupa respectiv aceleași locații în memorie

```
DIMENSION A(5, 5), B(5)
DOUBLE PRECISION C, D
EQUIVALENCE (A(2), T, S), (A(3),S)
EQUIVALENCE (B(1), C), (B(4), D)
```

— Acest exemplu este incorect: prima instrucțiune EQUIVALENCE pune în echivalență în mod indirect două elemente diferite ale aceluiași tablou: A(2) și A(3); a doua instrucțiune contravine regulii de implementare a valorilor declarate în dublă precizie.

Instrucțiunea EQUIVALENCE permite o raționalizare a memoriei ocupate de datele unui program realizîndu-se în acest fel optimizarea programului prin scurtarea sa statică.

9.2. Instrucțiuni pentru inițializarea datelor

9.2.1. Instrucțiunea DATA. Este utilizată pentru definirea valorilor inițiale ale unor variabile sau elemente de tablou, avînd forma generală:

$$\text{DATA } e_1/d_1/,\ e_2/d_2,\ \ldots,\ e_n/d_n/$$

în care: e_i este o listă de nume de variabile sau elemente de tablou;

d_i — o listă de constante.

Instrucțiunea nu poate fi etichetată și trebuie să preceadă prima instrucțiune executabilă a programului.

Observații

— Elementele unei liste trebuie să fie separate prin virgulă.

— Fiecărui element din lista e_i trebuie să îi corespundă un element de același tip în lista de constante d_i.

— Dacă o constantă c din lista d_i se repetă de i ori, ea poate figura în listă o singură dată fiind însă precedată de constanta k și simbolul * (să rezulte deci $k*c$).

— Indicii elementelor de tablou din listă nu pot fi decît constante întregi.

— Într-o listă d_i poate apărea o constantă Hollerith.
— Într-o listă e_i nu poate figura un parametru formal al unui subprogram.
— Niciun element al unei liste e_i nu poate figura într-o instrucţiune COMMON.

Exemplu:

```
COMPLEX C
LOGICAL R, S
DIMENSION B(5), P(100)
DOUBLE PRECISION A(3)
DATA R,S/. TRUE., .FALSE./
DATA B(1), B(2), B(3), B(4), B(5)/5*2.0/, A(1)/1.DO/
DATA NOM/4HNUME/, C/ (1., —1.)
```

9.2.2. **Subprogramul BLOCK DATA.** Este utilizat pentru iniţializarea datelor din blocurile COMMON etichetate. Nu poate fi apelat de nici o altă unitate de program. Prima instrucţiune a subprogramului este:

BLOCK DATA

Aceasta poate fi urmată în ordine de: instrucţiuni de tip, instrucţiuni COMMON, instrucţiuni DATA. Ultima instrucţiune este END. Nu se admit nici un fel de instrucţiuni executabile.

Exemplu:

```
BLOCK DATA
INTEGER A, B
COMMON/GRUP1/A, B/GRUP2/C(8)
DATA B/2/, A, C(1)/1,4. E7/, C(2), C(3), C(4)/3* 0./
END
```

Instrucţiunea DATA şi subprogramul BLOCK DATA operează în faza de compilare a programului; iniţializarea datelor prin intermediul acestora conduce la optimizarea programului scurtînd lungimea sa dinamică.

9.3. Alocarea dinamică

Dimensiunile tablourilor declarate într-un subprogram trebuie să fie cel puţin egale cu ale tablourilor corespondente din programul apelant. Nu întotdeauna însă, zona de memorie rezervată în subprogram este integral folosită. Pentru optimizarea ocupării memoriei, în astfel de cazuri este posibilă o alocare dinamică a zonelor destinate tablourilor folosite în subprogram. Se procedează ţinînd seama de următoarele observaţii:

— indicii tablourilor declarate în instrucţiunea DIMENSION din subprogram vor fi variabile de tip întreg;

— aceste variabile figurează în lista de parametri ai subprogramului; valoarea lor se transmite subprogramului prin instrucţiunea apelantă corespunzătoare.

Exemplu:

Program principal	Subprogram
DIMENSION A(100), B(100)	SUBROUTINE COPY (X, Y, M)
. . . .	DIMENSION X(M), Y(M)
READ(1,5)N, (A(I), I = 1, N)	DO 10 I = 1,M
. . . .	10 Y(I) = X(I)
CALL COPY(A, B, N)	RETURN
. . . .	END
END	

Dimensiunile tablourilor X şi Y din subrutină sînt variabile; valoarea variabilei M care reprezintă această dimensiune este comunicată prin lista de parametri şi este egală cu valoarea lui N din programul principal.

9.4. Segmentarea programelor

Utilizarea unui calculator avînd o anumită capacitate a memoriei centrale nu permite în general tratarea unui program care solicită un spaţiu pentru reprezentarea datelor şi a programului, ce depăşeşte capacitatea memoriei centrale. Însă, datorită faptului că nu toate modulele componente ale unui program sînt simultan necesare în memoriea centrală, este posibilă divizarea programului în mai multe secţiuni (faze/segmente) care vor fi catalogate în CIL (core image library) şi încărcate în memoria centrală în vederea execuţiei conform unei structuri specificate de programator. Această tehnică poartă numele de segmentare.

Se definesc următorii termeni:

Segment (fază) — cea mai mică unitate funcţională care poate fi încărcată în timpul execuţiei unui program. Un segment poate fi format dintr-unul sau mai multe module ale programului. Există trei tipuri de segmente: segment de program, de date, de COMMON.

Rădăcină — segmentul încărcat permanent în memoria centrală. Acest segment cuprinde în mod obligatoriu programul principal.

Arbore — reprezentarea (grafică) a relaţiilor dintre diferite segmente ale programului. Arborele este o structură de segmente situate pe diferite niveluri. Nivelurile superioare sînt cele mai apropiate de rădăcină.

Ramură — ansamblul tuturor segmentelor care, prin relaţiile dintre ele, se pot găsi simultan în memoria centrală.

Etapele principale ale segmentării unui program sînt:

— stabilirea segmentului „rădăcină";

— stabilirea segmentelor componente şi a relaţiilor dintre ele (formarea arborelui de segmentare); ramura maximă a arborelui nu trebuie să depăşească capacitatea disponibilă a memoriei centrale;

— furnizarea informaţiei privind structura programului şi modul de tratare; instrucţiunile corespunzătoare sînt specifice calculatorului utilizat.

Exemplu:

Se consideră un program avînd schema bloc din fig. II.25.

Memoria centrală disponibilă este de 55 K. Dimensiunea totală a programului este de 66 K; grupînd corespunzător modulele componente ale programului i se poate alcătui arborele de segmentare din fig. II.26.

Ramura cea mai lungă este: (PP+C) + (A1+A2) + (D1+D2) = 55 K
Segmentul PP + C formează rădăcina.

9.4.1. Segmentarea programelor la sistemul de calcul IBM 360. Se face utilizînd următoarele instrucţiuni:

1) *Instrucţiunea* PHASE. Nu este o instrucţiune FORTRAN; se utilizează cu scopul de a specifica un anumit segment produs de „editorul de legături" precum

şi punctul de încărcare al segmentului respectiv. Forma generală a instrucţiunii este:

```
             ┌,simbol [nume-fază] [± realocare]┐
             │,*[± realocare]                  │
PHASE nume   │,S[±realocare]                   │ [,NOAUTO]
             │,ROOT                            │
             └,+translatare                    ┘
```

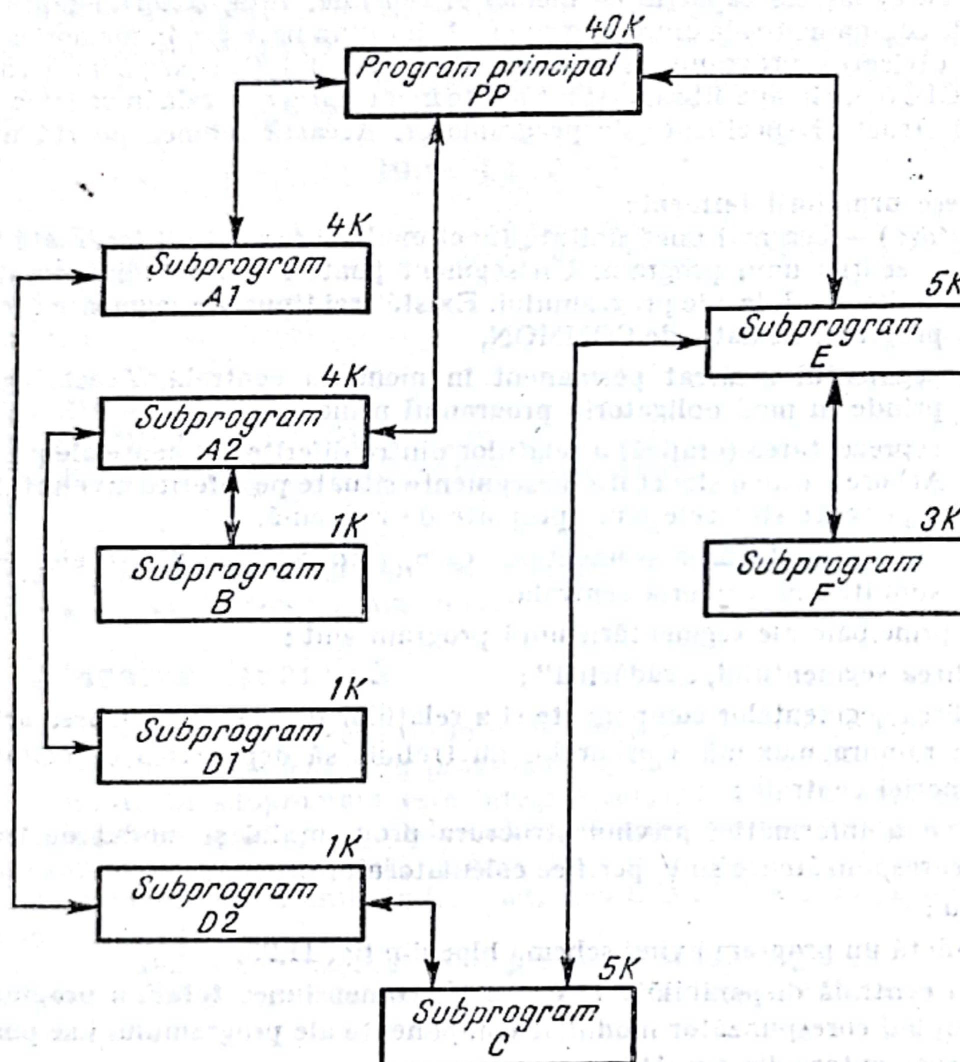


Fig. II.25

cu următoarele semnificaţii principale:

nume — indică numele simbolic al segmentului; este format din 5—8 caractere alfanumerice, primele 4 fiind obligatoriu identice pentru toate segmentele programului;

simbol — arată că segmentul respectiv trebuie încărcat la aceeași adresă în memorie ca și un alt segment sau procedură; este respectiv: numele unui segment, numele unui program principal sau subprogram sau numele specificat într-o instrucțiune ENTRY;

nume-fază — indică segmentul în care se găsește procedura sau eticheta specificată prin simbol;

* — simbol care arată că segmentul respectiv trebuie încărcat la prima adresă disponibilă, în continuarea segmentului anterior;

S — simbol care arată că segmentul respectiv trebuie încărcat la prima adresă disponibilă;

ROOT — indică un segment rădăcină.

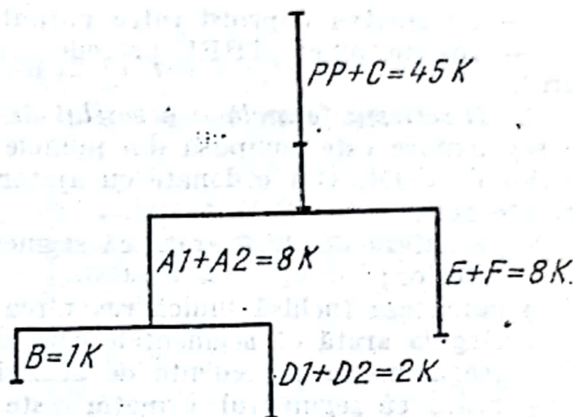


Fig. II.26

Observații

— Parametrii cuprinși între paranteze [ ] sînt opționali.

— Instrucțiunea PHASE precede segmentul la care se referă.

— Toate modulele de program cuprinse între două instrucțiuni PHASE fac parte din segmentul definit de prima din aceste două instrucțiuni.

2) *Instrucțiunea* CALL OPSYS. Este o instrucțiune de tip FORTRAN care comandă încărcarea unui segment, avînd forma generală:

CALL OPSYS ('LOAD', 'nume')

în care ,,nume' este numele simbolic al segmentului la care se referă instrucțiunea.

Exemplu: CALL OPSYS ('LOAD', 'SEG1A1')

Această instrucțiune este urmată de o instrucțiune FORTRAN de apel la o procedură externă din cadrul segmentului specificat.

Pentru detalii suplimentare asupra diferitelor aspecte ale segmentării se poate consulta :,,IBM System/360—D.O.S. : FORTRAN IV Programmer's Guide''.

La pct. 11.2.1. este prezentat un exemplu de program segmentat.

9.4.2. Segmentarea programelor la sistemul FELIX C-256. Se face utilizînd următoarele instrucțiuni:

1) *Instrucțiunea. SEG.* Nu este o instrucțiune FORTRAN. Se utilizează pentru a specifica un anumit segment produs de ,,editorul de legături''. Forma generală a instrucțiunii este:

SEG nume

în care nume reprezintă numele simbolic al segmentului la care se referă instrucțiunea.

Observații

— Instrucțiunea .SEG precede segmentul la care se referă.

— Toate modulele din program cuprinse între două instrucțiuni .SEG fac parte din segmentul definit de prima din aceste două instrucțiuni.

2) *Instrucțiunea.* TREE. Nu este o instrucțiune FORTRAN. Se utilizează pentru a preciza structura de segmentare și punctele de încărcare ale diferitelor segmente definite în cadrul programului. Instrucțiunea este de forma:

TREE [expresie] [,WA :număr]

cu următoarele semnificaţii :

expresie — expresie avînd rolul de a descrie formal arborele de segmentare;
WA — simbol indicînd rezervarea unei zone de lucru în memoria centrală;
număr — număr întreg zecimal reprezentînd numărul de blocuri de cîte 2 048 octeţi ce formează zona de lucru.

Observaţii

— Parametrii cuprinşi între paranteze [ ] sînt opţionali.

— Instrucţiunea .TREE precede instrucţiunea de comandă a „editorului de legături".

3) *Descrierea formală a arborelui de segmentare.* Expresia de descriere a arborelui de segmentare este compusă din numele simbolice ale segmentelor şi etichete ale blocurilor de COMMOM ordonate cu ajutorul a patru operatori a căror semnificaţie este următoarea :

(paranteza deschisă arată că segmentul (segmentele) care urmează sînt de nivel inferior;

) paranteza închisă indică revenirea la un nivel superior în cadrul structurii;

, virgula arată că segmentele care urmează vor fi încărcate în locul segmentului (segmentelor precedente de acelaşi nivel sau de nivel inferior;

\+ arată că segmentul următor este un bloc de COMMON ataşat segmentului precedent fiind încărcat simultan cu acesta.

Segmentele formate din blocuri de COMMON trebuie să fie menţionate explicit. Zonele rezervate celorlalte date sînt implicit considerate prin menţionarea segmentului de program în care figurează.

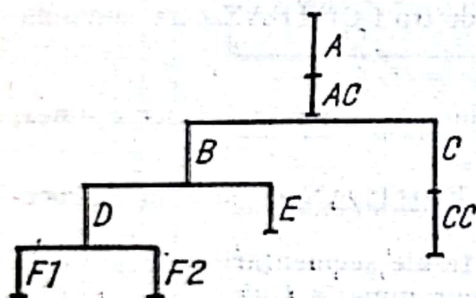


Fig. II.27

Observaţie. Segmentul format din COMMON blanc are numele simbolic F%BLK.

Exemplu : un arbore de segmentare (fig. II.27) în care A, B, C, D, E, F1, F2 sînt segmente de program şi AC şi CC sînt segmente de COMMON poate fi descris prin expresia :

A + AC(B(D(F1, F2), E), C+CC)

Pentru detalii suplimentare se poate consulta : „IRIS 50 Manuel d'utilisation. Moniteur SIRIS II" şi „IRIS 50 — Editeur de liens".

La pct. 11.2.2. este prezentat un exemplu de program segmentat.

10. ORDINEA INSTRUCŢIUNILOR ÎNTR-UN PROGRAM

Într-un program instrucţiunile se plasează în ordinea următoare :

1) Declaraţii de subprogram (numai pentru subprograme) : SUBROUTINE, FUNCTION, BLOCK DATA

2) Declaraţii de tip : COMPLEX, DOUBLE PRECISION, REAL, INTEGER, LOGICAL, IMPLICIT.

3) Instrucţiunea EXTERNAL.

4) Declaraţii de alocare : DIMENSION, COMMON, EQUIVALENCE.

5) Definiţii de funcţii aritmetice.

6) Instrucţiunea DATA.

7) Instrucţiuni executabile, instrucţiuni neexecutabile de tip FORMAT sau instrucţiuni ENTRY (acestea din urmă numai pentru subprograme).

8) Instrucţiunea END

11. CONFIGURAȚIA UNUI JOB. INSTRUCȚIUNI DE JOB-CONTROL

Instrucțiunile de JOB-control sînt specifice fiecărui sistem de calcul și au rolul de a instrui calculatorul asupra modului de operare dorit de programator. În cele ce urmează vor fi prezentate instrucțiunile necesare în cazul a două configurații de JOB, mai uzuale.

11.1 Compilare, editarea legăturilor și execuție

11.1.1. Configurația minimă pentru sistemul de calcul IBM-360

Instrucțiunea	Efectul
/ / JOB nume [comentarii]	— Inițializarea JOB-ului
/ / OPTION opțiune$_1$ [,opțiune$_2$, . . .]	— Opțiuni asupra modului de tratare
/ / EXEC FORTRAN	— Inițializarea compilării
instrucțiuni program sursă	
/*	— Sfîrșit de program
/ / EXEC LNKEDT	— Inițializarea editării legăturilor
/ / EXEC	— Inițializarea execuției
date de calcul	
/*	— Sfîrșit de date
/&	— Sfîrșit de JOB

Semnificația parametrilor (parametri cuprinși între paranteze [ ] sînt opționali):

Cartela 1: nume — numele simbolic al JOB-ului; este format din 1 — 8 caractere alfanumerice.

Exemplu: / / JOB PROG1A

Cartela 2: opțiune$_1$, . . . — opțiune cu efect asupra JOB-ului în execuție specificată de programator; lista principalelor opțiuni disponibile și efectul acestora este:

- LINK — compilare, editarea legăturilor, listarea programului sursă, erorilor, diagramei memoriei și instrucțiunilor de JOB-control.
- NOLIST — suprimarea listării programului sursă, diagramei memoriei și instrucțiunilor JOB-controlului.
- LOG — listarea instrucțiunilor JOB-controlului.
- DECK — perforarea programului obiect pe cartele.
- CATAL — idem LINK și catalogarea în CIL.

Exemplu: / / OPTION LINK

Pentru detalii se poate consulta: „IBM System 360 — Disk Operating System: FORTRAN IV Programmer's Guide".

11.1.2. Configurația minimă pentru sistemul de calcul FELIX C-256.

Instrucțiunea	Efectul
. JOB nume, AN: număr [,comentarii]	— Inițializarea JOB-ului
. COMPILE FORTRAN [,opțiune$_1$,. . .]	— Inițializarea compilării
instrucțiuni program sursă	
. LINK	— Inițializarea editării legăturilor
. RUN [opțiune$_1$,. . .]	— Inițializarea execuției
. EOJ	— Sfîrșit de JOB

Semnificaţia parametrilor (parametrii cuprinşi între paranteza [ ] sînt opţionali):

Cartela 1: nume — numele simbolic al JOB-ului; este format din 1 — 8 caractere alfanumerice.

AN — indicator al numărului de cont.

număr — număr de cont cerut de serviciul de operare comentarii indicaţii privind numele programatorului (sub forma PN: nume); opţiuni asupra condiţiilor de abandonare a execuţiei.

Exemplu:

```
· JOB PROG1A, AN : 1025, PN : POPESCU
```

Cartela 2: opţiune$_1$, ... — opţiuni cu efect asupra JOB-ului în execuţie specificate de programator; lista principalelor opţiuni şi efectul lor este:

NLG — suprimarea listării programului sursă şi a diagramei memoriei.

PUN — perforarea programului obiect pe cartele.

MAP — listarea adreselor de implementare în memorie după editarea legăturilor.

SEQ — verificarea secvenţei cartelelor.

Erorile sînt automat listate, indiferent de opţiune.

Exemplu:

```
· COMPILE FORTRAN, MAP
```

Cartela 4: opţiune$_1$, ... — opţiuni cu efect în faza de execuţie, privind numele programului, numărul maxim de linii la imprimantă (sub forma NL: număr), timpul maxim de execuţie (sub forma TIME: minute), listarea conţinutului memoriei la abandonarea anormală a execuţiei (sub forma AD: adresa$_1$, adresa$_2$) etc.

Exemplu:

```
· RUN NL :1500, TIME : 20, AD: 0, 0
```

Pentru detalii poate fi consultat: „IRIS 50 — Manuel d'utilisation SIRIS II"

11.2 Program în segmentare

11.2.1. Configuraţia pentru sistemul de calcul IBM-360 (v. exemplul de la paragraful 9.4.)

Instrucţiunea	Comentarii
/ / JOB SEGMENT	
/ / OPTION CATAL	— Programul va fi catalogat în CIL
PHASE SEGMPRPP, ROOT	— Începutul segmentului rădăcină care conţine programul principal
/ / EXEC FFORTRAN	

```
. . . . . . . . .
CALL OPSYS('LOAD', 'SEGMA1A2')      } Program     încărcarea segmentului A1+A2
CALL SUPRA1 (...)                   } principal
. . . . . . . .
CALL OPSYS('LOAD', 'SEGMB')                       încărcarea segmentului B
CALL SUBPRB (...)
. . . . . . . . . .
END
```

```
        instrucţiuni subprogram C
/*                                      — Sfîrşitul segmentului
        PHASE SEGMA1A2,*                — Segmentul A1+A2 se va încărca în
// EXEC FFORTRAN                          continuarea segmentului rădăcină
        instrucţiuni subprogram A1 şi A2
/*
        PHASE SEGMB, *                  — Segmentul B va fi încărcat în continuarea
// EXEC FFORTRAN                          segmentului A1+A2
        instrucţiuni subprogram B
/*
        PHASE SEGMEF, SEGMA1A2          — Segmentul E+F va fi încărcat ca şi
// EXEC FFORTRAN                          segmentul A1+A2
        instrucţiuni subprograme E şi F
/*
        PHASE SEGMD1D2, SEGMB
// EXEC FFORTRAN
        instrucţiuni subprograme D1 şi D2
/*
// EXEC LNKEDT
/ &                                     — Sfîrşit de JOB
// JOB RULARE                           — Începutul unui nou JOB
// EXEC SEGMPRPP                        — Se execută segmentul SEGMPRPP cata-
        date de calcul pentru programul   logat în JOB-ul anterior; segmentul este
        anterior                          rădăcina unui arbore se segmentare şi
/*                                        atrage după sine executarea tuturor seg-
/ &                                       mentelor tratate în JOB SEGMENT, deci
                                          executarea propriu-zisă a programului
                                          cu datele de calcul corespunzătoare.
```

11.2.2. **Configurația pentru sistemul de calcul FELIX C-256** (v. exemplul de la paragraful 9.4.)

```
        Instrucţiunea                      Comentarii

· JOB SEGMENT, AN:1000, PN:RADU
· SEG PPC                               — Începutul segmentului rădăcină PPC
· COMPILE FORTRAN
        instrucţiuni program principal
        instrucţiuni subprogram C
· SEG A1A2                              — Începutul segmentului A1 + A2
        instrucţiuni subprogram A1 şi A2
· SEG B                                 — Începutul segmentului B
        instrucţiuni subprogram B
· SEG EF                                — Începutul segmentului E + F
        instrucţiuni subprograme E şi F
· SEG D1D2                              — Începutul segmentului D1 + D2
        instrucţiuni subprograme D1 şi D2
```

```
· TREE PPC(A1A2(B, D1D2), EF)        — Descrierea arborelui de segmentare
· LINK
· RUN NL : 500, AD : 0,0
      date de calcul
· EOJ                                 — Sfîrşitul JOB-ului.
```

BIBLIOGRAFIE

1. Dimo, P. *Programarea în* FORTRAN. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1971.
2. Dreyfus, M. FORTRAN IV. Paris, Dunod, 1971.
3. Niculescu, St. *Curs de iniţiere în* FORTRAN. Bucureşti, Editura tehnică, 1973.
4. Organick, E. I. A FORTRAN IV PRIMER. Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

SECȚIUNEA III

REZISTENȚA MATERIALELOR ȘI TEORIA ELASTICITĂȚII

Prof. ing. ANDREI CARACOSTEA

CUPRINS

Partea întîi. REZISTENŢA MATERIALELOR

Partea a doua. TEORIA ELASTICITĂŢII

TABELELE SECȚIUNII III

PARTEA ÎNTÎI

REZISTENŢA MATERIALELOR

1. GENERALITĂŢI. IPOTEZE. NOŢIUNI FUNDAMENTALE

1.1. Obiect

Rezistenţa materialelor şi teoria elasticităţii au ca obiect stabilirea metodelor şi procedeelor de calcul ale *eforturilor unitare*, respectiv *tensiunilor*, şi ale *deformaţiilor specifice* care se nasc în diferitele puncte din interiorul corpurilor solide, deformabile, sub acţiunea forţelor ce le acţionează. Din punct de vedere ingineresc, rezistenţa materialelor urmăreşte stabilirea metodelor şi procedeelor de calcul ale elementelor de construcţie în vederea dimensionării şi verificării lor.

Metodele de investigare şi de calcul în Rezistenţa materialelor cuprind atît aspecte teoretice, bazate pe legile mecanicii, cît şi aspecte experimentale, care ţin seama de proprietăţile fizico-mecanice ale materialelor din care sînt alcătuite elementele de construcţie. Din această cauză, în stabilirea metodelor şi procedeelor de calcul, se au în vedere următoarele aspecte ale problemelor:

— *aspectul static*, în care se stabilesc, pe baza legilor din mecanica solidului rigid, relaţiile dintre forţele exterioare şi interioare ce acţionează asupra corpurilor;

— *aspectul geometric*, în care se analizează geometria deformaţiilor corpurilor sub influenţa forţelor sau altor cauze ce le acţionează, numite generic *acţiuni*;

— *aspectul fizic* prin care se ţine seama de proprietăţile fizico-mecanice ale materialelor care determină legile de legătură între forţele ce acţionează corpurile şi deformaţiile ce le produc, respectiv de compatibilitatea dintre forţe şi deformaţii.

1.2. Ipoteze

În Rezistenţa materialelor se admit următoarele ipoteze:

1) Corpurile sînt elemente cu fibră medie, respectiv bare sau grinzi.

2) Corpurile sînt în echilibru static sau dinamic sub acţiunea forţelor ce le acţionează.

3) Deformaţiile corpurilor sînt mici şi neglijabile în raport cu dimensiunile lor. Pe baza acestei ipoteze, în problemele de echilibru rămîn valabile principiile mecanicii corpului solid, *echilibrul corpurilor studiindu-se pe forma lor nedeformată*.

În consecinţă, în Rezistenţa materialelor se aplică *principiul independenţei acţiunilor, respectiv principiul suprapunerii liniare a efectelor*, conform cărora efectul acţiunii unei forţe asupra unui corp este independent de efectul altor forţe sau de viteza corpului.

Notă. Autorul mulţumeşte călduros tovarăşilor; şef de lucrări ing. OVIDIU OPRAN, asistent ing. DAN CREŢU şi asistent ing. NICOLAE POPA, care au acceptat sarcina de a reciti şi colaţiona manuscrisul şi de a efectua unele desene şi corecturile la tipar. Le mai mulţumeşte atît lor cît şi multor ingineri din învăţămînt şi producţie care au dat o serie de sugestii pentru îmbunătăţirea lucrării faţă de ediţia precedentă.

4) Materialele din care sînt alcătuite corpurile sînt omogene, izotrope și continue în interiorul lor.

5) Materialele ascultă de *legea lui Hooke*, conform căreia *deformațiile sînt proporționale cu eforturile ce le produc, respectiv materialele sînt liniar elastice.*

6) Deformările secțiunilor barelor au loc conform *ipotezei lui Bernoulli*: *secțiunile plane și normale pe axa barelor înainte de deformare rămîn plane și normale pe axă după deformarea acestora.*

1.3. Terminologie. Simboluri. Notații

Terminologia și notațiile folosite la noi în Rezistența materialelor sînt conform STAS 1963-73. Rezistența materialelor. Terminologie, simboluri și STAS 3451-73. Statica, dinamica și stabilitatea construcțiilor. Terminologie.

1.4. Noțiuni fundamentale

1.4.1. Eforturi unitare. Stări de eforturi unitare. Tensorul eforturilor unitare. Variația eforturilor unitare. Pe baza ipotezelor admise rezultă următoarele noțiuni fundamentale:

1.4.1.1. Eforturi unitare. Prin definiție, se numește *efort unitar total*, sau *tensiune totală*, $\bar{p}_n$, pe un element de suprafață ΔA, avînd normala definită prin versorul $\bar{n}$, dintr-un punct oarecare J, din interiorul unui corp supus unui sistem de forțe sau acțiuni oarecare (fig. III.1, *a*), limita raportului dintre forța interioară $\Delta\bar{P}$ ce lucrează pe

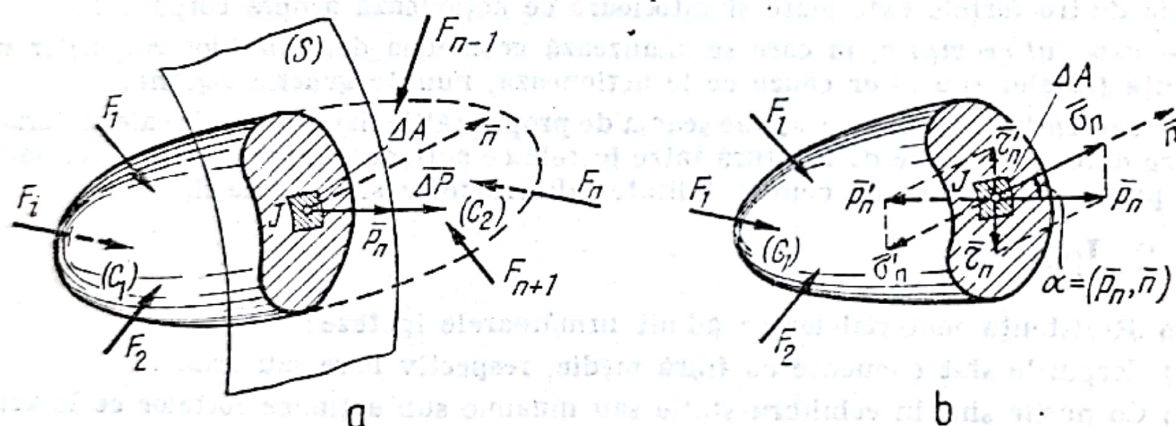


Fig. III.1

elementul de suprafață și aria ΔA corespunzătoare, cînd aceasta tinde către zero. Dacă efortul unitar total se notează cu $\bar{p}_n$, conform definiției de mai înainte rezultă:

$$\bar{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A}. \qquad \text{(III.1)}$$

Efortul unitar total $\bar{p}_n$ are o direcție, un sens și o mărime, și este legat de poziția și orientarea elementului de suprafață pe care lucrează, definită de versorul $\bar{n}$ (fig. III.1). Efortul unitar se exprimă în unități de forță pe unități de arie (F/L^2) obișnuit în daN/cm² sau N/mm².

Efort unitar normal $\bar{\sigma}_n$, pe un element de suprafață ΔA din interiorul unui corp este componenta efortului unitar total $\bar{p}_n$, după normala $\bar{n}$ la elementul de suprafață considerat (fig. III,1, *b*), respectiv:

$$\sigma_n = p_n \cos \sphericalangle (\bar{p}_n, \bar{n}). \tag{III.2}$$

Efort unitar tangențial $\bar{\tau}_n$ pe un element de suprafață din interiorul unui corp este componenta situată în planul elementului a efortului unitar total $\bar{p}_n$

$$\tau_n = p_n \sin \sphericalangle (\bar{p}_n, \bar{n}). \tag{III.3}$$

Între efortul unitar total $\bar{p}_n$ și componentele sale $\bar{\sigma}_n$ și $\bar{\tau}_n$ există relațiile

$$\bar{p}_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n = \sigma_n \cdot \bar{n} + \tau_n \cdot \bar{t}$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = p_n^2 \tag{III.4}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (\bar{p}_n, \bar{n}) = \frac{\tau_n}{\sigma_n} \cdot$$

Eforturile unitare $\bar{p}'_n$, $\bar{\sigma}'_n$ și $\bar{\tau}'_n$ situate pe fața opusă a elementului de suprafața ΔA, sînt egale și direct opuse eforturilor unitare $\bar{p}_n$, $\bar{\sigma}_n$ și $\bar{\tau}_n$ (v. fig. III.1, *b*).

Efortul unitar tangențial τ_n din planul elementului, se descompune de obicei în două componente normale între ele, paralele în general cu axele centrale principale de inerție ale secțiunii, *Oy* și *Oz*, din care face parte elementul de suprafață ΔA (fig. III.2).

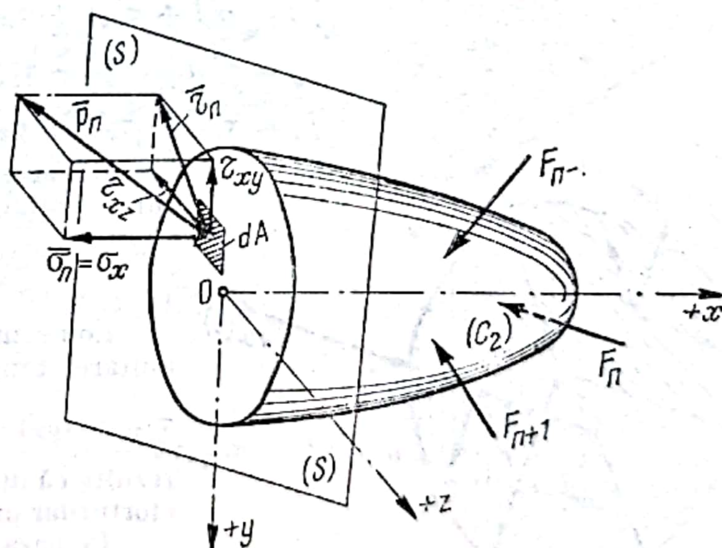


Fig. III.2

Convenția de notare pentru eforturile unitare este arătată în fig. III.2, conform căreia:

— efortul unitar normal este afectat de un singur indice indicînd direcția tangentei la axa barei în punctul considerat, și este pozitiv cînd are direcția normalei exterioare la elementul de suprafață pe care lucrează;

— cele două componente ale eforturilor unitare tangențiale sînt afectate de doi indici, primul indicînd direcția normalei la elementul de suprafață pe care lucrează, al doilea direcția axei cu care este paralel, ele fiind considerate pozitive cînd sînt orientate în sens contrar sensului pozitiv al axei după care acționează (v. fig. III.2).

1.4.1.2. Starea de eforturi unitare. Tensorul eforturilor unitare. *Prin stare de eforturi unitare într-un punct al unui corp supus unor acțiuni*, se înțelege totalitatea eforturilor unitare care acționează pe toate elementele de suprafață, orientate oricum ce trec prin acel punct. Prin *stare de eforturi unitare a unui corp* se înțelege totalitatea stărilor de eforturi unitare corespunzătoare tuturor punctelor corpului.

Starea de eforturi unitare într-un punct j oarecare al unui corp este complet determinată de eforturile unitare care acționează pe trei plane perpendiculare între ele, ce trec prin punctul considerat, respectiv de $3\times 3=9$ componente ale eforturilor unitare (fig. III.3) din care 3 componente normale și 6 tangențiale, fiecare din ele fiind funcții continue de coordonatele x, y, z ale punctului.

Fig. III.3

Tabloul celor nouă componente ale eforturilor unitare, arătate mai înainte

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad \text{(III.5)}$$

se numește *tensorul eforturilor unitare în punctul considerat*. Fiecare din coloanele acestui tensor reprezintă componentele eforturilor unitare pe una din cele trei fețe definite de versorii axelor de coordonate $x \rightarrow \bar{i}$; $y \rightarrow \bar{j}$; $z \rightarrow \bar{k}$

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= \sigma_x\bar{i} + \tau_{xy}\bar{j} + \tau_{xz}\bar{k} \\ \bar{p}_y &= \tau_{yx}\bar{i} + \sigma_y\bar{j} + \tau_{yz}\bar{k} \\ \bar{p}_z &= \tau_{zx}\bar{i} + \tau_{zy}\bar{j} + \sigma_z\bar{k}. \end{aligned} \qquad \text{(III.6 a)}$$

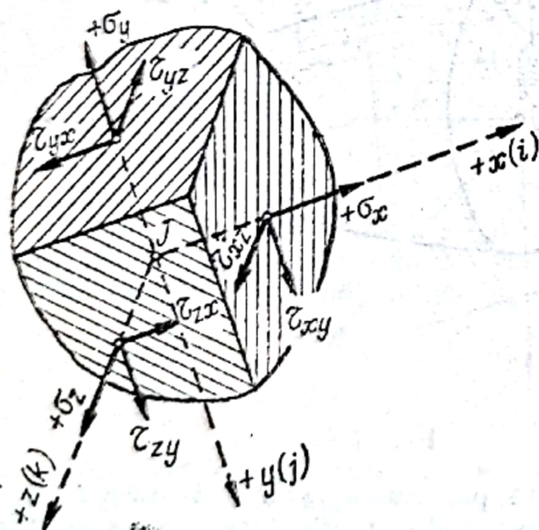


Fig. III.4

Din aceste componente rezultă expresia efortului unitar total în punctul considerat :

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \qquad \text{(III.6 b)}$$

Conform principiului dualității eforturilor unitare tangențiale (fig. III.4), care se scrie

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ și } \tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad \text{(III.7)}$$

rezultă că din cele 9 componente ale tensorului eforturilor unitare, numai 6 sînt distincte.

Pe baza noțiunilor de mai înainte, prima problemă a Rezistenței materialelor constă în determinarea stării de efort, respectiv a tensorului eforturilor unitare în toate punctele unui corp supus unui sistem de sarcini date, respectiv *cîmpul tensorial al eforturilor unitare* din toate punctele corpului considerat.

1.4.1.3. Variația eforturilor unitare în jurul unui punct. Eforturi unitare principale. Eforturile unitare într-un punct al unui corp, variind cu înclinarea elementului de suprafață pe care lucrează, pot fi determinate, pentru orice înclinare a planului elementului, din tensorul eforturilor unitare (III.5) din punctul considerat. În cazul din fig. III.5, *a* eforturile unitare pe planul *A B C*, avînd versorul $\bar{n}$ și cosinusurile directoare ale normalei la plan, *l*, *m*, *n*, sînt complet determinate de eforturile unitare care acționează pe planurile $A_x(BJC)$, $A_y(AJB)$ și $A_z(AJC)$ normale fiecare pe axele *Ox*, *Oy* și *Oz* (fig. III. 5,*b*) și se obțin direct din ecuațiile de echilibru, după cum urmează:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ p_{nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{III.8 a}$$

Din eforturile unitare totale p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} se deduce:
— efortul unitar total pe un plan A_n (fig. III,5, *c*)

$$p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2\ ; \tag{III.8 b}$$

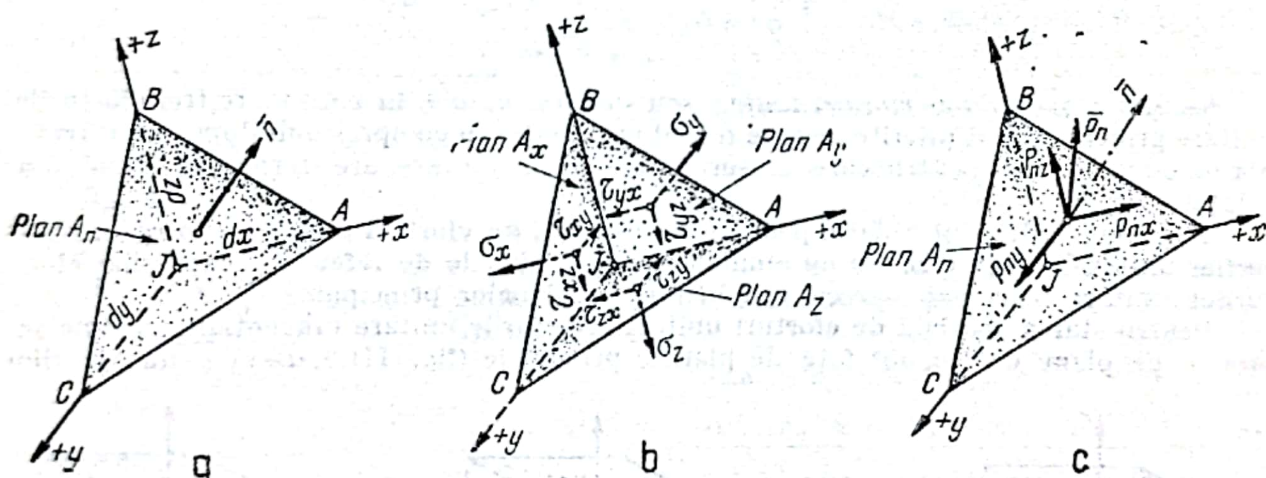


Fig. III.5

— efortul unitar normal σ_n

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl; \tag{III.8 c}$$

— efortul unitar tangențial

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}. \tag{III.8 d}$$

Din infinitatea de plane ce se pot duce printr-un punct al unui corp, există trei plane perpendiculare între ele, numite *plane principale*, pe care eforturile unitare tangențiale sînt nule, iar eforturile unitare normale, numite *eforturi unitare principale*, capătă valori extreme. Normalele la aceste plane sînt *direcțiile principale*.

În funcție de numărul eforturilor unitare principale diferite de zero, se disting următoarele trei stări de eforturi unitare:

— *starea liniară de eforturi unitare* sau *starea monoaxială* în care un singur efort unitar principal este diferit de zero (cazul întinderii sau compresiunii axiale a unei bare), pentru care tensorul eforturilor unitare capătă forma

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(III.9a)}$$

— *starea plană de eforturi unitare* sau *starea biaxială*, în care unul din cele trei eforturi unitare principale este nul (întindere sau compresiune după două direcții perpendiculare între ele), pentru care tensorul eforturilor unitare se scrie

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}; \qquad \text{(III.9b)}$$

— *starea spațială de eforturi unitare* sau *starea triaxială*, în care toate trei eforturile unitare principale sînt diferite de zero (cazul întinderii sau compresiunii după trei direcții normale între ele) și pentru care tensorul eforturilor unitare are forma generală din relația (III.5).

În tabelul III.1 sînt redate, pentru diferite stări de eforturi unitare, expresiile eforturilor unitare pe plane ce fac un anumit unghi cu planele de referință, expresiile eforturilor unitare principale, precum și înclinarea planelor principale.

Pentru starea spațială de eforturi unitare, eforturile unitare tangențiale maxime se produc pe plane ce fac 45° față de planele principale (fig. III.6, *a—c*) și au valorile

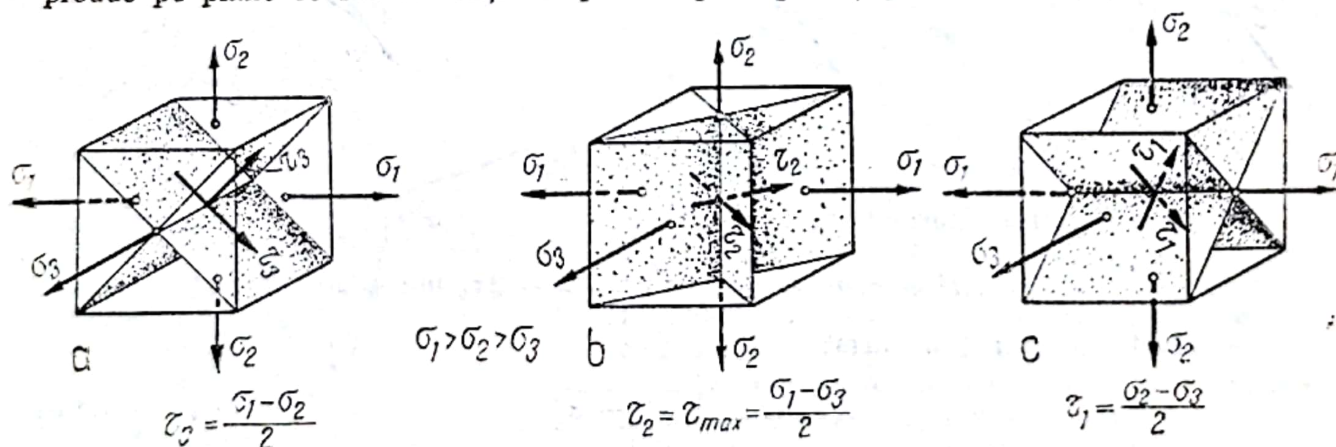


Fig. III.6

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad \text{(III.10)}$$

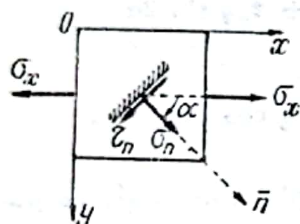
Tabelul III.1

Expresiile eforturilor unitare pe suprafețe plane inclinate față de planele de referință, în funcție de eforturile unitare pe aceste plane

Eforturile unitare indicate în figuri acționează asupra părții hașurate a elementului de volum.

Sensurile eforturilor unitare și ale unghiurilor de rotație indicate pe desenele din tabel se consideră pozitive. Dacă la efectuarea calculelor cu formulele date, o valoare oarecare rezultă negativă, sensul ei real este invers celui presupus în figură.

1. *Stare liniară de eforturi unitare*



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha$$

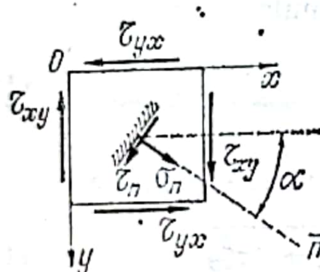
$$\tau_n = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha. \quad (1)$$

Eforturile unitare tangențiale maxime și minime

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{1}{2} \sigma_x \quad (2)$$

(acționează pe planele a căror normale fac un unghi de 45° sau 135° cu direcția Ox)

2. *Stare plană de eforturi unitare: forfecare pură*



$$\sigma_n = \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

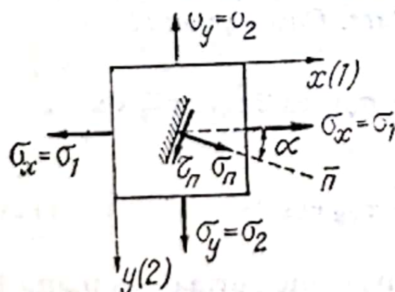
$$\tau_n = \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3)$$

(Pentru $\alpha_1 = 45°$ și $\alpha_2 = 135°$ eforturile unitare normale sînt maxime și minime pe plane perpendiculare pe planul figurii)

$$\tau_{max,min} = \pm \tau_{xy}$$

(pentru $\alpha = 0°, 90°$). (4)

3. *Stare plană de eforturi unitare; se cunosc eforturile unitare pentru planele principale σ_1 și σ_2*



$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \quad (5)$$

Eforturile unitare tangențiale maxime și minime

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6)$$

(pentru $\alpha_1 = 45°$ și $\alpha_2 = 135°$).

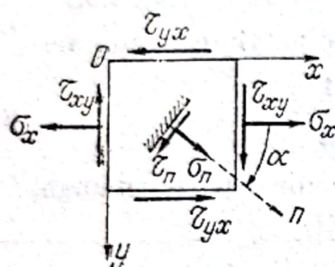
Pentru $\sigma_2 < 0$ valorile eforturilor unitare tangențiale sînt maxime și minime pentru plane perpendiculare pe planul figurii. Cînd $\sigma_2 > 0$, eforturile unitare tangențiale

Tabelul III.1 (continuare)

maxime și minime se produc pe plane înclinate cu 45° față de planul după care au loc eforturile unitare principale și sînt egale cu:

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (7)$$

4. *Stare plană de eforturi unitare. Întindere sau compresiune și lunecare (încovoiere cu forfecare)*



$$\sigma_n = \frac{1}{2}\sigma_x (1 + \cos 2\alpha) + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (8)$$

Eforturile unitare principale, pe plane normale pe planul figurii

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (9)$$

Unghiurile $\alpha = \alpha_1$ și $\alpha = \alpha_2$, care determină poziția planelor principale, se obțin din formula

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_i - \sigma_x} \quad (10)$$

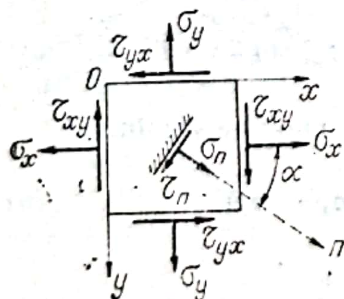
unde $i = 1$ sau 2.

Eforturile unitare tangențiale maxime și minime

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (11)$$

acționează pe suprafețele ce fac un unghi de 45° cu planele principale.

5. *Stare plană de eforturi unitare. Cazul general*



$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (12)$$

Eforturile unitare principale pe plane normale la planul figurii

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (13)$$

Tabelul III.1 (continuare)

Unghiurile α_1 și α_2 pentru planele principale se determină cu relațiile

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_x} \end{aligned}\right\} \text{ sau } \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{14}$$

Efortul unitar tangențial maxim și minim

$$\tau_{max,min} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{15}$$

acționează pe plane situate sub un unghi de 45° față de planele principale. În cazul cînd $\sigma_2 > 0$, efortul tangențial maxim are loc pe planul care face un unghi de 45° cu planul eforturilor unitare principale și are valoarea

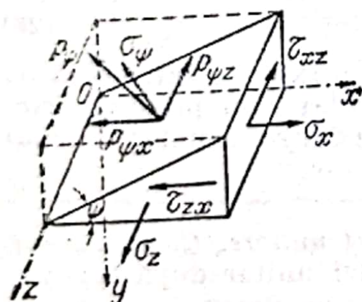
$$\tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_1}{2}, \tag{16}$$

6. *Stare plană de eforturi unitare. Caz general*

Eforturile unitare pe planul paralel cu direcția efortului unitar σ și înclinat cu un unghi ψ față de planul xOz

$$p_{\psi x} = \sigma_x \sin\psi \tag{17}$$

$$p_{\psi z} = -\tau_{xz}\sin\psi \tag{18}$$



sînt situate în plane paralele cu planul xOz

$$p_\psi = \sqrt{p_{\psi x}^2 + p_{\psi z}^2} = \left(\sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{zx}^2}\right)\sin\psi \tag{19}$$

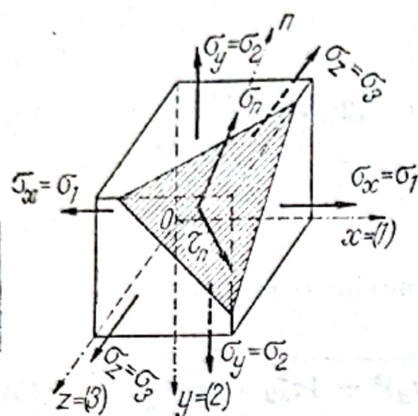
Efortul unitar normal

$$\sigma_\psi = \sigma_x \sin^2\psi \tag{20}$$

Efortul unitar tangențial

$$\tau_\psi = \sin\psi\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2}(1 + \cos 2\psi) + \tau_{xz}^2} \tag{21}$$

Tabelul III. 1 (continuare)



7. *Stare spațială de eforturi unitare*
Se cunosc eforturile unitare principale

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, rezultă:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(n, x) + \sigma_2 \cos^2(n, y) + \sigma_3 \cos^2(n, z) \quad (22)$$

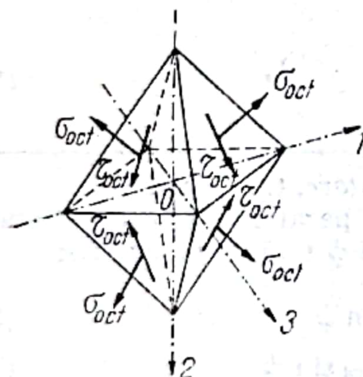
$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2(n, x) + \sigma_2^2 \cos^2(n, y) + \sigma_3^2 \cos^2(n, z) - [\sigma_1 \cos^2(n, x) + \sigma_2 \cos^2(n, y) + \sigma_3 \cos^2(n, z)]^2} \quad (23)$$

Pe planul egal inclinat față de direcțiile celor trei eforturi unitare principale (plan octaedric) eforturile unitare normale și tangențiale sînt egale și au expresiile

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (24)$$

sau



$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \quad (25)$$

Valorile maxime ale eforturilor unitare tangențiale

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (26)$$

Efortul unitar tangențial maxim τ_2 acționează pe planul normal la cel de al doilea plan principal care împarte în două unghiul diedru dintre primul și al treilea plan principal.

---

8. *Stare spațială de eforturi unitare. Cazul general.* Se dau componentele efortului unitar după trei axe oarecare x, y, z în punctul considerat

Efortul unitar normal pe planul avînd normala n

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(n, x) + \sigma_y \cos^2(n, y) + \sigma_z \cos^2(n, z) + 2\tau_{xy}\cos(n, x)\cos(n, y) + 2\tau_{yz}\cos(n, y)\cos(n, z) + 2\tau_{zx}\cos(n, z)\cos(n, x). \quad (27)$$

Tabelul III. 1 (continuare)

Componentele paralele cu axele x, y, z ale efortului unitar total pe planul avînd normala n

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z)$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z)$$

$$p_{nz} = \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \tag{28}$$

Efortul unitar total pe planul avînd normala n

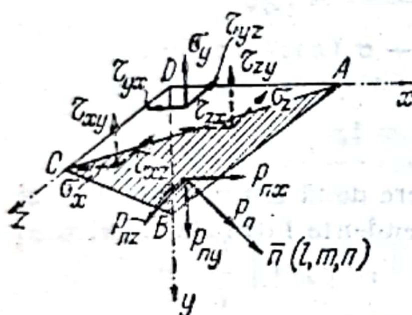
$$p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2} \tag{29}$$

este dirijat spre normala n sub un unghi ν determinat de relaţia

$$\cos \nu = \frac{\tau_n}{p_n} \tag{30}$$

efortul tangenţial fiind

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} \tag{31}$$



Eforturile principale σ_1, σ_2, σ_3 în punctul considerat sînt cele trei rădăcini ale ecuaţiei

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \tag{32}$$

În această ecuaţie coeficienţii necunoscutei şi termenul liber sînt cei trei invarianţi ai tensorului eforturilor unitare şi ei se scriu

$$I_1 = I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{33}$$

$$I_2 = I_2(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2. \tag{34}$$

$$I_3 = I_3(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \tag{35}$$

$$= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$$

Tabelul III.1 (continuare)

Pentru cazul în care $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ și $\sigma_z = \sigma_3$ sînt eforturi principale, rezultă

$$I_1 = I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = I_2(T_\sigma) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \qquad (36)$$

$$I_3 = I_3(T_\sigma) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Formulele pentru σ_n și τ_n sînt date la pct. 7 de mai înainte.

Cosinusurile directoare ale normalelor la planele principale se obțin din următorul sistem de ecuații

$$(\sigma_x - \sigma_i)\cos(n, x) + \tau_{yx}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z) = 0$$

$$\tau_{xy}\cos(n, x) + (\sigma_y - \sigma_i)\cos(n, y) + \tau_{zy}\cos(n, z) = 0 \qquad (37)$$

$$\tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) + (\sigma_z - \sigma_i)\cos(n, z) = 0$$

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1.$$

Dintre aceste ecuații se vor lua la alegere două din primele trei și a patra, deoarece primele trei nu sînt independente între ele. Pentru σ_i se dau succesiv valorile σ_1, σ_2, σ_3.

Rezultă că pentru fiecare pereche de eforturi unitare normale principale există două plane perpendiculare între ele pe care apar eforturi unitare tangențiale maxime. Dacă $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, cel mai mare efort unitar tangențial este

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

și el are loc pe perechea de plane ortogonale ce conțin direcția lui σ_2 și sînt bisectoare la direcțiile σ_1 și σ_3 (v. fig. III.6, *b*).

În concluzie, în fiecare punct al unui corp există trei plane perpendiculare între ele numite *plane principale* pe care eforturile unitare normale au valori extreme, iar cele tangențiale nule. Mărimea eforturilor unitare normale maxime, numite *eforturi unitare principale* se obțin din ecuația de gradul 3

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \qquad \text{(III.11a)}$$

în care coeficienții I_1, I_2, I_3 au expresiile:

$$I_1 = I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad \text{(III.11b)}$$

$$I_2 = I_2(T_\sigma) = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad \text{(III.11c)}$$

$$I_3 = I_3(T_\sigma) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad \text{(III.11d)}$$

Deoarece coeficienții I_1, I_2, I_3 sînt independenți de orientarea sistemului de axe de referință, ei sînt numiți *invarianții tensorului eforturilor unitare*.

1.4.1.4. Eforturi unitare octaedrice. Sînt eforturile unitare ce apar pe planele egal înclinate față de cele trei axe de coordonate (fig. III.7).

Expresiile lor, funcție de eforturile unitare principale, sînt:

— *efortul unitar normal octaedric*

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1(T_\sigma)}{3} = \sigma_m \quad \text{(III.12a)}$$

— *efortul unitar tangențial octaedric*

$$|\tau_{oct}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \quad \text{(III.12b)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{I_1^2(T_\sigma) - 3I_2(T_\sigma)}.$$

1.4.1.5. Cercul lui Mohr. Cercul lui Mohr permite determinarea grafică a variației eforturilor unitare în jurul unui punct. Pentru starea plană, cercul lui Mohr se construiește observînd că expresia

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - \tau^2$$

este ecuația unui cerc de rază r

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

avînd coordonatele centrului O de abscisă $x_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$, și ordonată $y_0 = 0$.

Construcția cercului lui Mohr, pentru diferite stări de eforturi unitare, este redată în tabelul III.2.

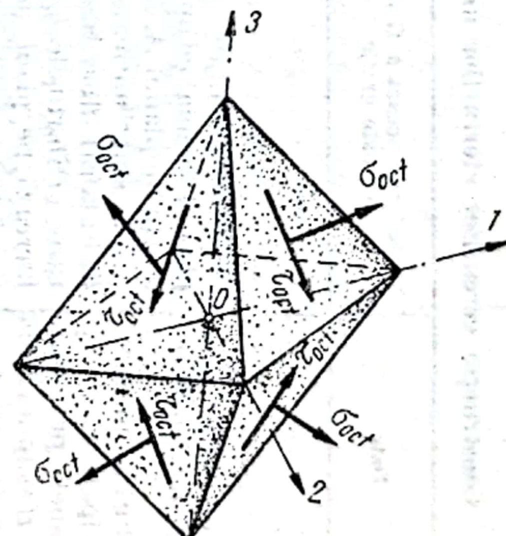
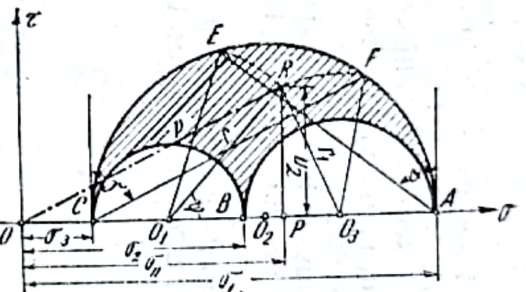


Fig. III.7

Tabelul III.2

Construcția cercurilor eforturilor unitare (cercul lui Mohr) pentru diferite stări de eforturi unitare

Date	Mărimi ce urmează a fi determinate grafic	Construcția grafică
1. *Stare plană de eforturi unitare* Eforturile unitare principale σ_1 și σ_2 și planele principale *A* și *B* asupra cărora acționează acestea	Eforturile unitare pe un plan *D* inclinat cu un unghi α față de planul *A*. Ambele plane sint normale față de planul liber de eforturi. (Eforturile unitare lucrează pe plane normale la planul figurii)	$\sigma_1 > \sigma_2$; Planul B; Planul A; Planul D
2. *Stare plană de eforturi unitare* Eforturile unitare σ_x, σ_y, τ_{xy} pe două plane normale unul față de celălalt	Eforturile unitare principale σ_1, σ_2 și poziția planelor principale	Plan de normală $\bar{x}$; Plan principal 1 Centrul cercului are abscisa $a=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$; Raza cercului este $r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}$

3. *Stare spațială de eforturi unitare* Eforturile unitare principale σ_1, σ_2 și σ_3 și planele principale	Pe figură $\sigma_1 = OA$, $\sigma_2 = OB$, $\sigma_3 = OC$. Orice punct situat în interiorul sau pe conturul triunghiului curbilin hașurat, reprezintă o stare posibilă de eforturi. Eforturile unitare σ_n și τ_n pe un element de suprafață a cărui normală face unghiurile α, β și γ cu normalele la primul, al doilea și al treilea plan principal se obțin după cum urmează: se trasează prin A dreapta AE ce face unghiul α cu axa τ și dreapta CF prin C ce face unghiul γ cu axa τ. Coordonatele punctului R de intersecție ale arcelor ER cu raza $r = O_1E$ și FR cu raza $r_1 = O_3F$ reprezintă eforturile unitare pe planul determinat de normala n.	

1.4.1.6. Elipsoidul eforturilor unitare totale (elipsoidul lui Lamé). Cu notațiile din fig. III.5 și III.8, acesta are expresia

$$\frac{p_{nx}^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_{ny}^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_{nz}^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad \text{(III.13)}$$

și reprezintă variația stării de eforturi unitare totale într-un punct al unui corp, în care eforturile unitare principale sînt $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ($\sigma_1 = \sigma_{max}$; $\sigma_3 = \sigma_{min}$; $\sigma_2 = \sigma_{interm}$).

Eforturile unitare principale sînt semiaxele elipsoidului. Vîrful razei vectoare a efortului unitar total $\bar{p}_n$ lucrînd pe un plan avînd versorul $\bar{n}$, descrie suprafața elipsoidului cînd $\bar{n}$ ia toate direcțiile posibile.

O rază vectoare oarecare a elipsoidului reprezintă efortul unitar total $\bar{p}_n$ care lucrează pe un element de suprafață paralel cu planul tangent la elipsoid în punctul m în care aceasta înțeapă elipsoidul.

Pentru starea plană de eforturi unitare, variația în coordonate polare a eforturilor unitare σ și τ, în funcție de unghiul α, este reprezentată de o curbă de gradul patru cu două axe de simetrie (fig. III.9).

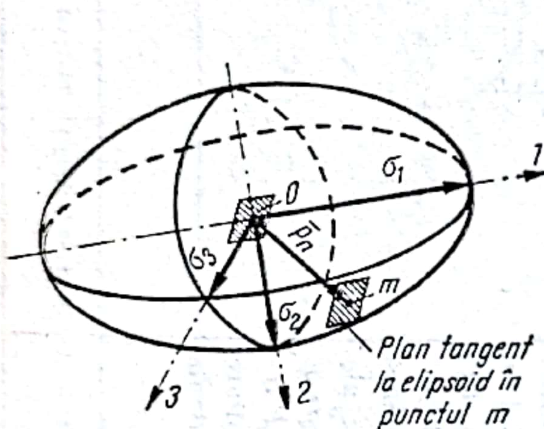


Fig. III.8

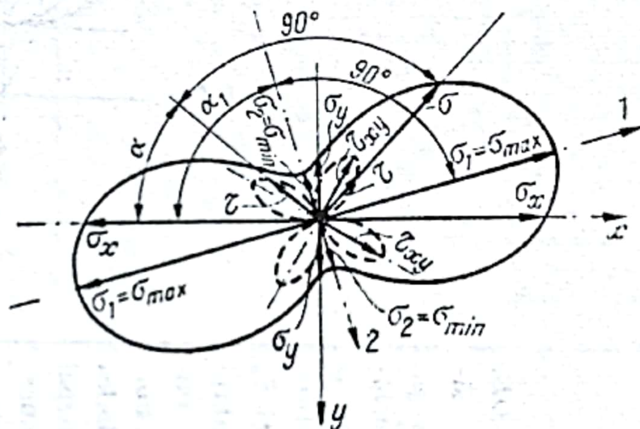


Fig. III.9

1.4.1.7. Tensorul sferic și deviatorul tensorului eforturilor unitare. Tensorul eforturilor unitare T_σ (III.5) se poate descompune într-o sumă de doi tensori, și anume :

— *tensorul sferic al eforturilor unitare*, care are expresia

$$T_{\sigma_m} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \qquad \text{(III.14a)}$$

în care $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ este efortul unitar octaedric, și

— *deviatorul eforturilor unitare* care se scrie

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \qquad \text{(III.14b)}$$

Rezultă relaţia

$$T_\sigma = T_{\sigma_m} + D_\sigma \qquad \text{(III.15)}$$

care exprimă că starea de eforturi unitare într-un punct al unui corp poate fi considerată ca rezultînd din însumarea a două stări de eforturi unitare, şi anume:

— o stare uniformă de eforturi unitare reprezentată printr-o întindere sau o compresiune uniformă după toate direcţiile;

— o stare de eforturi care caracterizează *devierea* stării de efort considerată faţă de starea uniformă.

Suma tensorială a celor două stări de eforturi unitare de mai înainte poate fi reprezentată conform fig. III.10, *a—c*.

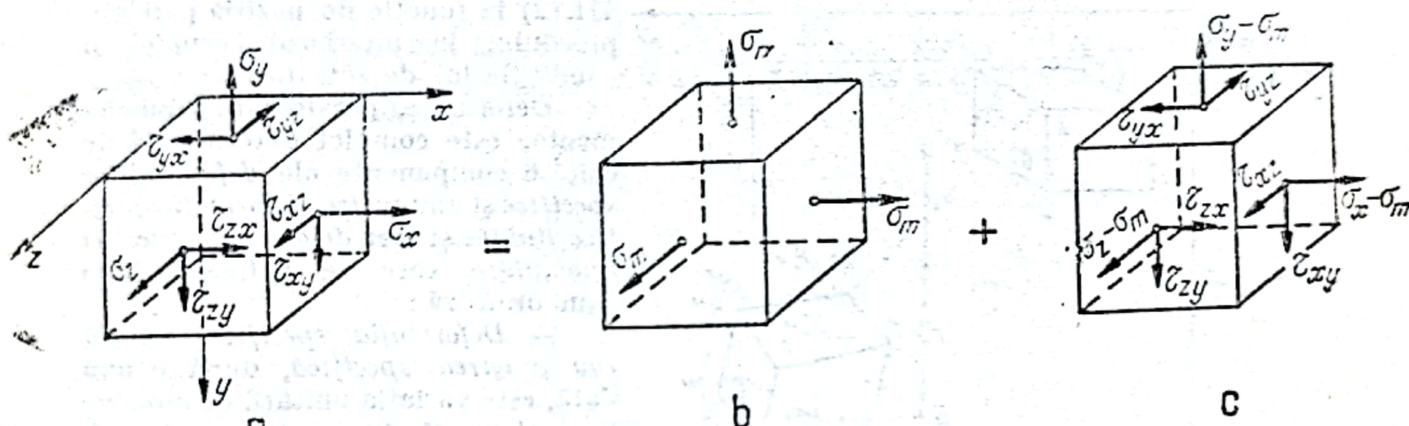


Fig. III.10

1.4.2. Deplasări şi deformaţii. Se definesc următoarele noţiuni:

1.4.2.1. Deplasări. Un punct oarecare A din interiorul unui corp supus unor acţiuni se deplasează prin deformarea corpului, într-un punct vecin, foarte apropiat A' (fig. III.11), vectorul $\overline{AA'}$ reprezentînd *deplasarea totală* a punctului considerat. Pe baza ipotezelor conform cărora deformaţiile sînt continue şi foarte mici, deformaţia totală este o funcţie continuă de coordonatele punctului considerat.

Componentele deplasării totale ale punctului pe trei axe ortogonale de coordonate sînt şi ele funcţii continue de coordonatele punctului şi se exprimă prin *cele trei funcţii ale deplasărilor*

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z);$$
$$w = w(x, y, z). \qquad \text{(III.16)}$$

Componentele deplasării unui punct infinit vecin avînd coordonatele $x + dx$, $y+dy$, $z + dz$ se deduc direct din deplasările u, v, w ale punctului A considerat. Astfel, proiecţiile pe cele trei axe ale

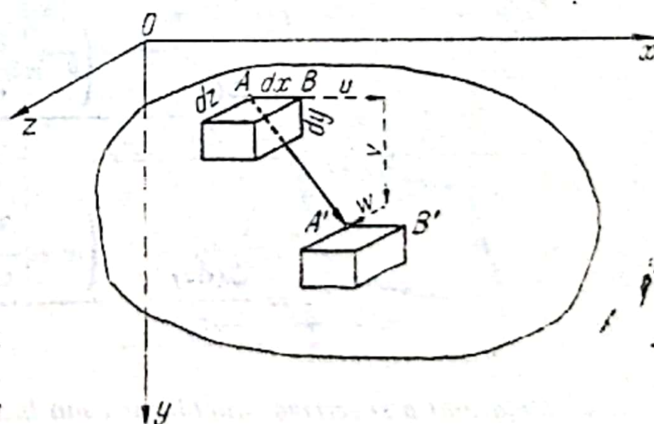


Fig. III.11

deplasării punctului B situat la dx de A (v. fig. III.11) se exprimă prin relațiile

$$u_B = u_A + \frac{\partial u_A}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,;\quad v_B = v_A + \frac{\partial v_A}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,;\quad w_B = w_A + \frac{\partial w_A}{\partial x}\,\mathrm{d}x. \tag{III.17}$$

În mod analog se pot exprima deplasările punctelor unui paralelipiped elementar de laturi dx, dy, dz, avînd originea în A.

1.4.2.2. Deformații. Deformații specifice. Starea de deformații. Tensorul deformațiilor specifice. Un paralelipiped elementar de laturi dx, dy, dz din interiorul unui corp se deformează, laturile lui lungindu-se sau scurtîndu-se și înclinîndu-se (fig. III.12) în funcție de poziția paralelipipedului în interiorul corpului și condițiile lui de solicitare.

Fig. III.12

Deformarea paralelipipedului elementar este complet determinată de cele 6 componente ale *deformațiilor specifice* și anume *trei deformații specifice liniare* și *trei deformații specifice unghiulare* care se definesc după cum urmează:

— *Deformația specifică liniară sau lungirea specifică,* după o axă dată, este variația unității de lungime în acel punct după axa considerată. Componentele deformațiilor specifice liniare după cele trei axe de referință sînt:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(u + \dfrac{\partial u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) - u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta(\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\left(v + \dfrac{\partial v}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) - v}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{III.18}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta(\mathrm{d}z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\left(w + \dfrac{\partial w}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\right) - w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

— *Deformația specifică unghiulară sau lunecarea specifică* într-un punct al unui corp este variația unghiului, inițial drept, dintre două axe ortogonale ce trec prin acel punct. Componentele după axe ale deformațiilor specifice unghiulare (fig. III.13) într-un punct

sînt :

$$\gamma_{xy}=\alpha_{xy}+\alpha_{yx}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\,dx}{dx}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\,dy}{dy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz}=\alpha_{yz}+\alpha_{zy}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} \qquad \text{(III.19)}$$

$$\gamma_{zx}=\alpha_{zx}+\alpha_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Starea de deformație într-un punct al unui corp, în mod analog cu starea de eforturi unitare, este complet determinată de *tensorul de ordinul doi al deformațiilor specifice* din acel punct, care se scrie

$$T_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z\end{pmatrix} \qquad \text{(III.20)}$$

În consecință, toate cele stabilite mai înainte pentru eforturile unitare se aplică întocmai și pentru deformațiile specifice, dacă în loc de eforturile unitare normale σ_i se introduc deformațiile specifice liniare ε_i și, în loc de eforturile unitare tangențiale τ_{ij}, se introduc jumătate din deformațiile specifice unghiulare, adică $1/2\ \gamma_{ij}$, rezultînd :

— În fiecare punct al unui corp există *trei direcții principale de deformații specifice liniare*, pentru care aceste deformații au valori extreme : maximă și minimă, respectiv : $\varepsilon_1 = \varepsilon_{max} \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3 = \varepsilon_{min}$; pe planele normale la aceste direcții, lunecările specifice γ_{ij} sînt nule.

— În fiecare punct există trei perechi de cîte două *plane de lunecări extreme, maximă respectiv minimă* ; fiecare din aceste plane conține o axă principală de deformație spe-

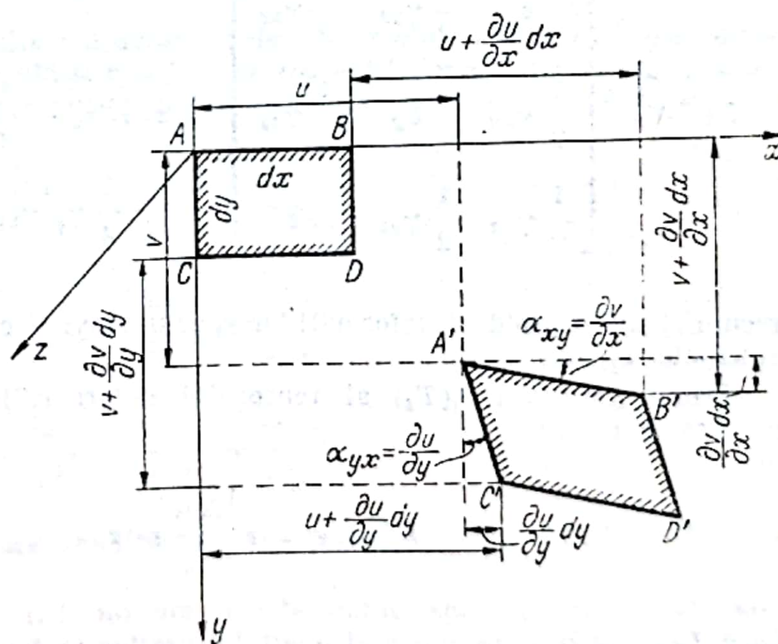


Fig. III.13

cifică liniară și este bisector la celelalte două axe principale, lunecările extreme din aceste plane avînd expresiile

$$\gamma' = \gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \geqslant \gamma'' = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \geqslant \gamma''' = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad \text{(III.21)}$$

— În cazul corpurilor omogene și izotrope direcțiile principale ale deformațiilor specifice liniare coincid cu direcțiile principale ale eforturilor unitare.

— În mod analog ca la eforturile unitare principale se pot construi *cercurile lui Mohr* pentru deformații specifice.

— Și pentru deformațiile specifice există *trei invarianți ai tensorului deformațiilor* care au expresiile

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \text{(III.22a)}$$

$$I_2(T_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{pmatrix} =$$

$$= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) \quad \text{(III.22b)}$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad \text{(III.22c)}$$

precum și un elipsoid al deformațiilor specifice avînd ca semiaxe deformațiile specifice principale ε_1, ε_2, ε_3.

Primul invariant $I_1(T_\varepsilon)$ al tensorului deformațiilor specifice reprezintă *variația specifică de volum*

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_v = \frac{\Delta v_0}{v_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad \text{(III.23)}$$

Dacă $I_1(T_\varepsilon) = 0$, deformația elementului are loc fără variație de volum, însă cu *modificarea formei* produsă numai de lunecări, respectiv de eforturile unitare τ.

Tensorul deformațiilor specifice poate fi descompus și el într-un *tensor sferic al deformațiilor* $T_{\varepsilon m}$ și un *deviator al deformațiilor specifice* D_ε care au expresiile

$$T_{\varepsilon m} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} \tag{III.24}$$

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{pmatrix} \tag{III.25}$$

în care:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_v}{3} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \tag{III.26}$$

reprezintă variația medie a deformațiilor specifice.

Tensorul sferic $T_{\varepsilon m}$ reprezintă numai variația de volum a unui element, fără modificarea formei, în timp ce *deviatorul D_ε reprezintă numai variația formei elementului, fără variație de volum.*

Și în cazul deformațiilor există relația

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon m} + D_\varepsilon. \tag{III.27}$$

1.4.2.3. Ecuațiile de continuitate a deformațiilor. Eliminînd deplasările din grupul de relații (III.18) și (III.19) se obțin *ecuațiile de compatibilitate* sau de *continuitate a deformațiilor,* care exprimă fizic menținerea continuității corpului după deformație, și care au expresiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}. \end{aligned} \tag{III.28}$$

1.4.3. Relații între eforturi unitare și deformații specifice. Aceste relații, numite și *ecuații fizice,* sînt următoarele.

1.4.3.1. Relațiile dintre eforturile unitare și deformațiile specifice corespunzătoare. Ele reprezintă o legătură fizică, care variază, evident, de la un material la altul. Legătura fizică dintre eforturile unitare și deformațiile specifice se determină experimental.

Relația $\varepsilon = f(\sigma)$ se stabilește prin încercări la întindere (eventual și la compresiune), iar relația $\gamma = f(\tau)$ prin încercări la răsucire pură.

Legea de legătură dintre eforturile unitare și deformațiile specifice corespunzătoare, $\sigma = f(\varepsilon)$ respectiv $\tau = f(\gamma)$ este reprezentată de *diagrama* sau *curba caracteristică*, în care în abscisă se raportează deformațiile specifice ε sau γ iar în ordonată eforturile unitare σ respectiv τ.
În fig. III. 14, *a* este arătată curba caracteristică a oțelului moale (C = 0,10% — 0,20%), în fig. III.14, *b* curba caracteristică a lemnului de molid cu o umiditate de 15%, în fig. III. 14, *c* curba caracteristică a granitului, iar în fig. III.14, *d* curba caracteristică a aliajului de aluminiu Al, Cu, Mg (duraluminiu) folosit în construcții.

Pe curba caracteristică la întindere a unui material se disting de obicei următoarele puncte:

— *limita de proporționalitate*, σ_p, care este valoarea efortului unitar pînă la care deformațiile specifice sînt proporționale cu eforturile ce le produc

$$\sigma = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha = \varepsilon E; \tag{III.29}$$

— *limita elastică*, σ_e, care este valoarea efortului unitar pînă la care în material nu apar deformații permanente;

— *limita de curgere* sau *limita deformațiilor mari*, σ_c, care este valoarea efortului unitar la care deformațiile specifice, cresc, fără ca eforturile unitare să crească ca valoare, respectiv la care apare *fenomenul de curgere*;

— *rezistența totală* sau *rezistența de rupere*, σ_r, care este raportul dintre efortul maxim suportat de epruvetă și secțiunea ei inițială A_0

$$\sigma_r = \frac{N_{max}}{A_0}, \tag{III.30}$$

— *lungirea specifică la rupere* sau *alungirea la rupere*, care este raportul dintre alungirea totală la rupere și lungimea inițială a epruvetei, exprimată în procente

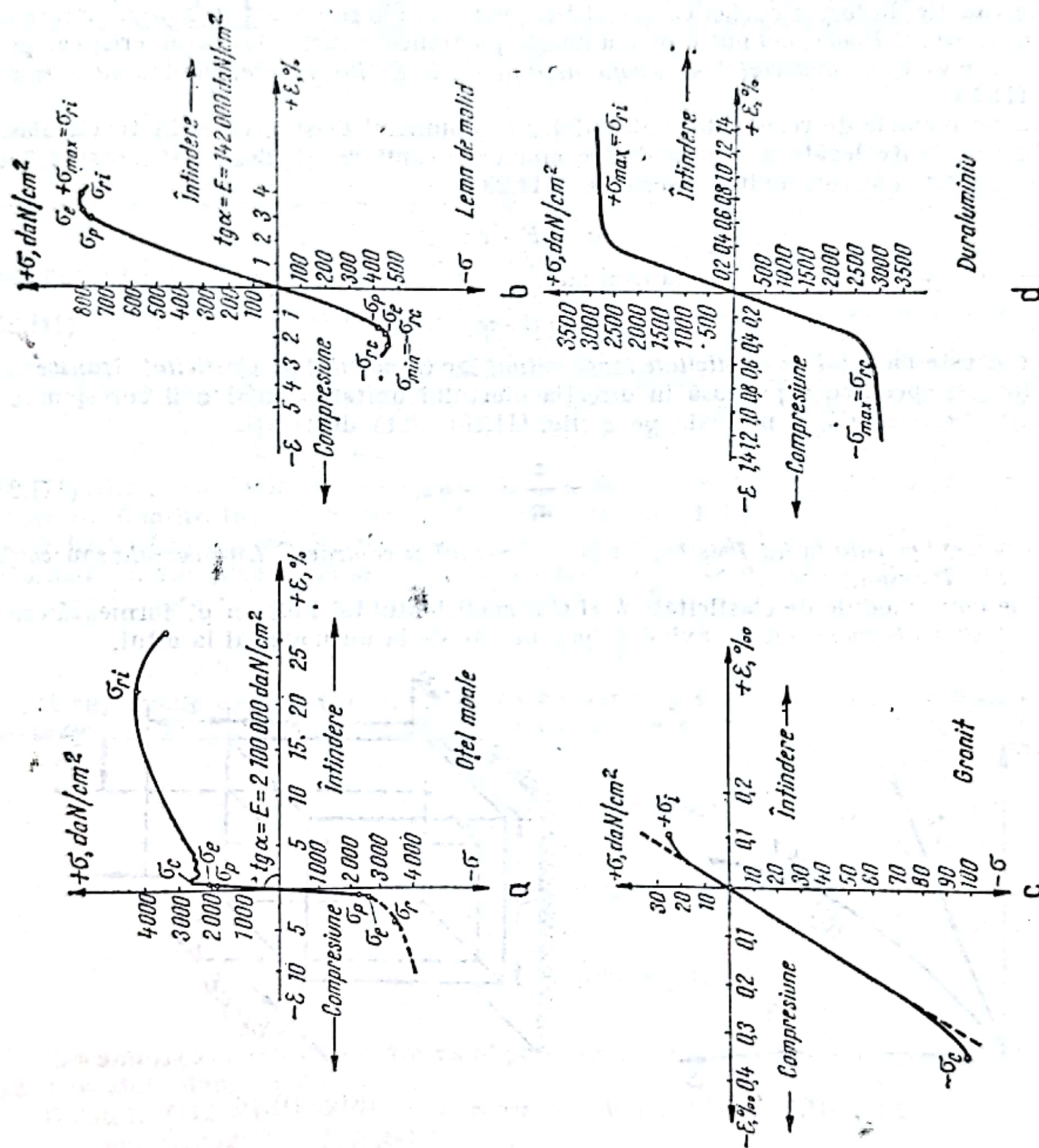
$$\delta_r = \frac{l - l_0}{l_0} 100 = \frac{\Delta l}{l} 100 \ [\%]; \tag{III.31}$$

— *gîtuirea la rupere* ψ sau *coeficientul de stricțiune*, care este raportul dintre cantitatea cu care s-a redus secțiunea transversală a unei epruvete în locul de rupere și secțiunea ei inițială, exprimată în procente:

$$\psi = \frac{A_0 - A_r}{A_0} 100 \ [\%]; \tag{III.32}$$

— *modulul de elasticitate*, E, care este valoarea tangentei trigonometrice a unghiului pe care-l face tangenta geometrică într-un punct oarecare al curbei caracteristice cu axa absciselor, respectiv

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \tag{III.33}$$



$+\sigma$, daN/cm2
tg α = E = 2 100 000 daN/cm2
Compresiune
Întindere
Oțel moale
a
$+\sigma$, daN/cm2
tg α = E = 142 000 daN/cm2
Compresiune
Întindere
Lemn de molid
b
$+\sigma$, daN/cm2
Compresiune
Întindere
Granit
c
$+\sigma$, daN/cm2
Compresiune
Întindere
Duraluminiu
d

Fig. III.14

Legea de variație a lui ε în funcție de σ se poate exprima prin relația generală

$$\varepsilon = \alpha\sigma^n \tag{III.34}$$

în care α este *coeficientul de alungire* și n o constantă, ambele depinzînd de material.

În funcție de forma curbei caracteristice, materialele se împart în *materiale care ascultă de legea lui Hooke*, cel puțin pe o anumită porțiunea a curbei lor caracteristice, pentru care $n = 1$, și *materiale care nu ascultă de legea lui Hooke*, pentru care $n \neq 1$ (fig. III.15).

În problemele de rezistența materialelor în domeniul elastic, ca și în teoria elasticității, se admite legătura liniară dintre eforturile unitare și deformațiile specifice:

— pentru eforturi unitare normale (III.29)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon;$$

— pentru eforturi unitare tangențiale

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{III.35}$$

în care E este *modulul de elasticitate longitudinal* iar G *modulul de elasticitate transversal*. Unei lungiri specifice ε produsă în direcția efortului unitar normal σ îi corespunde o *contracție transversală* ε_t normală pe ε (fig. III.16), dată de relația

$$\varepsilon_t = -\frac{\varepsilon}{m} = -\mu\varepsilon, \tag{III.36}$$

în care m este *constanta lui Poisson*, iar μ *coeficientul de contracție transversală* sau *coeficientul lui Poisson*.

Cele două module de elasticitate E și G și coeficientul lui Poisson μ, formează *constantele elastice ale materialelor*, avînd valori diferite de la un material la altul.

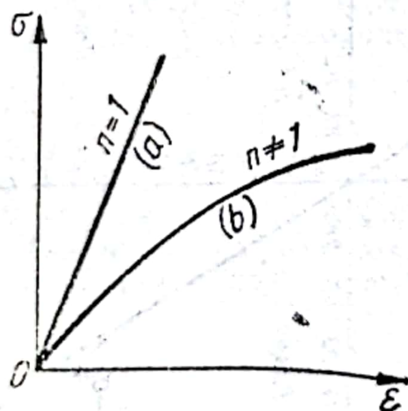


Fig. III.15

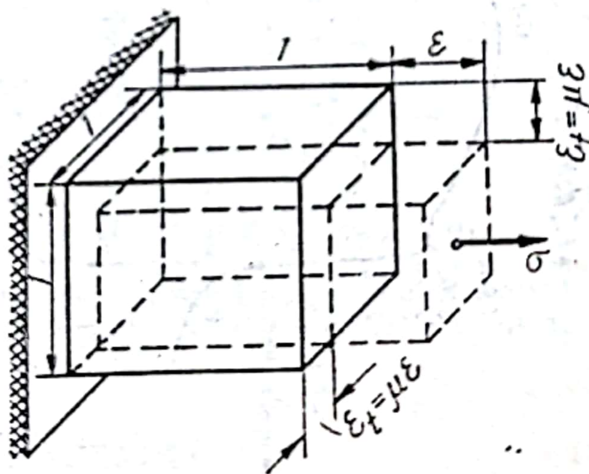


Fig. III.16

Pentru materiale liniar elastice, omogene și izotrope, între constantele de elasticitate există *relația de izotropie*, care se scrie

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{III.37}$$

deci numai *două constante elastice sînt independente*.

În tabelul III.3 sînt date expresiile uneia dintre constantele de elasticitate în funcție de celelalte două.

Tabelul III.3

Relații între constantele de elasticitate pentru materialele izotrope

Modulul de elasticitate longitudinal	$E = 2(1 + \mu)G$
Modulul de elasticitate transversal	$G = \dfrac{E}{2(1 + \mu)}$
Coeficientul lui Poisson	$\mu = \dfrac{E}{2G} - 1$
Modulul de volum K	$K = \dfrac{E}{3(1 - 2\mu)} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1 + \mu}{1 - 2\mu}G$

Valorile constantelor elastice și coeficienții de dilatare termică liniară, pentru unele materiale folosite în construcții, sînt date în tabelul III.4.

1.4.3.2. **Legea generalizată a lui Hooke. Ecuațiile fizice.** Admițînd că între tensorul deformațiilor specifice și tensorul eforturilor unitare există o legătură liniară biunivocă, respectiv că este valabilă legea generalizată a lui Hooke

$$T_\varepsilon = f[T\sigma] \tag{III.38}$$

se pot suprapune deformațiile specifice pe o direcție produse de eforturile unitare care lucrează pe mai multe direcții; în consecință se poate scrie

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z)\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y).
\end{aligned} \tag{III.39}$$

(S-a admis că eforturile unitare σ sînt pozitive, respectiv de întindere, iar deformațiile specifice sînt alungiri).

Relațiile (III.39) exprimă *legea generalizată a lui Hooke.*

În mod analog, există și relațiile

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}. \tag{III.40}$$

În tabelul III.5 sînt redate relațiile dintre eforturile unitare și deformațiile specifice și invers, pentru diferite stări de eforturi, funcție de constantele de elasticitate.

Tabelul III.4

Valorile lui E, G, μ și coeficienții de dilatare termică liniară α_t pentru unele materiale uzuale (la temperatura mediului ambiant)

Denumirea materialelor	Modulul de elasticitate longitudinal E, daN/cm²	Modulul de elasticitate transversal G, daN/cm²	Coeficientul lui Poisson μ	Coeficientul de dilatare termică liniară α_t
Oțel cu conținut redus de carbon (oțel moale)	$(2,0 - 2,15) \cdot 10^6$	$(7,8 - 8,5) \cdot 10^5$	0,24–0,28	$12 \cdot 10^{-6}$
Oțel cu conținut mare de carbon	$(2,0 - 2,2) \cdot 10^6$	$8,5 \cdot 10^5$	0,25–0,29	$11,7 \cdot 10^{-6}$
Fontă cenușie, albă, forjabilă	$(1,0 - 1,6) \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	0,23–0,27	$10 \cdot 10^{-6}$
Fontă	$(0,9-1,6) \cdot 10^6$	—	—	$10,4 \cdot 10^{-6}$
Cupru	$(1,1-1,3) \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	—	$16,5 \cdot 10^{-6}$
Bronz	$1,1 \cdot 10^6$	—	—	$17,5 \cdot 10^{-6}$
Alamă	$(0,8-1,0) \cdot 10^6$	$(3,5-3,7) \cdot 10^5$	0,32–0,42	$18,4 \cdot 10^{-6}$
Aliaje de aluminiu	$(0,67-0,72) \cdot 10^6$	$(2,4-2,7) \cdot 10^5$	0,32–0,36	—
Duraluminiu	$(0,7-0,75) \cdot 10^6$	$(2,6-2,7) \cdot 10^5$	—	$23,5 \cdot 10^{-6}$
Nichel	$2,0 \cdot 10^6$	$7,5 \cdot 10^5$	0,33	$13 \cdot 10^{-6}$
Zinc laminat	$0,84 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	0,27	$16,5 \cdot 10^{-6}$
Cositor	$0,2 \cdot 10^6$	$0,7 \cdot 10^5$	0,42	$26,7 \cdot 10^{-6}$
Calcar, granit	$(0,42-0,49) \cdot 10^6$	—	—	$(7-9) \cdot 10^{-6}$
Zidărie de cărămidă	$(0,027-0,030) \cdot 10^6$	—	—	—
Zidărie de calcar	$0,06 \cdot 10^6$	—	—	—
Beton în limitele de rezistență 100–200 daN/cm²	$(0,15-0,23) \cdot 10^6$	—	0,16–0,18	$(8,8-10,4) \cdot 10^{-6}$
Beton armat obișnuit, elemente comprimate	$(0,18-0,43) \cdot 10^6$	—	—	$10 \cdot 10^{-6}$
Beton armat obișnuit, elemente încovoiate	$(0,11-0,27) \cdot 10^6$	—	—	—
Lemn în lungul fibrelor	$(9-14) \cdot 10^4$	$(4,5-6,5) \cdot 10^3$	—	$(4-6) \cdot 10^{-6}$
Lemn transversal fibrelor	$(0,4-1,0) \cdot 10^4$	$(4,5-6,5) \cdot 10^3$	—	—
Sticlă	$(50-60) \cdot 10^4$	$(21-23) \cdot 10^3$	0,24–0,27	$(0,5-8) \cdot 10^{-6}$
Bachelită	$(2-6) \cdot 10^4$	$(7-21) \cdot 10^3$	0,35–0,38	—
Celuloid	$(1,5-2,5) \cdot 10^4$	$(7-10) \cdot 10^3$	0,4	—
Cauciuc	$0,008 \cdot 10^4$	—	0,47	—
Gheață	$0,1 \cdot 10^{-6}$	$(0,28-0,30) \cdot 10^5$	—	—

Tabelul III.5

Relații între eforturi unitare și deformații specifice în domeniul elastic pentru diferite stări de eforturi unitare

În tabel s-au utilizat următoarele notații:

Efortul unitar mediu $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$; deformația specifică medie $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$; deformația specifică de volum $\varepsilon_v = 3\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; E, G, μ, respectiv modulul de elasticitate longitudinal, modulul de elasticitate transversal, coeficientul lui Poisson; $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ modulul de volum.

Formulele pentru eforturile unitare principale și deformațiile specifice principale în cazurile 3—5, se obțin înlocuind în expresiile lui σ și ε indicii x, y, z cu 1, 2, 3, anulind totodată termenii care conțin pe τ și γ.

Felul stării de eforturi și specificația eforturilor unitare și deformațiilor specifice ce au loc	Expresia eforturilor unitare în funcție de deformațiile specifice	Expresia deformațiilor specifice în funcție de eforturile unitare
1	2	3
1. *Stare liniară de eforturi unitare*	Efortul unitar principal $\sigma_1 = \sigma_x = E\varepsilon_x = 3K\varepsilon_v$ Efortul unitar tangențial pe planuri ce nu coincid cu direcția eforturilor principale $\tau_n = G\gamma_{n,n_1}$ unde γ_{n,n_1} este variația unghiului inițial drept între direcția n și normala n_1 la această direcție (v. tabelul III.1)	Deformația specifică principală longitudinală $\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ Deformația specifică transversală (în sens perpendicular pe direcția deformației principale $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$) $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{\sigma_x}{E}$ Deformația specifică de volum $\varepsilon_v = (1-2\mu)\frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{3K}\sigma_x$; $\gamma_n = \frac{\tau_n}{G}$

Tabelul III.5 (continuare)

1	2	3
2. *Întindere sau compresiune uniformă după trei direcții* $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$; $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$	Eforturile unitare sînt egale după toate direcțiile $\sigma_m = 3K\varepsilon_m$	Deformațiile specifice principale sînt egale după toate direcțiile $\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{3K}$ Deformația specifică de volum $\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K}$
3. *Stare plană de eforturi unitare (în planul xOy).* Eforturile unitare principale și deformațiile specifice principale (în plan)	Componentele efortului unitar $\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$ $\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	Componentele deformației specifice $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ Deformația specifică de volum $\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K}$, în care $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$

Tabelul III.5 (continuare)

1	2	3
4. *Stare plană de deformație (în planul xOy).* Eforturile unitare și deformațiile principale în planul xOy. σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ și ε_x, ε_z, γ_{xz}; ($\varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$ $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$) $\sigma_y = \mu(\sigma_x + \sigma_z)$	Deformațiile specifice ε_x, ε_y, γ_{xy} se consideră compuse din două deformații: deformația specifică de volum (deformația tensorului sferic) și deformația deviatorului deformației (lunecare pură). Componentele eforturilor unitare $\sigma_x = 3K\,\varepsilon_m + 2\,G(\varepsilon_x - \varepsilon_m)$; $\sigma_z = 3K\,\varepsilon_m + 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_m)$; $\sigma_y = \mu(\sigma_x + \sigma_z)$; $\tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}$. Primul termen din expresiile σ_x și σ_y corespunde deformației specifice de volum, cel de-al doilea lunecării pure	Componentele deformației specifice $\varepsilon_x = \frac{1+\mu}{E}[(1 - \mu)\,\sigma_z - \mu\sigma_y]$ $\varepsilon_y = \frac{1+\mu}{E}[(1 - \mu)\sigma_z - \mu\sigma_x]$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$. Deformația specifică de volum $\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K}$
5. *Stare spațială de eforturi unitare (caz general)* σ_x, σ_y, σ_z și τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} ε_x, ε_y, ε_z și γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}	Deformațiile specifice ε_x, ε_y, ε_z și $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ se consideră compuse din două deformații, ca la pct. 4. Componentele efortului unitar $\sigma_x = 3\,K\varepsilon_m + 2\,G(\varepsilon_x - \varepsilon_m)$ $\sigma_y = 3\,K\varepsilon_m + 2\,G(\varepsilon_y - \varepsilon_m)$ $\sigma_z = 3\,K\varepsilon_m + 2\,G(\varepsilon_z - \varepsilon_m)$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$ $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ Primul termen din expresiile σ_x, σ_y, σ_z corespunde deformației specifice de volum, cel de-al doilea lunecării pure.	Componentele deformației $\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$ $\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

Tabelul III.5 (continuare)

1	2	3
	Relația între σ_m și ε_v $$\sigma_m = K\varepsilon_v.$$ Relația dintre mărimea efortului unitar ideal σ_i și mărimea deformației specifice ideale ε_i $$\sigma_i = 3\,G\varepsilon_i$$ în care:	$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$ $$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$ $$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_m}{K}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

1.4.4. Lucrul mecanic. Energie de deformație. Teoremele energetice. Se definesc următoarele noțiuni:

1.4.4.1. Lucrul mecanic exterior. Lucrul mecanic exterior este lucrul mecanic produs de forțele exterioare care acționează corpurile elastice. Pentru *un caz complex de solicitări* el are expresia

$$L_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}(F_{ix}u_i + F_{iy}v_i + F_{iz}w_i) + \frac{1}{2}\int_A (p_x u + p_y v + p_z w)\,dA \qquad \text{(III.41)}$$

în care: F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} sînt componente după direcțiile axelor ale forței F_i; u_i, v_i, w_i — componentele de pe axe ale deplasării punctului de aplicație al forței F_i; p_x, p_y, p_z — componentele de pe axe ale sarcinii repartizate p.

Factorul 1/2 din fața termenilor care intervin, rezultă din faptul că deplasările punctelor de aplicație ale forțelor exterioare cresc odată cu creșterea forțelor.

1.4.4.2. Lucrul mecanic interior. Lucrul mecanic interior al unui corp elastic este lucrul mecanic produs de eforturile unitare prin deformațiile specifice corespunzătoare, care se nasc în interiorul corpului sub influența acțiunilor ce îl solicită.

Lucrul mecanic specific, într-un punct din interiorul unui corp, este lucrul mecanic corespunzător unității de volum din acel punct și are expresia generală:

$$L_1 = -\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \qquad \text{(III.42)}$$

Lucrul mecanic elementar este lucrul mecanic corespunzător unui element de volum $dx\,dy\,dz$, de coordonate x, y, z din interiorul unui corp, iar *lucrul mecanic total*, este lucrul mecanic interior, corespunzător întregului corp.

Expresia lucrului mecanic interior total, în funcție de eforturile unitare și deformațiile specifice, este :

$$L_i = -\frac{1}{2}\iiint(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})\,dx\,dy\,dz. \quad \text{(III.43)}$$

Semnul minus dinaintea termenilor din partea a doua a expresiilor de mai înainte apare din cauză că în mecanica corpurilor deformabile, eforturile unitare sînt de sens contrar cu deformațiile specifice, produse de acțiunile exterioare.

1.4.4.3. Energia de deformație *Energia potențială de deformație U* a unui corp este energia înmagazinată de corp prin deformare, în urma acțiunilor ce lucrează asupra lui, și se exprimă prin relația :

$$U_i = -L_{int}. \quad \text{(III.44)}$$

Energia corespunzătoare unității de volum dintr-un punct al unui corp numită *energia potențială specifică de deformație*, pentru o stare generală tridimensională de solicitări, se poate exprima prin una din următoarele relații :

— în funcție de eforturile unitare și deformațiile specifice :

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}); \quad \text{(III.45a)}$$

— în funcție numai de eforturile unitare :

$$U_1 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \quad \text{(III.45b)}$$

— în funcție numai de deformațiile specifice :

$$U_1 = G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]. \quad \text{(III.45c)}$$

În funcție de eforturile unitare principale, energia specifică de deformație se deduce direct din relația (III.45b) și are expresia :

$$U_1 = \frac{1}{2E}[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad \text{(III.46)}$$

Ținînd seama de relațiile (III.11) rezultă că prima paranteză din membrul doi este invariantul întîi $I_1(T_\sigma)$ iar a doua, invariantul al doilea $I_2(T_\sigma)$ al tensorului eforturilor unitare, și deci :

$$U_1 = \frac{1}{2E}[I_1^2(T_\sigma) - 2(1+\mu)I_2(T_\sigma)]. \quad \text{(III.47)}$$

În tabelul III.6 sînt redate expresiile energiei potențiale specifice de deformație U_1, pentru diferite stări de eforturi unitare.

Tabelul III.6

Energia potențială specifică de deformație pentru diferite stări de eforturi unitare

Energia potențială specifică U_1 pentru unitatea de volum din jurul unui punct în cazul deformațiilor elastice; E, G și μ-modulul de elasticitate longitudinal, modulul de elasticitate transversal, coeficientul lui Poisson; $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ — modulul de volum, $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ — deformația specifică volumică.

Energia potențială U_1 în cazurile 2 și 3 se exprimă prin eforturile unitare principale sau prin deformațiile specifice principale, înlocuindu-se indicii x, y, z pentru σ și ε cu indicii 1, 2, 3 și anulînd termenii ce conțin pe τ și γ.

Tipul stării de efort unitar și simbolul deformațiilor principale	Valoarea U_1 exprimată în deformații specifice	Valoarea U_1 exprimată în eforturi unitare
1. *Stare liniară de efort unitar (după axa Ox)*: σ_x și ε_x	$\frac{E\varepsilon_x^2}{2}$	$\frac{\sigma_x^2}{2E}$
2. *Lunecare pură (în planul xOy)* $\sigma_x = -\sigma_y = \tau_{xy}$; $\sigma_z = 0$ $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2}$; $\varepsilon_z = 0$	$\frac{G\gamma_{xy}^2}{2}$	$\frac{\tau_{xy}^2}{2G}$
3. *Stare plană de efort unitar în planul xOy*: σ_x, σ_y; $\sigma_z = 0$ și ε_x, ε_y; $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$	$\left(\frac{K}{2} - \frac{G}{3}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + \frac{G}{2}\gamma_{xy}^2$	$\frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2$
4. *Stare spațială de efort unitar (caz general)* σ_x, σ_y, σ_z și ε_x, ε_y, ε_z	$G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]$	$\frac{1}{4G}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]$

Tabelul III.6 (continuare)

Tipul stării de efort unitar şi simbolul deformaţiilor principale	Valoarea U_1 exprimată în deformaţii specifice	Valoarea U_1 exprimată în eforturi unitare
	U_1 poate fi reprezentat ca sumă a energiei potenţiale de variaţie a volumului	U_1 poate fi reprezentat ca sumă a energiei potenţiale de variaţie a volumului
	$U_1^v = \frac{K\varepsilon_v^2}{2}$	$U_1^v = \frac{\sigma_m^2}{2K}$
	şi a energiei potenţiale de variaţie a formei	şi a energiei potenţiale de variaţie a formei
	$U_1^D = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i = 3G\gamma^2;$	$U_1^D = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i = \frac{3}{2}\frac{\tau^2}{2G}$
	$U_1 = U_1^v + U_1^D = \frac{K\varepsilon_v^2}{2} + 3G\gamma^2$	$U_1 = U_1^v + U_1^D = \frac{\sigma_m^2}{2K} + \frac{3}{2}\frac{\tau^2}{2G}$
	în care:	în care:
	$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$	$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$
	(variaţia specifică a volumului)	(efortul unitar mediu normal)

$$\tau = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

(efortul unitar tangenţial octaedric)

$$\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

(deformaţia specifică octaedrică)

Tensorul eforturilor unitare T_σ putînd fi descompus în tensorul sferic $T_{\sigma m}$ şi tensorul deviator, sau deviatorul, D_σ(v. pct. 1.4.1.7), rezultă că energia totală specifică de deformaţie poate fi descompusă în:

— *energia specifică de variaţie a volumului*, fără schimbarea formei, care are expresia

$$U_1^v = \frac{1}{2E}[I_1^2(T_\sigma) - 2(1 + \mu)I_2(T_\sigma)] = \frac{1 - 2\mu}{6E} I_1^2(T_\sigma) = \frac{3(1-2\mu)^2}{2E}\sigma_m^2 \quad \text{şi} \qquad \text{(III.48)}$$

— *energia specifică de schimbare a formei,* fără schimbarea volumului, numită și *energia specifică de deviație,* care se scrie:

$$U_1^D = \frac{1+\mu}{3E}\left[I_1^2(T_\sigma) - 3I_2(T_\sigma)\right] = \frac{2(1+\mu)}{3E}(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2) \qquad (III.49)$$

în care $I_1(T_\sigma)$ și $I_2(T_\sigma)$ sînt invarianții 1 și 2 ai eforturilor unitare din relațiile (III.11b) și (III.11c), τ_1, τ_2 și τ_3 au expresiile (III.10), iar $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$.

1.4.5. Teoremele energetice. Se enunță următoarele trei teoreme.

1.4.5.1. Teorema lui Clapeyron. Se deduce direct din relația *energetică fundamentală a unui corp elastic*

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = L_{ext} - U_i\,. \qquad (III.50)$$

în care: $\mathscr{E}$ — este energia cinetică finală; $\mathscr{E}_0$ — energia cinetică inițială; L_{ext} — lucrul mecanic exterior; U_i — energia potențială de deformație produsă de eforturile unitare.

Pentru solicitări statice, viteza de deformare fiind neglijabilă, rezultă relația (III.44)

$$L_{ext} = U_i$$

relație care exprimă *teorema lui Clapeyron,* care se enunță: *pentru corpurile elastice în repaus, lucrul mecanic al forțelor exterioare este egal cu energia potențială de deformație acumulată de corp prin deformare.*

1.4.5.2. *Teoremele lui Castigliano.* Derivînd relația (III.45b) în raport cu un efort unitar oarecare, de exemplu σ_x sau τ_{xy}, rezultă:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y+\sigma_z)] = \varepsilon_x \qquad (III.51a)$$

respectiv

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy}, \qquad (III.51b)$$

relații care reprezintă prima teoremă a lui Castigliano și care se enunță: *derivata parțială a energiei potențiale specifice de deformație U_1, în raport cu o componentă a unui efort unitar, este egală cu deformația specifică pe direcția acelui efort unitar.*

Derivînd relația (III.45c) în raport cu o deformație specifică oarecare, de exemplu ε_x sau γ_{xy}, se obține:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = \sigma_x \qquad (III.52a)$$

respectiv

$$\frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} = G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \qquad (III.52b)$$

relaţie care exprimă cea de a doua teoremă a lui Castigliano şi care se enunţă: *derivata parţială a energiei potenţiale specifice de deformaţie, în raport cu componenta unei deformaţii specifice, este egală cu efortul unitar corespunzător acelei deformaţii.*

1.4.6. Principiul deplasărilor virtuale. Teorema minimului energiei potenţiale de deformaţie. Prin *deplasare virtuală* — în cazul corpurilor deformabile — se înţelege o deformare (deplasare) infinit mică, aleasă arbitrar, însă compatibilă cu legăturile exterioare şi interioare de continuitate ale corpului.

Pe baza acestei definiţii, *principiul deplasărilor virtuale* aplicabil corpurilor deformabile elastice se enunţă: *lucrul mecanic virtual efectuat de toate forţele exterioare şi interioare ce acţionează asupra unui corp elastic în echilibru este nul pentru orice deplasare virtuală* şi se scrie:

$$\delta L_e + \delta L_i = 0. \tag{III.53}$$

Notînd cu δu, δv, δw componentele de pe cele trei axe ale deplasărilor virtuale ale unui punct al corpului, *lucrul mecanic virtual al forţelor exterioare* are expresia

$$\delta L_e = (F_{ix}\delta u_i + F_{iy}\delta v_i + F_{iz}\delta w_i) + \iint (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w)\, dA \tag{III.54a}$$

iar *lucrul mecanic virtual al forţelor interioare*:

$$\delta L_i = -\iiint (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})\, dx\, dy\, dz. \tag{III.54b}$$

Trecînd de la lucrul mecanic virtual la energia potenţială totală, notată π, rezultă

$$\delta\pi = \delta(U_e + U_i) = 0$$

care exprimă *teorema minimului energiei potenţiale totale de deformaţie* şi care se enunţă: *pentru poziţia de echilibru energia potenţială totală a unui sistem elastic are o valoare extremă: maximă sau minimă.* În cazul echilibrului stabil, energia potenţială este minimă ($\delta^2\pi = \delta^2 U_i > 0$ condiţia de minimum pentru π).

1.4.7. Deformaţii plastice. Relaţii fundamentale în teoria plasticităţii[1]**.** În continuare se dau diagramele caracteristice reale şi schematizate şi criteriile de plasticitate.

1.4.7.1. Diagrame caracteristice reale şi schematizate. În rezistenţa clasică a materialelor şi în teoria elasticităţii se admite o legătură liniară $\sigma - \varepsilon$, pînă la o anumită valoare a lui σ.

Dincolo de zona liniară, respectiv de limita de proporţionalitate, curba caracteristică poate avea diferite forme, depinzînd de natura materialului.

Din acest punct de vedere se disting:

— materiale *casante sau fragile* la care dincolo de limita de proporţionalitate diagrama caracteristică prezintă o uşoară curbă, după care urmează imediat ruperea (fig. III. 17,*a*), care are loc brusc, fără deformaţii permanente vizibile; exemple: oţelurile dure, fonta, betoanele şi rocile dure (ultimele două numai la întindere);

— materiale *tenace sau ductile* la care, după limita de proporţionalitate urmează o mică zonă curbă, apoi un *palier de curgere*, zonă în care deformaţiile cresc, fără ca eforturile unitare să crească. În continuare, urmează zona de consolidare în care rezistenţele cresc tot după o curbă, urmînd apoi ruperea (fig. III.17,*b*); exemple: oţelurile moi, aluminiul, aliajele de aluminiu, plumbul etc.;

---

[1]) Calculul construcţiilor în domeniul plastic este tratat detaliat în secţiunea V a Manualului.

— materiale *plastice* la care, de la o anumită valoare a eforturilor unitare, deformațiile cresc continuu la creșteri foarte mici ale eforturilor, după care urmează ruperea (fig. III.17,*c*); exemple: argilele, unele materiale plastice etc.

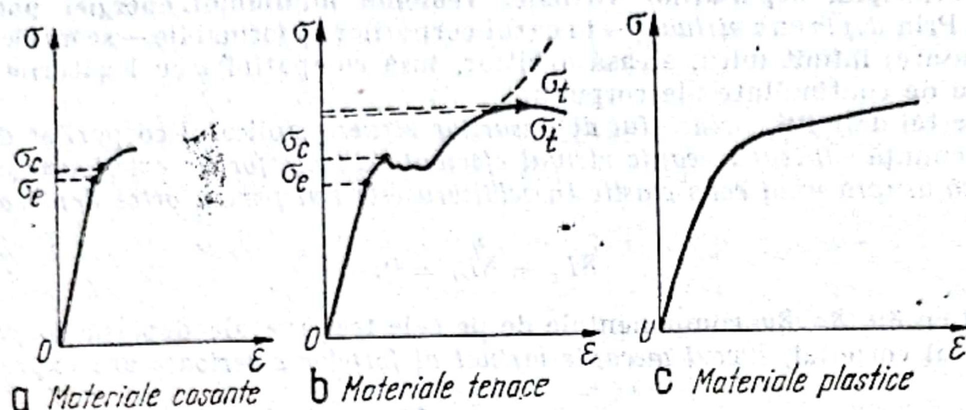


Fig. III.17

Pentru calculele inginerești curbele caracteristice reale, greu de exprimat analitic, se reprezintă prin *curbe caracteristice schematizate*, arătate în fig. III.18.

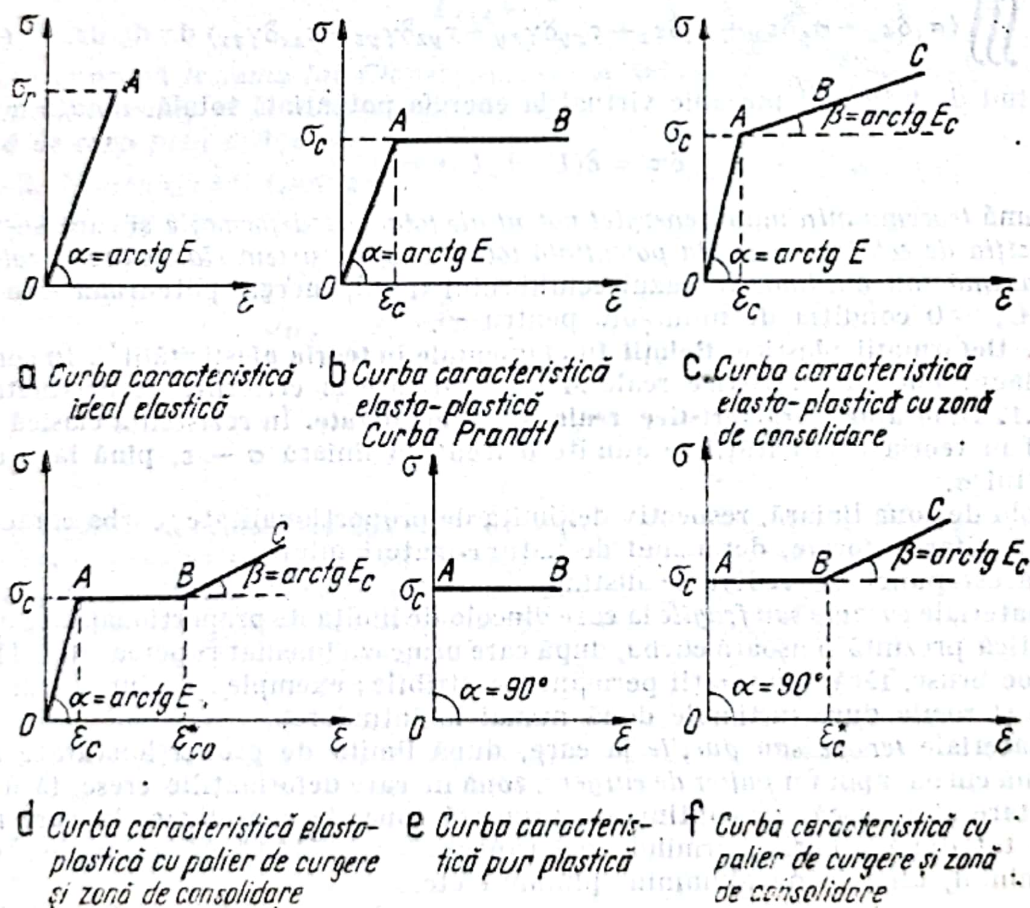


Fig. III.18

În tabelul III.7 sînt date relațiile dintre efortul unitar normal σ și deformația specifică ε pentru diferitele zone ale curbelor caracteristice schematizate din fig. III.18.

Tabelul III.7

Relații între σ și ε pentru diferitele segmente ale curbelor caracteristice schematizate (v. fig. III.18)

Segmentul		Corp elasto-plastic		Corp rigid-plastic	
Notația	Mod de comportare	Relația $\sigma - \varepsilon$	Condiția de deformație	Relația $\sigma - \varepsilon$	Condiția de deformație
OA	Comportare elastică	$\sigma = E\varepsilon$	$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_A$	$E \to \infty$ corp rigid	—
AB	Palier de curgere	$\sigma = \sigma_c$	$\varepsilon \geqslant \varepsilon$	$\sigma = \sigma_c$	—
ABC	Ecruisare	$\sigma = \sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c)$	$\varepsilon \geqslant \varepsilon_c$	$\sigma_c = \sigma_c + E_p\varepsilon$	—
BC	Ecruisare după depășirea palierului de curgere	$\sigma = \sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c^{\bullet})$	$\varepsilon > \varepsilon_c$	$\sigma = \sigma_c + E_p(\varepsilon - \varepsilon_c^{\bullet})$	$\varepsilon > \varepsilon_c^{\bullet}$

Notații: σ este efortul unitar; σ_c — limita de curgere;
ε — deformația specifică; ε_c — deformația specifică la limita de curgere; $\varepsilon_c^{\bullet}$ — deformația specifică la sfîrșitul palierului de curgere; $E = \operatorname{tg} \alpha$ — modulul de elasticitate; $E_p = \operatorname{tg} \beta$ — modulul de plasticitate.

1.4.7.2. Criterii de plasticitate. Prin *criterii de plasticitate* se înțelege starea de eforturi unitare pentru care apare curgerea plastică într-un punct al unui corp dintr-un anumit material, supus unor solicitări complexe.

Pentru stări de eforturi unitare monoaxiale, curgerea plastică începe cînd efortul unitar principal $\sigma = \sigma_1$ atinge limita de curgere a materialului supus la întindere sau compresiune simplă.

Pentru stări poliaxiale de eforturi unitare se folosesc în general trei criterii de plasticitate, toate admițînd că materialele corespund curbei Prandtl (v. fig. III.18, *b*). Aceste criterii sînt:

1) *Criteriul efortului unitar tangențial maxim* sau *criteriul lui Saint Vennant*, care admite că *fenomenul de curgere apare într-un material atunci cînd efortul unitar tangențial maxim atinge o valoare critică, egală cu aceea a efortului unitar tangențial maxim ce apare la încercarea de întindere sau compresiune simplă.* Pe baza acestei ipoteze, criteriul de plasticitate se scrie

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c \tag{III.55}$$

în care: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ sînt eforturile unitare normale principale, iar σ_c este limita de curgere la întindere sau compresiune.

2) *Criteriul lucrului mecanic de schimbare a formei sau criteriul Huber — Mises — Hencky* admite că *fenomenul de curgere este produs numai de lucrul mecanic de schimbare a formei.*

Acest criteriu de plasticitate se exprimă prin relația

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sigma_c \tag{III.56}$$

Relația (III.56) dă o corespondență bună cu rezultatele experimentale.

Introducînd noțiunea de *efort unitar tangențial octaedric*, criteriul de mai înainte se mai poate enunța : *deformațiile plastice ale unui material încep în momentul cînd efortul unitar tangențial octaedric atinge o anumită valoare constantă, caracteristică fiecărui material*, exprimată prin relația

$$\tau_{oct}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{\tau_3^2+\tau_1^2+\tau_2^2}=\tau_c. \tag{III.57}$$

3) *Criteriul efortului unitar generalizat sau criteriului lui A.A. Iliușin* care admite că *deformațiile plastice ale unui material încep în momentul cînd efortul unitar generalizat σ_{ig} atinge limita de curgere a materialului σ_c* și are expresia

$$\sigma_{ig}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{2(\tau_3^2+\tau_1^2+\tau_2^2)}=\sigma_c. \tag{III.58}$$

Se precizează că pentru solicitări dincolo de limita de curgere $\mu = 0{,}50$.

1.4.8. Ipoteze de rezistență. Ipotezele de rezistență permit stabilirea limitei de rezistență pentru stări bi și triaxiale de eforturi unitare.

1.4.8.1. Conceptul ipotezelor de rezistență. Efort unitar echivalent. Prin ipoteze de rezistență, numite și *teorii de rezistență*, se înțeleg ipotezele care se fac în vederea stabilirii condițiilor în care se atinge *starea limită de rezistență* într-un punct al unui corp supus unor acțiuni cunoscînd starea limită de rezistență la întindere sau compresiune simplă a materialului din care este făcut corpul.

Prin *stare limită de rezistență a unui material* se înțelege atingerea eforturilor unitare limită σ_l de la care materialul își pierde capacitatea de a mai fi exploatat sau de a mai rezista și care, pentru materiale tenace, se consideră limita de curgere a materialului, iar pentru materiale casante, rezistența de rupere la întindere, respectiv la compresiune simplă.

Starea limită a unui material poate fi definită prin : eforturile unitare σ, respectiv τ, care pot fi exprimate și prin deformațiile specifice ε și γ, prin energia potențială specifică de deformație U_1 și prin energia potențială specifică de schimbare a formei. În consecință, au fost emise cinci ipoteze de rezistență, așa-numite clasice, fiecare din ele fiind exprimată prin factorul hotărîtor în atingerea stării limită de rezistență. În afară de „teoriile clasice" s-au mai emis o serie de variante, aplicabile în general în anumite cazuri speciale sau pentru anumite materiale. Pentru fiecare teorie va exista o funcție de forma :

$$f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_{lr})=0 \tag{III.59}$$

în care: σ_{lr} este limita de rezistență avută în vedere (σ_c, σ_r sau σ_a). Aceste funcții pot fi reprezentate în spațiu într-un sistem de axe: $\sigma_1 \to x$; $\sigma_2 \to y$; $\sigma_3 \to z$ printr-o *suprafață limită* (*S*) numită *suprafața Beker sau Westergaard*, fiecare caracteristică ca formă uneia din ipoteze.

Pentru stări plane de eforturi unitare, suprafața limită (*S*) se reduce la o curbă limită (*C*).

Un punct *P* determinat de trei eforturi unitare principale σ_1, σ_2, σ_3, date, situat în interiorul suprafeței limită (*S*) reprezintă o stare de eforturi posibilă. Dacă punctul *P* este situat pe suprafața (*S*), rezultă o stare limită, iar dacă este situat în afară reprezintă o stare imposibilă ce a depășit starea limită.

Cercetările experimentale arată că nici una din ipoteze nu are o valoare generală, unele din ele corespund mai bine unor materiale și solicitări, în timp ce altele corespund mai bine pentru alte materiale și solicitări.

Verificarea limitei de rezistență într-un punct al unui corp solicitat oricum, se face calculînd, pentru starea de eforturi unitare din acel punct, și pe baza ipotezei de rezistență admisă, un efort unitar convențional, monoaxial, numit *efort unitar echivalent*, σ_{ech}, care se compară cu rezistența limită a materialului σ_{lr} (fig. III.19).

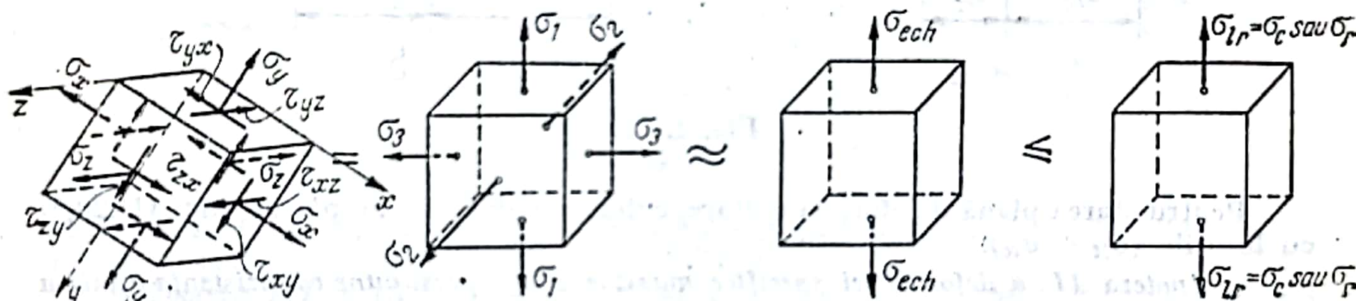


Fig. III.19

Relația de verificare avînd expresia

$$\sigma_{ech} \leqslant \sigma_{lr}. \qquad \text{(III.60a)}$$

Pentru calculele practice formula de verificare devine

$$\sigma_{echef} \leqslant \sigma_a \text{ sau } \sigma_{aech} \qquad \text{(III.60b)}$$

1.4.8.2. Ipotezele (teoriile) de rezistență. Se enunță următoarele ipoteze:

1) *Ipoteza I, a efortului unitar normal maxim* σ_{max}, admite că *starea limită de rezistență a materialului, într-un punct al unui corp, este atinsă cînd efortul unitar normal maxim* $+\sigma_{1max}$ de întindere, *sau minim* $-\sigma_{3min}$ de compresiune, *din acel punct, atinge rezistența limită la întindere, respectiv la compresiune simplă a materialului din care este făcut corpul.* Conform acestei ipoteze, formulele de verificat rezultă:

$$\sigma_{ech} = +\sigma_{1max} \leqslant \sigma_{lt} \text{ sau } \sigma_{ech} = -\sigma_{3min} \leqslant \sigma_{lc} \qquad \text{(III.61)}$$

în care σ_{lt}, σ_{lc} sînt rezistențele limită la întindere, respectiv la compresiune.

Suprafața limită S este reprezentată din 3 perechi de cîte două planuri ce formează un cub avînd laturile $\sigma_{lt} + \sigma_{lc}$ (fig. III. 20,*a*).
Dacă $\sigma_{lc} > \sigma_{lt}$, centrul cubului este deplasat față de originea axelor de coordonate cu $(\sigma_{lc} - \sigma_{lt})/2$.

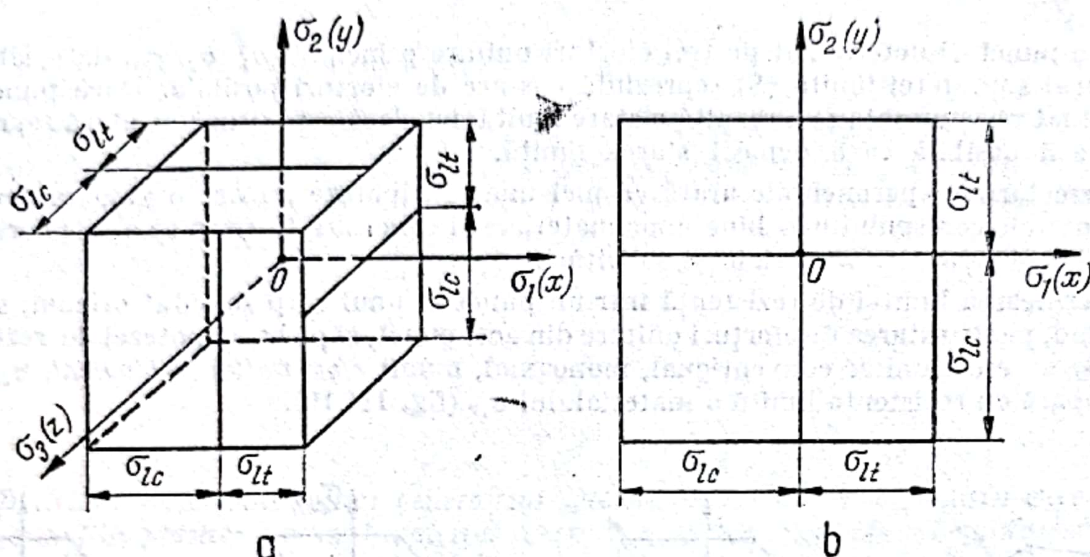


Fig. III.20

Pentru starea plană de eforturi unitare, cubul se reduce la un pătrat (fig. III.20,*b*) cu laturile $(\sigma_{lt} + \sigma_{lc})$.

2) *Ipoteza II, a deformației specifice maxime* ε_{max}, *presupune că rezistența limită a materialului într-un punct al unui corp este atinsă în momentul cînd alungirea specifică maximă* $|\varepsilon_{max}|$ *din acel punct atinge lungirea specifică limită* ε_l, *corespunzătoare rezistenței limită* σ_l *la întindere, sau la compresiune, respectiv cînd* $|\varepsilon_{max}| \leqslant \varepsilon_l$, în care $\varepsilon_{max} = \max |\varepsilon_1|;\ |\varepsilon_2|;\ |\varepsilon_3|$.

Pentru starea spațială ea se exprimă prin relația

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3)\right] \leqslant \varepsilon_l = \frac{1}{E}\,\sigma_l \qquad \text{(III.62a)}$$

de unde:

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3) \leqslant \sigma_l \qquad \text{(III.62b)}$$

în care μ este coeficientul lui Poisson. În această ipoteză se admite că $E_c = E_t$ respectiv $\varepsilon_c = \varepsilon_t$.

Pentru o stare plană de eforturi unitare relația devine:

$$\sigma_{ech\ max} = \left|\frac{1-\mu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1+\mu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right| \leqslant |\sigma_l|. \qquad \text{(III.62c)}$$

Suprafaţa limită $S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_l)$ delimitează un paralelipiped oblic alungit pe direcţia primei trisectoare şi care înţeapă axele de coordonate $x \to \sigma_1$; $y \to \sigma_2$; $z \to \sigma_3$, în aceleaşi puncte ca şi cubul din ipoteza I (fig. III.21,*a*).

Pentru starea plană de eforturi unitare, unul din cele trei eforturi unitare principale fiind nul, se obţine ca figură limită, un romb, (fig. III.21,*b*), laturile făcînd cu axele un unghi α dat de relaţia $\operatorname{tg} \alpha = \mu$

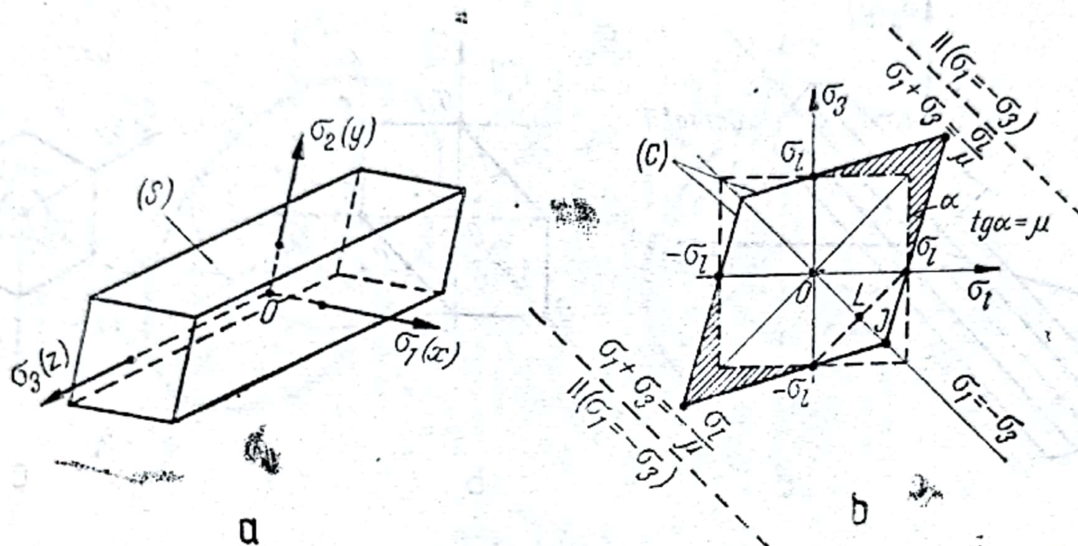


Fig. III.21

Ca şi ipoteza I, ipoteza II este o ipoteză de smulgere ce se aplică cu bune rezultate materialelor casante.

3) *Ipoteza III, a efortului unitar tangenţial maxim* τ_{max}, *presupune că starea limită de rezistenţă este atinsă, cînd efortul unitar tangenţial maxim* τ_{max} *într-un punct atinge valoarea efortului unitar tangenţial* τ_l *corespunzătoare rezistenţei limită la întindere sau la compresiune simplă.*

Pentru cazul stării plane de eforturi unitare la care $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ rezultă :

$$\tau_l = \frac{\sigma_l}{2} \cdot \tag{III.63}$$

Formula de verificare pentru starea spaţială de eforturi unitare are deci forma

$$\tau_{ech} = \tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leqslant \tau_l \tag{III.64a}$$

sau

$$|\sigma_{ech}^{(1,3)}| = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant |\sigma_l|. \tag{III.64b}$$

Pentru starea plană rezultă :

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{III.64c}$$

Din condiția $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_l$; $\sigma_1 - \sigma_3 = -\sigma_l$; $\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_l$ etc. rezultă că suprafața limită $S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_l)$ este limitată de trei perechi de cîte două plane paralele, toate planele fiind paralele cu dreapta trisectoare $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, respectiv că ea închide o prismă hexagonală, deschisă la capete, avînd drept axă longitudinală dreapta trisectoare din octanții *1* și *5*, ce trece prin originea axelor de coordonate (fig. III.22,*a*).

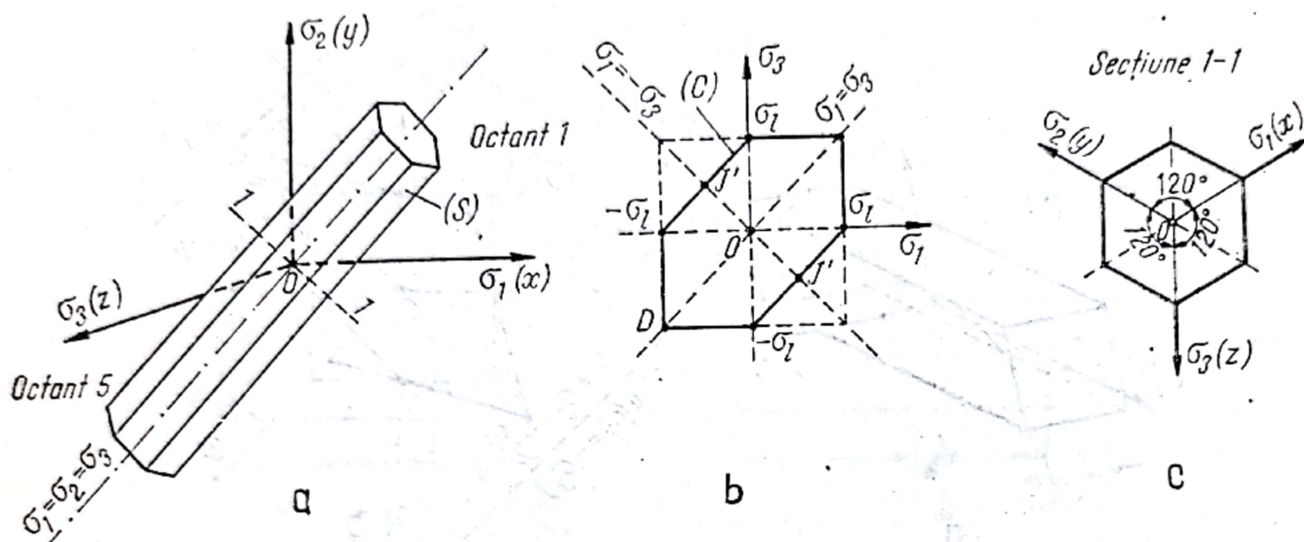


Fig. III.22

Pentru starea plană de eforturi unitare curba (*C*) se obține din intersecția prismei hexagonale cu unul din planele de referință (fig. III. 22, *b* și *c*).

Ipoteza III este o ipoteză de lunecare care dă rezultate bune în cazul materialelor tenace (oțeluri moi).

Ipoteza lui γ_{max} (prin relația $\gamma = \tau/G$) este identică cu ipoteza III.

4) *Ipoteza IV, a energiei potențiale specifice de deformație U_1, admite că starea limită de rezistență este atinsă, cînd energia potențială specifică maximă de deformație într-un punct al corpului, U_1, atinge valoarea energiei potențiale specifice de deformație corespunzătoare întinderii sau compresiunii simple U_{1l}.*

Pe baza acestei ipoteze, formula de verificare are forma

$$U_1 \leqslant U_{1l} \tag{III.65}$$

care, pentru starea spațială de eforturi unitare, se scrie:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \leqslant \sigma_l \tag{III.66a}$$

sau, în funcție de cele trei eforturi unitare principale,

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant \sigma_l \tag{III.66b}$$

respectiv

$$\sqrt{I_1^2(T_\sigma) - 2(1+\mu)I_2(T_\sigma)} \leqslant \sigma_l \tag{III.66c}$$

în care $I_1(T_\sigma)$ și $I_2(T_\sigma)$ sînt invarianții de ordinul 1 și 2 ai tensorului eforturilor unitare.

Formulele pentru stările plane și monoaxiale se deduc din cele de mai înainte anulînd termenii nuli.

Suprafața $S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_l) = 0$ este un elipsoid de rotație avînd ca axă de rotație prima trisectoare de ecuație $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (fig. III.23,*a*), iar curba limită $C(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_l) = 0$

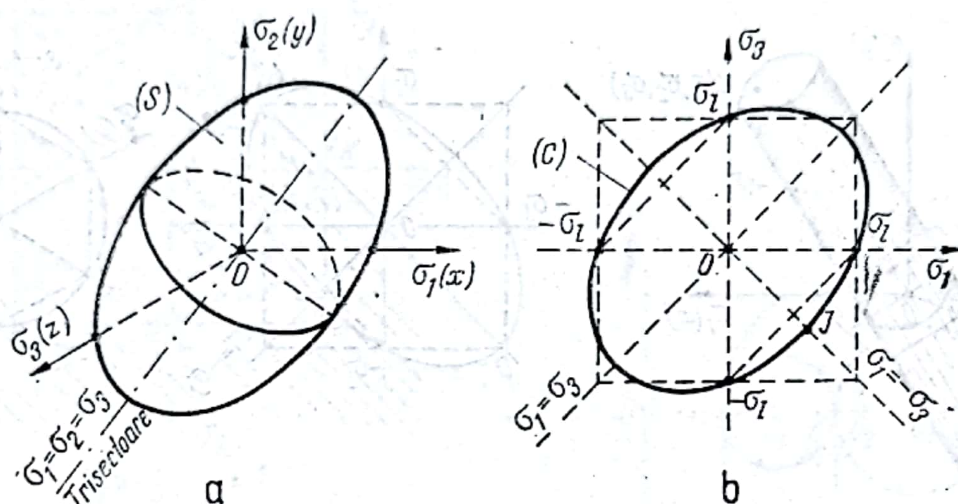


Fig. III.23

este o elipsă ce se obține prin intersecția suprafeței S cu unul din planurile $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ și $\sigma_3 = 0$, plane ce depind de starea de eforturi unitare considerată (fig. III.23, *b*).

Și această ipoteză este o ipoteză de smulgere ,care nu este însă folosită în practica inginerească.

5) *Ipoteza V, a energiei potențiale specifice de schimbare a formei, fără schimbarea volumului, respectiv a energiei potențiale specifice de deviație U_1^D, admite că limita de rezistență a materialului într-un punct al unui corp este atinsă cînd în acel punct energia potențială specifică de schimbare a formei depășește energia potențială specifică de schimbare a formei corespunzător solicitării la întindere, sau la compresiune simplă U_{1l}^D.*

În această ipoteză formula generală de verificare devine:

$$U_1^D \leqslant U_{1l}^D. \tag{III.67a}$$

Pentru starea tridimensională de eforturi unitare rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \leqslant \sigma_l \tag{III.67b}$$

sau, în funcție de eforturile unitare principale,

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant \sigma_l \tag{III.67c}$$

și deci

$$\sqrt{I_1^2(T_\sigma) - 3I_2(T_\sigma)} \leq \sigma_l. \tag{III.67d}$$

Suprafața (S) este un cilindru circular deschis la capete, avînd axa după prima trisectoare (fig. III.24,a).

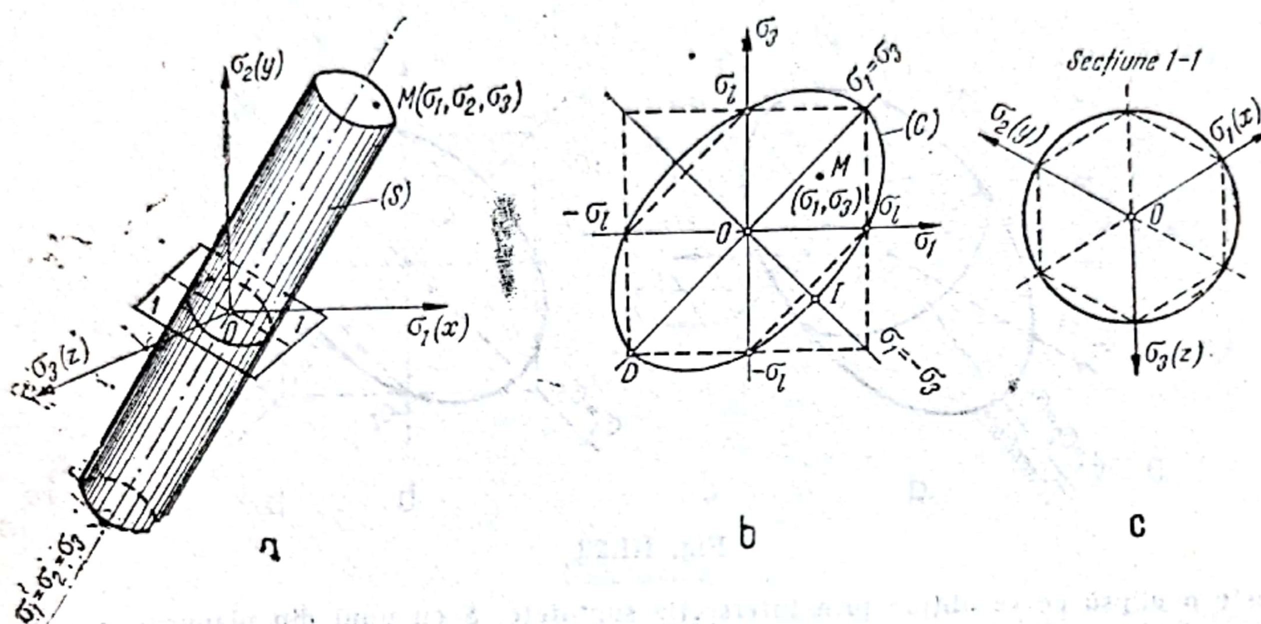


Fig. III.24

Intersecția suprafeței (S) cu unul din planurile de referință determină curba (C), corespunzătoare stării plane de eforturi unitare, care este o elipsă (fig. III.24, b).

Ipoteza V este o ipoteză de lunecare care se folosește pentru materiale tenace (oțel moale) ca și ipoteza III, cu observația că este mai ușor de aplicat.

6) *Pentru stările plane de eforturi unitare*, relațiile de verificare corespunzătoare ipotezelor de mai înainte sînt:

$$\begin{aligned} &\text{Ipoteza } (\text{I}\to\sigma): \ \sigma_{ech} = \sigma_1 \leq \sigma_a \\ &(\text{II}\to\varepsilon): \ \sigma_{ech} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq \sigma_a \\ &(\text{III}\to\tau): \ \sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_a \\ &(\text{IV}\to U_1): \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_a \\ &(\text{V}\to U_1^D): \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_a. \end{aligned} \tag{III.68}$$

În fig. III 25 sînt arătate, în mod comparativ, curbele limită de rezistență (C) corespunzătoare diferitelor ipoteze de rupere.

Pentru cazul forfecării pure rezultă:

$$\sigma_1 = \tau; \qquad \sigma_3 = -\tau. \tag{III.69}$$

Considerînd că efortul unitar echivalent este egal cu limita elastică a materialului $\sigma_{ech} = \sigma_{el}$ și că $\mu = 0,3$ (metale), rezultă următoarele expresii pentru limita elastică la

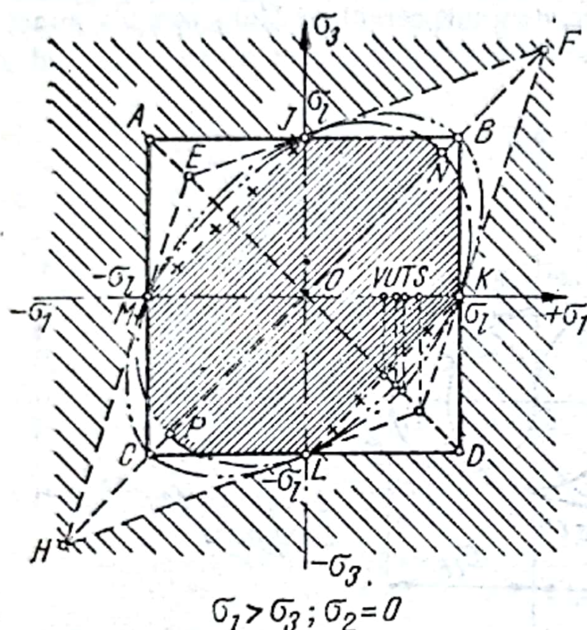


Fig. III.25

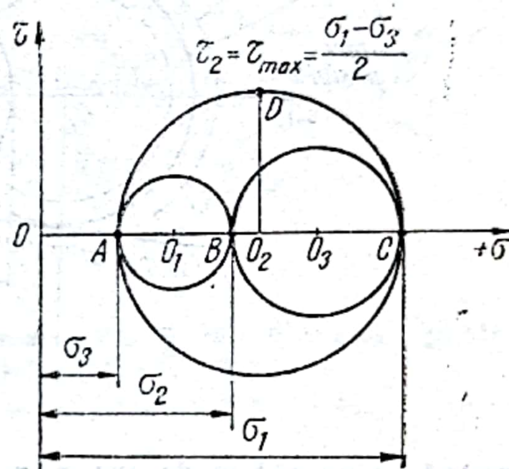


Fig. III.26

forfecare pură:

$$(I \to \sigma) \qquad \sigma_{el} = \tau; \qquad \tau_{el} = \sigma_{el}$$

$$(II \to \varepsilon) \qquad \sigma_{el} = \tau + \mu\tau; \qquad \tau_{el} = \frac{\sigma_{el}}{1+\mu} = 0,77\,\sigma_{el}$$

$$(III \to \tau) \qquad \sigma_{el} = \tau + \tau; \qquad \tau_{el} = \sigma_{el}/2 = 0,5\,\sigma_{el} \qquad (III.70)$$

$$(IV \to U_1) \qquad \sigma_{el} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + 2\mu\tau^2}, \qquad \tau_{el} = \frac{\sigma_{el}}{\sqrt{2(1+\mu)}} = 0,62\sigma_{el}$$

$$(V \to U_1^D) \qquad \sigma_{el} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2}; \qquad \tau_{el} = \frac{\sigma_{el}}{\sqrt{3}} = 0,577\,\sigma_{el}.$$

Valorile diferite ale lui τ_{el} rezultate pentru diferitele ipoteze, arată neconcordanța dintre cele 5 ipoteze. Pe baza a numeroase încercări experimentale în practica de calcul se admite: pentru materialele casante ipoteza I, iar pentru cele tenace una din ipotezele III sau V, de obicei V.

7) *Teoria lui Otto Mohr* relativă la limita de rezistență se bazează pe ipoteza III considerînd însă că τ_l depinde atît de material cît și de efortul unitar normal σ_1 ce lucrează concomitent pe planul efortului unitar maxim de lunecare τ_{max}. Efortul tan-

gențial limită crește cînd compresiunea crește și descrește cînd efortul unitar normal de compresiune scade. Conform ipotezei III, pentru o stare triaxială de eforturi unitare în care $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, starea limită de rezistență este dată de relația $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \leqslant \leqslant \tau_l$, valoarea lui τ_{el} fiind determinată pe un cerc, denumit cercul lui Mohr, de un punct *D* (fig. III.26), și ea nu depinde de σ_2.

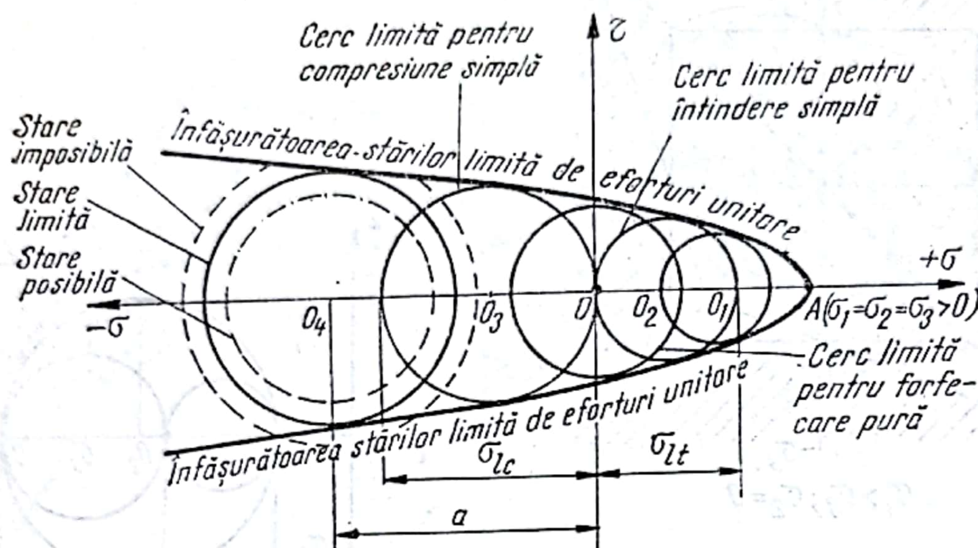


Fig. III.27

Trasînd pe un sistem de axe σ, τ, cercurile lui Mohr pentru diferite stări limită τ_l, determinate de eforturile unitare principale σ_1 și σ_3, se obține o familie de cercuri (fig. III.27), în care cercul cu centrul în *O*, reprezintă starea de lunecare pură, cercul cu centrul în O_2 reprezintă solicitarea de întindere simplă, iar cel cu centrul în O_3, cazul compresiunii simple. Curba înfășurătoare la această familie de cercuri, denumită *curbă intrinsecă,* delimitează stările de eforturi posibile de cele imposibile, ea reprezentînd de fapt curba $C(\sigma_1, \sigma_3, \tau_l)$. În adevăr, dacă pentru o anumită stare de eforturi unitare σ_1, σ_2, σ_3 se construiește cercul mare al lui Mohr, avînd centrul de abscisă $a = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ și raza $R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ (v. fig. III.27) pot rezulta 3 cazuri posibile, și anume :

— cercul se găsește în interiorul suprafeței delimitată de curba intrinsecă : starea de eforturi unitare este posibilă.

— cercul este tangent la curba intrinsecă, starea de eforturi unitare este o stare limită ;

— cercul taie curba intrinsecă, starea de eforturi unitare este o stare imposibilă.

Prin faptul că în zona eforturilor unitare de întindere curba intrinsecă ajunge la un punct (*A* pe fig. III.27) în care $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ și $\tau = 0$ iar în zona de compresiune a axei σ, rămîne deschisă, deci în cazul compresiunii uniforme triaxiale, materialul nu se rupe, teoria lui Mohr are un caracter mai general, eliminînd distincția între ruperea tenace și cea casantă.

Pentru simplificare, curba *C* se aproximează prin două drepte tangente la cercul de întindere și cel de compresiune, determinate numai pe baza a două încercări ($+\sigma_l$ și $-\sigma_l$) (fig. III.28, *a*).

Admițînd această aproximație se obține relația lui Mohr

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - k\sigma_3 \tag{III.71}$$

în care $k = \sigma_{lt}/\sigma_{lc}$,
relație ce se poate aplica la materiale care au rezistențe mai mari la compresiune decît la întindere, ca de exemplu fontele, rocile și betoanele. Pentru $k = 1$, adică materiale

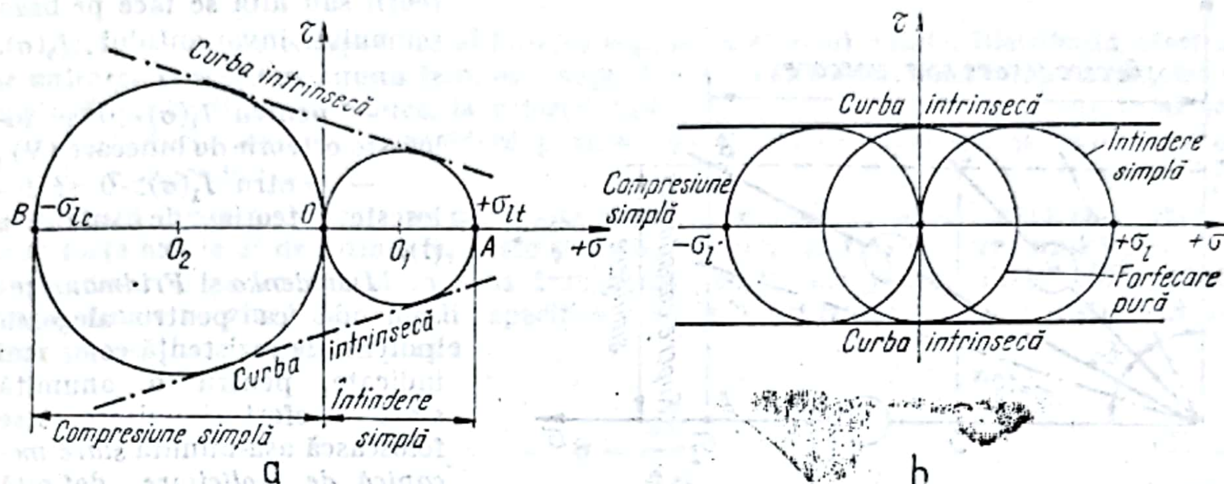


Fig. III.28

care au aceleași stări limită la întindere și compresiune se ajunge la ipoteza III, pentru care curba intrinsecă se reduce la două drepte paralele (fig. III. 28,*b*).

Pentru starea plană de solicitări (σ și τ) relația lui Mohr are forma:

$$\sigma_{ech} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_l. \tag{III.72}$$

8) *Comparație între ipotezele de rezistență.* Luînd ca bază de comparație ipoteza I, care dă cele mai mici valori pentru σ_{ech}, în fig. III.29 s-au trasat, pentru valori ale raportului $0 < \sigma/\tau < 3,5$ pentru stări plane de eforturi (σ și τ), respectiv pentru formulele (III.68), curbele de variație $\sigma_{echi}/\sigma_{echI}$ corespunzătoare rapoartelor $\sigma_{echII}/\sigma_{echI}$, $\sigma_{echIII}/\sigma_{echI}$ și $\sigma_{echV}/\sigma_{echI}$.

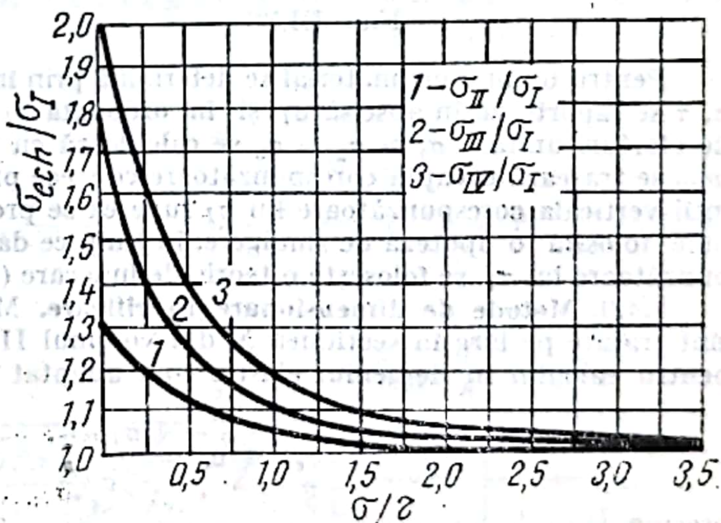


Fig. III.29

Așa cum rezultă din fig. III.29, cele mai mici valori pentru σ_{ech} corespund ipotezei I după care urmează în ordinea ipotezelor II, III și V. Pentru $\sigma/\tau > 2$ diferențele sînt sub 5%.

9) *Criterii pentru alegerea ipotezelor de rezistență.* În general, pentru materialele tenace se folosesc ipotezele de rupere prin lunecare (III și V) în timp ce pentru mate-

rialele casante, ipotezele de rupere prin smulgere (I sau II). Cum modul de rupere al unui material depinde și de starea de eforturi unitare la care este supus, pentru unele materiale și stări de eforturi unitare ce le fac casante (oțel) se pot folosi două teorii: una de lunecare pentru starea tenace și una de smulgere, pentru cea casantă. În aceste cazuri, criteriul pentru alegerea unei teorii sau alta se face pe baza semnului invariantului $I_1(\sigma)$, și anume:

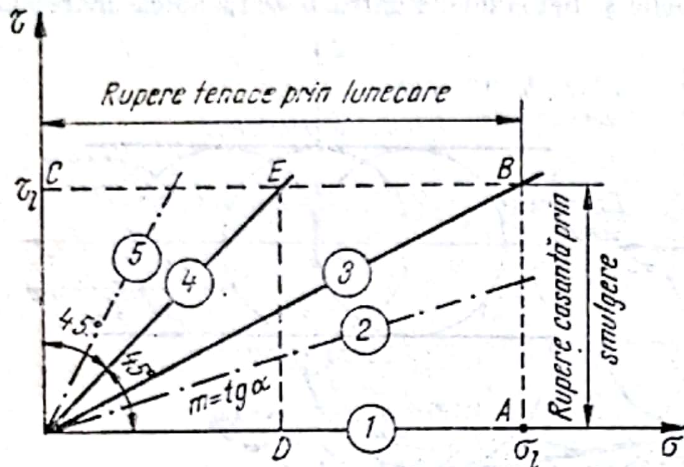
— pentru $I_1(\sigma)<0$ se folosește o teorie de lunecare (V);

— pentru $I_1(\sigma)>0$ se folosește o teorie de smulgere (I).

Davidenko și *Fridmann* recomandă ca pentru alegerea ipotezei de rezistență cele mai indicate pentru o anumită stare de eforturi unitare să se folosească așa-numita *stare mecanică de solicitare* definită prin raportul

$$m=\frac{\sigma_{ech\,III}}{\sigma_{ech\,II}}= \qquad \text{(III.73)}$$

$$=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]}.$$



(1) Întindere uniformă triaxială $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3>0$; $m=0$

(2) Întindere pe trei direcții $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3\neq 0$

(3) Întindere simplă $\left(\sigma_2=\sigma_3=0;\ m=\frac{1}{2}=\frac{\tau_l}{\sigma_l}\right)$

(4) Forfecare pură $\left(\sigma_1=-\sigma_3;\ \sigma_2=0;\ m=\frac{1}{1+\mu}=0{,}67\right)$

(5) Compresiune simplă $\left(\sigma_1=\sigma_2=0;\ m=\frac{1}{2\mu}=1{,}67\right)$

Fig. III.30

Pentru un anumit material se determină prin încercări σ_l și τ_l. Pe un sistem de axe σ, τ se raportează în abscisă σ_l și în ordonată τ_l (fig. III.30). Pentru o anumită stare de eforturi unitare $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ se calculează cu relația (III.73) coeficientul unghiular m și se trasează dreapta corespunzătoare ce trece prin origine. Dacă această dreaptă taie întîi verticala corespunzătoare lui σ_l ruperea se produce prin smulgere (I sau II) deci, trebuie folosită o ipoteză de smulgere, în timp ce dacă taie întîi dreapta orizontală corespunzătoare lui τ_l se folosește o teorie de lunecare (III sau V).

1.4.9. Metode de dimensionare și verificare. Metodele de dimensionare și verificare sînt tratate pe larg în secțiunea X din volumul II al manualului. În prezenta secțiune, pentru calculul în domeniul elastic s-au adoptat următoarele relații de verificare

$$\sigma_{ef}\leqslant\sigma_a=\frac{\sigma_{lim}}{c};\qquad \tau_{ef}\leqslant\frac{\tau_{lim}}{c} \qquad \text{(III.74)}$$

precum și

$$\sigma_{ech\,ef}\leqslant\sigma_{ech\,a}=\frac{\sigma_l}{c}; \qquad \text{(III.75)}$$

în care c este coeficientul de siguranță.

2. SOLICITĂRI SIMPLE

2.1. Întinderea și compresiunea centrică

2.1.1. Modul de comportare al barelor supuse la eforturi axiale. Distribuția eforturilor unitare. O secțiune a unei bare este supusă la un efort axial dacă torsorul forțelor de legătură din secțiune se reduce, la o forță unică, aplicată în centrul de greutate al secțiunii. Eforturile axiale se consideră pozitive dacă sînt de întindere și negative dacă sînt de compresiune.

O bară dreaptă de secțiune constantă și greutate neglijabilă acționată la capete de două forțe axiale P de întindere, egale și direct opuse (fig. III. 31), se lungește în sens longitudinal și se scurtează în sens transversal, secțiunile rămîn plane, toate fibrele longitudinale prezintă deformații specifice ε egale, eforturile unitare se distribuie uniform pe secțiune și au expresia

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \qquad \text{(III.76)}$$

în care: $N = P$ este efortul axial pe orice secțiune transversală, iar A_{ef} secțiunea efectivă de calcul care poate fi aria brută A_b sau aria netă $A_n = A_b - \Delta A$ dacă secțiunea are eventual slăbiri ΔA.

Pe secțiuni înclinate, a căror normală n face unghiul α cu axa barei, apar eforturi unitare normale și tangențiale care au expresiile

$$\sigma_n = \frac{N}{A}\cos^2\alpha = \sigma\cos^2\alpha;\ \sigma_{n\,max} = \sigma_1 = \sigma;\ \sigma_{n\,min} = \sigma_3 = 0 \text{ (pentru } \alpha=0, \qquad \text{(III.77)}$$

respectiv $\alpha = 90°$)

$$\tau_n = \frac{N}{2A}\sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha;\ \tau_{n\,max} = -\tau_{n\,min} = \frac{\sigma_{max}}{2} \text{ (pentru } \alpha=45°). \qquad \text{(III.78)}$$

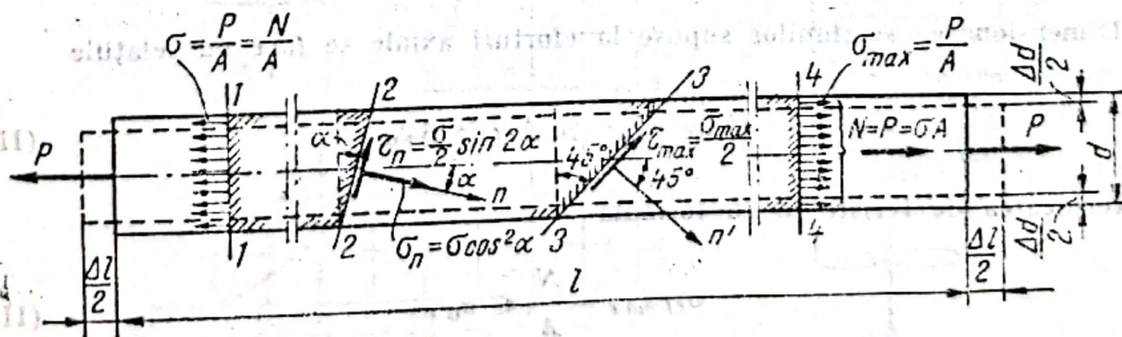


Fig. III.31

Deformațiile specifice longitudinale ε și transversale ε_t la solicitări sub limita de curgere se exprimă prin relațiile

$$\varepsilon = \frac{N}{AE} = \frac{\sigma}{E} \qquad \text{(III.79)}$$

$$\varepsilon_t = -\mu \frac{N}{AE} = -\mu\varepsilon. \qquad \text{(III.80)}$$

Deformațiile totale au expresia

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} = \varepsilon l \qquad \text{(III.81)}$$

$$\Delta d = -\mu \frac{Pd}{EA} = -\mu\varepsilon d = -\varepsilon_t d. \qquad \text{(III.82)}$$

În cazul întinderii, lungimea barei crește în raportul $(1+\varepsilon)/1$, dimensiunile ei transversale se reduc în raportul $(1-\mu\varepsilon)/1$; aria secțiunii transversale descrește în raportul $(1-\mu\varepsilon)^2/1 \approx (1-2\mu\varepsilon)/1$, iar volumul barei variază în raportul $(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2/1 \approx (1+\varepsilon-2\mu\varepsilon)/1$.

Energia potențială specifică de deformație se exprimă prin una din relațiile

$$U_1 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \qquad \text{(III.83)}$$

iar energia totală prin:

$$U = \int_V U_1 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon A\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sigma\cdot A\cdot\Delta l =$$

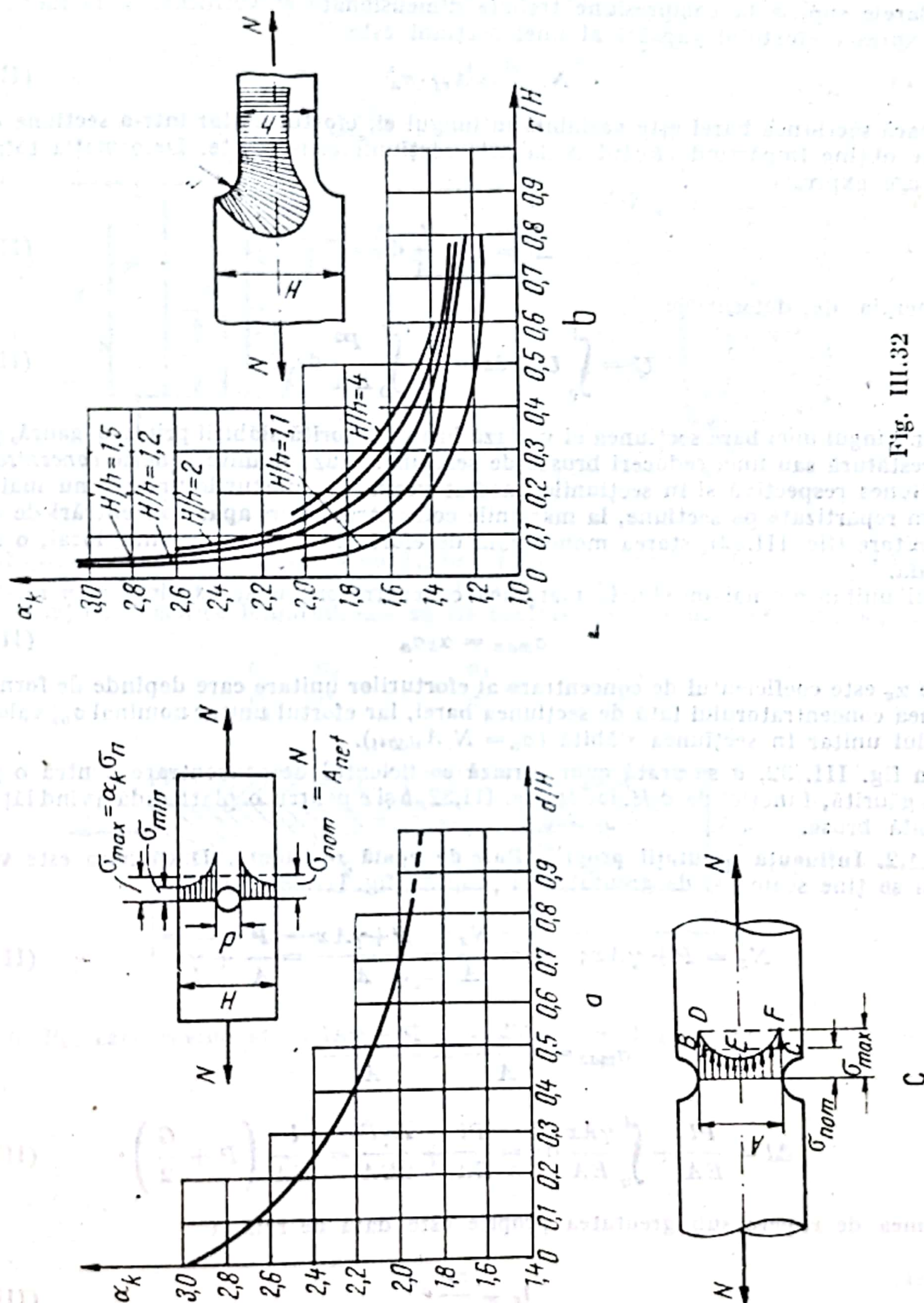
$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}Al = \frac{1}{2}P\Delta l = \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{EA} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l^2 EA}{l}. \qquad \text{(III.84)}$$

Dimensionarea secțiunilor supuse la eforturi axiale se face cu relațiile

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} \text{ și } A_{ef} \geqslant A_{nec}, \qquad \text{(III.85)}$$

iar verificarea de rezistență cu formula

$$\sigma_{ef\,max} = \frac{N}{A} \leqslant \sigma_a. \qquad \text{(III.86)}$$



α_k
3,0
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
d/H
N
H
d
$\sigma_{max}=\alpha_k\sigma_n$
σ_{min}
$\sigma_{nom}=\frac{N}{A_{net}}$
a
r/H
H/h=1,5
H/h=1,2
H/h=2
H/h=1,1
H/h=4
b
B
D
E
F
C
σ_{max}
σ_{nom}
A
c

Fig. III.32

Barele supuse la compresiune trebuie dimensionate și verificate și la flambaj. Expresia efortului capabil al unei secțiuni este

$$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a \tag{III.87}$$

Dacă secțiunea barei este variabilă în lungul ei, efortul unitar într-o secțiune oarecare se obține împărțind efortul N la aria secțiunii considerate. Deformația totală a barei are expresia

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P}{EA} \mathrm{d}s \tag{III.88}$$

iar energia de deformație

$$U = \int_0^l U_1 A \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2}{EA} \mathrm{d}s. \tag{III.89}$$

Dacă în lungul unei bare secțiunea ei variază brusc, datorită slăbirii printr-o gaură, printr-o crestătură sau unei reduceri bruște de secțiune, cauze numite generic *concentratori*, în secțiunea respectivă și în secțiunile imediat vecine ei, eforturile unitare nu mai sînt uniform repartizate pe secțiune, la marginile concentratorilor apar concentrări de eforturi unitare (fig. III.32), starea monoaxială de eforturi unitare devenind, local, o stare triaxială.

Efortul unitar normal maxim la marginea concentratorului se exprimă prin relația

$$\sigma_{max} = \alpha_k \sigma_n \tag{III.90}$$

n care α_k este coeficientul de concentrare al eforturilor unitare care depinde de forma și mărimea concentratorului față de secțiunea barei, iar efortul unitar nominal σ_n, valoarea efortului unitar în secțiunea slăbită ($\sigma_n = N/A_{slăbit}$).

În fig. III. 32, *a* se arată cum variază coeficientul de concentrare pentru o platbandă găurită, funcție de d/H, iar în fig. III.32, *b* și *c* pentru o platbandă avînd lățimea variabilă brusc.

2.1.2. Influența greutății proprii. Bare de egală rezistență. Dacă bara este verticală și se ține seama și de greutatea ei proprie (fig. III.33) rezultă

$$N_x = P + \gamma A x; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{P + \gamma A x}{A} = \frac{P}{A} + \gamma x \tag{III.91}$$

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{P + \gamma A l}{A}$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} + \int_0^l \frac{\gamma A x}{EA} \mathrm{d}x = \frac{Pl}{EA} + \frac{A\gamma l^2}{2EA} = \frac{l}{EA}\left(P + \frac{G}{2}\right). \tag{III.92}$$

Lungimea de rupere sub greutatea proprie este dată de relația

$$l_r = \frac{\sigma_r}{\gamma}. \tag{III.93}$$

Legea de variație a secțiunii barei de egală rezistență (fig. III.34) este

$$A_x = A_0 e^{\frac{\gamma x}{\sigma_a}}. \quad \text{(III.94)}$$

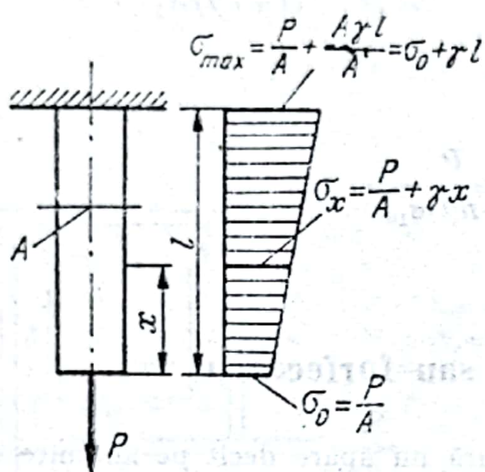


Fig. III.33

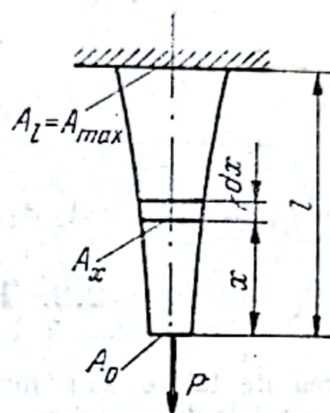


Fig. III.34

2.1.3. Bare cu secțiune neomogenă. La bare formate din mai multe elemente longitudinale, alcătuite din materiale cu proprietăți elastice diferite (fig. III.35) din condiția ca deformațiile specifice longitudinale să fie aceleași pentru toate elementele, rezultă

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \ldots = \frac{\sigma_i}{E_i} = \ldots = \frac{\sigma_n}{E_n}. \quad \text{(III.95)}$$

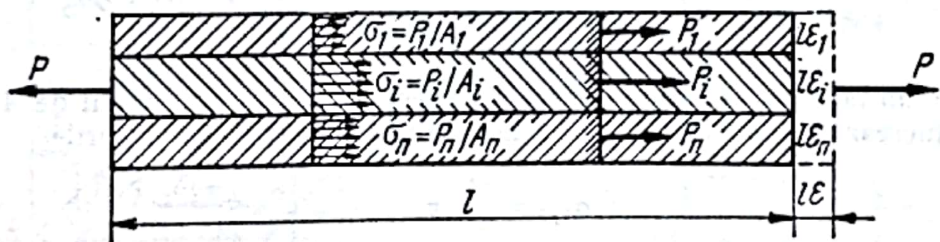


Fig. III.35

Efortul P_k, care revine elementului k, din efortul total P, se scrie:

$$P_k = P \frac{E_k A_k}{\sum_1^n E_i A_i} \quad \text{și} \quad \text{(III.96)}$$

$$\sigma_k = \frac{P_k}{A_k}. \quad \text{(III.97)}$$

Pentru o bară din două materiale (cazul betonului armat) rezultă

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{A_2}{A_1}\right)} \quad \text{sau} \quad \sigma_1 = \frac{P}{(1+n\mu) A_1} \tag{III.98}$$

și

$$A_1 = \frac{P}{(1+n\mu)\sigma_{1a}}. \tag{III.99}$$

în care: $n = E_2/E_1$ și $\mu = A_2/A_1$.

2.2. Tăierea sau forfecarea

Solicitarea de tăiere sau forfecare pură nu apare decît pe anumite secțiuni în cîteva cazuri speciale de solicitare, ca de exemplu în cele din fig. III. 36, *a—d*. În cazul tăierii sau forfecării, sub acțiunea eforturilor unitare tangențiale τ, un cub elementar (*a b c d* în fig. III.36, *e*) se deformează devenind romboedru ($a_1\, b_1\, c\, d$), lunecarea specifică fiind

$$\gamma \approx \mathrm{tg}\gamma = \frac{\delta}{h} = \frac{\tau}{G}. \tag{III.100}$$

Eforturile unitare pe secțiuni înclinate, avînd normala n, au expresiile (fig.III.36, *f*)

$$\sigma_n = \tau \sin 2\alpha \quad \text{și} \quad \tau_n = -\tau \cos 2\alpha.$$

Eforturile unitare principale iau naștere pe secțiuni ce fac un unghi de 45° cu planele pe care lucrează numai eforturile unitare tangențiale τ și au valorile

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau. \tag{III.101}$$

Energia specifică de deformație are expresia

$$U_1 = \frac{1}{2}\gamma\tau = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}. \tag{III.102}$$

Admițînd că eforturile unitare tangențiale τ se repartizează uniform pe secțiune, formulele de calcul la forfecare sînt

$$\tau_{ef} = \frac{T}{A} \leqslant \tau_a; \quad A_{nec} = \frac{T}{\tau_a} \tag{III.103}$$

în care T este efortul de tăiere sau forfecare iar A aria secțiunii care se foarfecă. Formula se folosește la calculul niturilor, șuruburilor și îmbinărilor sudate.

Deformațiile specifice longitudinale pe direcțiile principale sînt:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{\tau}{2G}. \qquad \text{(III.104)}$$

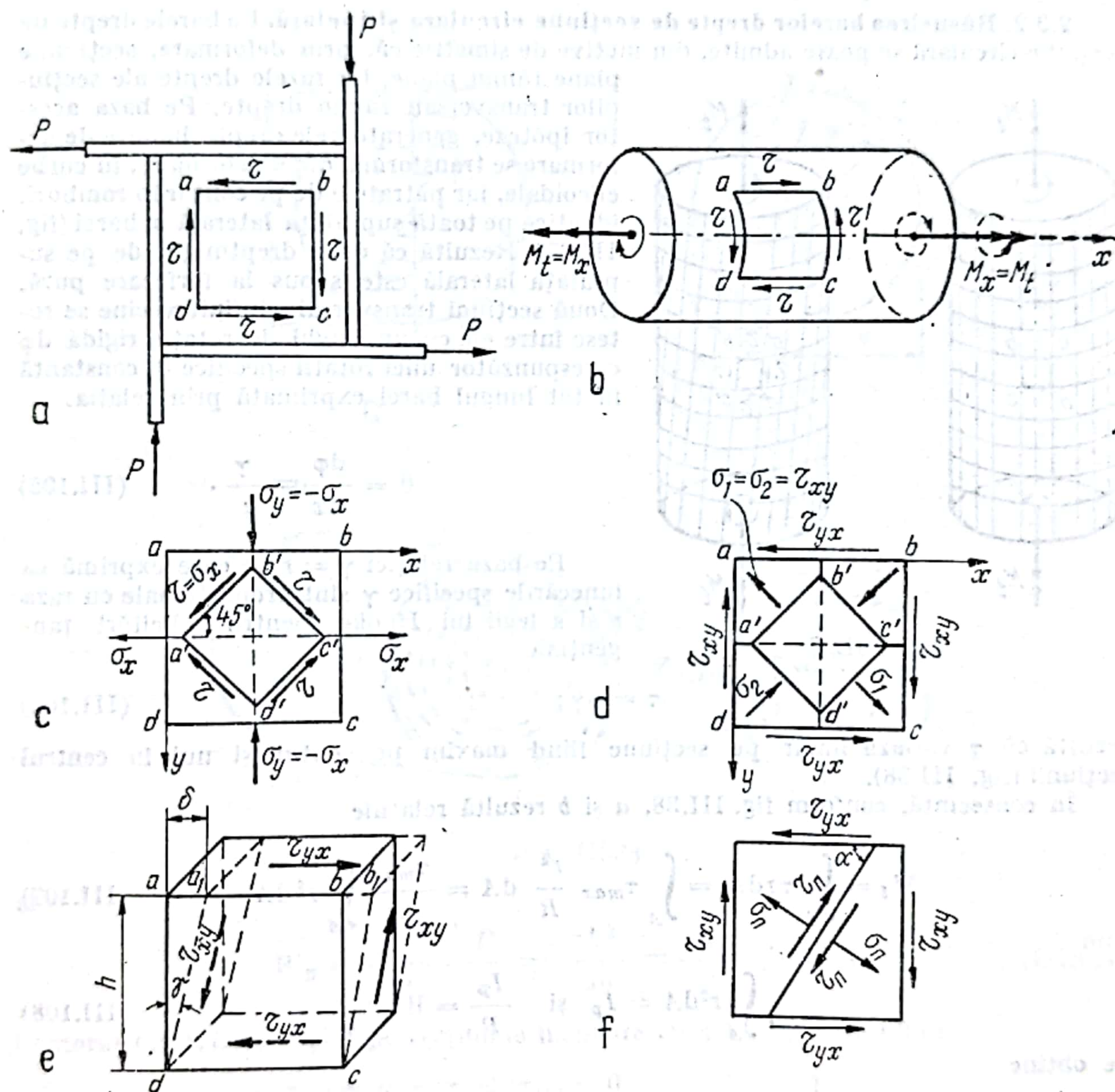


Fig. III.36

2.3. Răsucirea sau torsiunea

2.3.1. Tipuri de răsucire. O bară este solicitată la răsucire cînd torsorul forțelor interioare de legătură, în orice secțiune a ei, se reduce la un vector moment dirijat după tangenta la axa barei în secțiune.

Cu excepția barelor drepte de secțiune circulară sau inelară, pentru toate celelalte forme de secțiuni deplasările normale pe secțiunile transversale ale punctelor lor duc la deplanarea secțiunilor transversale; în consecință se disting: *răsucirea fără deplanarea și răsucirea cu deplanarea secțiunilor transversale*. În ultimul caz se mai face distincția între răsucire cu deplanare liberă, tratată în acest capitol și răsucire cu deplanare împiedicată tratată în cap. 3 și 9.

2.3.2. **Răsucirea barelor drepte de secțiune circulară și inelară.** La barele drepte de secțiune circulară se poate admite, din motive de simetrie că, prin deformare, secțiunile plane rămîn plane, iar razele drepte ale secțiunilor transversale rămîn drepte. Pe baza acestor ipoteze, generatoarele drepte înainte de deformare se transformă, după deformare, în curbe elicoidale, iar pătratele de pe contur în romburi, identice pe toată suprafața laterală a barei (fig. III.37). Rezultă că orice dreptunghi de pe suprafața laterală este supus la forfecare pură. Două secțiuni transversale infinit vecine se rotesc între ele cu un unghi de rotație rigidă $d\varphi$ corespunzător unei rotații specifice θ, constantă în tot lungul barei exprimată prin relația.

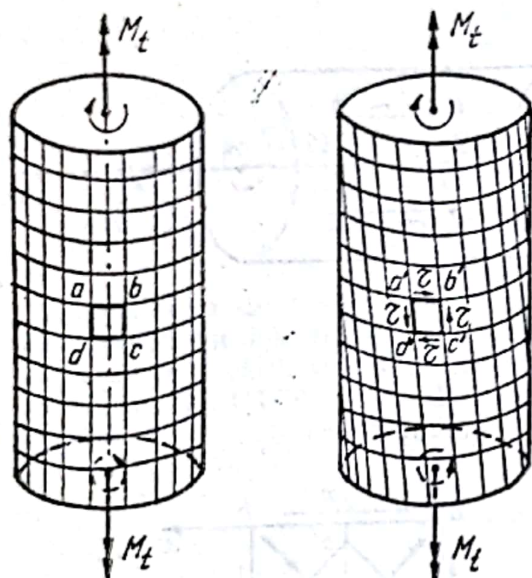


Fig. III.37

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{r}. \qquad \text{(III.105)}$$

Pe baza relației $\gamma = r \cdot \theta$, care exprimă că lunecările specifice γ sînt proporționale cu raza r și a legii lui Hooke pentru solicitări tangențiale

$$\tau = G\gamma; \qquad \text{(III.106)}$$

rezultă că τ variază liniar pe secțiune fiind maxim pe contur și nul în centrul secțiunii (fig. III.38).

În consecință, conform fig. III.38, *a* și *b* rezultă relațiile

$$M_t = \int_A \tau r \mathrm{d}A = \int_A \tau_{max} \frac{r^2}{R} \mathrm{d}A = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A r^2 \mathrm{d}A \qquad \text{(III.107)}$$

cum

$$\int_A r^2 \mathrm{d}A = I_p \quad \text{și} \quad \frac{I_p}{R} = W_p \qquad \text{(III.108)}$$

se obține

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \qquad \text{(III.109 a)}$$

și pentru o rază oarecare r

$$\tau_r = \frac{M_t}{I_p} r. \qquad \text{(III.109 b)}$$

În aceste relații, I_p este momentul de inerție polar, iar W_p modulul de rezistență polar al secțiunii, care, pentru secțiunile circulare, au expresiile:

$$I_p = 2I_z = \frac{\pi D^4}{32} = A\,\frac{D^2}{8} = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0{,}1\,D^4 \qquad \text{(III.110)}$$

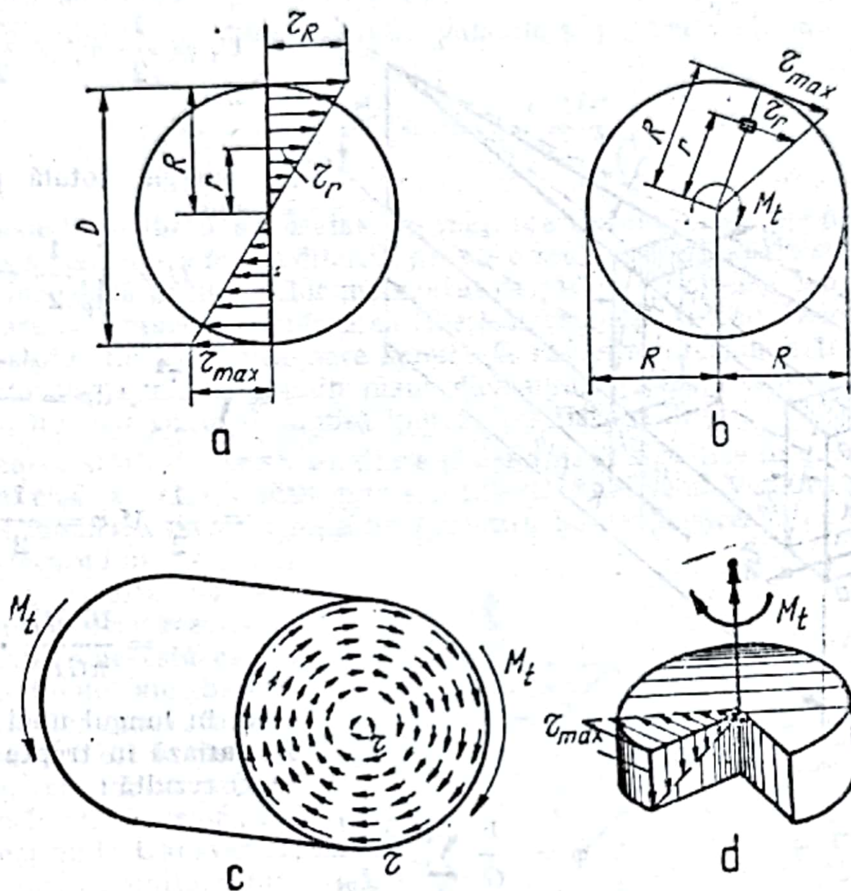


Fig. III.38

şi

$$W_p = \frac{\pi D^4}{32} \Bigg/ \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi R^3}{2} \approx 0{,}2\,D^3\,. \qquad \text{(III.111)}$$

Conform fig. III.36, *d* şi *f* pe secțiunile înclinate cu 45° şi 135° rezultă:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{45°} = \sigma_1 = \tau \ \text{ şi } \ \tau_{45°} = 0 \\ &\sigma_{135°} = \sigma_2 = -\tau = -\sigma_1 \ \text{ şi } \ \tau_{135°} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.112)}$$

Două secțiuni normale pe axa barei, situate la distanță egală cu unitatea (fig. III.39) se rotesc între ele cu rotația specifică θ dată de relația

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \qquad \text{(III.113)}$$

iar două secțiuni situate la distanța l cu un unghi

$$\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{G I_p}. \tag{III.114}$$

Energia potențială specifică de deformație are expresia

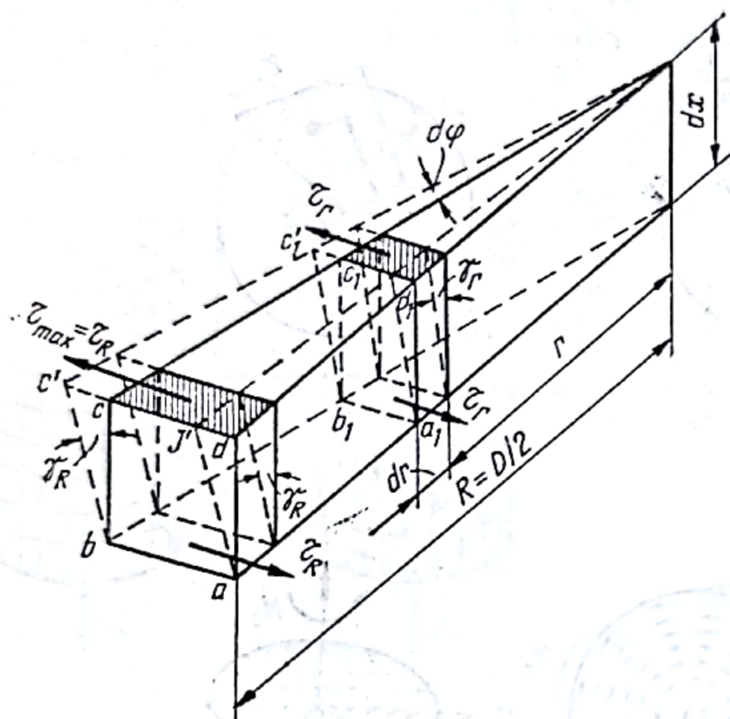


Fig. III.39

$$U_1 = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\gamma^2 G}{2} \tag{III.115}$$

iar energia totală pentru $M_t =$ = const

$$U = \int_V \frac{1}{2}\tau\gamma\, dv =$$

$$= \int_V \frac{\tau^2}{2G} A dv = \frac{\tau_{max}^2 I_p l}{2R^2 G} =$$

$$= \frac{1}{2} M_t \varphi = \frac{1}{2}\frac{M_t^2 l}{I_p G} =$$

$$= \frac{16 M_t^2 l}{\pi G D^4}. \tag{III.116}$$

Cînd, în lungul unei bare, M_t și I_p variază în trepte (cazul arborilor) rezultă :

$$\varphi = \frac{1}{G}\sum_1^n \frac{M_{ti} l_i}{I_{pi}}.$$

Formulele de calcul sînt :

— formula de dimensionare la rezistență

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a}, \text{ de unde } D = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_a}}; \tag{III.117}$$

— formula de dimensionare la deformație

$$I_{p\,nec} = \frac{M_t}{G\theta_{adm}}, \text{ de unde } D_{nec} = \sqrt[4]{\frac{32\, M_t}{\pi G \theta_{adm}}}. \tag{III.118}$$

în care τ_a este rezistența admisibilă și θ_a rotirea specifică admisibilă ;

— formula de verificare la rezistență

$$\tau_{ef\,max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16\, M_t}{\pi D^3} = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \approx \frac{M_t}{0{,}2 D^3} \leqslant \tau_a; \tag{III.119}$$

— formula de verificare la deformaţie

$$\theta_{ef} = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{32M_t}{\pi D^4 G} = \frac{2M_t}{\pi R^4 G} \leqslant \theta_a \qquad \text{(III.120)}$$

(pentru arbori, la maşini $\theta_a = 1° \ldots 1/4°$).

Toate relaţiile stabilite mai înainte rămîn valabile şi pentru secţiunile inelare, pentru care

$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad \text{şi} \quad W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \qquad \text{(III.121)}$$

2.3.4. Răsucirea liberă a barelor de secţiune oarecare. Barele prismatice a căror secţiune transversală are o formă diferită de cea circulară sau inelară sînt supuse la răsucire liberă numai dacă în lungul lor momentul de răsucire M_t este constant, şi dacă nu au legături care să împiedice deplasarea liberă normală pe secţiunile lor transversale a punctelor acestora. La asemenea bare supuse la răsucire, secţiunile transversale plane înainte de deformaţie nu mai rămîn plane devenind strîmbe, respectiv se *deplanează*. În consecinţă, nu mai poate fi admisă ipoteza lui Bernoulli.

Determinarea stării de eforturi unitare şi deformaţii specifice în aceste bare se face pe baza teoriei clasice a elasticităţii, prin soluţiile date de Saint Vénant, sau prin metode experimentale (analogia membranei a lui Prandtl). Se demonstrează că în cazul barelor de secţiune oarecare funcţia deplanării $u = f(x, y, z)$ este independentă de x, fiind deci aceeaşi în lungul barelor. Din această cauză, fibrele longitudinale ale barelor nu-şi modifică lungimea iniţială ($\varepsilon_x = 0$), în schimb ele se răsucesc după o elice, eforturile unitare normale σ_x în lungul barelor fiind nule, iar pe secţiunile transversale apar numai eforturi unitare tangenţiale τ.

De exemplu deformarea unei bare prismatice de secţiune dreptunghiulară (fig. III.40, *a*) are loc ca în fig. III.40, *b*.

Pătratele $a'b'c'd'$ de pe conturul ei, trasate înainte de deformare, se transformă după deformare în romburi $a_1'b_1'c_1'd_1'$, avînd o oblicitate cu atît mai pronunţată cu cît sînt mai apropiate de mijlocul feţelor, iar cele de pe muchii rămîn nedeformate (fig. III.40, *b*). Rezultă că lunecările, şi deci şi eforturile unitare tangenţiale τ, sînt maxime la mijlocul laturilor şi nule pe muchii. Se demonstrează că pentru secţiunile dreptunghiulare repartiţia eforturilor unitare tangenţiale τ este ca în fig. III.41.

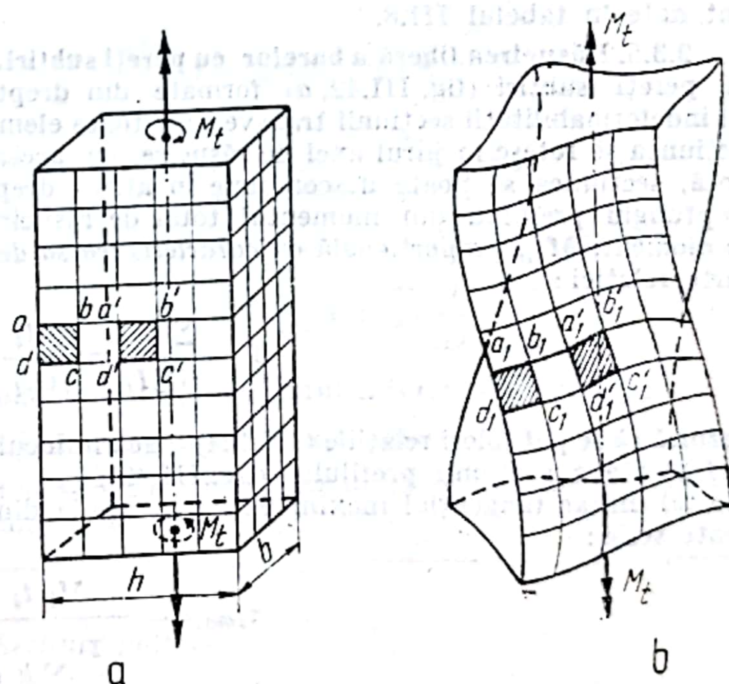


Fig. III.40

Indiferent de forma secțiunilor transversale, eforturile unitare tangențiale maxime se pot calcula cu suficientă aproximație cu formulele simple stabilite pentru răsucirea barelor circulare, înlocuind însă momentul de inerție polar I_p și modulul de rezistență polar W_p cu așa-numitele *caracteristici de rigiditate I_t și de rezistență W_t la răsucire liberă*, ambele depinzînd de forma secțiunii. În consecință, formulele de calcul sînt

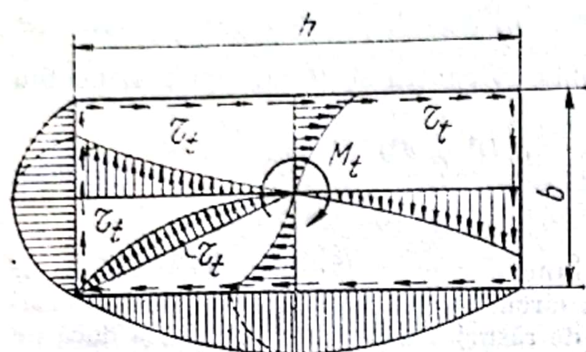


Fig. III.41

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \leqslant \tau_a \quad \text{și} \quad W_{t\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a}; \tag{III.122}$$

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t}\,;\quad \theta = \frac{M_t}{GI_t} \leqslant \theta_a$$

$$\text{și} \quad I_{t\,nec} = \frac{M_t}{G\theta_a}\,. \tag{III.123}$$

Caracteristicile de rigiditate la răsucire I_t și de rezistență la răsucire W_t, pentru diferite forme de secțiuni, precum și valorile coeficienților k, k_1 și k_2 pentru secțiunile dreptunghiulare, la care:

$$W_t = khb^2;\quad I_t = k_1 hb^3 \quad \text{și} \quad \tau_1 = k_2\tau_{max}, \tag{III.124}$$

sînt date în tabelul III.8.

2.3.5. **Răsucirea liberă a barelor cu pereți subțiri.** La barele avînd secțiuni deschise cu pereți subțiri (fig. III.42, *a*) formate din dreptunghiuri alungite, pe baza ipotezei indeformabilității secțiunii transversale, toate elementele dreptunghiulare ce formează secțiunea se rotesc în jurul axei de răsucire cu aceeași rotație specifică θ. În consecință, secțiunea se poate descompune în atîtea dreptunghiuri cîte o formează, fiecare dreptunghi preluînd din momentul total de răsucire M_t care acționează secțiunea o parte de moment, M_{ti}, proporțională cu *caracteristica sa de rigiditate la răsucire*, I_{ti}, conform relației:

$$\theta = \frac{\sum M_{ti}}{G\sum I_{ti}} = \frac{M_t}{GI_t}\,. \tag{III.125}$$

Rezultă că se pot folosi relațiile (III.124) dacă în locul lui h se introduce lungimea axei desfășurate a secțiunii profilului (fig. III.42).

Efortul unitar tangențial maxim pe inima unuia din dreptunghiuri (de exemplu i) se poate scrie:

$$\tau_{i\,max} = \frac{M_t \cdot t_i}{\frac{1}{3}\sum h_i t_i^3} \tag{III.126}$$

de unde

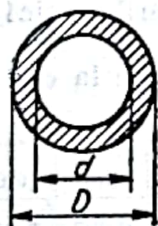
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t}\left(\frac{I_{ti}}{W_{ti}}\right)_{max} = \frac{M_t}{W_t} \tag{III.127}$$

Tabelul III.8

Caracteristicile de rezistență la răsucire I_t și W_t ale diferitelor forme de secțiuni și expresiile eforturilor unitare și ale unghiurilor de torsiune la răsucirea barelor drepte

Momentul de torsiune, M_t, în daNcm. Efortul unitar tangențial maxim în secțiune, τ_{max}, în daN/cm². Unghiul total de răsucire, φ, în radiani. Modulul de elasticitate transversal, G, în daN/cm²; W_t în cm³. Rigiditatea la răsucire, GI_t, în daNcm². Dimensiunile secțiunii în cm. Formulele generale de calcul sînt:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}\ ;\ \varphi = \frac{M_t l}{GI_t}$$



1. *Secțiune inelară* $\left(\frac{d}{D} = \alpha\right)$

$$I_t = I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0{,}1\ D^4\ (1 - \alpha^4)$$

I_p = momentul polar de inerție al secțiunii

$$W_t = W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx 0{,}2\ D^3\ (1 - \alpha^4)$$

$$\tau_{max} = \frac{16\ M_t}{\pi\ D^3\ (1 - \alpha^4)} \approx \frac{M_t}{0{,}2\ D^3\ (1 - \alpha^4)}$$

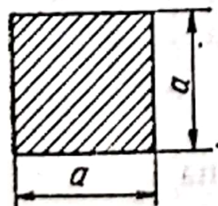
(τ_{max} în punctele de pe conturul exterior al secțiunii)

$$\tau_{d/2} = \tau_{max}\frac{d}{D}$$

(în punctele de pe conturul interior al secțiunii)

W_p = modulul de rezistență polar

Pentru secțiunea circulară plină se folosesc formulele de mai înainte considerînd $\alpha = 0$.



2. *Secțiune pătrată*

$I_t = 0{,}1406 a^4$; $W_t = 0{,}208\ a^3$

(τ_{max} pe contur, la mijlocul laturilor). Eforturile unitare tangențiale sînt nule la colțuri

Tabelul III.8 (continuare)

3. *Secțiune dreptunghiulară* ($h > b$)

$$\frac{h}{b} = n \geqslant 1\ ; \quad I_t \approx hb^3 \left[\frac{16}{3} - 3{,}36\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12\,h^4}\right)\right]$$

sau

$$I_t = \frac{1}{3}\left(n - 0{,}63 + \frac{0{,}052}{n^4}\right) b^4$$

$$I_t = k_1\, hb^3 \text{ (cu aproximație mai bună)}$$

$$W_t \approx \frac{b^2h^2}{3h + 1{,}8b}$$

sau

$$W_t = k \cdot hb^2 \text{ (mai exact)}$$

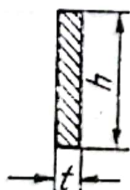
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \text{ (la mijlocul laturilor lungi)}$$

$$\tau_1 = k_2\, \tau_{max} \text{ (la mijlocul laturilor mici)}$$

Eforturile unitare tangențiale sînt nule la colțuri.

n	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	8,00	10,00	∞
k	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
k_1	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
k_2	1,00	0,93	0,86	0,82	0,79	0,77	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	–

4. *Secțiune dreptunghiulară alungită* $\left(\frac{h}{t} = n > 4\right)$



$$I_t = \frac{1}{3}(n - 0{,}63)\, t^4$$

$$W_t = \frac{1}{3}(n - 0{,}63)\, t^3$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}$$

(la mijlocul laturilor lungi)

la mijlocul laturilor mici rezultă

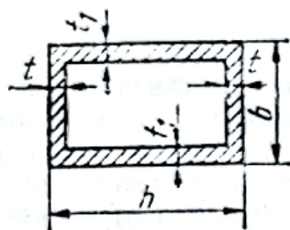
$$\tau = 0{,}74\ \tau_{max}$$

Tabelul III.8 (continuare)

5. *Secţiune dreptunghiulară goală*

$$I_t = \frac{2t \cdot t_1 (h - t)^2 (b - t_1)^2}{ht + bt_1 - t^2 - t_1^2}$$

pentru $t_1 < t$



$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2t_1 (h - t)(b - t_1)} \text{ (la mijlocul laturii lungi)}$$

$$\tau_1 = \tau_{max} \frac{t_1}{t} \text{ (la mijlocul laturii scurte).}$$

Pentru o rază de racordare mică (ρ), eforturile unitare în colţurile interioare pot fi mai mari.
Coeficientul teoretic de concentrare α_t este

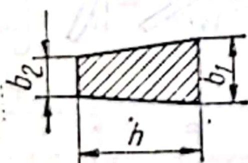
$$\alpha_t = 1{,}74 \sqrt[3]{\frac{t_{max}}{\rho}}\,; \bar{\tau}_{t\,max} = \alpha_t \tau_{max}$$

6. *Triunghi echilateral*

$$I_t = \frac{\sqrt{3}a^4}{80}\,; \tau_{max} = \frac{20M_t}{a^3}$$

(la mijlocul laturilor). La colţuri, eforturile unitare tangenţiale sînt nule.

7. *Secţiune în formă de pană* $h > 4\, b_1$

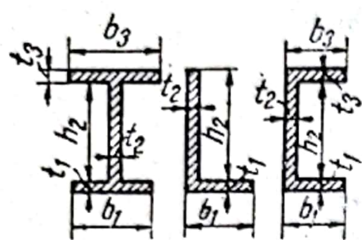


$$I_t = \frac{h (b_1^4 - b_2^4)}{12 (b_1 - b_2)} - 0{,}105 (b_1^4 + b_2^4)$$

$$W_t = \frac{h (b_1^4 - b_2^4)}{12\, b_1 (b_1 - b_2)} - 0{,}105 \frac{b_1^4 + b_2^4}{b_1}$$

(τ_{max} pe laturile lungi, către baza mare)

Tabelul III.8 (continuare)



8. *Profile laminate, cu secțiuni compuse din dreptunghiuri cu dimensiunile $h_i \times t_i$, și cu $h_i > 4t_i$* (h_i înălțimea, t_i grosimea unui dreptunghi i ce alcătuiește profilul)

$$I_t = \frac{1}{3}\alpha \sum_{i=1}^{n} (h_i t_i^3)$$

Valorile α, în funcție de forma secțiunii

Profil I	$\alpha = 1,30$
Profil U	$1,30 > \alpha > 1,00$
Corniere	$\alpha = 1,00$
Profil +	$\alpha = 1,17$

Eforturile unitare maxime în partea de mijloc a dreptunghiului de lățime t_{max}

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}\alpha \sum_{i=1}^{n} (b_i t_i^3)} t_{max}.$$

Pentru raze de racordare ρ mici, eforturile la colțurile interioare pot fi mai mari. Coeficientul de concentrare

$$\alpha_t = 1,74 \sqrt[3]{\frac{t_{max}}{\rho}}$$

relație în care s-a notat $W_t = I_t(I_{ti}/W_{ti})_{max}$; W_t caracteristica de rezistență la răsucire și I_t caracteristica de rigiditate la răsucire a întregului profil, I_{ti} și W_{ti} caracteristica de rigiditate și caracteristica de rezistență a dreptunghiului i.

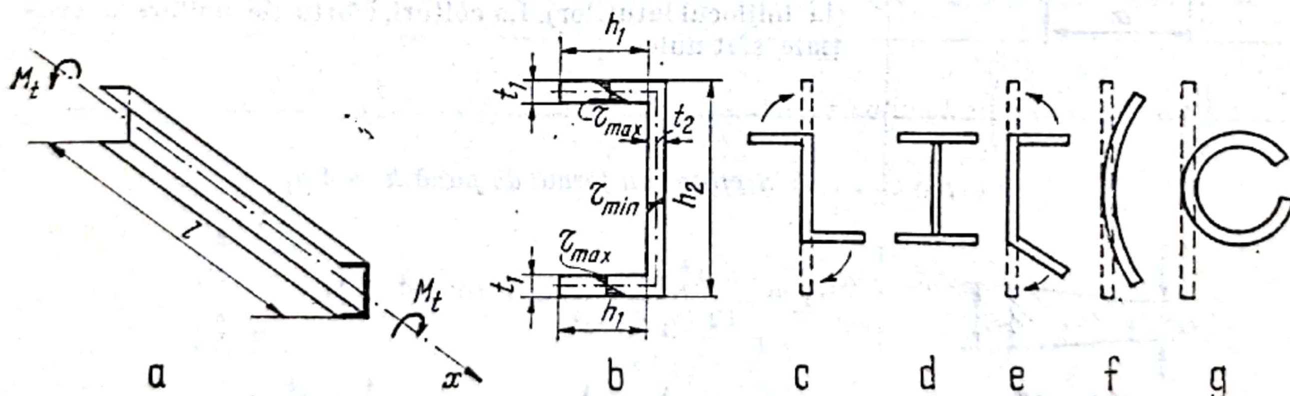


Fig. III.42

Pentru profile curbe deschise se aplică aceleași formule în care h este lungimea desfășurată a profilului (fig. III.42, *f* și *g*).

Pentru profile de oţel laminate (corniere, profile I, profile U) formula de calcul a caracteristicii de rigiditate la răsucire capătă forma

$$I_t = \alpha \frac{1}{3} \sum h_i t_i^3 \qquad \text{(III.128)}$$

în care t_i şi h_i sînt laturile unuia dintre dreptunghiurile ce formează profilul iar α un coeficient care ţine seama de influenţa racordărilor dintre aripile profilului şi care depinde de forma acestuia.

Valorile lui α pentru diferite forme de profile sînt date în tabelul III.8.

Formula de verificare la răsucire liberă pentru aceste forme de secţiuni rezultă

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{i_t} t_{max}. \qquad \text{(III.129)}$$

La profilele cu două axe de simetrie, axa de răsucire coincide cu axa centrului de greutate al secţiunii, iar la profilele cu o singură axă de simetrie, rotirea secţiunii se produce în jurul unei axe ce trece printr-un punct numit *centru de răsucire-încovoiere* sau *centru de tăiere*, care nu coincide cu centrul de greutate al secţiunii şi a cărui poziţie se stabileşte conform celor arătate la cap. 9.

2.3.6. Răsucirea liberă a barelor cu pereţi subţiri, închise (inelare). La calculul la răsucire a barelor inelare se admite *ipoteza lui R. Bredt*, conform căreia, *fluxul eforturilor unitare tangenţiale dat de relaţia τt, este constant de-a lungul liniei mediane a secţiunii profilului* (fig. III.43).

Pe baza acestei ipoteze, momentul dat de fluxul de forţe faţă de centrul de greutate al profilului trebuie să echilibreze momentul de răsucire ce acţionează secţiunea:

$$\oint \tau t r \, ds = M_t. \qquad \text{(III.130)}$$

Dacă se notează:

$$\oint r \, ds = 2\Omega \qquad \text{(III.131)}$$

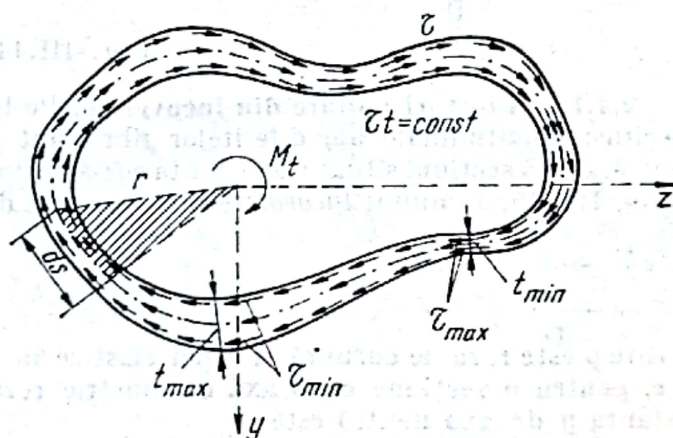


Fig. III.43

în care Ω este aria închisă de linia mediană a profilului, rezultă relaţiile cunoscute sub numele de *formulele lui Bredt*:

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega t}; \quad \tau t = \frac{M_t}{2\Omega}; \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{2\Omega t_{min}}; \quad \theta = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \oint \frac{ds}{t}. \qquad \text{(III.132)}$$

2.4. Încovoierea

2.4.1. Încovoierea pură. O bară este solicitată la încovoiere pură dacă torsorul forţelor de legătură se reduce, în orice secţiune a ei, numai la un vector moment situat în planul secţiunii, trecînd prin centrul ei de greutate. Exemplu: o bară solicitată de două cupluri la capetele ei (fig. III.44, *c*).

Sub acțiunea acestor cupluri, bara se încovoaie, fibrele longitudinale din partea concavă se scurtează, cele din partea convexă se lungesc, existînd pe înălțimea ei o suprafață în care fibrele nici nu se lungesc, nici nu se scurtează, numită *suprafață neutră* (fig. III. 44, *b*). Intersecția suprafeței neutre cu planul longitudinal de simetric al barei formează *fibra medie deformată* sau *linia elastică a barei*. Intersecția suprafeței neutre cu planul unei secțiuni transversale a barei determină *axa neutră a secțiunii* (fig. III. 44, *c*)

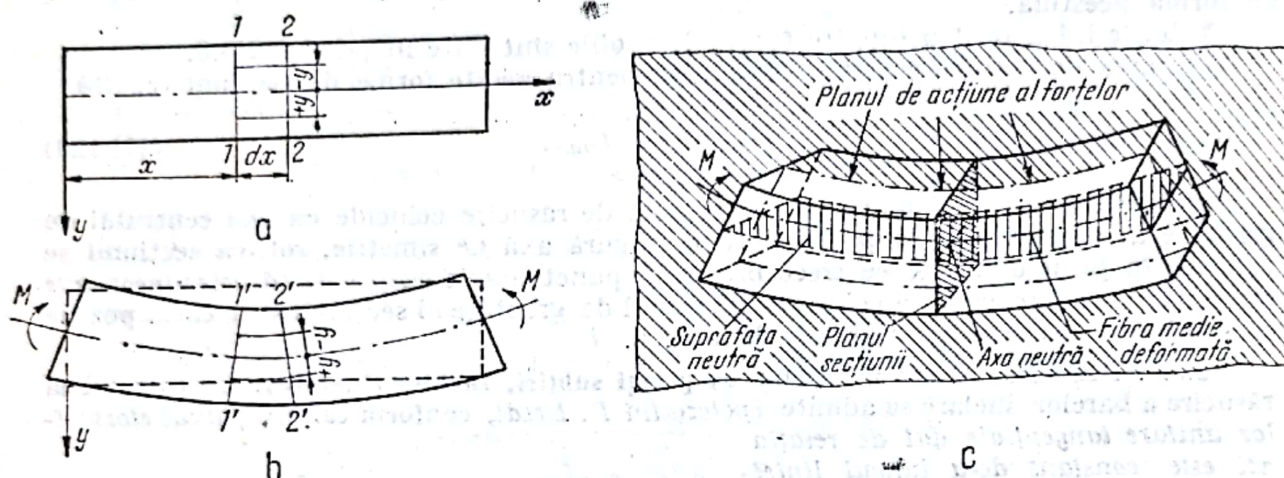


Fig. III.44

2.4.1.1. Eforturi unitare din încovoiere. Pe baza ipotezei lui Bernoulli, deformațiile specifice longitudinale ale diferitelor fibre sînt proporționale cu distanța lor la fibra neutră. Două secțiuni situate la distanța egală cu unitatea se rotesc între ele cu un unghi ω (fig. III. 45, *a*) numit *încovoiere specifică*, dat de relația :

$$\omega = \frac{1}{\rho}, \tag{III.133}$$

în care ρ este raza de curbură a liniei elastice în secțiunea considerată. Din fig. III. 45, *b*, *c*, pentru o secțiune cu o axă de simetrie rezultă că lungirea unei fibre situată la distanța y de axa neutră este

$$\varepsilon_y = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\rho}\, y = \omega\, y. \tag{III.134}$$

Admițînd valabilitatea legii lui Hooke, efortul unitar în această fibră are expresia (fig. III.45, *d*)

$$\sigma_x = E\, \varepsilon_y = E\, \frac{y}{\rho} = E\omega y, \quad \text{de unde}\ \frac{\sigma_x}{y} = \frac{E}{\rho}\,. \tag{III.135}$$

Din ecuațiile de echivalență dintre eforturile $N = 0$ și M_z, ce acționează secțiunea, și eforturile unitare din secțiune rezultă :

$$N = \int_A \sigma_x\, \mathrm{d}A = \int_A E\, \frac{1}{\rho}\, y\, \mathrm{d}A = E\, \frac{1}{\rho} \int_A y\, \mathrm{d}A = 0 \tag{III.136}$$

sau $\int_A y\,dA = 0$ adică momentul static este nul, deci axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii și

$$M_z = \int_A \sigma_x y\,dA = \int_A E\frac{1}{\rho}y^2 dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\,dA = \frac{E}{\rho}I_z = \frac{\sigma_x}{y}I_z \quad \text{(III.137)}$$

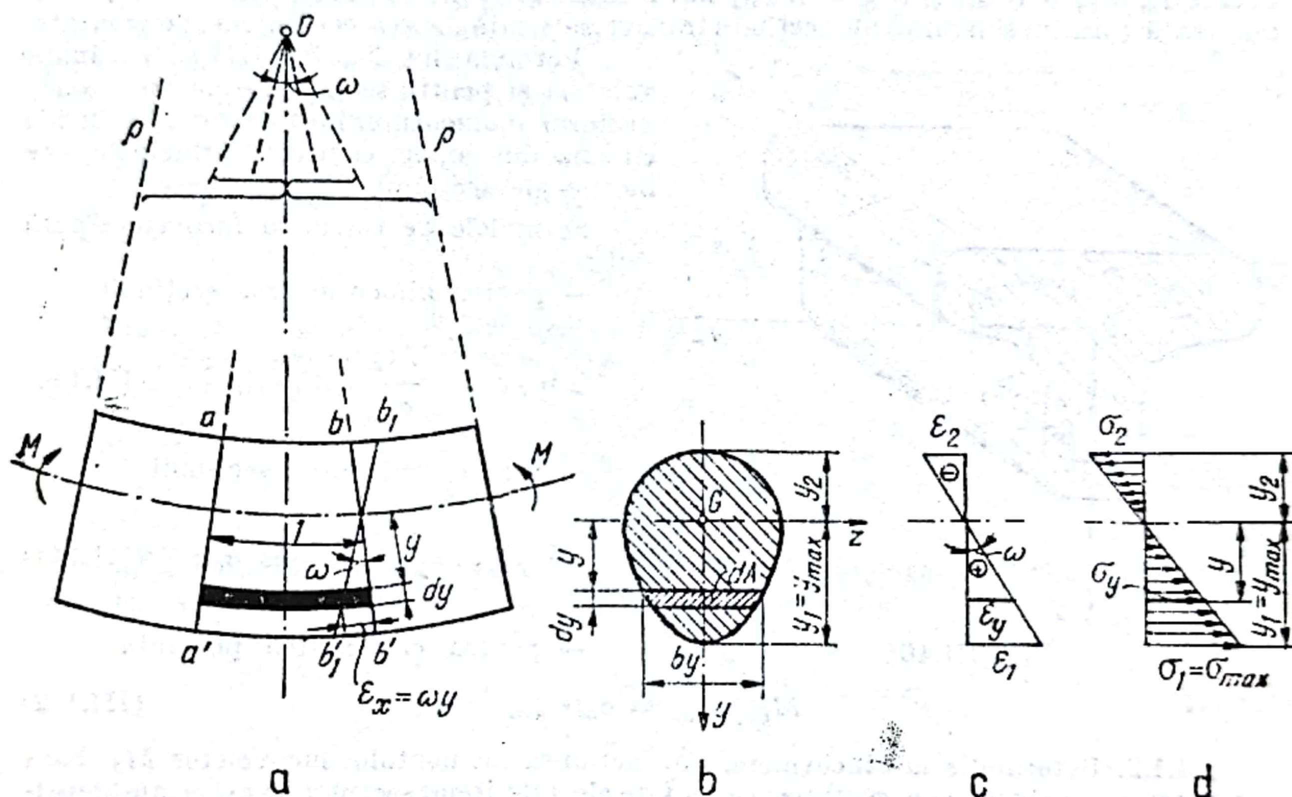


Fig. III.45

de unde se obține *formula lui Navier*

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \quad \text{(III.138)}$$

care exprimă legea liniară de distribuție a lui σ_x pe secțiune. În formula (III.138), y este distanța de la axa neutră la fibra considerată, iar I_z momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa O_z, în jurul căreia se rotește secțiunea.

În formula (III.138) M_z și y se introduc cu semnele lor. Momentele încovoietoare sînt considerate pozitive dacă vectorii moment au sensul pozitiv al axelor centrale principale (fig. III.46).

Eforturile unitare extreme se produc în fibrele extreme, pentru $y = +y_{max} = y_1$ și $y = -y_{min} = y_2$ și au expresiile

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_z y_{max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_{z1}} = \frac{M_z}{W_{z\,min}}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{M_z y_{min}}{I_z} = \frac{M_z}{W_{z2}} = \frac{M_z}{W_{z\,max}} \tag{III.139}$$

în care I_z, $W_{z1} = W_{min}$ și $W_{z2} = W_{max}$ sînt momentul de inerție și respectiv modulele de rezistență (maxim și minim) ale secțiunii transversale față de axa centrului ei de greutate.

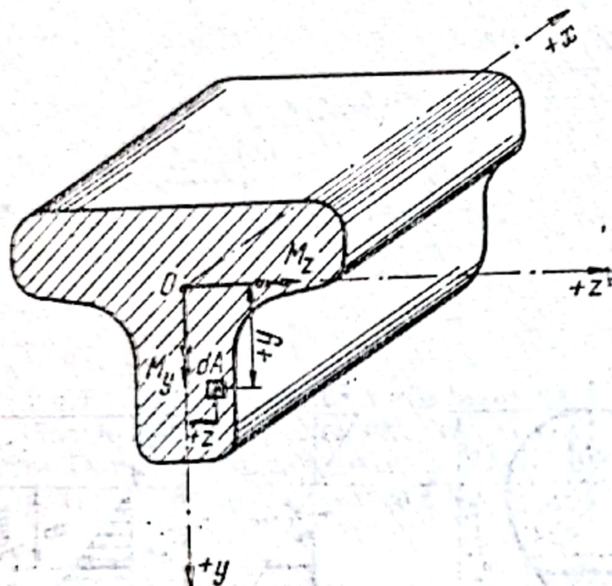


Fig. III.46

Formula lui Navier (III.139) rămîne valabilă și pentru secțiuni nesimetrice, dacă vectorul momentului încovoietor M coincide cu una din axele centrale, principale, de inerție ale secțiunii.

Formulele de calcul la încovoiere pură sînt:

— pentru dimensionarea secțiunii

$$W_{z\,nec} = \frac{M_z}{\sigma_a} \leqslant W_{ef\,min}; \tag{III.140}$$

— pentru verificarea secțiunii

$$\sigma_{ef\,max} = \frac{M_z}{W_{z\,ef\,min}} \leqslant \sigma_a; \tag{III.141}$$

— pentru capacitatea portantă

$$M_{cap,\,max} = \sigma_a W_{min} \tag{III.142}$$

2.4.1.2. **Deformația din încovoiere.** Sub acțiunea momentului încovoietor M_z bara se deformează, se încovoaie, centrele de greutate ale diferitelor secțiuni transversale deplasîndu-se în jos spre $+y$, pentru momente încovoietoare pozitive, și în sus spre $-y$, pentru momente încovoietoare negative (fig. III.47).

Pornind de la încovoierea specifică

$$\omega = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{III.143}$$

și notînd cu v deplasarea unei secțiuni, rezultă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z}. \tag{III.144}$$

Neglijînd la numitor $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ față de unitate, și făcînd convenția că razele de curbură ρ sînt pozitive cînd sensul lor de la axa barei spre centrul de curbură are același sens cu $+v$ (deci pentru $M_z > 0$, rezultă $\rho < 0$), (fig. III.47), se obține *ecuația diferențială a fibrei medii deformate prin încovoiere*

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z}. \qquad \text{(III.145a)}$$

Cu excepția cazului încovoierii pure, pentru care $M_z = \text{const}$, deformata fiind un arc de cerc, de obicei $M_z = f(x, p)$, și deci prin derivarea de două ori rezultă

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\right) = -\frac{d^2M_z}{dx^2} = p(x). \qquad \text{(III.145b)}$$

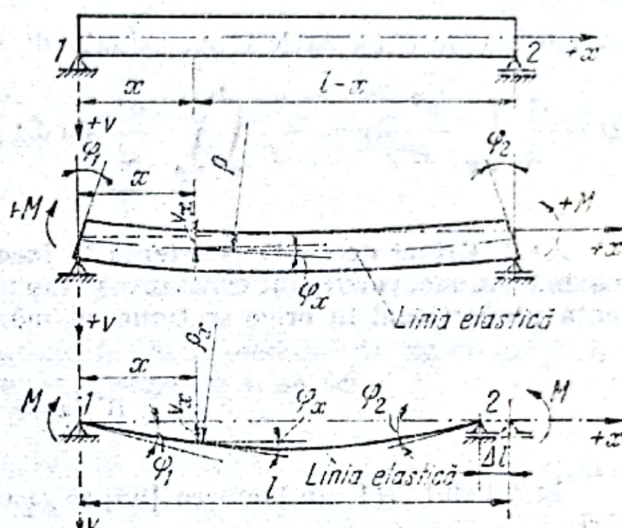


Fig. III.47

Pentru $EI_z = \text{const}$, se obține ecuația diferențială mai generală a încovoierii barelor drepte

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI_z}. \qquad \text{(III.146)}$$

Din ecuația diferențială (III.145a), printr-o primă integrare, se obține *funcția pantei* la fibra medie deformată $\varphi(x)$ sau relația *rotirii secțiunilor*

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = -\int_0^x \frac{M_z(x)}{EI_z}\,dx + C_1 \qquad \text{(III.147)}$$

iar din a doua integrare se obține funcția săgeții $v(x)$

$$v(x) = -\int_0^x \left[\int_0^x \frac{M_z(x)}{EI_z}\,dx\right] dx + C_1x + C_2 \qquad \text{(III.148)}$$

în care C_1 și C_2 sînt constante de integrare ce se determină pe baza condițiilor de rezemare ale grinzii și a condițiilor de continuitate a liniei elastice în dreptul punctelor de schimbare a funcției analitice a momentelor încovoietoare, numite *puncte de frontieră*. În aceste puncte trebuie să existe egalitatea săgeților v și a tangentelor φ pentru cele două ramuri ale curbei elastice, de la stînga și dreapta secțiunii în care funcția analitică a momentelor se schimbă.

Metodele practice de calcul a liniei elastice, precum și funcțiile acestor linii, expresiile săgeților maxime și ale rotirilor la capete, pentru grinzi simplu rezemate și pentru console supuse la diferite încărcări, sînt date în secțiunea IV din manual.

2.4.1.3. **Energia potențială de deformație la încovoiere.** Energia potențială specifică de deformație într-un punct al unei grinzi supuse la încovoiere este

$$U_1 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{M_z y}{I_z}\cdot\frac{M_z y}{EI_z} = \frac{1}{2}\frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2}, \qquad \text{(III.149)}$$

iar energia de deformație înmagazinată de o grindă prin încovoiere

$$U = \frac{1}{2}\int_V \frac{\sigma^2}{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_0^l\int_A \frac{\sigma^2}{E}\,dx\,dA = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_z^2}{EI_z}\,dx = \frac{1}{2}EI_z\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx. \qquad \text{(III.150)}$$

2.4.2. **Grinzi de egală rezistență la încovoiere.** La aceste grinzi, eforturile unitare maxime din încovoiere sînt constante în lungul lor (de obicei $\sigma_{max} = \sigma_a$), modulul de rezistență proporțional în orice secțiune cu momentul încovoietor fiind dat de relația

$$W_z(x) = \frac{M_z(x)}{\sigma_a}. \qquad \text{(III.151)}$$

În tabelul 7.11 din lucrarea [93] se găsesc expresiile lui $W_z(x)$ pentru diferite încărcări.

2.4.3. **Grinzi alcătuite din mai multe materiale omogene.** În această categorie intră grinzile alcătuite din materiale care se comportă diferit la întindere și compresiune, precum și grinzile alcătuite din două sau mai multe materiale diferite.

2.4.3.1. **Grinzi alcătuite din materiale care se comportă diferit la întindere și la compresiune.** La aceste grinzi, deoarece dimensiunile lor sînt determinate de rezistența admisibilă cea mai mică (în fig. III.48, *a* s-a considerat σ_{at}), pentru ca materialul să fie utilizat rațional, sînt indicate secțiuni nesimetrice astfel alcătuite, încît raportul distanțelor fibrelor extreme la axa centrului de greutate al secțiunii să fie egal cu raportul rezistențelor admisibile (fig. III.48, *b*)

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}}. \qquad \text{(III.152)}$$

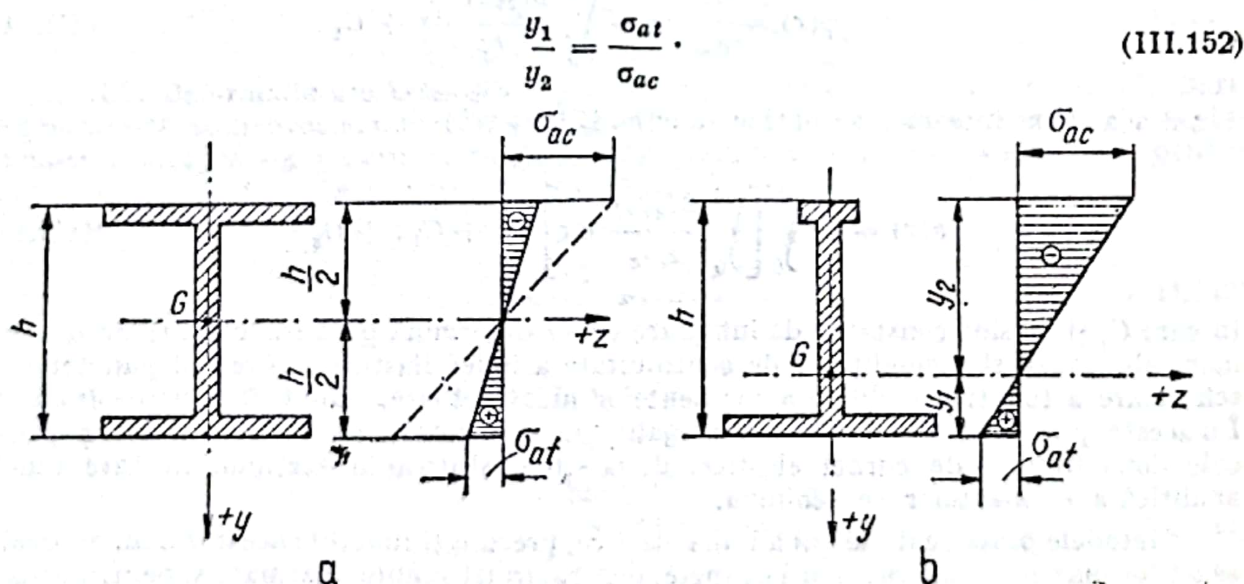


Fig. III.48

În acest caz, eforturile unitare în cele două fibre extreme ating rezistențele admisibile în același timp.

2.4.3.2. Grinzi alcătuite din elemente diferite la care lunecarea între ele nu este împiedicată. În cazul unor asemenea grinzi (fig. III.49), din condiția ca raza de curbură a tuturor elementelor să fie aceeași, rezultă

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{M_1}{E_1I_1}=-\frac{M_2}{E_2I_2}=\ldots=-\frac{M_n}{E_nI_n}=-\frac{\sum_1^n M_i}{\sum_1^n E_iI_i}=-\frac{M}{\sum E_iI_i}, \quad \text{(III.153)}$$

în care $M=\sum_1^n M_i$ este momentul încovoietor care acționează întreaga secțiune a grinzii, M_i — momentul încovoietor ce revine elementului i, având modulul de rigiditate E_iI_i.

Momentul încovoietor ce revine unui element oarecare n se scrie

$$M_n = E_nI_n\frac{M}{\sum_1^n E_iI_i} \quad \text{(III.154)}$$

iar efortul unitar maxim în acel element rezultă

$$\sigma_n = \frac{M_n}{W_n}. \quad \text{(III.155)}$$

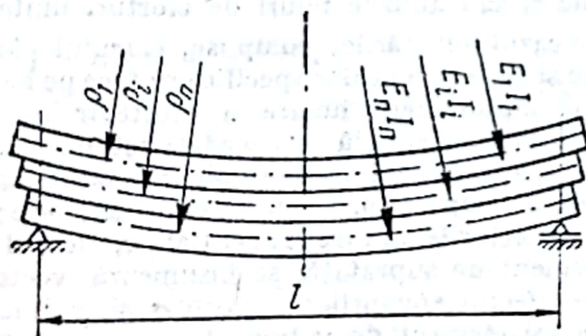


Fig. III.49

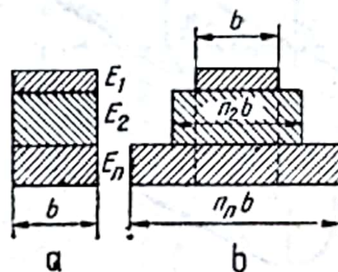


Fig. III.50

2.4.3.3. Grinzi alcătuite din elemente diferite la care lunecarea între ele este împiedicată. În cazul acestor grinzi (fig. III.50, *a*), pe baza ipotezei lui Bernoulli, a cărei valabilitate se păstrează și în acest caz, rezultă:

$$\varepsilon = \omega y. \quad \text{(III.156)}$$

Folosind legea lui Hooke, se poate scrie:

$$\sigma_1 = E_1\omega y;\quad \sigma_2 = E_2\omega y;\ldots;\ \sigma_i = E_i\omega y. \quad \text{(III.157)}$$

Notînd $n_2 = \frac{E_2}{E_1}, \ldots, n_i = \frac{E_i}{E_1}, \ldots, n_n = \frac{E_n}{E_1}$, se obține:

$$\sigma_1 = E_1 \omega y; \quad \sigma_i = n_i E_1 \omega y; \ldots \sigma_n = n_n E_1 \omega y, \tag{III.158}$$

adică eforturile unitare în diferitele materiale în contact ale grinzii sînt aceleași ca și cînd secțiunea ar fi făcută din același material, avînd modulul de elasticitate E_1, multiplicate însă cu raportul modulelor de elasticitate $n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_n$.

Din cele două relații de echivalență ce se pot scrie:

$$\int_A \sigma \, dA = 0 \quad \text{și} \quad \int_A \sigma y \, dA = M, \tag{III.159}$$

rezultă că poziția axei neutre, momentul de inerție și eforturile unitare se pot determina ca pentru o secțiune omogenă alcătuită din materialul al cărui coeficient de elasticitate este E_1, însă lățimea fiecărui element de suprafață este mărit de $n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_n$ ori (fig. III.50, *b*).

3. SOLICITĂRI COMPUSE

O secțiune a unei bare este supusă la solicitări compuse cînd torsorul de reducere al forțelor de legătură din acea secțiune se reduce la două sau mai multe componente, în cazul cel mai general la componentele: N, T_y, T_z, M_x, M_y M_z.

În fig. III.51 sînt arătate aceste eforturi cu sensul lor pozitiv, raportate la axele principale de inerție ale secțiunii.

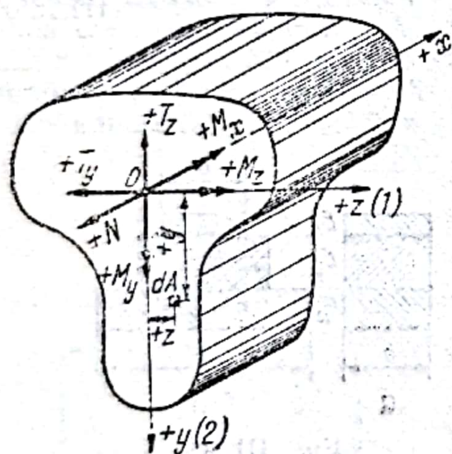


Fig. III.51

Din combinarea acestor eforturi rezultă că în cazul solicitărilor compuse pe secțiune pot apărea numai eforturi unitare normale σ, numai eforturi unitare tangențiale τ, sau ambele feluri de eforturi unitare.

În cazul solicitărilor compuse, calculul eforturilor unitare și al deformațiilor specifice se face pe baza principiului suprapunerii liniare a efectelor produse de fiecare solicitare simplă în parte, astfel:

— eforturile unitare normale σ, lucrînd pe același element de suprafață, se însumează algebric;

— eforturile unitare tangențiale τ, lucrînd pe același element de suprafață, se însumează vectorial;

— efectul eforturilor unitare σ și τ, lucrînd pe un același element de volum din jurul unui punct, se studiază tensorial, analizînd variația eforturilor unitare principale σ_1 și σ_2 în jurul punctului considerat.

3.1 Solicitări care produc numai eforturi unitare normale

3.1.1. Încovoiere oblică. O secțiune este supusă la încovoiere oblică atunci cînd torsorul forțelor de legătură se reduce la un moment încovoietor M care nu coincide cu nici una din axele centrale principale ale secțiunii. Exemple de secțiuni supuse la încovoiere oblică sînt arătate în fig. III.52, *a—e*.

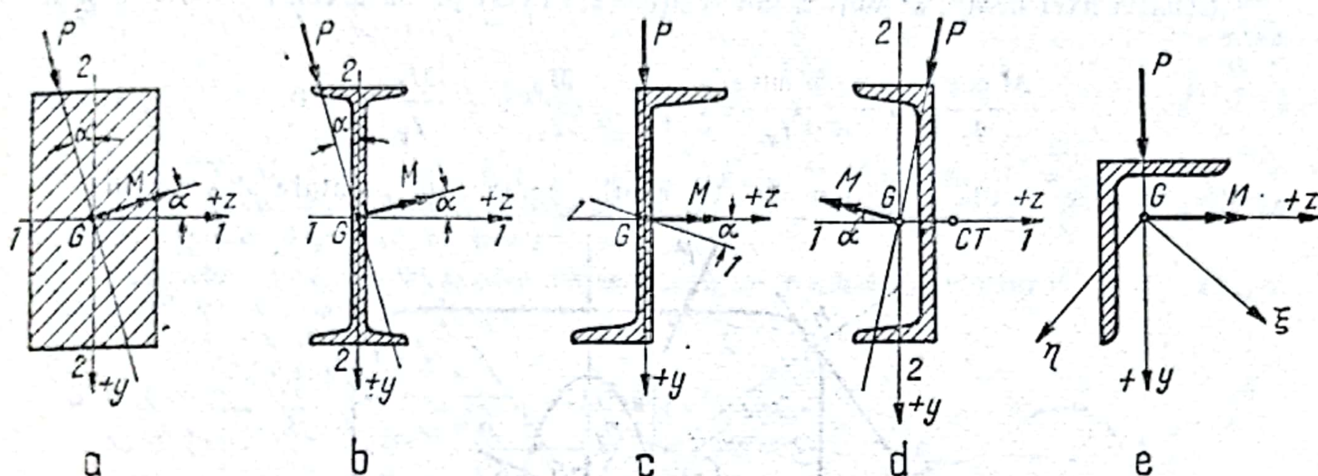


Fig. III.52

3.1.1.1. Calculul eforturilor unitare. Se face descompunînd vectorul momentului încovoietor M după cele două axe centrale principale de inerţie ale secţiunii, calculînd separat, pentru fiecare din cele două componente, cu formulele (III.138) şi (III.139), efortul unitar în punctul considerat al secţiunii, şi adunînd algebric cele două eforturi unitare. Semnul fiecăruia din cele două eforturi unitare se determină ţinînd seama de sensul lor produs de fiecare din cele două componente ale momentului încovoietor. Cu notaţiile din fig. III.53, expresia efortului unitar normal σ într-un punct J al secţiunii rezultă :

$$M_1 = M_z = M \cos\alpha; \quad M_2 = M_y = M \sin\alpha \text{ şi } \frac{M_2}{M_1} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{(III.160)}$$

şi

$$\sigma_J = \sigma^{(M_z)} + \sigma^{(M_y)} = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{M\cos\alpha}{I_z} y + \frac{M\sin\alpha}{I_y} z. \qquad \text{(III.161a)}$$

Dacă axele de referinţă nu sînt axele principale centrale ci două axe centrale oarecare y' şi z', din condiţia menţinerii planeităţii secţiunii şi deci a eforturilor unitare rezultă :

$$\sigma = a + by' + cz'.$$

Din relaţiile de echivalenţă $\int_A \sigma\,dA = 0$; $\int_A \sigma z'\,dA = M_y$ şi $\int_A \sigma y'\,dA = M_z$ se obţine expresia efortului unitar

$$\sigma = \frac{I'_z z' - I'_{yz} y'}{I'_y I'_z - I'^2_{yz}} M_{y'} + \frac{I'_y \cdot y' - I'_{yz} \cdot z'}{I'_y I'_z - I'^2_{yz}} \cdot M_{z'} \qquad \text{(III.161b)}$$

în care I'_y, I'_z, I'_{yz} sînt momentele de inerţie axiale şi centrifugale faţă de axele centrale oarecare Oy' şi Oz', M'_y şi M'_z — componentele momentului încovoietor faţă de aceste axe, iar y' şi z' — coordonatele punctului considerat.

Ecuația axei neutre se obține din relația (III.161a) pe baza condiției $\sigma = 0$ și se scrie

$$\frac{M \cos \alpha}{I_z} y + \frac{M \sin \alpha}{I_y} z = 0; \quad \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0, \tag{III.162}$$

relație din care rezultă că axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii.

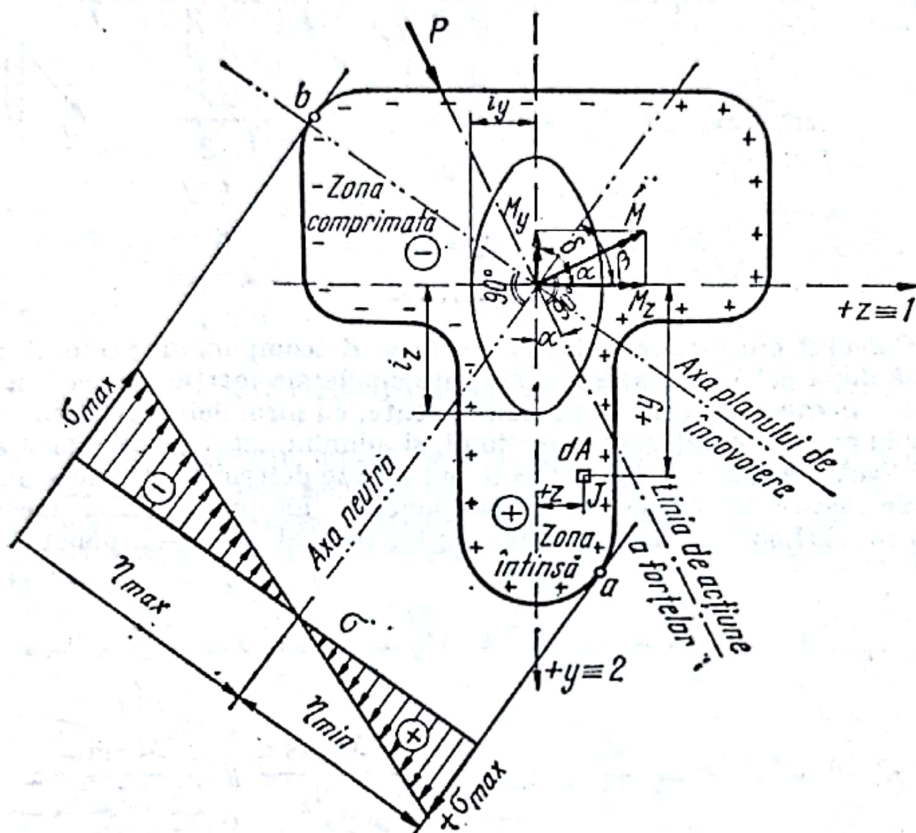


Fig. III.53

Din relația (III.162) se obține

$$\frac{M_y}{M_z} = -\frac{I_y}{I_z} \cdot \frac{y}{z} \quad \text{și} \quad \text{tg}\, \alpha = \frac{I_y}{I_z} \cdot \frac{y}{z}, \tag{III.163}$$

Notînd unghiul dintre axa neutră și axa principală $Oz(1)$ cu β rezultă

$$\text{tg}\, \beta = \frac{y}{z} = -\frac{I_z}{I_y} \text{tg}\, \alpha, \tag{III.164}$$

relație care arată că dacă $I_z \neq I_y$, unghiul dintre axa neutră și axa principală de inerție Oz diferă de unghiul dintre vectorul moment M și axa Oz.

Efortul unitar maxim (pozitiv) și minim (negativ) au loc în punctele a și b, cele mai depărtate de axa neutră, care se obțin ducînd tangente la conturul secțiunii, paralele

la această axă (fig. III. 53 şi III.54). Expresia efortului unitar maxim în valoare absolută este

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_1}{I_1} y' + \frac{M_2}{I_2} z' \qquad \text{(III.165)}$$

în care M_1 şi M_2 sînt momentele încovoietoare după axele principale centrale *1* şi *2*, I_1 şi I_2 — momentele de inerţie principale iar y' şi z' — coordonatele punctului de pe contur, cel mai depărtat de axa neutră.

Cunoscînd poziţia axei neutre determinată de unghiul β, eforturile unitare se pot calcula şi cu relaţia

$$\sigma = \pm \frac{M \cos(\beta - \alpha)\,\eta}{\sqrt{I_1 \cos^2\beta + I_2 \sin^2\beta}} \qquad \text{(III.166)}$$

în care η este distanţa fibrei considerate de la axa neutră, iar β unghiul dintre axa neutră şi axa principală *Oz*. Efortul unitar maxim se obţine pentru η_{max} şi se realizează în colţul cel mai depărtat de axa neutră (se determină printr-o tangentă la secţiune, paralelă la axa neutră).

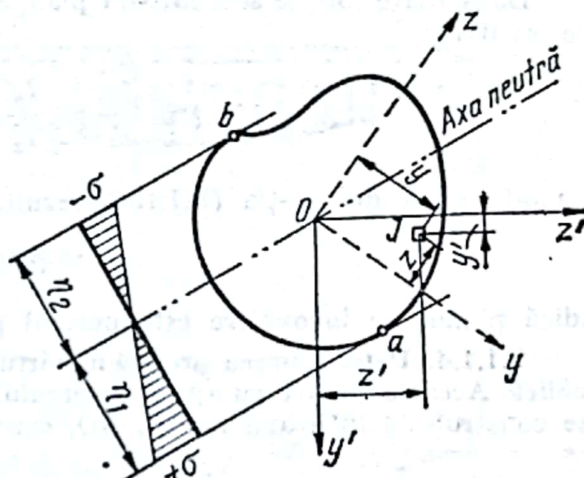


Fig. III.54

Din relaţia (III.164) rezultă

$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{I_z}{I_y} = -\frac{i_z^2}{i_y^2}. \qquad \text{(III.167)}$$

Cum $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\delta$; $\delta = 90° - \alpha$, se obţine

$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\delta = -\frac{i_z^2}{i_y^2}. \qquad \text{(III.168)}$$

Din relaţia (III. 168) rezultă că linia de acţiune a forţelor şi axa neutră sînt doi diametri conjugaţi faţă de elipsa centrală de inerţie a secţiunii, care are expresia

$$\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1 \qquad \text{(III.169)}$$

în care i_z şi i_y sînt razele principale de inerţie ale secţiunii.

3.1.1.2. **Dimensionarea secţiunii.** În cazul încovoierii oblice, dimensionarea secţiunii se face prin încercări cu formula (III.165) pornind de la o valoare dată a raportului I_z/I_y. Pentru secţiuni dublu simetrice care se pot înscrie într-un dreptunghi, se poate utiliza formula (III.165) exprimată într-o formă mai simplă în care se scoate în evidenţă raportul $n = W_z/W_y$:

$$W_z = \frac{M_z + nM_y}{\sigma_a} \quad \text{sau} \quad W_y = \frac{M_z + nM_y}{n\sigma_a}, \qquad \text{(III.170)}$$

în care, pentru secțiuni dreptunghiulare $n = \frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$, iar pentru secțiuni laminate dublu *T*, $n = 8,5\ldots10$, și pentru secțiuni U, $n = 6\ldots8$.

3.1.1.3. Deformația grinzilor supuse la încovoiere oblică. Săgeata totală a unui punct al axei grinzii se obține însumînd vectorial săgețile v și w produse de fiecare dintre cele două momente $M_1 = M_z$ și $M_2 = M_y$ după axele y și z (fig. III.55)

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}\,. \qquad \text{(III.171)}$$

Dacă toate forțele sînt într-un plan, unghiul γ dintre săgeata f și axa Oz este dat de relația

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v}{w} = \frac{I_y}{I_z}\operatorname{cotg}\alpha = \frac{i_y^2}{i_z^2}\operatorname{cotg}\alpha. \qquad \text{(III.172)}$$

Ținînd seama de relația (III.164) rezultă

$$\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma = -1, \qquad \text{(III.173)}$$

adică planul de încovoiere este normal pe direcția axei neutre.

3.1.1.4. Determinarea grafică a eforturilor unitare în secțiunile supuse la încovoiere oblică. Aceasta se face cu ajutorul cercului lui Land. De exemplu, în cazul din fig. III. 56 se construiește întîi axa neutră *NO*, conjugată liniei de acțiune a forțelor.

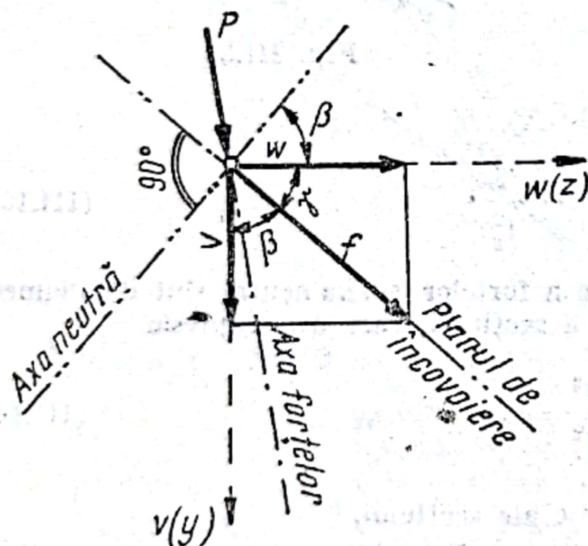


Fig. III.55

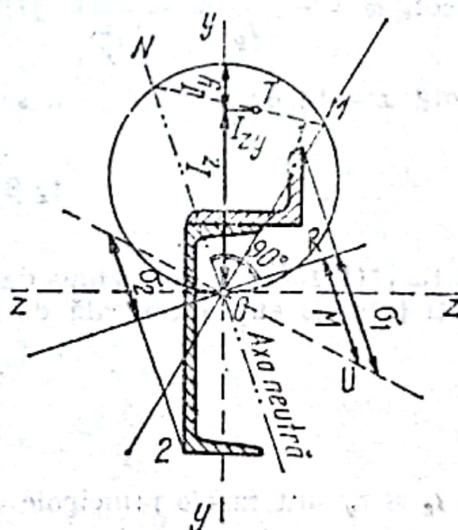


Fig. III.56

Din centrul de greutate *O*, normal pe direcția axei neutre, se duce o dreaptă pe care se măsoară $OR = NT$, iar din punctul *R*, paralel cu axa neutră, dreapta $RU = M$. Dreapta *OU* reprezintă variația efortului unitar pe secțiune. Eforturile unitare extreme σ_1 și σ_2 se produc în punctele *1* și *2*, cele mai depărtate de axa neutră. Ele sînt determinate de paralele la axa neutră duse prin acele puncte. Scările alese: lungimi: 1 cm

pe desen = a cm în realitate, momentele încovoietoare : 1 cm pe desen = m daNcm în realitate, momente de inerţie : 1cm = i cm^4 în realitate, efortul unitar : 1 cm pe desen = $\frac{ma}{i}$ daN/cm^2.

3.1.2. **Încovoiere strîmbă.** Prin încovoiere strîmbă se înţelege cazul de solicitare a unei bare supusă unor momente încovoietoare al căror vector variază ca înclinare de la o secţiune la alta. Calculul unor asemenea bare de secţiune constantă se face descompunînd fiecare moment în componentele lui după axele principale de inerţie ale secţiunii barei. Se obţin astfel două diagrame de momente şi două deformate, una corespunzătoare planului xOz, iar a doua planului xOy (fig. III.57).

Efortul unitar maxim are loc în punctul cel mai depărtat de axa neutră, de coordonate y' şi z' şi are expresia (III.165).

În fiecare secţiune transversală, M_1 şi M_2 avînd alte valori, axa neutră se schimbă ca înclinare şi deci determinarea lui σ_{max} în lungul grinzii trebuie făcută prin încercări.

Deformata este o curbă strîmbă, iar săgeata într-un punct se determină cu formula (III.171).

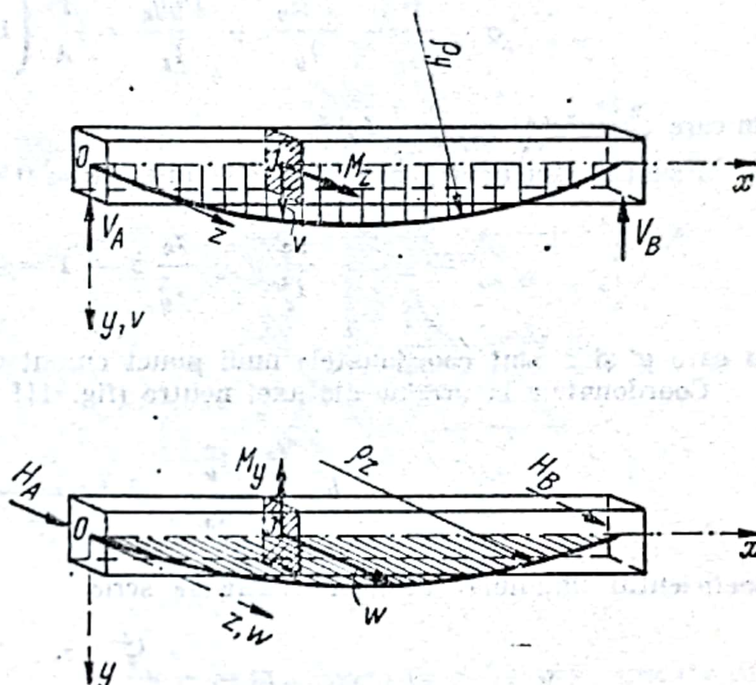


Fig. III.57

3.1.3. **Efort axial şi moment încovoietor.** În calculul elementelor supuse la efort axial şi încovoiere, se disting două cazuri şi anume :

— materialul poate prelua eforturi unitare de întindere ;
— materialul nu poate prelua eforturi unitare de întindere.

3.1.3.1. **Material omogen care preia eforturi unitare de întindere.** Se folosesc două metode :

Metoda analitică. Descompunînd vectorul moment după axele principale de inerţie ale secţiunii rezultă eforturile N, M_z, M_y.

Efortul unitar într-un punct al secţiunii se obţine prin suprapunerea efectelor şi are expresia :

$$\sigma = \pm\, \sigma^{(N)} \pm \sigma^{(M_z)} \pm \sigma^{(M_y)} \quad \text{(III.174)}$$

sau

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{(III.175)}$$

Pentru un punct oarecare, semnele termenilor ce intervin se stabilesc după regulile de la paragrafele 2.1. şi 3.1.1.

Torsorul forțelor de legătură format de efortul axial N și momentele încovoietoare M_y și M_z se poate considera că provine din reducerea, la centrul de greutate al secțiunii, la unei forțe P aplicată cu excentricitățile z_0 și y_0 (fig. III. 58 în care forța P este de întindere)

$$N = P; \quad M_y = Pz_0 \quad \text{și} \quad M_z = Py_0 \tag{III.176}$$

Înlocuind în relația (III.175) expresiile eforturilor (III.176) se obține

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pzz_0}{I_y} + \frac{Pyy_0}{I_z} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{zz_0}{i_y^2} + \frac{yy_0}{i_z^2}\right), \tag{III.177}$$

în care $i_z^2 = I_z/A$ și $i_y^2 = I_y/A$.

Ecuația axei neutre rezultă din condiția $\sigma = 0$ și are expresia

$$\frac{y_0}{i_z^2}y' + \frac{z_0}{i_y^2}z' + 1 = 0 \tag{III.178}$$

în care y' și z' sînt coordonatele unui punct curent al axei neutre.

Coordonatele la origine ale axei neutre (fig. III. 58) au expresiile

$$b = -\frac{i_y^2}{z_0} \quad \text{și} \quad c = -\frac{i_z^2}{y_0}. \tag{III.179}$$

Coeficientul unghiular al axei neutre se scrie

$$m = -\frac{i_z^2}{i_y^2}\cdot\frac{z_0}{y_0}. \tag{III.180}$$

Dreapta AO ce leagă punctul de aplicație al forței P de centrul de greutate O al secțiunii (fig. III.58) are coeficientul unghiular dat de relația

$$m_1 = \frac{y_0}{z_0}. \tag{III.181}$$

Făcînd produsul celor doi coeficienți unghiulari rezultă

$$m m_1 = -\frac{i_z^2}{i_y^2}. \tag{III.182}$$

Din relațiile (III.178) și (III.182) rezultă (v. și fig. III.59):

— fiecărui punct de aplicație A al forței P îi corespunde o axă neutră ale cărei puncte de intersecție cu axele de coordonate sînt date de relațiile (III.179);

— poziția axei neutre nu depinde de mărimea sarcinii P, ci numai de poziția punctului de aplicație al forței P și de elementele geometrice ale secțiunii (momentele de inerție principale, respectiv razele de inerție);

— dacă punctul de aplicaţie A al forţei P se deplasează pe o dreaptă OA trecînd prin centrul de greutate O al secţiunii, axa neutră se deplasează paralel cu ea însăşi, şi anume cînd A se apropie de O, axa neutră se depărtează de O (fig. III.59);

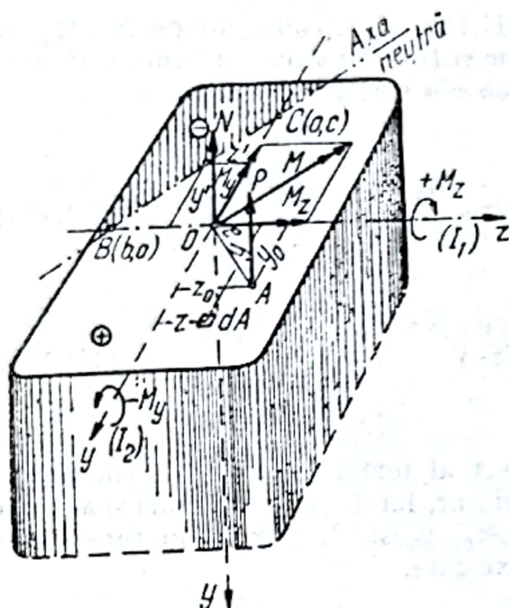


Fig. III.58

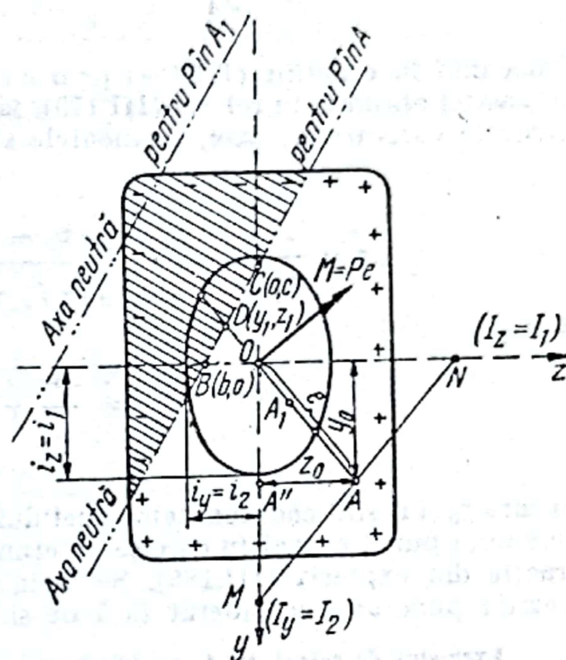


Fig. III.59

— dacă punctul de aplicaţie A al forţei P se deplasează pe o dreaptă oarecare MN, axa neutră se roteşte în jurul unui punct D care este punctul de aplicaţie al forţei P pentru axa MN, considerată ca axă neutră [rezultă din ecuaţia (III.177) dacă se consideră $y' = y_1 = \text{const}$ şi $z' = z_1 = \text{const}$, iar y_0 şi z_0 variabil];

— axa neutră reprezintă antipolara punctului (polului) $A(y_0 z_0)$ faţă de elipsa de inerţie dată de ecuaţia

$$\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1;$$

— raza AO pe care acţionează forţa P şi axa neutră sînt doi diametri conjugaţi faţă de elipsa centrală de inerţie a secţiunii.

Dacă axele yOz faţă de care se raportează secţiunea sînt axe centrale ortogonale oarecare, ţinînd seama că pe baza ipotezei secţiunilor plane, eforturile unitare se distribuie pe secţiune după un plan, expresia lor generală se poate scrie:

$$\sigma = a + by + cz \tag{III.183}$$

în care cele trei constante se determină pe baza celor trei relații de echivalență care se scriu

$$N = \int_A \sigma \, dA \, ; \quad M_y = \int_A \sigma z \, dA \, ; \quad M_z = \int_A \sigma y \, dA \qquad \text{(III.184)}$$

Înlocuind în ecuațiile (III.184) pe σ cu expresia (III.183) și introducînd pe N, M_y și M_z astfel obținute în relația (III.175), făcînd calculele și ținînd seama că axele sînt axe centrale oarecare și, deci, momentele statice față de ele sînt nule, rezultă:

$$\sigma = \frac{N}{A} + Ny \cdot \frac{I_y \cdot y_0 - I_{zy} \cdot z_0}{I_z \cdot I_y - I_{zy}^2} + Nz \cdot \frac{I_z \cdot z_0 - I_{zy} \cdot y_0}{I_z \cdot I_y - I_{zy}^2} \qquad \text{(III.185)}$$

sau

$$\sigma = \frac{N}{A} + Ny \cdot U + Nz \cdot V \qquad \text{(III.186)}$$

în care y_0 și z_0 sînt coordonatele punctului de aplicație A al forței N, z și y — coordonatele unui punct curent în care se determină efortul unitar, iar U și V — a doua și a treia fracție din expresia (III.185). Semnele pentru z, y, z_0, y_0 se determină în funcție de poziția punctului considerat față de sistemul de axe ales.

Exemplul de calcul III.1. Pentru secțiunea din fig. III.60, *a* acționată de forța $N = -800$ kN se face verificarea eforturilor unitare în punctele A, B, C, D, E.

Coordonatele punctului de aplicație ale forței N sînt:

$z_0 = -12{,}4$ cm; $y_0 = -8{,}6$ cm.

Fig. III.60

A. *Calculul eforturilor unitare în raport cu axele ortogonale centrale oarecare, z, O, y* (fig. III.60, b)

1) Poziția centrului de greutate față de sistemul de axe z_1, A, y_1

$$A = \sum A_i = 40 \cdot 70 + 80 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 70 = 6\,600 \text{ cm}^2$$

$$z_{1G} = \frac{2\,800 \cdot 20 + 2\,400 \cdot 40 + 1\,400 \cdot \left(40 + \frac{1}{3}\,40\right)}{6\,600} = 34{,}34 \text{ cm}$$

$$y_{1G} = \frac{2\,800 \cdot 65 + 2\,400 \cdot 15 + 1\,400 \cdot \left(30 + \frac{1}{3}\,70\right)}{6\,600} = 44{,}34 \text{ cm.}$$

2) Momente de inerție

$$I_z = \left(\frac{40 \cdot 70^3}{12} + 40 \cdot 70 \cdot 20{,}66^2\right) + \left(\frac{80 \cdot 30^3}{12} + 80 \cdot 30 \cdot 29{,}34^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{40 \cdot 70^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 70 \cdot 9^2\right) = 5\,079{,}0 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \left(\frac{70 \cdot 40^3}{12} + 40 \cdot 70 \cdot 14{,}34^2\right) + \left(\frac{30 \cdot 80^3}{12} + 80 \cdot 30 \cdot 5{,}66^2\right) +$$

$$+ \left(\frac{70 \cdot 40^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 70 \cdot 19^2\right) = 2\,935{,}8 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_{zy} = 40 \cdot 70\,(-14{,}34)\,(20{,}66) + 80 \cdot 30(5{,}66)\,(+29{,}34) +$$

$$+ \left[-\frac{40^2 \cdot 70^2}{72} + \frac{40 \cdot 70}{2}\,(19)\,(9)\right] = +1\,097{,}58 \cdot 10^3 \text{ cm}^4.$$

3) Termenii U și V

$$U = \frac{2\,935{,}8 \cdot 10^3\,(-8{,}6) - (-1\,097{,}58 \cdot 10^3)\,(-12{,}4)}{5\,078{,}8 \cdot 2\,935{,}8 \cdot 10^6 - 1\,097{,}58^2 \cdot 10^6} = -2{,}836 \cdot 10^{-6}$$

$$V = \frac{5\,079{,}0 \cdot 10^3\,(-12{,}4) - (+1\,097{,}58 \cdot 10^3)\,(+8{,}6)}{5\,079{,}0 \cdot 2\,935{,}8 \cdot 10^6 - 1\,097{,}58^2 \cdot 10^6} = +5{,}284 \cdot 10^{-6}.$$

4) Eforturile unitare în colțurile secțiunii

$$A(z_A = -34{,}34 \text{ cm}; \; y_A = +44{,}34 \text{ cm})$$

$$\sigma_{ef\,A} = -\left[\frac{80\,000}{6\,600} + 80\,000 \cdot (-44{,}34)\,(-2{,}836)10^{-6} + 80\,000\,(-34{,}34)\,(-5{,}284)\,10^{-6}\right] =$$

$$= -(12{,}121 + 10{,}060 + 14{,}516) = -36{,}7 \text{ daN/cm}^2;$$

$$B(z_B = -34{,}34 \text{ cm}; \; y_B = +55{,}66 \text{ cm})$$

$$\sigma_{ef\,B} = -\left[\frac{80\,000}{6\,600} + 80\,000\,(-55{,}66)\,(+2{,}836)\,10^{-6} + 80\,000\,(-34{,}34)\,(-5{,}284)\,10^{-6}\right] = -14{,}02 \text{ daN/cm}^2.$$

$C(z_C = +5{,}66$ cm; $v_C = -55{,}66$ cm)

$$\sigma_{ef\,C} = -\left[\frac{80\,000}{6\,600} + 80\,000\,(55{,}66)\,(+2{,}836)\,10^{-6} + 80\,000\,(5{,}66)\,(-5{,}284)\,10^{-6}\right] = 2{,}90\ \text{daN/cm}^2;$$

$D(z_D = 45{,}66$ cm; $v_D = 14{,}34$ cm)

$$\sigma_{ef\,D} = -\left[\frac{80\,000}{6\,600} + 80\,000\,(+14{,}34)\,(+2{,}836)\,10^{-6} + 80\,000\,(+45{,}66)\,(-5{,}284)\,10^{-6}\right] = 3{,}92\ \text{daN/cm}^2;$$

$E(z_E = 45{,}66$ cm; $v_E = 44{,}34$ cm)

$$\sigma_{ef\,E} = -\left[\frac{80\,000}{6\,600} + 80\,000\,(+44{,}34)\,(+2{,}836)\,10^{-6} + 80\,000\,(45{,}66)\,(-5{,}284)10^{-6}\right] = -2{,}88\ \text{daN/cm}^2.$$

B. *Calculul eforturilor unitare în raport cu axele principale de inerție* (v. fig. III.60, *b*).

1) Momentele de inerție principale și direcția axelor principale

$$I_{\xi,\eta} = \frac{5\,079{,}0 + 2\,935{,}8}{2}\,10^3 \pm \frac{10^3}{2}\sqrt{(5\,079{,}0 - 2\,935{,}8)^2 + 4\cdot 1\,097{,}58^2}$$

$$I_\xi = 5\,541{,}4\cdot 10^3\ \text{cm}^4$$

$$I_\eta = 2\,473{,}4\cdot 10^3\ \text{cm}^4$$

$$\text{tg}\,2\alpha = -\frac{2(+1\,097{,}58)}{5\,079{,}0 - 2\,935{,}8} = 1{,}024;\quad \alpha = -22°50'$$

$$i_\xi^2 = \frac{5\,541{,}4}{6\,600}\cdot 10^3 = 839{,}6\ \text{cm}^2$$

$$i_\eta^2 = \frac{2\,473{,}4}{6\,600}\cdot 10^3 = 374{,}8\ \text{cm}^2.$$

2) Folosind relațiile de transformare $\eta = -z\sin\alpha + v\cos\alpha$; $\xi = z\cos\alpha + v\sin\alpha$, coordonatele forței N față de axele $\xi O \eta$ rezultă:

$$\xi_0 = -12{,}4\cos\alpha - 8{,}6\sin\alpha = -14{,}77\ \text{cm}$$

$$\eta_0 = -8{,}6\cos\alpha + 12{,}4\sin\alpha = 3{,}114\ \text{cm}.$$

3) Poziția axei neutre, prin tăieturile cu axele ξ și η

$$\xi = -\frac{i_\eta^2}{\xi_0} = -\frac{374{,}8}{-14{,}77} = +25{,}37\ \text{cm}$$

$$\eta = -\frac{i_\xi^2}{\eta_0} = -\frac{839{,}6}{3{,}114} = -269{,}62\ \text{cm}.$$

4) Eforturile unitare maxime sînt în punctele A și D

$$A\begin{cases}\xi_A = -34{,}34\cos\alpha + 44{,}34\sin\alpha = -48{,}855 \text{ cm}\\ \eta_A = +44{,}34\cos\alpha + 34{,}34\sin\alpha = +27{,}540 \text{ cm}\end{cases}$$

$$\sigma_{ef_A} = -\frac{80\,000}{6\,600}\left[1 + \frac{(-14{,}77)(-48{,}855)}{374{,}8} + \frac{(+3{,}114)(+27{,}540)}{839{,}6}\right] = -36{,}7 \text{ daN/cm}^2$$

$$D\begin{cases}\xi_D = 45{,}66\cos\alpha - 14{,}34\sin\alpha = 36{,}517 \text{ cm}\\ \eta_D = +14{,}34\cos\alpha - 45{,}66\sin\alpha = -30{,}935 \text{ cm}\end{cases}$$

$$\sigma_{ef_D} = -\frac{80\,000}{6\,600}\left[1 + \frac{(-14{,}77)(36{,}517)}{374{,}8} + \frac{(-3{,}114)(-30{,}935)}{839{,}6}\right] = 3{,}92 \text{ daN/cm}^2.$$

Metoda grafică. Dacă axele principale de inerție ale secțiunii sînt cunoscute (fig. III.61), pe axa principală $1-1$ (Oz) se proiectează în A' punctul de aplicație A al forței P și se determină segmentul $OD = i_1$. În mod analog pe axa $2-2$ (Oy) se determină A'' proiecția lui A și segmentul $OE = i_2$. Din D se duce o perpendicuară pe DA'' iar din E pe EA'. Aceste perpendiculare taie cele două axe principale în punctele C și B care determină poziția axei neutre. Aceasta rezultă imediat din triunghiul $A''DC$ în care $\overline{OC} = \overline{OD}^2/\overline{OA''} = i_1^2/y_0 = c$. Diagrama de variație a eforturilor unitare normale se construiește observînd că în dreptul centrului de greutate al secțiunii efortul unitar este $\sigma_0 = P/A$ iar în axa neutră este zero.

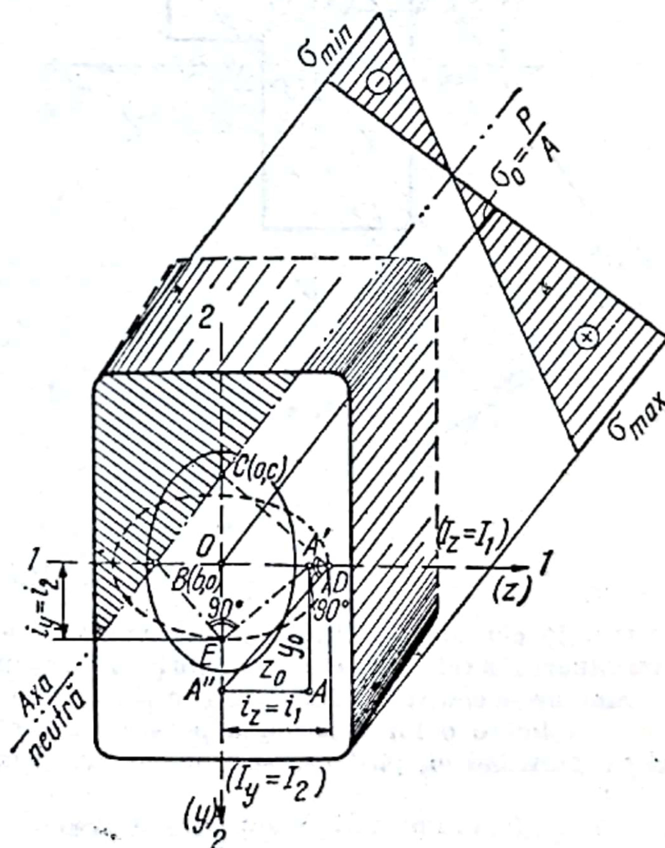


Fig. III.61

Dacă secțiunea este oarecare (fig. III.62), după ce se calculează I_z, I_y și I_{zy}, se determină, cu ajutorul cercului lui Land, axele principale. Momentele de inerție principale sînt date de relațiile

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[(I_z + I_y) + \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4\,I_{zy}^2}\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(I_z + I_y) - \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4\,I_{zy}^2}\right]. \qquad \text{(III.187)}$$

Direcțiile axelor principale sînt determinate de

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \qquad \text{(III.188)}$$

iar razele principale de inerție sînt $i_1 = \sqrt{I_1/A}$ și $i_2 = \sqrt{I_2/A}$. Cunoscînd direcțiile axelor principale, construcția se conduce la fel ca mai înainte. În fig. III.62,*a* este arătată

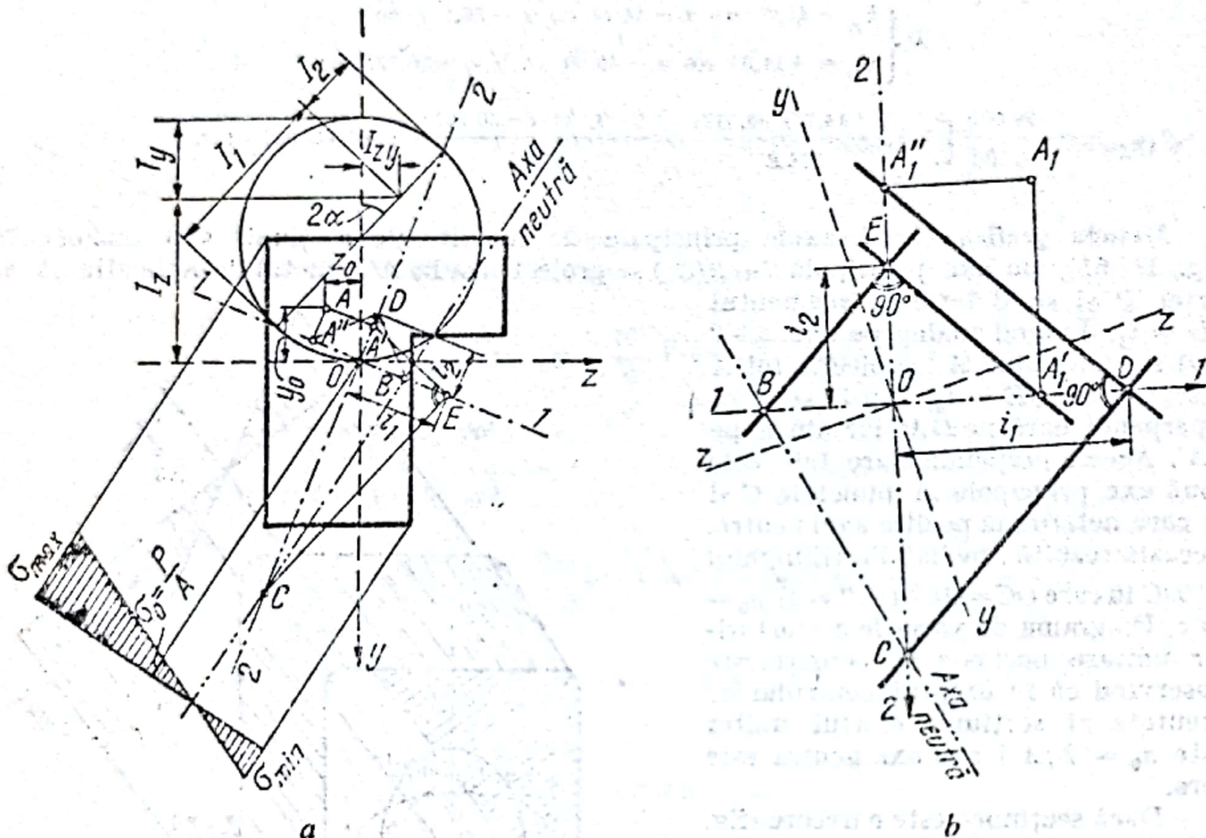


Fig. III.62

construcția cercului lui Land și determinarea axei neutre, iar în fig. III.62,*b* numai determinarea axei neutre pentru forța *P* în punctul A_1.

Sîmburele central. Sîmburele central este locul geometric al punctelor unei secțiuni în care aplicînd o forță normală pe secțiune, eforturile unitare nu schimbă semnul în nici un punct al ei, păstrînd semnul efortului axial (+pentru întindere, −pentru compresiune).

Dacă o forță normală *N* acționează în afara sîmburelui central, axa neutră taie secțiunea, iar pe aceasta apar atît eforturi unitare de întindere cît și de compresiune. Dacă forța *N* se găsește pe frontiera sîmburelui central, axa neutră este tangenta la conturul secțiunii, pe contur eforturile unitare fiind nule.

Între punctul de aplicație al forței normale *N* și axa neutră există o corespondență de tip antipol și polară.

Dacă punctul de aplicație al forței *N* descrie conturul secțiunii, axa neutră înfășoară frontiera sîmburelui central, cu observația că nici o axă neutră nu trebuie să taie sîmbu-

rele central, iar dacă punctul A de aplicație al forței parcurge conturul sîmburelui central, axa neutră înfășoară secțiunea.

Puncte limită ale sîmburelui central, pentru o axă oarecare Δ ce trece prin centrul de greutate G al unei secțiuni, sînt punctele în care axa taie frontiera sîmburelui central (fig. III.63,*a*).

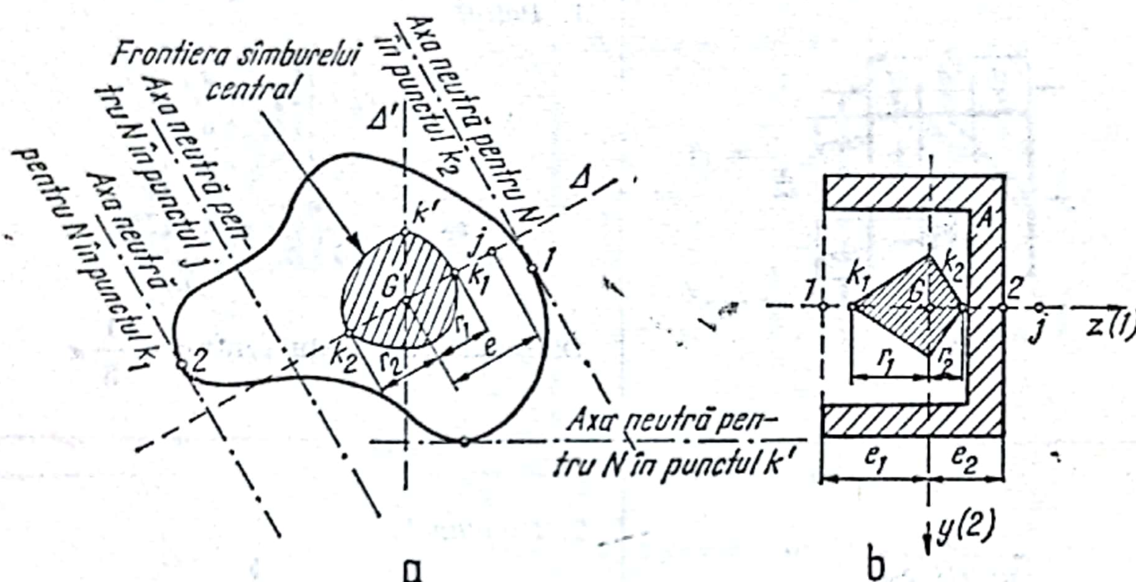


Fig. III.63

Distanțele r_1 și r_2 ale celor două puncte limită ale axei Δ, la centrul de greutate al secțiunii, se numesc *distanțe ale sîmburelui central* sau *raze de rezistență*.

Dacă axa Δ este o axă principală de inerție a secțiunii (fig. III. 63, *b*) rezultă relațiile

$$r_1 = Gk_1 = -\frac{W_2}{A} = -\frac{I_y}{Ae_2} = -\frac{i_y^2}{e_2}$$

$$r_2 = Gk_2 = \frac{W_1}{A} = \frac{I_y}{Ae_1} = \frac{i_y^2}{e_1} \qquad \text{(III.189)}$$

în care e_1 și e_2 sînt distanțele de la centrul de greutate al secțiunii la cele două margini extreme ale acesteia, pe axa $z(1)$.

Trasarea sîmburelui central se face calculînd razele de rezistență r pentru diferite „axe neutre" tangente la conturul secțiunii, cu formulele de mai înainte. Cu momentele de inerție principale I_1 și I_2, se construiește cercul lui Mohr pe baza căruia se trasează direcțiile laturilor sîmburelui central corespunzătoare colțurilor secțiunii. Sîmburele central are totdeauna o formă convexă, deoarece totalitatea tangentelor care nu taie secțiunea închid un contur convex, chiar dacă secțiunea are concavități.

Forma sîmburelui central și razele de rezistență, pentru cîteva secțiuni folosite în tehnică, sînt redate în tabelul III.9.

Tabelul III.9

Sîmburele central și razele de rezistență pentru secțiuni tehnice

Forma secțiunii și a sîmburelui central	Distanța la limita sîmburelui central
	1. *Pătrat* $r_z = r_y = \frac{a}{6}$ $r_{min} = \frac{a}{6\sqrt{2}} = 0{,}1179a$ Diagonala sîmburelui central $= \frac{1}{3}a$
	2. *Dreptunghi* $r_z = \frac{b}{6}$ $r_y = \frac{h}{6}$ $r_{min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2+h^2}}$ Diagonalele sîmburelui central $= \frac{1}{3}b$ și $\frac{1}{3}h$
	3. *Dreptunghi gol* $r_z = \frac{1}{6}\,\frac{HB^3 - hb^3}{B(HB - hb)}$ $r_y = \frac{1}{6}\,\frac{BH^3 - bh^3}{H(BH - bh)}$

Tabelul III.9 (continuare)

Forma secțiunii și a sîmburelui central	Distanța la limita sîmburelui central
	4. *Dreptunghi cu pereți subțiri* $$r_z = \frac{1}{6} B \left(\frac{Bt_2 + 3Ht_1}{Ht_1 + Bt_2} \right)$$ $$r_y = \frac{1}{6} H \left(\frac{Ht_1 + 3\,Bt_2}{Ht_1 + Bt_2} \right)$$
	5. *Triunghi isoscel* $$r_z = \frac{b}{12}$$ $$r_{1y} = \frac{h}{6}$$ $$r_{2y} = \frac{h}{12}$$
	6. *Cerc* $$r_z = r_y = r = \frac{D}{8} = \frac{R}{4}$$

Tabelul III.9 (continuare)

Forma secțiunii și a sîmburelui central	Distanța la limita sîmburelui central
d, D, r, z, y	7. *Cerc gol* $r = \frac{D^2 + d^2}{8\,d}$
D, $r = \frac{R}{2}$, t, z, y	8. *Cerc cu perete subțire* $r = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$

Determinarea eforturilor unitare pe conturul unei secțiuni cu ajutorul razelor de rezistență. Cunoscînd, pentru o secțiune și o axă Δ pe care acționează în punctul J forța normală N, limitele k_1 și k_2 ale sîmburelui central și razele de rezistență r_1 și r_2 (fig. III.64, a), eforturile unitare la colțurile secțiunii sînt date de relațiile

$$\sigma_1 = \frac{M_{k2}}{W_1} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = \frac{M_{k1}}{W_2} \qquad \text{(III.190)}$$

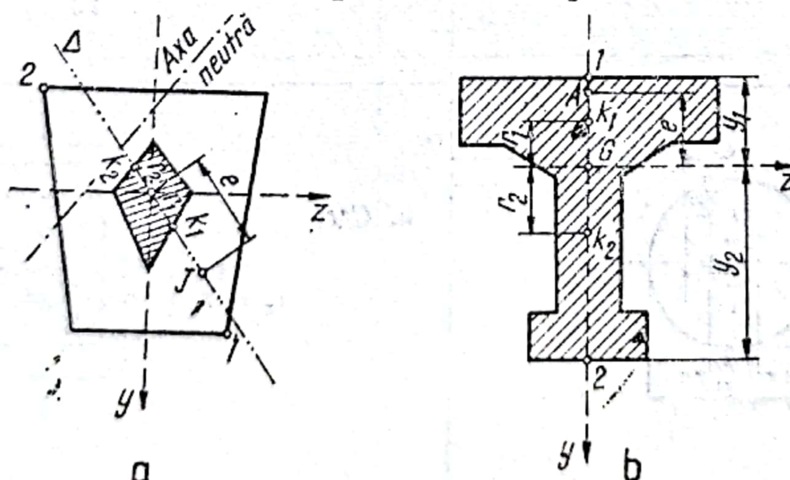


Fig. III.64

în care : M_{k1} şi M_{k2} sînt momentele forţei N faţă de limitele k_1 şi k_2 ale sîmburelui central şi au expresiile

$$M_{k1} = N \cdot \overline{Jk_1} = N(e - r_1) \quad \text{şi} \quad M_{k2} = N \cdot \overline{Jk_2} = N(e + r_2); \tag{III.191}$$

W_1 şi W_2 sînt modulele de rezistenţă faţă de axa neutră, conjugată direcţiei Δ.

Pentru secţiuni cu o axă de simetrie (fig. III.64, *b*)

$$|\sigma_{max}| = \sigma_1 = \frac{M_{k2}}{W_1} \quad \text{şi} \quad |\sigma_{min}| = \sigma_2 = \frac{M_{k1}}{W_2} \tag{III.192}$$

în care: $W_1 = \frac{I_z}{y_1}$ şi $W_2 = \frac{I_z}{y_2}$ sînt modulele de rezistenţă faţă de axa principală z. Razele de rezistenţă avînd expresiile

$$r_1 = \frac{W_2}{A} = \frac{I_z}{Ay_2} \quad \text{şi} \quad r_2 = \frac{W_1}{A} = \frac{I_z}{Ay_1} \tag{III.193}$$

rezultă $W_1 = Ar_2$ şi $W_2 = Ar_1$. (III.194)

Cu aceste notaţii rezultă

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_{max}| = \sigma_1 &= \frac{N(e + r_2)}{Ar_2} = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e}{r_2}\right) \\ |\sigma_{min}| = \sigma_2 &= \frac{N(e - r_1)}{Ar_1} = -\frac{N}{A}\left(1 - \frac{e}{r_1}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{III.195}$$

Semnele eforturilor unitare rezultă din sensul forţei N faţă de secţiune, poziţia punctului ei de aplicaţie şi coordonatele punctului în care se aplică forţa N.

Linia de influenţă a efortului unitar într-un punct al unei secţiuni. Pentru o secţiune dreptunghiulară (fig. III.65), linia de influenţă a efortului unitar σ_A în punctul A pe latura *1—1* este dată de diagrama de repartiţie a eforturilor unitare normale pe secţiune, cînd în A acţionează o forţă $N = 1$, diagramă limitată de o dreaptă ce trece prin punctul limită k_2 al sîmburelui central şi punctul A ce limitează valoarea efortului unitar σ_A în A, raportat la scara aleasă pentru eforturile unitare normale. Efortul unitar în punctul A pentru o poziţie oarecare a unei forţe de compresiune N aplicată, de exemplu în j, este dat de relaţia

$$\sigma_A = -N\eta_j \tag{III.196}$$

în care η_j este ordonata din dreptul punctului j al liniei de influenţă a lui σ_A.

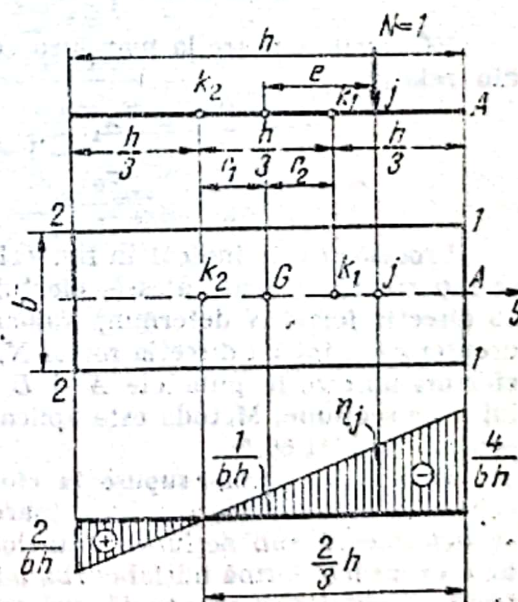


Fig. III.65

Eforturile unitare la marginile secțiunilor dreptunghiulare. Cu notațiile din fig. III.66, eforturile unitare la marginile unei secțiuni dreptunghiulare de laturi b, h sînt date de relațiile:

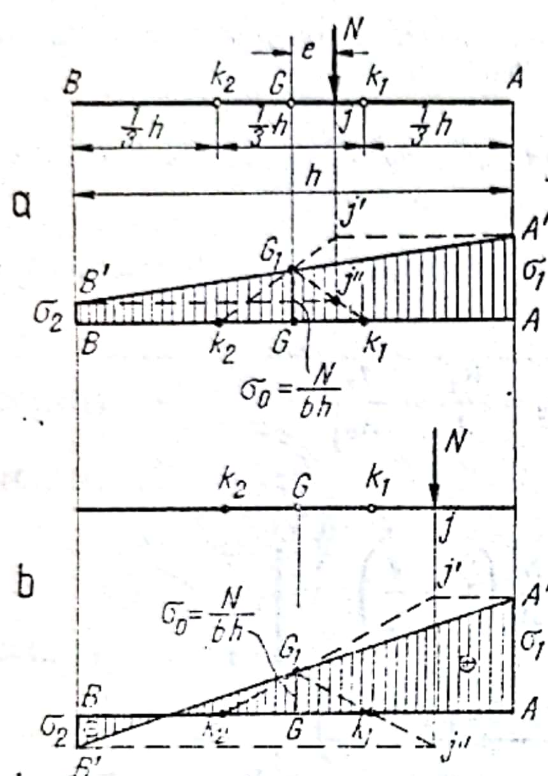


Fig. III.66

$$\sigma_1 = |\sigma_{max}| = \frac{M_{k2}}{W_1} = \frac{6M_{k2}}{bh^2} =$$

$$= -\frac{N}{A}\left(1 + \frac{6e}{h}\right)$$

(III.197)

$$\sigma_2 = |\sigma_{min}| = \frac{M_{k1}}{W_2} = \frac{6\,M_{k1}}{bh^2} =$$

$$= \frac{N}{A}\left(1 - \frac{6e}{h}\right)$$

în care e este excentricitatea forței, A aria și h latura mare a secțiunii.

Dacă eforturile unitare normale trebuie să fie numai de compresiune, este necesar ca $6\,e/h \leqslant 1$ sau $e \leqslant h/6$, adică forța trebuie să acționeze în treimea mijlocie k_1k_2 a secțiunii, respectiv în interiorul sîmburelui central.

Eforturile unitare la marginea secțiunii pot fi determinate și grafic după cum reiese din relația

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1 + \frac{6e}{h} = \left(\frac{h}{6} + e\right)\bigg/\frac{h}{6}. \quad \text{(III.198)}$$

Procedeul este indicat în fig. III.66, *a*. În dreptul centrului de greutate al secțiunii se raportează, la scara aleasă, efortul unitar $\sigma_0 = N/A = GG_1$. Intersecția dreptei k_2G_1 cu direcția forței N determină valoarea efortului unitar σ_1 în punctul A, iar intersecția dreptei k_1G_1, tot cu direcția forței N, determină valoarea lui σ_2 în B. Raportînd aceste eforturi unitare în punctele A și B dreapta $A'G_1B'$ reprezintă diagrama de variație a lui σ pe secțiune. Metoda este aplicabilă și dacă forța N acționează în afara sîmburelui central (fig. III.66, *b*).

Deformația barelor supuse la eforturi axiale și momente încovoietoare. Barele supuse concomitent la momente încovoietoare, produse de încărcări transversale, și eforturi axiale, se deformează sub acțiunea ambelor feluri de eforturi. Deformata este influențată și de o eventuală formă inițial curbă a barei. Săgețile din încovoiere produse de încărcările transversale și de o eventuală curbură inițială a barei sînt mărite dacă efortul axial este de compresiune (fig. III.67, *a*) și micșorate dacă el este de întindere (fig. III.67, *b*).

În aceste cazuri calculul deformatei se face pe baza teoriei de ordinul II, în care echilibrul se studiază pe forma deformată a barei (v. secţiunea VIII din acest manual).

Momentul încovoietor într-o secţiune are expresia

$$M_x = M_{tr} \pm N(v_0 + v) \tag{III.199}$$

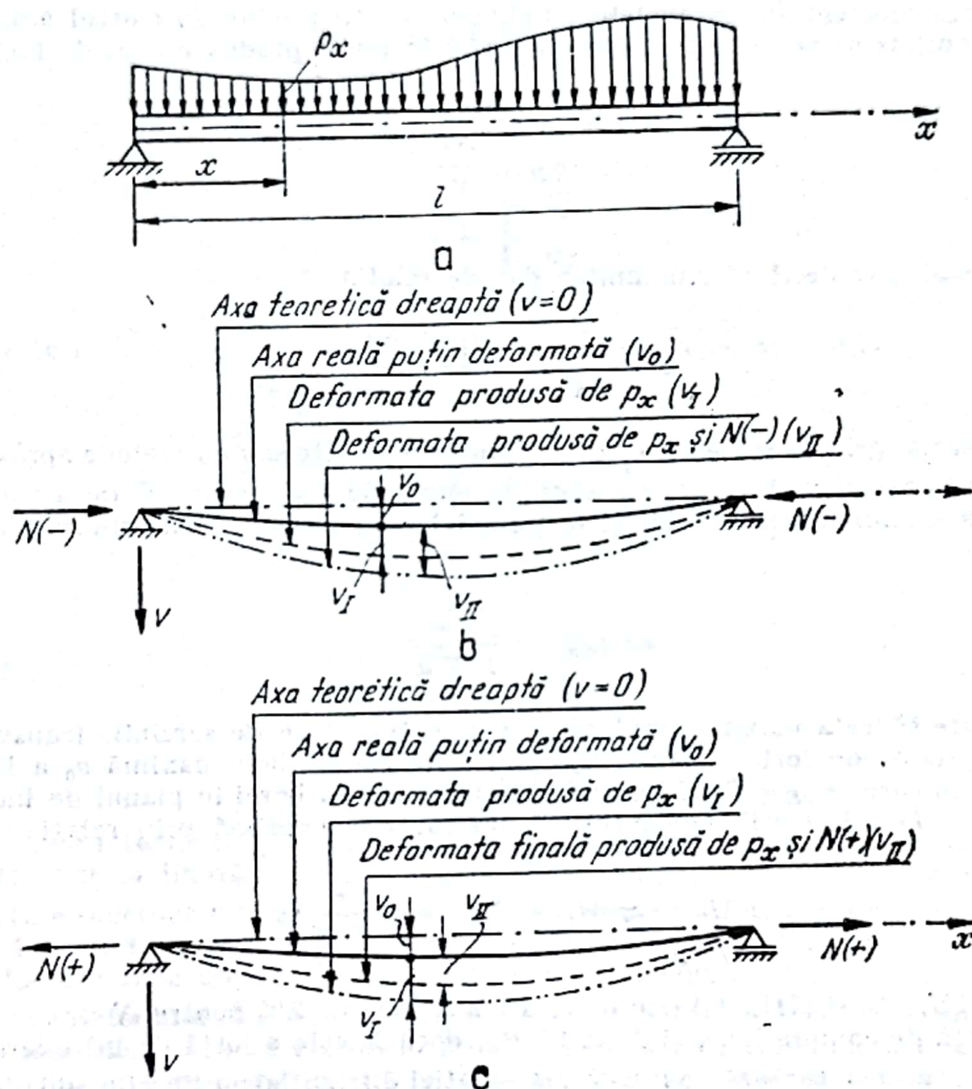


Fig. III.67

în care: M_{tr} este momentul încovoietor în secţiunea x produs de sarcinile transversale ce acţionează bara; N — efortul axial (+pentru compresiune şi — pentru întindere); $v_0 = v_0(x)$ — săgeata iniţială a barei într-o secţiune curentă x; $v = v(x)$ — săgeata elastică în aceeaşi secţiune produsă atît de momentele încovoietoare M_{tr} din sarcinile transversale cît şi de efortul axial.

Efortul unitar normal într-o secțiune este

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{tr} \pm N(v_0 + v)}{W}. \qquad \text{(III.200)}$$

Eforturile unitare, în acest caz, nu mai sînt proporționale cu sarcinile care le produc.

Influența momentului încovoietor suplimentar Nv produs de efortul axial asupra eforturilor unitare se poate neglija față de efortul unitar produs numai de forța axială N, dacă

$$\sigma_N \approx \frac{Nv}{W} \qquad \text{(III.201)}$$

este mult mai mic decît efortul unitar dat de relația

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{tr} + Nv_0}{W}. \qquad \text{(III.202)}$$

Deformația grinzii se poate calcula cu metode exacte sau cu metode aproximative.

Metoda aproximativă admite că săgeata maximă f_{max} produsă de acțiunea concomitentă a sarcinilor transversale și forței axiale se poate exprima prin relația aproximativă

$$f_{max} = \frac{f_0}{1 \mp \alpha^2} \qquad \text{(III.203)}$$

în care f_0 este săgeata maximă produsă de momentele date de sarcinile transversale și momentul produs de forța axială N prin deformația inițială maximă v_0 a barei, iar $\alpha = N/P_{crE}$, în care $P_{crE} = \pi^2 AE/\lambda^2$, unde λ este zveltețea barei în planul de încovoiere.

Pe baza acestei relații momentul maxim total se exprimă prin relația

$$M_{max} \approx M_{tr} + Nv_0 + \frac{Nf_0}{1 \mp \alpha^2}. \qquad \text{(III.204)}$$

Formulele (III.203) și (III.204) dau o eroare mai mică de 2% pentru $N < 0{,}5 P_E$, dacă N este o forță de compresiune, și $N < 10\ P_E$, dacă N este o forță de întindere.

Metoda exactă se bazează pe integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformate sub acțiunea concomitentă a curburii inițiale produsă de sarcinile transversale și forța axială N, care are expresia

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - N\left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx^2}\right) = p(x) \qquad \text{(III.205)}$$

în care EI este modulul de rezistență al secțiunii barei, iar v_0 funcția cunoscută a curburii inițiale.

Soluţia generală a acestei ecuaţii, pentru N forţă de întindere este

$$v = C_1 + C_2kx + C_3U_1(kx) + C_4V_1(kx) + \frac{1}{k^3}\int_0^x V_1[k(x-\xi)]\,p(\xi)\,d\xi \quad \text{(III.206a)}$$

în care:

$$U_1(kx) = \text{ch}\ kx - 1$$

$$V_1(kx) = \text{sh}\ kx - kx \quad \text{(III.206b)}$$

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Dacă N este o forţă de compresiune, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (III.205) este

$$v = C_1' + C_2'kx + C_3'U_2(kx) + C_4'V_2(kx) + \frac{1}{k^3}\int_0^x V_2k(x-\xi)p(\xi)\,d\xi \quad \text{(III.207 a)}$$

în care:

$$U_2(kx) = 1 - \sin\ kx$$

$$\text{(III.207 b)}$$

$$V_2(kx) = kx - \sin\ kx.$$

Constantele de integrare $C_1, \ldots, C_4$ şi $C_1', \ldots, C_4'$ din ecuaţiile anterioare se determină pe baza condiţiilor la limită.

Funcţiile săgeţilor v şi ale momentelor încovoietoare pentru cazurile cele mai frecvente de încărcări transversale şi rezemări se găsesc în tabelul III.10, iar funcţiile ce intervin în formulele din acest tabel sînt date în tabelul III.11.

3.1.3.2. **Materialul nu preia eforturi unitare de întindere.** În cazul elementelor formate din materiale care nu rezistă la întindere (zidărie de cărămidă sau piatră, teren de fundaţii, beton simplu etc.), dacă forţa normală de compresiune este aplicată excentric pe secţiune, în afara sîmburelui ei central, dar în interiorul secţiunii, axa neutră taie secţiunea, forţa fiind preluată integral numai de partea de secţiune ce lucrează la compresiune, numită *zonă activă*. Pe baza ipotezei secţiunilor plane, eforturile unitare variază liniar pe secţiunea activă fiind nule în axa neutră şi maxime la marginea secţiunii. Din condiţia de echilibru trebuie ca rezultanta eforturilor unitare normale σ ce lucrează pe secţiunea activă să fie egală şi direct opusă forţei exterioare N, respectiv ca volumul eforturilor unitare σ, care are o formă de pană (fig. III.68, $a-c$), să fie egal cu forţa N, iar centrul de greutate G_1 al acestui volum să fie situat pe direcţia de acţiune a forţei N.

Tabelul III.10

Deformații și momente încovoietoare la grinzi drepte supuse la sarcini normale și eforturi axiale

l — deschidere, $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, $u = \frac{kl}{2}$ · Valorile funcțiilor f, φ și χ în tabelul III.11

Schema încărcării	Ecuația fibrei medii deformate	Funcția momentelor încovoietoare
	$v = \frac{Pl^3}{EI\,(2u)^3}\left[\frac{kbkx}{2u} - \frac{\operatorname{sh} kb \operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} 2u} + \operatorname{sh} k(x-a) - h(x-a)\right]$ (în cazul $x < a$ ultimii doi termeni din paranteza dreaptă se neglijează)	$M = \frac{Pl}{2u}\left[-\frac{\operatorname{sh} kb \operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} 2u} + \operatorname{sh} k(x-a)\right]$ (în cazul $x<a$ ultimul membru din paranteza dreaptă se neglijează)
	$v = \frac{M_1 l^2}{EI(2u)^2}\left[\frac{sh\,k(l-x)}{\operatorname{sh}\,2u} - \frac{k(l-x)}{2u}\right]$ $v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_1 l^2}{2EI\,(2u)^2}\left[\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1\right]$	$M = M_1 \frac{\operatorname{sh} k(l-x)}{\operatorname{sh}\,2u}$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_1}{2 \operatorname{ch} u}$
	$v = \frac{M_2 l^2}{EI\,(2u)^2} \times \left[\frac{\operatorname{sh}\,kx}{\operatorname{sh}\,2u} - \frac{kx}{2u}\right]$; $v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_2 l^2}{2EI\,(2u)^2}\left[\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1\right]$	$M = M_2 \frac{\operatorname{sh}\,kx}{\operatorname{sh}\,2u}$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_2}{2 \operatorname{ch}\,u}$

Tabelul III.10 (continuare)

Schema încărcării	Ecuația fibrei medii deformate	Funcția momentelor încovoietoare
N, p, $x=-0{,}5l$, 0, v, $x=+0{,}5l$, x	$v = \frac{pl^4}{EI(2u)^4}\left[\frac{\text{ch } kx}{\text{ch } u} - 1 + \frac{u^2 - k^2x^2}{2}\right]$ $v(0) = \frac{5\, pl^4}{384\, EI} f_0(u)$	$M = \frac{pl^2}{(2u)^2}\left[\frac{\text{ch } kx}{\text{ch } u} - 1\right]$ $M(0) = -\frac{pl^2}{8}\varphi_0(u)$
N, x, v_0, b, N, x, $l/2$, v	$v_0 = b \sin \frac{\pi x}{l}$ (linia elastică inițială) $v = -\frac{\alpha}{1+\alpha} b \sin \frac{\pi x}{l}$ $\alpha = \frac{Nl^2}{\pi^2 EI}$	$M = \frac{Nb}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}$ $\alpha = \frac{Nl^2}{\pi^2 EI}$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Nb}{1+\alpha}$
N, p, N, x, $x=0$, v, $x=-0{,}5l$, $x=0{,}5l$	$v = \frac{pl^4}{EI(2u)^4}\left[\left(\frac{\text{ch } kx}{\text{ch } u} - 1\right)\frac{u}{\text{th } u} + \frac{u^2 - k^2x^2}{2}\right]$ $v(0) = \frac{1}{384}\frac{pl^4}{EI} f_1(u)$	$M = \frac{pl^2}{(2u)^2} \times \left[\frac{u \text{ ch } kx}{\text{sh } u} - 1\right]$ $M(\pm 0{,}5\, l) = \frac{pl^2}{12}\chi(u)$ $M(0) = -\frac{pl^2}{24}\varphi_1(u)$

Tabelul III.10 (continuare)

Schema încărcării	Ecuația fibrei medii deformate	Funcția momentelor încovoietoare
	$$v_0 = \frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$ (linia elastică inițială) $$v = -\frac{\frac{\alpha}{4}}{1+\frac{\alpha}{4}}\frac{c}{2}\times\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$$ $$\alpha = \frac{Nl^2}{\pi^2 EI}$$	$$M = -\frac{Nc}{1+\frac{\alpha}{4}}\times\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{l}$$ $$\alpha = \frac{Nl^2}{\pi^2 EI}$$
	$$v = \frac{ml^3}{EI(2u)^2}\left(-\frac{x^3}{6l} + \frac{\mathrm{sh}\, kx}{k^2\,\mathrm{sh}\, 2u} - \frac{x}{2uk} + \frac{lx}{6}\right)$$	$$M = \frac{ml^3}{(2u)^2}\left(-\frac{kx}{2u} + \frac{\mathrm{sh}\, kx}{\mathrm{sh}\, 2u}\right)$$ M_{max} la $$x = \frac{1}{k}\,\mathrm{arg\,ch}\left(\frac{\mathrm{sh}\, 2u}{2u}\right)$$
	$$v = \frac{Pl^3}{EI\,(2u)^3}\left[\frac{\sin kb \sin kx}{\sin 2u} - \frac{kb\,kx}{2u} + k(x-a) - \sin k(x-a)\right]$$ (în cazul $x<a$ ultimii doi termeni din paranteza dreaptă se neglijează)	$$M = \frac{P}{2u}\left[-\frac{\sin kb \sin kx}{\sin 2u} + \sin k(x-a)\right]$$ (în cazul $x<a$ ultimul membru din paranteza dreaptă se neglijează)

Tabelul III.10 (continuare)

Schema încărcării	Ecuația fibrei medii deformate	Funcția momentelor încovoietoare
N, M_1, N, x; x=0, x=l	$v = \frac{M_1 l^2}{EI(2u)^2}\left[\frac{k(l-x)}{2u} - \frac{\sin k(l-x)}{\sin 2u}\right]$ $v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_1 l^2}{2EI(2u)^2}\left[1 - \frac{1}{\cos u}\right]$	$M = -M_1 \frac{\sin k(l-x)}{\sin 2u}$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M_1}{2\cos u}$ $M_{max} = \frac{M_1}{\sin kl}$
N, M_2, N, x; x=0, x=l	$v = \frac{M_2 l^2}{EI(2u)^2}\left[\frac{kx}{2u} - \frac{\sin kx}{\sin 2u}\right]$ $v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_2 l^2}{2EI(2u)^2}\left[1 - \frac{1}{\cos u}\right]$	$M = -M_2 \frac{\sin kx}{\sin 2u}$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M_2}{2\cos u}$
p, N, N, x; x=0,5l, x=0, x=0,5l	$v = \frac{pl^4}{EI(2u)^4}\left(\frac{\cos kx}{\cos 2u} - 1 + \frac{k^2x^2 - u^2}{2}\right)$ $v(0) = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI} f_0^*(u)$	$M = -\frac{pl^2}{(2u)^2}\left(1 - \frac{\cos kx}{\cos u}\right)$ $M(0) = -\frac{pl^2}{8}\varphi_0^*(u)$
N, v_0, b, N, x, x, l/2, v	$v_0 = b\sin\frac{\pi x}{l}$ (linia elastică inițială) $v = \frac{\alpha}{1+\alpha} b \sin\frac{\pi x}{l}$ $\alpha = \frac{N l^2}{\pi^2 EI}$	$M = \frac{Nb(1+2\alpha)}{1+\alpha}\sin\frac{\pi x}{l}$; $\alpha = \frac{N l^2}{\pi^2 EI}$

Tabelul III.10 (continuare)

Schema încărcării	Ecuația fibrei medii deformate	Funcția momentelor încovoietoare
	$v = \frac{pl^4}{EI(2u)^4}\left[\left(\frac{\cos kx}{\cos u} - 1\right)\frac{u}{\operatorname{tg} u} + \frac{k^2x^2 - u^2}{2}\right]$ $v(0) = \frac{pl^4}{384\,EI} f_1^*(u)$	$M = \frac{pl^2}{(2u)^2}\left(1 - \frac{u\cos kx}{\sin u}\right);$ $M\left(\pm\frac{l}{2}\right) = -\frac{pl^2}{12}\chi^*(u);$ $M(0) = \frac{pl^2}{24}\varphi_1^*(u)$
	$v_0 = \frac{c}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$ (linia elastică inițială) $v = \frac{\frac{\alpha}{4}}{1 + \frac{\alpha}{4}}\frac{c}{2} \times$ $\times\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$ $\alpha = \frac{N\,l^2}{\pi^2\,EI}$	$M = \frac{1}{2}\frac{Nc\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \frac{\alpha}{4}}\cos\frac{2\pi x}{l}$ $\alpha = \frac{N\,l^2}{\pi^2 EI}$
	$v = \frac{m\,l^3}{EI\,(2u)^2}\left(\frac{x^3}{6\,l} + \frac{\sin kx}{k^2\sin 2u} - \frac{x}{2uk} - \frac{lx}{6}\right)$	$M = \frac{ml^3}{(2u)^3} \times$ $\times\left[\frac{\sin kx}{\sin 2u} - \frac{kx}{2u}\right]$ M_{max} la $x = \frac{1}{k}\arccos\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)$

Tabelul III.11

Valorile funcțiilor $f_0(u)$, $f_1(u)$, $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, $\chi(u)$, $\varphi_1^*(u)$, $\chi^*(u)$, $f_1^*(u)$, $\varphi_0^*(u)$, $f_0^*(u)$ pentru încovoiere cu efort axial la bare drepte

u	$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\varphi_0(u)$	$\varphi_1(u)$	$\chi(u)$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	0,908	0,976	0,905	0,972	0,984
1,0	0,711	0,909	0,704	0,894	0,939
1,5	0,532	0,817	0,511	0,788	0,876
2,0	0,380	0,715	0,367	0,673	0,806
2,5	0,281	0,617	0,268	0,563	0,736
3,0	0,213	0,529	0,200	0,467	0,672
3,5	0,166	0,453	0,153	0,386	0,614
4,0	0,132	0,388	0,120	0,320	0,563
4,5	0,107	0,335	0,097	0,267	0,519
5,0	0,088	0,291	0,079	0,224	0,480
5,5	0,074	0,254	0,066	0,189	0,446
6,0	0,063	0,223	0,055	0,162	0,417
6,5	0,054	0,197	0,047	0,139	0,391
7,0	0,047	0,175	0,041	0,121	0,367
7,5	0,041	0,156	0,036	0,106	0,347
8,0	0,036	0,141	0,031	0,093	0,328
8,5	0,032	0,127	0,028	0,083	0,311
9,0	0,029	0,115	0,025	0,074	0,296
9,5	0,026	0,105	0,022	0,066	0,283
10,0	0,024	0,096	0,020	0,060	0,270
10,5	0,021	0,088	0,018	0,054	0,259
11,0	0.020	0,081	0,017	0,050	0,248
11,5	0,018	0,075	0,015	0,045	0,238
12,0	0,016	0,069	0,014	0,042	0,229

u	$\varphi_1^*(u)$	$\chi^*(u)$	$f_1^*(u)$	u	$\varphi_1^*(u)$	$\chi^*(u)$	$f_1^*(u)$
0,00	1,000	1,000	1,000	2,40	2,6595	1,8854	2,3822
0,50	1,0300	1,0171	1,0256	2,45	2,8404	1,9786	2,5307
1,00	1,1304	1,0737	1,1113	2,50	3,0502	2,0864	2,7027
1,10	1,1617	1,0912	1,1379	2,55	3,2964	2,2124	2,9043
1,20	1,1979	1,1114	1,1686	2,60	3,5890	2,3617	3,1435
1,30	1,2396	1,1345	1,2039	2,65	3,9422	2,5415	3,4320
1,40	1,2878	1,1610	1,2445	2,70	4,3766	2,7619	3,7863
1,50	1,3434	1,1915	1,2914	2,75	4,9233	3,0386	4,2317
1,60	1,4078	1,2266	1,3455	2,80	5,6315	3,3964	4,8082
1,70	1,4830	1,2673	1,4085	2,85	6,5865	3,8774	5,5852
1,80	1,5710	1,3147	1,4821	2,90	7,9343	4,5550	6,6798
1,90	1,6750	1,3704	1,5689	2,95	9,9915	5,5875	8,3503
2,00	1,7993	1,4365	1,6722	3,00	13,506	7,3686	11,201
2,10	1,9494	1,5157	1,7967	3,05	20,863	11,031	17,168
2,20	2,1336	1,6124	1,9492	3,10	45,923	23,566	37,484
2,30	2,3641	1,7325	2,1392	π	∞	∞	∞

Tabelul III.11 (continuare)

u	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$\varphi_0^*(u)$	1,000	1,004	1,016	1,038	1,073	1,117	1,176	1,255	1,361
$f_0^*(u)$	1,000	1,004	1,016	1,037	1,070	1,114	1,173	1,250	1,354
u^*	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,45	1,50	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi_0^*(u)$	1,504	1,704	1,989	2,441	3,240	4,938	6,940	11,670	∞
$f_0^*(u)$	1,494	1,690	1,962	2,400	3,181	4,822	6,790	11,490	∞

Determinarea efortului unitar maxim se poate face analitic sau grafic.

Metoda analitică. În cazul secțiunilor cu o axă de simetrie acționată de o forță aplicată într-un punct P de pe această axă (fig. III. 68), din condiția de echilibru rezultă

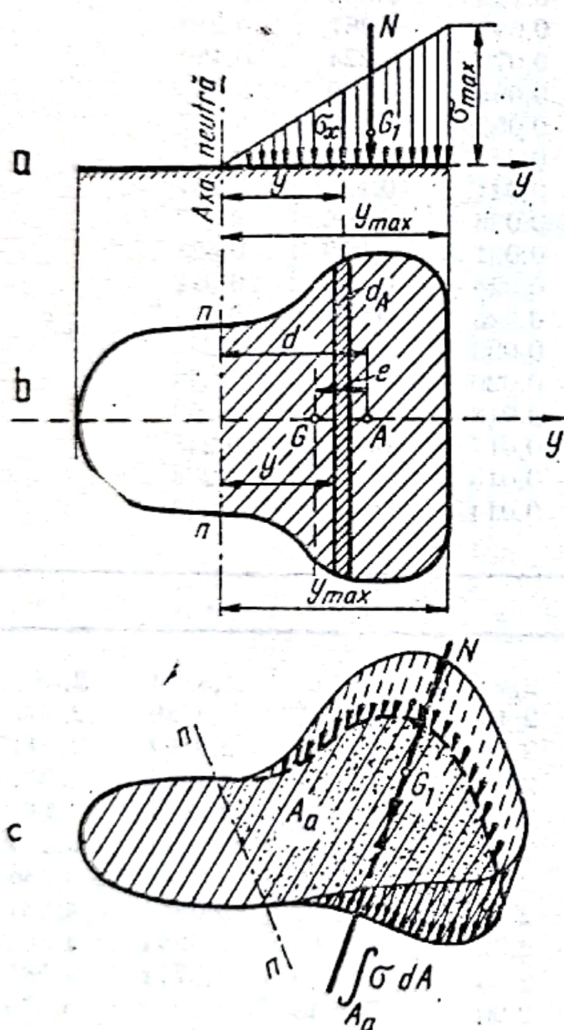


Fig. III.68

$$N = \int_{A_a} \sigma \, dA \quad \text{și} \quad Nd = \int_{A_a} \sigma y dA \tag{III.208}$$

în care d este distanța de la punctul de aplicație al forței N la axa neutră și A_a aria zonei active. Cum eforturile unitare sînt proporționale cu distanța la axa neutră rezultă

$$\sigma = \sigma_{max} \frac{y}{y_{max}}, \tag{III. 209}$$

care introdusă în relația (III.208) duce la expresia:

$$\sigma_{max} = \frac{Ny_{max}}{S_{nn}} = \frac{Ndy_{max}}{I_{nn}} \tag{III.210}$$

în care S_{nn} și I_{nn} sînt momentele statice și de inerție ale zonei active față de axa neutră $n-n$, legate prin relația

$$S_{nn}(d-e) = I_{nn}. \tag{III.211}$$

Pentru secțiuni dreptunghiulare (fig. III.69) rezultă

$$N = \frac{1}{2} 3 \, cb \, \sigma_{max} \quad \text{și}$$

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3 \, bc} = \frac{2N}{bd} = \frac{2N}{A_a} \tag{III.212}$$

deoarece $3c = d$, c, fiind distanţa punctului de aplicaţie J al forţei N faţă de marginea secţiunii. Întrucît efortul unitar maxim creşte mult cînd punctul J se apropie de marginea secţiunii se recomandă ca $c \geqslant h/b$.

Problema determinării lui σ_{max} pentru secţiuni nesimetrice, sau în cazul cînd forţa N nu acţionează pe o axă de simetrie a secţiunii, este greu de rezolvat analitic, folosindu-se metodele grafice.

Metoda grafică. Secţiunile cu o axă de simetrie avînd punctul de aplicaţie al forţei pe axă se rezolvă grafic prin metoda lui Mohr care se bazează pe observaţia că axa neutră este normală pe axa de simetrie şi că faţă de această axă există relaţia (III.211).

În consecinţă, pentru întreaga secţiune împărţită în fîşii, aplicînd în centrul de greutate al fiecărei fîşii o forţă proporţională cu aria ei, se construieşte, cu distanţa polară H, un poligon de forţe şi poligonul funicular corespunzător (fig. III.70). Admiţînd că se cunoaşte poziţia axei neutre $n-n$, momentul static al secţiunii active faţă de această axă este dat de relaţia $S_{nn}=H \cdot CC'$, iar momentul de inerţie de relaţia $I_{nn} = 2\,H \cdot A_1$, în care $A_1 = \frac{1}{2} CC' \times d$ este aria mărginită de conturul $CBEFC'C$ egală cu aria triunghiului $J_1C'C$, în care punctul J_1 este intersecţia paralelei dusă la axa neutră din punctul J de aplicaţie al forţei cu prima latură a poligonului funicular. Dacă din ambele suprafeţe se scade partea comună $J_1EFC'C$ rezultă că suprafeţele BJ_1E şi $C'EF$ trebuie să fie egale între ele. Pe baza acestor observaţii, construcţia grafică pentru stabilirea axei neutre constă în a duce din punctul J_1, o dreaptă J_1C' care să facă cele două suprafeţe BJ_1E şi $C'EF$ să fie egale între ele. Problema se rezolvă prin încercări. Punctul C' în care dreapta J_1C' intersectează poligonul funicular, determină poziţia axei neutre, secţiunea activă (haşurată în fig. III.70) fiind limitată de conturul secţiunii şi axa neutră. Centrul de greutate al secţiunii active G_a se găseşte pe normala la axa de simetrie dusă prin intersecţia D a laturilor extreme din poligonul funicular corespunzător zonei active.

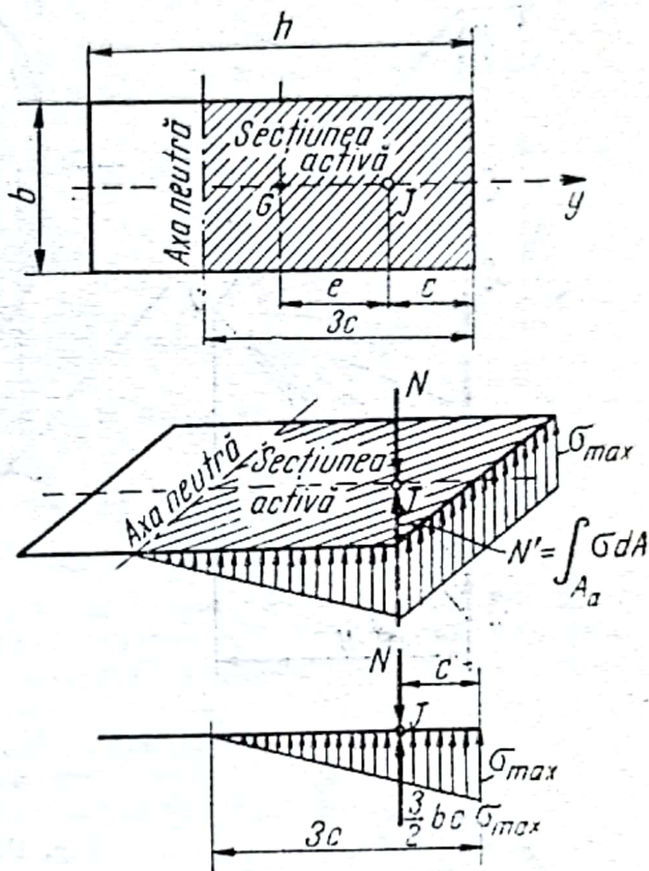


Fig. III.69

Efortul unitar maxim se calculează cu formula (III. 210), în care $I_{nn} = H \cdot \overline{CC'} \cdot d$, segmentul $\overline{CC'}$ fiind măsurat pe direcţia axei neutre.

Pentru secţiuni nesimetrice, sau pentru secţiuni simetrice la care forţa N se aplică într-un punct oarecare a se vedea lucrarea [22].

Calculul eforturilor unitare maxime cu ajutorul tabelelor. Pentru secţiuni dreptunghiulare, circulare şi inelare calculul eforturilor unitare maxime şi stabilirea poziţiei axei neutre se poate face uşor cu ajutorul tabelelor.

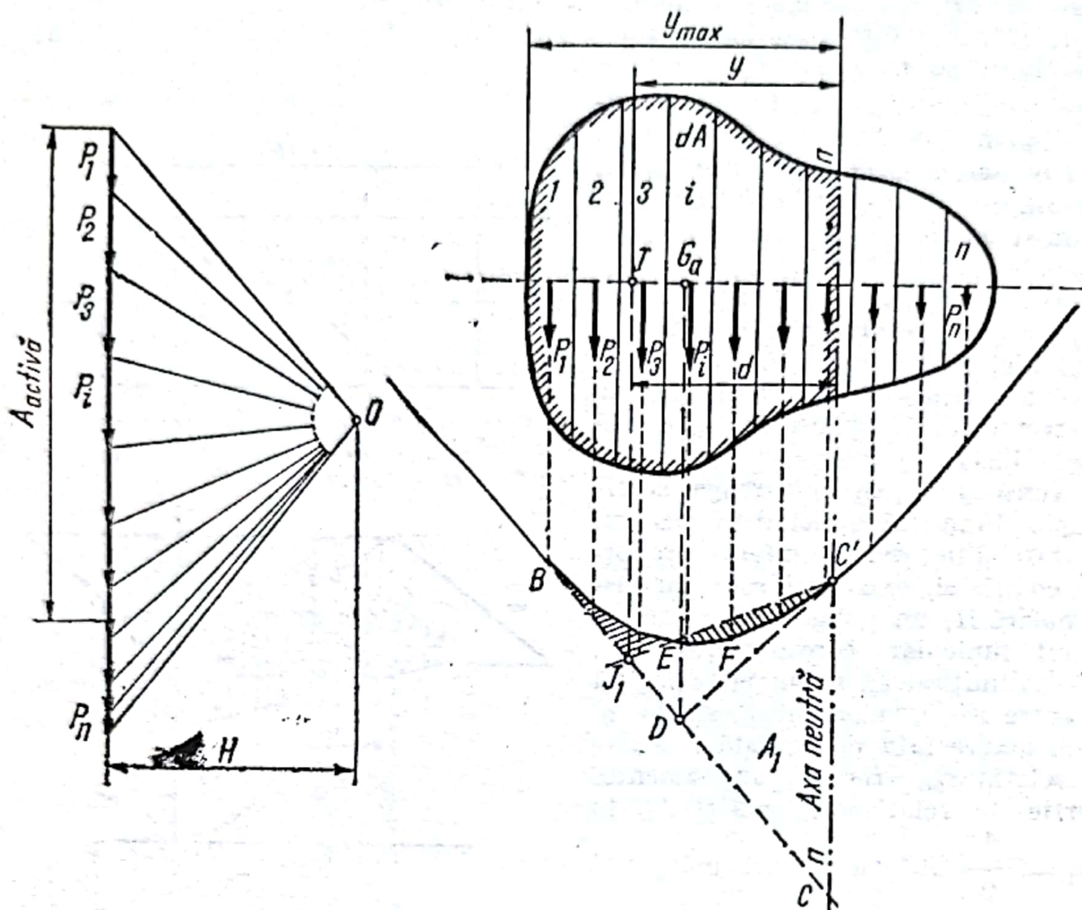


Fig. III.70

1) *Dreptunghi.* În funcție de poziția punctului de aplicație P al forței axiale N se disting următoarele cazuri:

— dacă punctul de aplicație J se găsește pe axa de simetrie la distanța c de muchia cea mai apropiată a secțiunii (v. fig.III.69) efortul unitar maxim este

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3bc}; \tag{III.213}$$

— dacă punctul de aplicație J se găsește în interiorul sîmburelui central, la distanțele y_0 și z_0 față de sistemul de axe principale centrale yOz (fig. III.71), efortul unitar normal maxim se produce în colțul A corespunzător sfertului din dreptunghi în care se găsește punctul de aplicație și se poate exprima prin relația

$$\sigma_{max} = \mu \frac{N}{A} \tag{III.214}$$

în care $A = bh$ este aria întregii secțiuni, iar μ un coeficient care depinde de poziția punctului de aplicație J al forței N, determinat de rapoartele z_0/h și y_0/b. Acest coeficient se găsește în tabelul III.12. Pentru cazul considerat al punctului de aplicație al forței

în interiorul sîmburelui central, axa neutră nu taie secţiunea, coeficientul μ este cuprins între 1 şi 2 şi valorile lui se găsesc sub a doua linie în trepte (cea de jos) din tabel;

— dacă punctul de aplicaţie al forţei se găseşte în afara sîmburelui central, axa neutră taie secţiunea împărţind-o în două zone, şi anume zona activă şi zona care nu lucrează. Calculul efortului unitar se face tot cu formula (III.214);

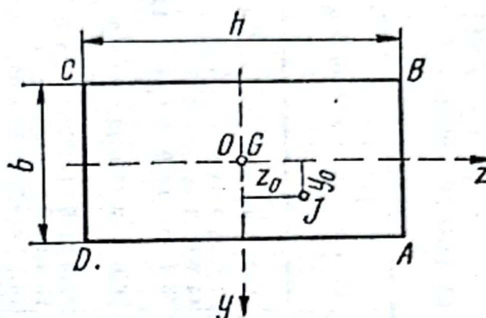


Fig.III.71

— dacă, aşa cum este recomandabil, cel puţin jumătate din secţiune ia parte la transmiterea eforturilor, axa neutră trece prin centrul de greutate G al secţiunii, iar efortul unitar maxim se obţine tot cu formula (III.214). Valorile z_0/h, respectiv y_0/b, corespunzătoare acestui caz, se găsesc sub prima linie în trepte (linia de sus) din tabelul III.12;

— dacă punctul J de aplicaţie al forţei se găseşte la distanţa $\alpha < h/4$, respectiv $\beta < b/4$, de colţul A, axa neutră taie laturile care se întîlnesc în acest colţ la distanţele 4α, respectiv 4β de colţ, zona activă este un triunghi, iar efortul unitar normal maxim este dat de relaţia

$$\sigma_{max} = \frac{3N}{8\alpha\beta}. \qquad \text{(III.215)}$$

2) *Cerc.* Pentru secţiuni circulare, poziţia y a axei neutre faţă de marginea comprimată a secţiunii, în funcţie de poziţia punctului de aplicaţie J al forţei axiale N faţă de centrul de greutate G al secţiunii, se poate calcula cu ajutorul coeficienţilor (pentru $r_1/r = 0$) din tabelul III.13.

Efortul unitar maxim la marginea secţiunii, în funcţie de efortul unitar corespunzător acţiunii centrice a forţei axiale N, se poate calcula în mod analog cu ajutorul coeficienţilor din tabelul III.14.

În tabelele III.13 şi III.14, r este raza secţiunii, y poziţia axei neutre faţă de punctul cel mai solicitat al secţiunii, $e = GJ$ excentricitatea forţei N, $\sigma_0 = N/A$ efortul unitar corespunzător acţiunii centrice a forţei N şi σ_{max} este efortul unitar maxim.

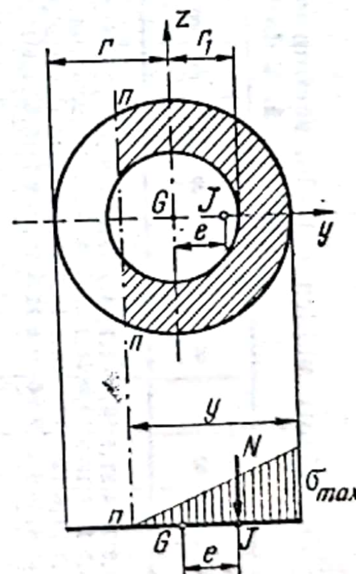


Fig.III.72

3) *Coroană circulară.* Pentru secţiuni inelare, poziţia axei neutre y faţă de marginea comprimată şi valoarea efortului unitar maxim σ_{max} în funcţie de poziţia J a punctului de aplicaţie al forţei N, se pot calcula tot cu ajutorul coeficienţilor din tabelele III.13 şi III.14 (coloanele 2—7). În tabele, r este raza mare, iar r_1 raza mică. Conform notaţiilor din fig.III.72 rezultă:

$\pi(r^2 - r_1^2) = A$ = aria secţiunii;

$\sigma_0 = N/A$ este efortul unitar corespunzător acţiunii centrice;

$e = GJ$ — excentricitatea punctului de aplicaţie P al forţei axiale faţă de centrul secţiunii;

y — poziţia axei neutre faţă de marginea cea mai comprimată a secţiunii.

Tabelul III.12

Coeficienți pentru calculul secțiunilor dreptunghiulare supuse la compresiune excentrică. Valorile coeficientului μ

Valorile $\frac{y^0}{b}$																										
0,50	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,48	33,3	35,4	37,5	39,8	42,3	44,9	47,8	50,9	54,3	58,1	62,3	66,9	72,1	78,1	85,2	93,8	104	117	134	156	188	234	313	469	938	∞
0,46	16,7	17,7	18,8	19,9	21,1	22,5	23,9	25,5	27,2	29,1	31,1	33,4	36,1	39,1	42,6	46,9	52,1	58,6	67,0	78,1	93,8	117	156	234	469	∞
0,44	11,1	11,8	12,5	13,3	14,1	15,0	15,9	17,0	18,1	19,4	20,8	22,3	24,0	26,0	28,4	31,3	34,7	39,1	44,6	52,1	62,5	78,1	104	156	313	∞
0,42	8,33	8,85	9,38	9,96	10,6	11,2	12,0	12,7	13,6	14,5	15,6	16,7	18,0	19,5	21,3	23,4	26,0	29,3	33,5	39,1	46,9	58,6	78,1	117	234	∞
0,40	6,67	7,08	7,51	7,96	8,46	8,99	9,56	10,2	10,9	11,6	12,5	13,4	14,4	15,6	17,0	18,8	20,8	23,4	26,8	31,3	37,5	46,9	62,5	93,8	188	∞
0,38	5,57	5,90	6,26	6,64	7,05	7,49	7,97	8,49	9,06	9,68	10,4	11,2	12,0	13,0	14,2	15,6	17,4	19,5	22,3	26,0	31,3	39,1	52,1	78,1	156	∞
0,36	4,76	5,05	5,36	5,69	6,04	6,42	6,83	7,27	7,76	8,30	8,90	9,55	10,3	11,2	12,2	13,4	14,9	16,7	19,1	22,3	26,8	33,5	44,6	67,0	134	∞
0,34	4,17	4,42	4,69	4,98	5,28	5,62	5,97	6,37	6,79	7,26	7,78	8,36	9,01	9,77	10,7	11,7	13,0	14,7	16,7	19,5	23,4	29,3	39,1	58,6	117	∞
0,32	3,70	3,93	4,17	4,43	4,70	4,99	5,31	5,66	6,04	6,46	6,92	7,43	8,01	8,68	9,47	10,4	11,6	13,0	14,9	17,4	20,8	26,0	34,7	52,1	104	∞
0,30	3,33	3,54	3,75	3,98	4,23	4,49	4,78	5,09	5,43	5,81	6,23	6,69	7,21	7,81	8,52	9,38	10,4	11,7	13,4	15,6	18,8	23,4	31,3	46,9	93,8	∞
0,28	3,03	3,22	3,41	3,62	3,84	4,08	4,35	4,63	4,94	5,28	5,66	6,08	6,56	7,10	7,75	8,52	9,47	10,7	12,2	14,2	17,0	21,3	28,4	42,6	85,2	∞
0,26	2,78	2,95	3,13	3,32	3,52	3,74	3,98	4,24	4,53	4,84	5,19	5,57	6,01	6,51	7,10	7,81	8,68	9,77	11,2	13,0	15,6	19,5	26,0	39,1	78,1	∞
0,24	2,56	2,72	2,89	3,06	3,25	3,46	3,68	3,92	4,18	4,47	4,79	5,15	5,55	6,01	6,56	7,21	8,01	9,01	10,3	12,0	14,4	18,0	24,0	36,1	72,1	∞
0,22	2,38	2,53	2,68	2,84	3,02	3,20	3,41	3,64	3,88	4,15	4,44	4,77	5,15	5,57	6,08	6,69	7,43	8,36	9,55	11,2	13,4	16,7	22,3	33,4	66,9	∞
0,20	2,22	2,36	2,50	2,66	2,82	2,99	3,18	3,39	3,62	3,86	4,14	4,44	4,79	5,19	5,66	6,23	6,92	7,78	8,90	10,4	12,5	15,6	20,8	31,1	62,3	∞
0,18	2,08	2,21	2,35	2,49	2,64	2,80	2,98	3,17	3,38	3,61	3,86	4,15	4,47	4,84	5,28	5,81	6,46	7,26	8,30	9,68	11,6	14,5	19,4	29,1	58,1	∞
0,16	1,96	2,08	2,21	2,34	2,48	2,63	2,80	2,97	3,17	3,38	3,62	3,88	4,18	4,53	4,94	5,43	6,04	6,79	7,76	9,06	10,9	13,6	18,1	27,2	54,3	∞
0,14	1,84	1,96	2,08	2,21	2,34	2,48	2,63	2,79	2,97	3,17	3,39	3,64	3,92	4,24	4,63	5,09	5,66	6,37	7,27	8,49	10,2	12,7	17,0	25,5	50,9	∞
0,12	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,34	2,48	2,63	2,80	2,98	3,18	3,41	3,68	3,98	4,35	4,78	5,31	5,97	6,83	7,97	9,56	12,0	15,9	23,9	47,8	∞
0,10	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,20	2,34	2,48	2,63	2,80	2,99	3,20	3,46	3,74	4,08	4,49	4,99	5,62	6,42	7,49	8,99	11,2	15,0	22,5	44,9	∞
0,08	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,34	2,48	2,64	2,82	3,02	3,25	3,52	5,84	4,23	4,70	5,28	6,04	7,05	8,46	10,6	14,1	21,1	42,3	∞
0,06	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,34	2,49	2,66	2,84	3,06	3,32	3,62	3,98	4,43	4,98	5,69	6,64	7,96	9,96	13,3	19,9	39,8	∞
0,04	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,35	2,50	2,68	2,88	3,13	3,41	3,75	4,17	4,69	5,36	6,26	7,51	9,38	12,5	18,8	37,5	∞
0,02	1,12	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,21	2,36	2,53	2,72	2,95	3,22	3,54	3,93	4,42	5,05	5,90	7,08	8,85	11,8	17,7	35,4	∞
0,00	1,00	1,12	1,24	1,36	1,48	1,60	1,72	1,84	1,96	2,08	2,22	2,38	2,56	2,78	3,03	3,33	3,70	4,17	4,76	5,56	6,67	8,33	11,1	16,7	33,3	∞
	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50

Valori pentru $\frac{z_0}{h}$

Tabelul III.13

Coeficienți pentru calculul poziției axei neutre la secțiuni circulare și inelare supuse la compresiune excentrică. Valorile y/r

$\frac{e}{r}$	$\frac{r_1}{r}$ 0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	$\frac{e}{r}$
0,25	2,00	—	—	—	—	—	—	0,25
0,30	1,82	—	—	—	—	—	—	0,30
0,35	1,66	1,89	1,98	—	—	—	—	0,35
0,40	1,51	1,75	1,84	1,93	—	—	—	0,40
0,45	1,37	1,61	1,71	1,81	1,90	—	—	0,45
0,50	1,23	1,46	1,56	1,66	1,78	1,89	2,00	0,50
0,55	1,10	1,29	1,39	1,50	1,62	1,74	1,87	0,55
0,60	0,97	1,12	1,21	1,32	1,45	1,58	1,71	0,60
0,65	0,84	0,94	1,02	1,13	1,25	1,40	1,54	0,65
0,70	0,72	0,75	0,82	0,93	1,05	1,20	1,35	0,70
0,75	0,59	0,60	0,64	0,72	0,85	0,99	1,15	0,75
0,80	0,47	0,47	0,48	0,52	0,61	0,77	0,94	0,80
0,85	0,35	0,35	0,35	0,36	0,42	0,55	0,72	0,85
0,90	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,32	0,49	0,90
0,95	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,25	0,95

Pentru valorile următoare ale raportului r_1/r rezultă:

r_1/r	0	0,25	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,000
e/r	0,589	0,595	0,631	0,654	0,682	0,713	0,748	0,786

în general, $$e/r = 0{,}589\,\frac{1-(r_1/r)^4}{1-(r_1/r)^3} \qquad \text{(III.216a)}$$

și aproximativ: $$e/r = 0{,}5 + 0{,}25\,\frac{r_1}{r}. \qquad \text{(III.216b)}$$

Cînd distanța axei neutre la marginea secțiunii este egală cu raza ($z/r = 1$), ceea ce înseamnă că axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii, iar zona activă este o jumătate de coroană circulară, a este atunci așa-numita rază a sîmburelui exterior.

Tabelul III.14

Coeficienți pentru calculul eforturilor unitare la secțiuni circulare și inelare supuse la compresiune excentrică. Valorile σ_{max}/σ_0

$\frac{e}{r}$	$\frac{r_1}{r}$							$\frac{e}{r}$
	0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
0,05	1,20	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10	0,05
0,10	1,40	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22	1,20	0,10
0,15	1,60	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30	0,15
0,20	1,80	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40	0,20
0,25	2,00	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50	0,25
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60	0,30
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70	0,35
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80	0,40
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90	0,45
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00	0,50
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17	0,55
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26	0,60
0,65	6,00	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42	0,65
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64	0,70
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89	0,75
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27	0,80
0,85	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,90	3,77	0,85
0,90	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71	0,90
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72	0,95
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,00

4) *Secțiuni tubulare octogonale și pătrate.* Valorile corespunzătoare pentru e/r rezultă din:

r_1/r	0	0,25	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
Octogon, e/r	0,613	0,620	0,657	0,681	0,708	0,742	0,779	0,818
Pătrat, e/r	0,707	0,714	0,757	0,785	0,817	0,856	0,898	0,944

3.2. Solicitări care produc numai eforturi unitare tangențiale

Combinația de solicitări care produc pe o secțiune transversală numai eforturi unitare tangențiale sînt forță tăietoare cu răsucire, însoțite în practică și cu încovoiere. În prezentul paragraf se neglijează influența încovoierii.

Efortul unitar rezultant τ produs de forța tăietoare, notat aici τ_T și de răsucire notat τ_r se obține însumînd vectorial cele două eforturi unitare

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_T + \bar{\tau}_r \text{ sau}$$
$$\tau = \sqrt{\tau_T^2 + \tau_r^2 + 2\tau_T\tau_r\cos\alpha} \qquad \text{(III.217)}$$

în care α este unghiul dintre direcțiile celor două eforturi unitare.

Determinarea lui τ_{max} se face pe baza diagramelor de variație pe secțiune ale celor două eforturi unitare. Punctele în care se produce τ_{max} sînt în general acelea în care cele două eforturi unitare sînt paralele și de același sens.

La secțiunea dreptunghiulară, solicitată ca în fig. III.73, *a* efortul unitar tangențial maxim are loc în punctul *A* și se exprimă prin relația

$$\tau_{max} = \tau_T + \tau_r = \frac{3T}{2bh} + \frac{M_t}{khb^2} \qquad \text{(III.218)}$$

în care M_t este momentul de răsucire și k se ia din tabelul III.8.

La secțiunea dreptunghiulară alungită din fig. III.73, *b* este necesar ca verificarea să se facă în punctul *A*, pentru care cele două eforturi unitare τ_T și τ_r se adună algebric, și în punctul *B* în care τ_T este nul, dar τ_r este maxim.

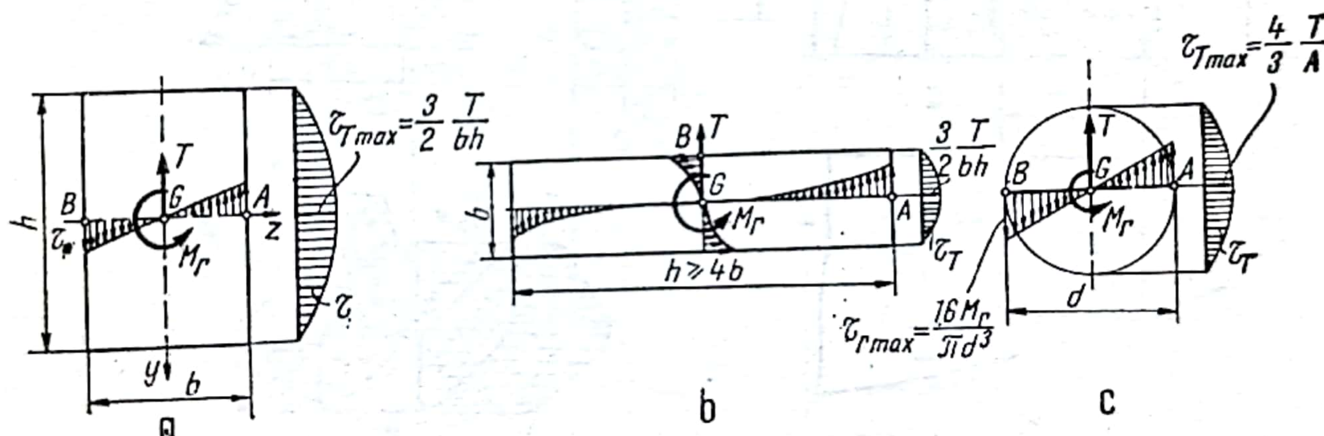


Fig. III.73

Pentru secțiuni circulare (fig. III.73,c) τ_{max} se produce în punctul *A* și are valoarea

$$\tau_{max} = \tau_T + \tau_r = \frac{16T}{3\pi d^2} + \frac{16M_t}{\pi d^3}. \qquad \text{(III.219)}$$

3.3. Solicitări care produc eforturi unitare normale și tangențiale

Combinațiile de eforturi pentru acest caz de solicitare sînt încovoiere cu forță tăietoare, efort axial cu încovoiere, forță tăietoare și răsucire.

3.3.1. Încovoiere cu forță tăietoare. O secțiune este supusă la încovoiere și forță tăietoare cînd torsorul forțelor de legătură se reduce la un vector moment și un vector forță avînd componentele dirijate după axele principale de inerție ale secțiunii.

3.3.1.1. Eforturi unitare la barele supuse simultan la încovoiere şi forţă tăietoare. Calculul eforturilor unitare la aceste bare se face separat pentru încovoiere cu formulele de la paragraful 2.4 şi separat pentru forţa tăietoare.

Pentru forfecare sau lunecare eforturile unitare trebuie să fie tangente la conturul secţiunii şi să fie paralele (fig. III. 74, *a—e*) sau să se întîlnească în acelaşi punct pe axa secţiunii (fig.III.75) avînd componentele τ_{xy} constante. Ele se calculează cu formula lui *Jurawsky* stabilită pe baza condiţiilor de echilibru ale unui element de grindă, limitat de două secţiuni, situate la distanţa dx între ele (secţiunile *1—1* şi *2—2* în fig. III.74), şi care are expresia

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_z}{I_z b_y} \tag{III.220}$$

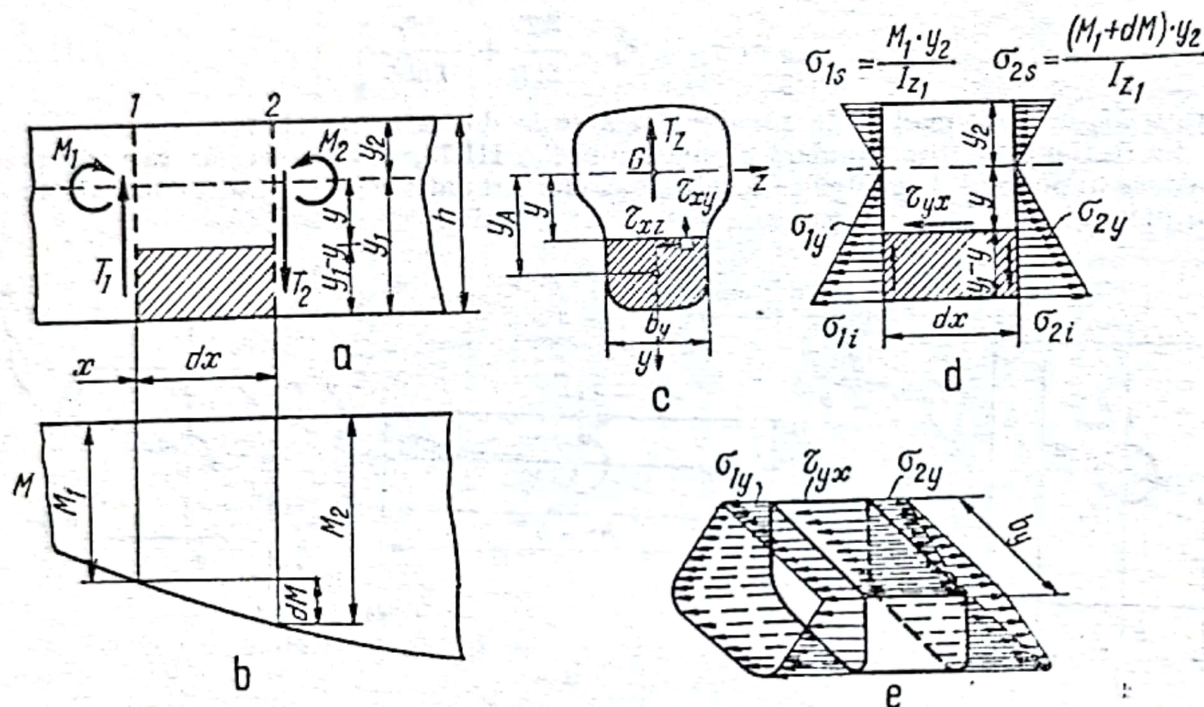


Fig. III.74

în care: τ_{xy} este efortul unitar tangenţial într-o fibră la distanţa y de axa neutră; T_z — forţa tăietoare în secţiune; $S_z = A y_A$ — momentul static al suprafeţei care lunecă faţă de axa principală centrală Gz; I_z — momentul de inerţie al întregii secţiuni faţă de aceeaşi axă; b_y — lăţimea secţiunii la distanţa y de axa Gz.

Dacă secţiunea este mărginită de o curbă simetrică faţă de axa Oy, efortul unitar tangenţial în punctul A sau B de pe contur (fig. III.75) este dirijat după tangenta la contur şi este dat de relaţia

$$\tau = \frac{T_z S_z}{I_z b_y \cos \varphi_1}. \tag{III.221}$$

Pe aceeaşi secţiune efortul unitar tangenţial variază în funcţie de raportul S/b_y. Variaţia lui τ pe secţiune şi valoarea lui maximă τ_{max}, pentru citeva secţiuni tehnice, sînt date în tabelul III.15.

Formula (III. 220) este aplicabilă atît la calculul efortului unitar tangenţial de lunecare în grinzi, cît şi la calculul mijloacelor de asamblare (pene, nituri, buloane, sudură) la grinzile compuse din mai multe elemente. De exemplu, în cazul grinzii dublu T găurită la mijloc (fig. III.76) cu găuri circulare de diametru d situate la distanţa e, efortul unitar maxim de lunecare în inimă este

$$\tau = \frac{T \cdot e}{I} \cdot \frac{A_0 \cdot y_0}{a \cdot t}. \tag{III.222}$$

În practică, de cele mai multe ori, secţiunile grinzilor supuse la încovoiere cu forţa tăietoare se verifică separat pentru σ şi separat pentru τ, deoarece în punctele în care σ este maxim, τ este nul, şi invers. Dacă totuşi este necesar să se ţină seama de ambele eforturi unitare, cum ar fi în cazul inimilor grinzilor cu inimă plină, calculul se face pe baza formulelor eforturilor unitare echivalente σ_{ech} stabilite prin ipoteza de rezistenţă admisă pentru materialul grinzii, conform celor arătate la pct. 1.4.8. În tabelul III.16 sînt date punctele unei grinzi în care se produc eforturile unitare σ şi τ maxime şi minime, expresiile lor şi ale eforturilor unitare principale în aceste puncte.

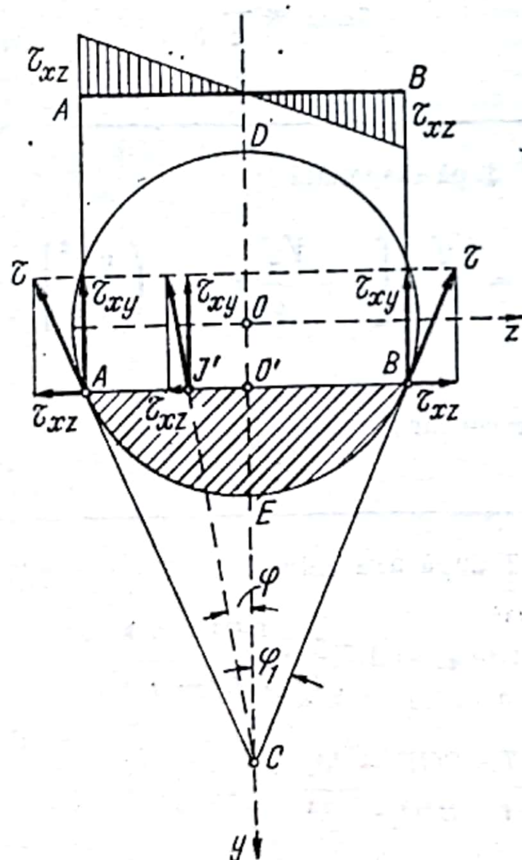
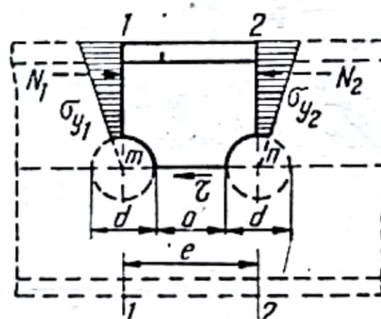


Fig. III.75



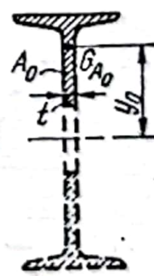


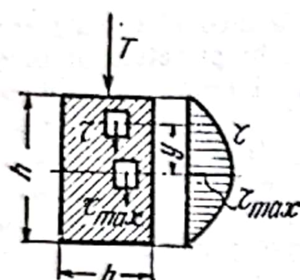
Fig. III.76

Verificările trebuie făcute în punctele în care σ şi τ au valorile cele mai mari, de exemplu la un profil dublu T în punctele de racordare ale inimilor cu tălpile.

Tabelul III.15

Expresiile eforturilor unitare tangențiale pentru secțiuni solicitate la încovoiere cu forță tăietoare

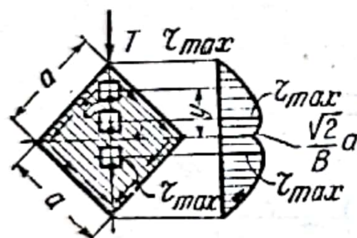
T – forța tăietoare acționînd după axa verticală de simetrie a secțiunii, τ_{max} – efortul unitar tangențial maxim în secțiune, A – aria secțiunii, μ – coeficientul lui Poisson



1. *Dreptunghi*. T paralel cu h

$$\tau = \frac{6T}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

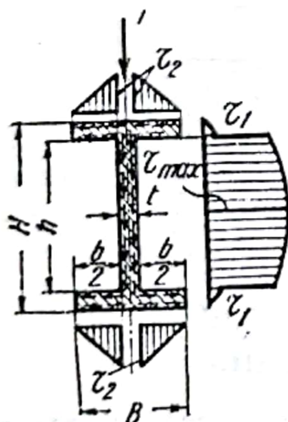
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{T}{bh}$$



2. *Pătrat*. T după diagonală

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{a^2}\,T\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{a}\,y - 4\left(\frac{y}{a}\right)^2\right].$$

Pe contur: $\tau_{max} = 1{,}59\,\dfrac{T}{a^2}$



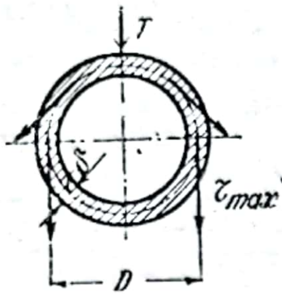
3. *Profil* I. T după axa inimii

În inimă: $\tau_{max} = 1{,}5\,\dfrac{T}{t}\cdot\dfrac{BH^2 - bh^2}{BH^3 - bh^3}$

$$\tau_1 = 1{,}5\,\frac{T}{t}\cdot\frac{B(H^2 - h^2)}{BH^3 - bh^3}$$

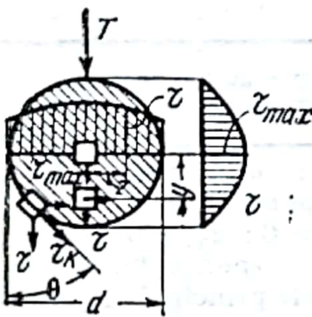
În aripi: $\tau_{max} = \tau_2 = \dfrac{3}{2}\,T\,\dfrac{b(H + h)}{BH^3 - bh^3}$

Tabelul III.15 (continuare)



4. *Inel cu pereți subțiri*

$$\tau_{max} = 2\,\frac{T}{\pi D\delta}$$



5. *Cerc.* Efortul unitar tangențial maxim în centru (pentru $\mu \approx 0,3$)

$$\tau_{max} = \frac{6,1\,T}{\pi\,d^2};$$

— pe axa neutră, la distanța z de centru

$$\tau = \frac{2(3+2\mu)T}{(1+\mu)\pi\,d^4}\left[d^2 - \frac{4(1-2\mu)}{3+2\mu}z^2\right];$$

— pentru $\mu = 0,3$.
Valoarea medie pe axa neutră

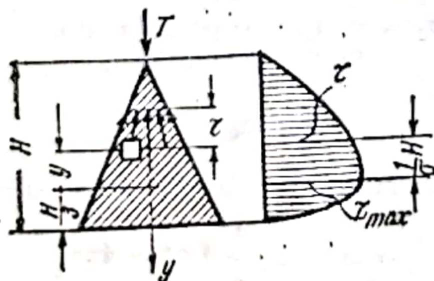
$$\tau_{med} = \frac{16\,T}{3\pi d^2};$$

— pe circumferință sub un unghi θ (tangent în k la contur)

$$\tau_k = \frac{4,2\,T}{\pi\,d^2}\sqrt{1-\left(\frac{2y}{d}\right)^2};$$

— pe diametrul perpendicular pe axa neutră

$$\tau = \frac{6\,T}{\pi d^2}\left[1-\left(\frac{2y}{d}\right)^2\right]$$



6. *Triunghi isoscel.* Forța tăietoare acționează după axa y

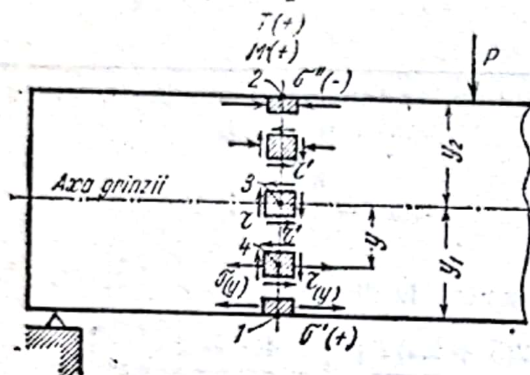
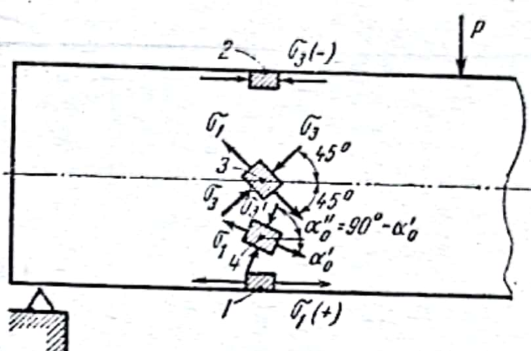
$$\tau = 1,5\,\frac{T}{A\,\cos\alpha}\left[1-\left(\frac{2y}{H}\right)^2\right]$$

$$\tau_{max} = 1,5\,\frac{T}{A}$$

Tabelul III.16

Starea de eforturi unitare într-o grindă dreptunghiulară supusă la încovoiere

$\sigma_{(y)}$ și $\tau_{(y)}$ sînt eforturile unitare (normal și tangențial) în secțiunea transversală a grinzii la distanța y de la axa neutră; σ_1 și σ_2 sînt eforturile unitare principale pe suprafețe normale la planul de încovoiere al grinzii

Eforturile unitare pe secțiunea transversală și în planul neutru	Planele principale și eforturile unitare principale
	

Punctele în care se consideră starea de efort unitar și natura stării de efort unitar	Eforturile unitare pe secțiunea transversală și pe secțiunile paralele cu suprafața neutră	Eforturile unitare principale și înclinarea suprafețelor principale
1. Punctele *1* și *2* cele mai îndepărtate de axa neutră. Stare liniară de efort (Se neglijează σ_y iar $\tau = 0$)	$\sigma' = \frac{M}{W_1}$; $\sigma'' = -\frac{M}{W_2}$ $W_1 = \frac{I}{y_1}$; $W_2 = \frac{I}{y_2}$	$\sigma_1 = \sigma'$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (punctul *1*) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma''$ (punctul *2*) Suprafețele principale în secțiunea transversală sînt paralele cu planul neutru și perpendiculare față de acest plan și planul grinzii
2. Punctul *3* (pe axa neutră). Lunecare pură	$\sigma = 0$; $\tau = \tau' = \frac{TS}{Ib}$ (v. tabelul III.15)	$\sigma_1 = +\tau$; $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -\tau$; $\alpha_0 = \pm 45°$. A treia suprafață principală se află în planul încovoierii
3. Punctul *4* (caz general). Stare plană de eforturi unitare	$\sigma = \sigma(y) = \frac{M}{I}y$ $\tau = \tau(y) = \tau'(y) = \frac{TS}{Ib}$ (v. tabelul III.15)	$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ $\sigma_2 = 0$ (pe suprafața din planul încovoierii) $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma}$. Efortul unitar tangențial maxim $\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

3.3.1.2. Deformaţiile grinzilor produse de forţele tăietoare. Ecuaţia diferenţială a deformaţiilor produse de forţele tăietoare se obţine din expresia lunecării dintre două secţiuni transversale, care este dată de relaţia

$$\gamma = \frac{dv}{dx} = \frac{\tau_m}{G} = k\frac{T_z}{GA} \qquad \text{(III.223)}$$

în care τ_m este efortul unitar tangenţial mediu pe secţiune şi k un coeficient de corecţie ce ţine seama de faptul că acesta este repartizat neuniform pe secţiune. El depinde numai de forma secţiunii şi are expresia :

$$k = \frac{A}{I_z^2}\int_A \frac{S_z^2}{b_y^2}\,dA. \qquad \text{(III.224)}$$

Pentru secţiuni dreptunghiulare $k = 1{,}2$, pentru cele circulare $k = \frac{10}{9}$ iar pentru secţiuni dublu T, $k = 2\ldots2{,}5$.

Diferenţiind relaţia (III. 223) rezultă

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{k}{GA}\,\frac{dT_z}{dx} = -k\frac{p}{GA}, \qquad \text{(III.225)}$$

Din relaţia (III.223) prin integrare rezultă

$$v_T = \int_0^x dv = \int_0^x \gamma\,dx = \frac{k}{GA}\int_0^x T_z\,dx. \qquad \text{(III.226)}$$

Ecuaţia diferenţială a liniei elastice (deformatei) în care se ţine seama atît de încovoiere cît şi de forfecare este

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\left[\frac{M}{EI} + \frac{k}{GA}\,p\right]. \qquad \text{(III.227)}$$

În general, cu excepţia consolelor scurte sau de deschidere foarte mică, săgeata produsă de forţele tăietoare este mică şi neglijabilă în raport cu săgeata produsă de încovoiere (pentru $l/h > 5$, sub 3%).

Pentru o grindă simplu rezemată acţionată de o sarcină uniform repartizată p rezultă :

— săgeata din forţa tăietoare

$$f_T = k\frac{1}{GA}\int_0^{l/2} p\left(\frac{l}{2} - x\right)dx = k\frac{pl^2}{8GA} = k\frac{M_{max}}{GA}; \qquad \text{(III.228)}$$

— săgeata din momentul încovoietor

$$f_M = \frac{5}{48}\,\frac{M_{max}\,l^2}{EI_z}$$

şi (III.229)

$$f_{T+M} = \frac{M_{max}\,l^2}{EI_z}\left[\frac{5}{48} + 2k(1+\mu)\,\frac{i_z^2}{l^2}\right].$$

3.3.2. Încovoiere cu răsucire. La barele supuse la încovoiere și răsucire se calculează separat eforturile unitare normale σ produse de încovoiere cu formulele (III.138) și cele tangențiale τ_t produse de răsucire cu formulele din tabelul (III.8) și pe baza lor se determină efortul unitar echivalent care, la verificări, se compară cu efortul unitar echivalent admisibil.

Pentru secțiuni circulare dimensionarea și verificarea secțiunilor se poate face pe baza unui moment încovoietor echivalent M_{ech} care, în funcție de ipoteza de rezistență admisă, are expresia

— pentru ipoteza I a *efortului unitar normal maxim*

$$M_{ech} = \frac{1}{2} M_i + \frac{1}{2} \sqrt{M_i^2 + M_x^2} \qquad \text{(III.230)}$$

în care $M_x = M_t$ este momentul de răsucire;

— pentru ipoteza V a *lucrului mecanic de schimbare a formei*:

$$M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}75\, M_x^2}. \qquad \text{(III.231)}$$

Formulele de dimensionare și verificare sînt

$$W_{nec} = \frac{M_{ech}}{\sigma_{a\,ech}} \text{ și } \sigma_{ech} = \frac{M_{ech}}{W_{ef}}. \qquad \text{(III.232)}$$

Pentru secțiuni dreptunghiulare solicitate la încovoiere oblică și răsucire (fig. III. 77) se calculează separat eforturile unitare σ și τ pe conturul secțiunii, și anume în mijlocul laturilor și la colțurile secțiunii cu formulele:

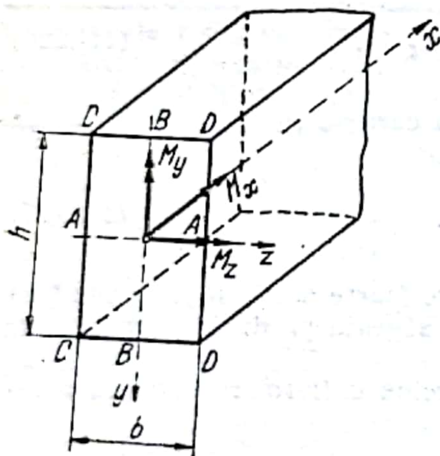


Fig. III.77

— în punctul A

$$\sigma_{A\,max,\,min} = \frac{M_y}{2W_y} \pm \sqrt{\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{kb^2h}\right)^2} \qquad \text{(III.233a)}$$

$$\tau_{A\,max} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{kb^2h}\right)^2};$$

— în punctul B

$$\sigma_{B\,max,\,min} = \frac{M_z}{2W_z} \pm \sqrt{\left(\frac{M_z}{2W_z}\right)^2 + \left(\frac{M_x k_2}{kb^2h}\right)^2}$$

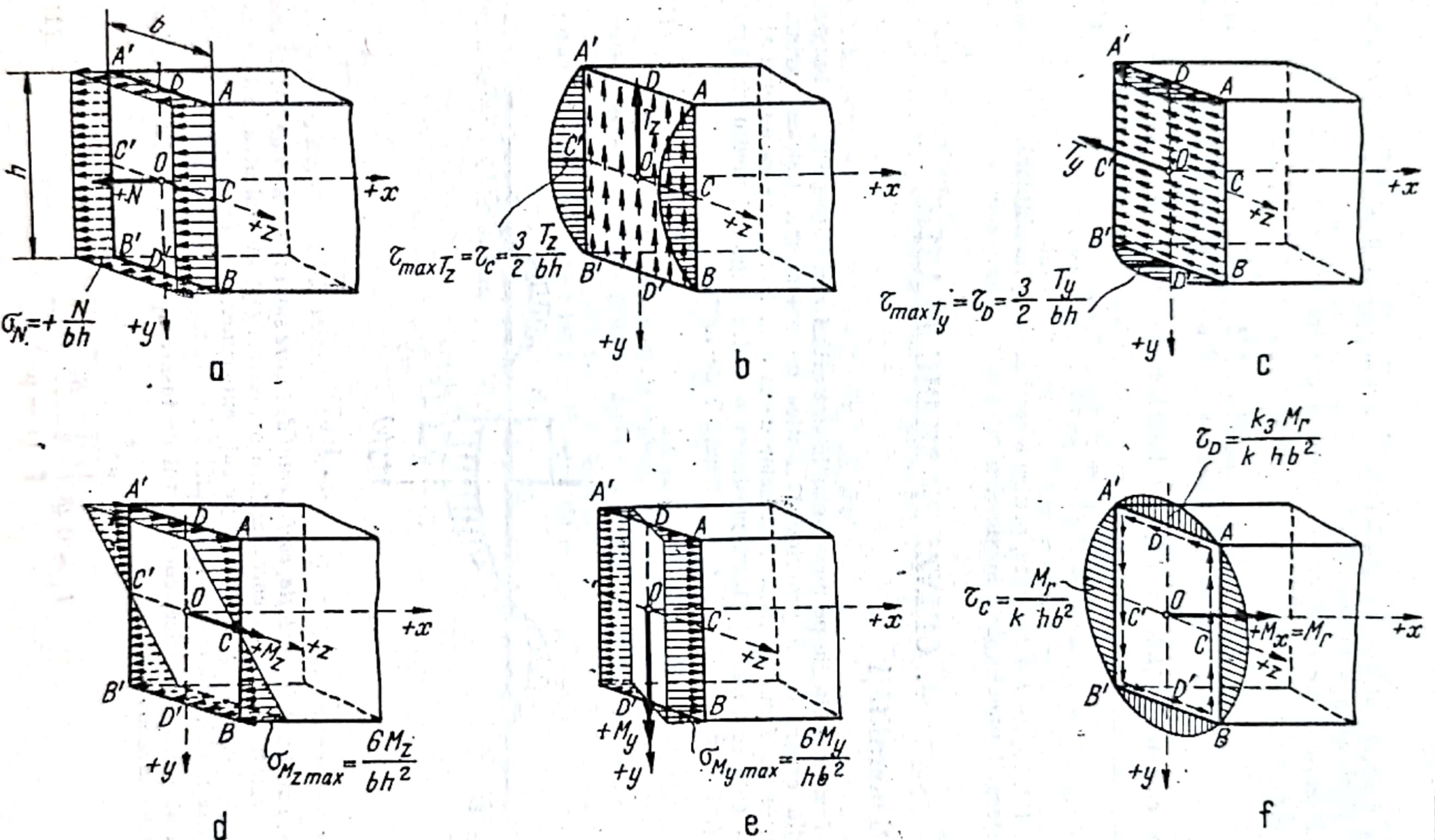
$$\tau_B = \sqrt{\left(\frac{M_z}{2W_z}\right)^2 + \left(\frac{M_x k_2}{kb^2h}\right)^2}; \qquad \text{(III.233b)}$$

— la colțurile C și D

$$\sigma_{C,\,D\,max,\,min} = \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

$$\tau_{C,\,D\,max} = \frac{1}{2} \sigma_{C,\,D\,max}. \qquad \text{(III.233c)}$$

3.3.3. Cazul general de solicitare. Cazul cel mai general de solicitare al unei secțiuni este acela în care torsorul forțelor de legătură se reduce la eforturile N_x, T_y, T_z, $M_x = M_t$, M_y, M_z (fig. III. 78) pe baza cărora se calculează eforturile unitare cu formulele cores-



a
$\sigma_N = + \frac{N}{bh}$
b
$\tau_{max T_z} = \tau_C = \frac{3}{2} \frac{T_z}{bh}$
c
$\tau_{max T_y} = \tau_D = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}$
d
$\sigma_{M_z max} = \frac{6 M_z}{b h^2}$
e
$\sigma_{M_y max} = \frac{6 M_y}{h b^2}$
f
$\tau_D = \frac{k_3 M_r}{k h b^2}$
$\tau_C = \frac{M_r}{k h b^2}$
$+M_x = M_r$

Fig. III.78

punzătoare solicitărilor simple, după care în punctele cele mai solicitate se face însumarea lor algebrică sau geometrică.

Pentru secțiuni dreptunghiulare eforturile unitare normale maxime se realizează la colțuri și se scriu

$$\sigma_{max,\ min} = \pm \frac{N_x}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \tag{III.234}$$

iar pentru cele tangențiale la mijlocul laturilor

$$\tau_{max,\ min} = \pm \tau_T \pm \tau_{Mr}. \tag{III.235}$$

În fig. III. 78, *a—f* sînt redate, pentru o secțiune dreptunghiulară, distribuțiile eforturilor unitare și unele valori maxime.

4. GRINZI PE MEDIU ELASTIC

4.1. Generalități

4.1.1. *Ipoteze.* Grinzile pe mediu elastic sînt grinzi rezemate pe toată lungimea lor pe un mediu continuu, cu proprietăți elastice de deformare. Calculul grinzilor pe mediu elastic se face pe baza ipotezelor de la cap. 3, la care se adaugă și *ipoteza lui Winkler* care se enunță: „Între presiunea p dintre grindă și mediu și săgeata v a grinzii, (fig. III.79) există o legătură liniară”, de forma

$$p = k_1 v \tag{III.236}$$

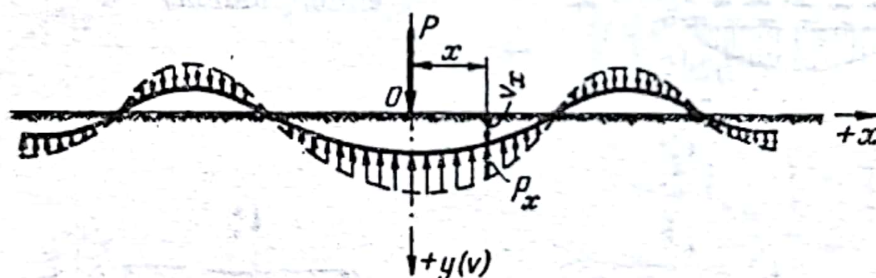


Fig. III.79

în care k_1 este *modulul de fundație, coeficientul de tasare* sau *coeficientul de pat al mediului elastic* și reprezintă presiunea care produce o tasare egală cu unitatea. El se exprimă de obicei în daN/cm³ și se determină pe cale experimentală. În tabelul III.17 se dau, pentru diferite medii, valorile coeficientului k_1, determinate prin încercări.

Pentru alte medii elastice, coeficientul de tasare k_1 se poate determina după formula lui Ghersevanov:

$$k_1 = 0{,}28 \sqrt[3]{\frac{E_1^4\, b}{(1-\mu^2)^4 E I_0}} \tag{III.237}$$

în care : b reprezintă lățimea de rezemare a grinzii ; E_1 — modulul de elasticitate al mediului elastic ; E — modulul de elasticitate al grinzii ; I_0 — momentul de inerție al secțiunii grinzii ; μ — coeficientul de contracție transversală al mediului elastic.

Tabelul III.17

Valorile coeficientului de tasare k_1

Natura mediului de rezemare	k_1(daN/cm^3)
Nisip și nisip argilos afînat, argilă și argilă nisipoasă în stare de curgere	0,1—0,5
Pietriș, nisip și nisip argilos de compactitate mijlocie, argilă și argilă nisipoasă în stare plastica	0,5 — 5
Pietriș, nisip și nisip argilos în stare compactă, argilă și argilă nisipoasă consistentă	5 — 10
Stîncă dură, stîncă cu fisuri	10 — 100
Terenuri și fundație artificială, fundații pe piloți	10 — 150

4.1.2. Ecuația diferențială a grinzilor pe mediu elastic. Pentru grinzi supuse la sarcini lucrînd în planul principal de inerție al secțiunii lor transversale, situate pe un mediu elastic, ecuația diferențială are expresia

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{k_1}{EI_1(x)}v = \frac{g(x)}{EI_0(x)} \tag{III.238}$$

în care : $g(x)$ reprezintă greutatea proprie a grinzii pe unitatea de lungime ; E — modulul de elasticitate al materialului grinzii ; $I_1(x)$ — reprezintă momentul de inerție pentru unitatea de lățime a grinzii (1 cm), ($I_1 = I_0(x)/b$, în care $I_0(x)$ este momentul de inerție față de axa de încovoiere $z—z$ iar b — lățimea de contact a grinzii cu mediul de rezemare).

Dacă $g(x)$ este constant, se scade direct din presiunea pe teren sau se neglijează.

Pentru $g(x) = 0$ se obține

$$\frac{d^4v}{dx^4} + 4\alpha^4 v = 0, \tag{III.239}$$

unde $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI_1}}$, avînd dimensiunile L^{-1} (cm^{-1}, m^{-1}), și se numește *factor de amortizare*. Dacă se introduce $I_1 = \frac{I_0}{b}$, atunci $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_1 b}{4EI_0}}$; notînd $k = k_1 b$ = daN/cm^2 rezultă

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_0}}. \tag{III.240}$$

Soluția generală a ecuației (III.239) pentru $I(x) = \text{const}$ este

$$v = e^{\alpha x}(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) + e^{-\alpha x}(C \cos \alpha x + D \sin \alpha x) \qquad \text{(III.241)}$$

sau folosind funcțiile hiperbolice.

$$v = A_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + B_1 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + D_1 \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x. \qquad \text{(III.242)}$$

Determinarea constantelor de integrare se face pe baza condițiilor inițiale la capetele grinzii, a condițiilor de continuitate a deformațiilor în dreptul sarcinilor concentrate, precum și a condițiilor de echilibru a unui element de grindă detașat prin două secțiuni făcute imediat la stînga și la dreapta unei sarcini concentrate.

4.2. Grinda de lungime infinită

O grindă se consideră de lungime infinită dacă argumentul $\alpha x_i > 7$, unde x_i reprezintă pe rînd x_A și x_B (fig. III.80) adică distanța de la prima sau ultima sarcină la capătul grinzii.

Aceasta se explică prin faptul că pentru $\alpha x > 7$, funcțiile ce intervin în expresiile diferitelor mărimi statice se amortizează, devenind practic nule.

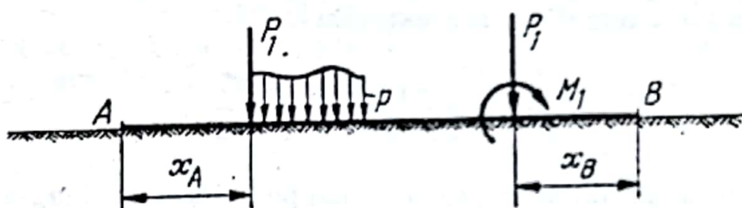


Fig. III.80

4.2.1. **Forța concentrată.** (fig. III.81). Punînd condițiile ca pentru $x = \infty$ să avem $T = -EI\,v''' = 0$ și $M = -EI\,v'' = 0$, se obține $A = 0$ și $B = 0$, rezultînd soluția generală

$$v = e^{-\alpha x}(C \cos \alpha x + D \sin \alpha x). \qquad \text{(III.243)}$$

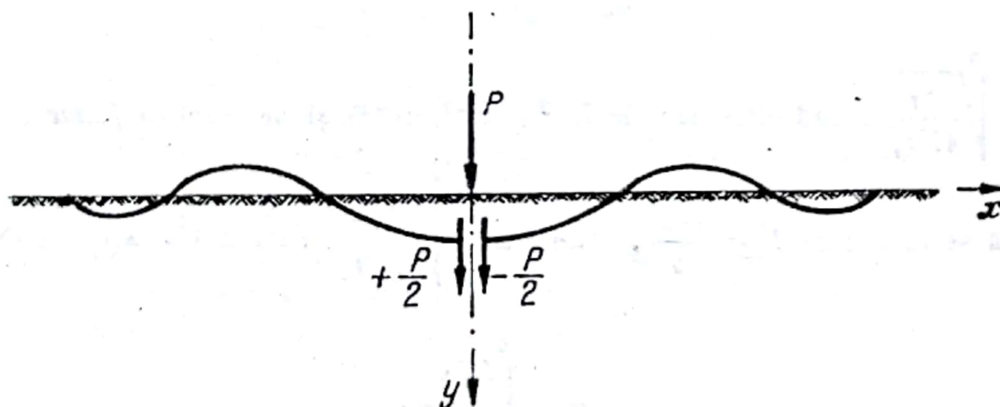


Fig. III.81

În origine, din motive de simetrie, $v'_0 = 0$ și $T_{odr} = -\frac{P}{2}$. Se obține $C = D = \frac{P\alpha}{2k}$ și pentru $x > 0$ rezultă

$$v = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

$$\varphi = v' = -\frac{P\alpha^2}{k} e^{-\alpha x} \sin \alpha x$$

$$M = -EIv'' = \frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \sin \alpha x)$$

$$T = -EIv''' = -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x. \qquad \text{(III.244)}$$

Notînd:

$$\varphi_1(\alpha x) = e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

$$\varphi_2(\alpha x) = e^{-\alpha x} \sin \alpha x$$

$$\varphi_3(\alpha x) = e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \sin \alpha x)$$

$$\varphi_4(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x \qquad \text{(III.245)}$$

se obțin formulele de calcul:

$$v = \frac{P\alpha}{2k} \varphi_1(\alpha x); \qquad \varphi = v' = -\frac{P\alpha^2}{k} \varphi_2(\alpha x)$$

$$M = \frac{P}{4\alpha} \varphi_3(\alpha x); \quad T = -\frac{P}{2} \varphi_4(\alpha x). \qquad \text{(III.246)}$$

Valorile funcțiilor $\varphi_1(\alpha x)$, $\varphi_2(\alpha x)$, $\varphi_3(\alpha x)$ și $\varphi_4(\alpha x)$, pentru diferite valori ale argumentului αx, sînt date în tabelul III.18.

Variația funcțiilor $\varphi(\alpha x)$ este reprezentată în fig. III.82.

Aceeași variație (diferă doar ordonatele) au și mărimile statice v, $\varphi = v'$, M, T (fig. III.83).

Făcînd în expresiile de mai înainte $P = 1$, se obțin funcțiile de influență ale săgeților și momentelor încovoietoare pentru secțiunea $x = 0$, cînd $P = 1$ parcurge grinda.

În fig. III.83, *a* este reprezentată diagrama săgeților $v = v(\bar{x})$, în fig. III.83, *b*, diagrama rotirilor secțiunilor grinzii $\varphi = v'(x)$, în fig. III.83, *c* diagrama momentelor încovoietoare $M = M(x)$, iar în fig. III.83, *d* diagrama forțelor tăietoare $T = T(x)$.

Tabelul III.18

Valorile funcțiilor pentru calculul după metoda Winkler al grinzilor așezate pe mediu elastic

$\varphi_1(\alpha x) = e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$; $\varphi_3(\alpha x) = e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \sin \alpha x)$

$\varphi_2(\alpha x) = e^{-\alpha x} \sin \alpha x$; $\varphi_4(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x$

αx	$\varphi_1(\alpha x)$	$\varphi_2(\alpha x)$	$\varphi_3(\alpha x)$	$\varphi_4(\alpha x)$
0,0	*1,0000*	*0,0000*	*1,0000*	*1,0000*
0,1	0,9907	0,0903	0,8100	0,9003
0,2	0,9651	0,1627	0,6398	0,8024
0,3	0,9267	0,2189	0,4888	0,7077
0,4	0,8784	0,2610	0,3564	0,6174
0,5	0,8231	0,2908	0,2415	0,5323
0,6	0,7628	0,3099	0,1431	0,4530
0,7	0,6997	0,3199	+0,0599	0,3798
$\pi/4$	*0,6448*	*0,3224*	*0,0000*	*0,3224*
0,8	0,6354	0,3223	−0,0093	0,3131
0,9	0,5712	0,3185	−0,0657	0,2527
1,0	0,5083	0,3096	−0,1108	0,1988
1,1	0,4476	0,2967	−0,1457	0,1510
1,2	0,3899	0,2807	−0,1716	0,1091
1,3	0,3355	0,2626	−0,1897	0,0729
1,4	0,2849	0,2430	−0,2011	0,0419
1,5	0,2384	0,2226	−0,2068	+0,0158
$\pi/2$	*0,2079*	*0,2079*	*−0,2079*	*0,0000*
1,6	0,1959	0,2018	−0,2077	−0,0059
1,7	0,1576	0,1812	−0,2047	−0,0235
1,8	0,1234	0,1610	−0,1985	−0,0376
1,9	0,0932	0,1415	−0,1899	−0,0484
2,0	0,0667	0,1230	−0,1794	−0,0563
2,1	0,0439	0,1057	−0,1675	−0,0618
2,2	0,0244	0,0895	−0-1548	−0,0652
2,3	+0,0080	0,0748	−0,1416	−0,0668
$3\pi/4$	*0,0000*	*0,0670*	*−0,1340*	*−0,0670*
2,4	−0,0056	0,0613	−0,1282	−0,0669
2,5	−0,0166	0,0492	−0,1149	−0,0658
2,6	−0,0254	0,0383	−0,1019	−0,0636
2,7	−0,0320	0,0287	−0,0895	−0,0608
2,8	−0,0369	0,0204	−0,0777	−0,0573
2,9	−0,0403	0,0132	−0,0666	−0,0534
3,0	−0,0423	0,0070	−0,0563	−0,0493
3,1	−0,0431	+0,0019	−0,0469	−0,0450
π	*−0,0432*	*−0,0000*	*−0,0432*	*−0,0432*

Tabelul *III.18* (continuare)

αx	$\varphi_1(\alpha x)$	$\varphi_2(\alpha x)$	$\varphi_3(\alpha x)$	$\varphi_4(\alpha x)$
3,2	−0,0431	−0,0024	−0,0383	−0,0407
3,3	−0,0422	−0,0058	−0,0306	−0,0364
3,4	−0,0408	−0,0085	−0,0237	−0,0323
3,5	−0,0389	−0,0106	−0,0177	−0,0283
3,6	−0,0366	−0,0121	−0,0124	−0,0245
3,7	−0,0341	−0,0131	−0,0079	−0,0210
3,8	−0,0314	−0,0137	−0,0040	−0,0177
3,9	−0,0286	−0,0140	−0,0008	−0,0147
$5\pi/4$	*−0,0279*	*−0,0139*	*−0,0000*	*−0,0139*
4,0	−0,0258	−0,0139	+0,0019	−0,0120
4,1	−0,0231	−0,0136	0,0040	−0,0095
4,2	−0,0204	−0,0131	0,0057	−0,0074
4,3	−0,0179	−0,0125	0,0070	−0,0054
4,4	−0,0155	−0,0117	0,0079	−0,0038
4,5	−0,0132	−0,0108	0,0085	−0,0023
4,6	−0,0111	−0,0100	0,0089	−0,0011
4,7	−0,0092	−0,0091	0,0090	+0,0001
$6\pi/4$	*−0,0090*	*−0,0090*	*0,0090*	*0,0000*
4,8	−0,0075	−0,0082	0,0089	+0,0007
4,9	−0,0059	−0,0073	0,0087	0,0014
5,0	−0,0046	−0,0065	0,0084	0,0019
5,1	−0,0033	−0,0057	0,0080	0,0023
5,2	−0,0023	−0,0049	0,0075	0,0026
5,3	−0,0014	−0,0042	0,0069	0,0028
5,4	−0,0006	−0,0035	0,0064	0,0029
$7\pi/4$	*0,0000*	*−0,0058*	*0,0058*	*0,0029*
5,5	0,0000	−0,0029	0,0058	0,0029
5,6	+0,0005	−0,0023	0,0052	0,0029
5,7	0,0010	−0,0018	0,0046	0,0028
5,8	0,0013	−0,0014	0,0041	0,0027
5,9	0,0015	−0,0010	0,0036	0,0026
6,0	0,0017	−0,0007	0,0031	0,0024
6,1	0,0018	−0,0004	0,0026	0,0022
6,2	0,0019	−0,0002	0,0022	0,0020
$8\pi/4$	*0,0019*	*0,0000*	*0,0019*	*0,0019*
6,3	0,0019	+0,0001	0,0018	0,0018
6,4	0,0018	0,0002	0,0015	0,0017
6,5	0,0018	0,0004	0,0012	0,0015
6,6	0,0017	0,0005	0,0009	0,0013
6,7	0,0016	0,0006	0,0006	0,0011
6,8	0,0015	0,0006	0,0004	0,0010
6,9	0,0014	0,0006	0,0002	0,0008
7,0	0,0013	0,0006	0,0001	0,0007
$9\pi/4$	*0,0012*	*0,0006*	*0,0000*	*0,0006*

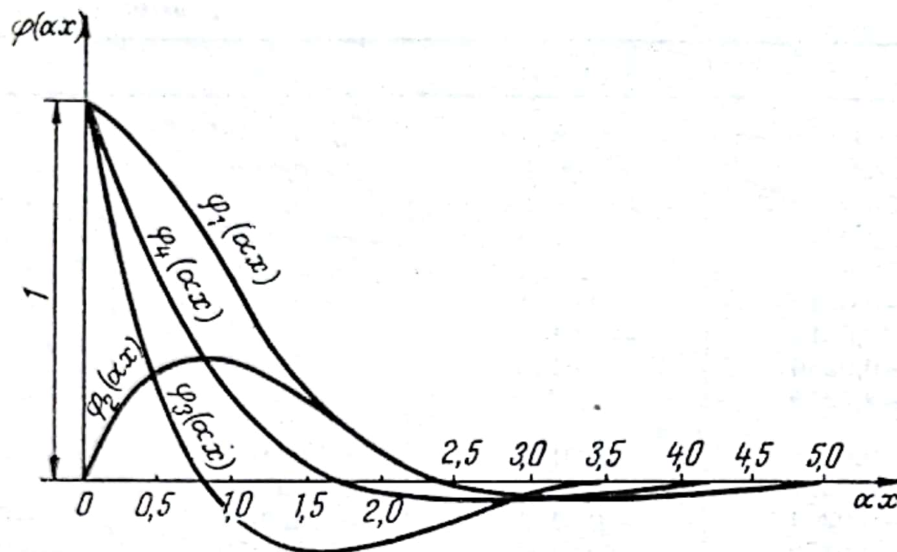


Fig. III.82

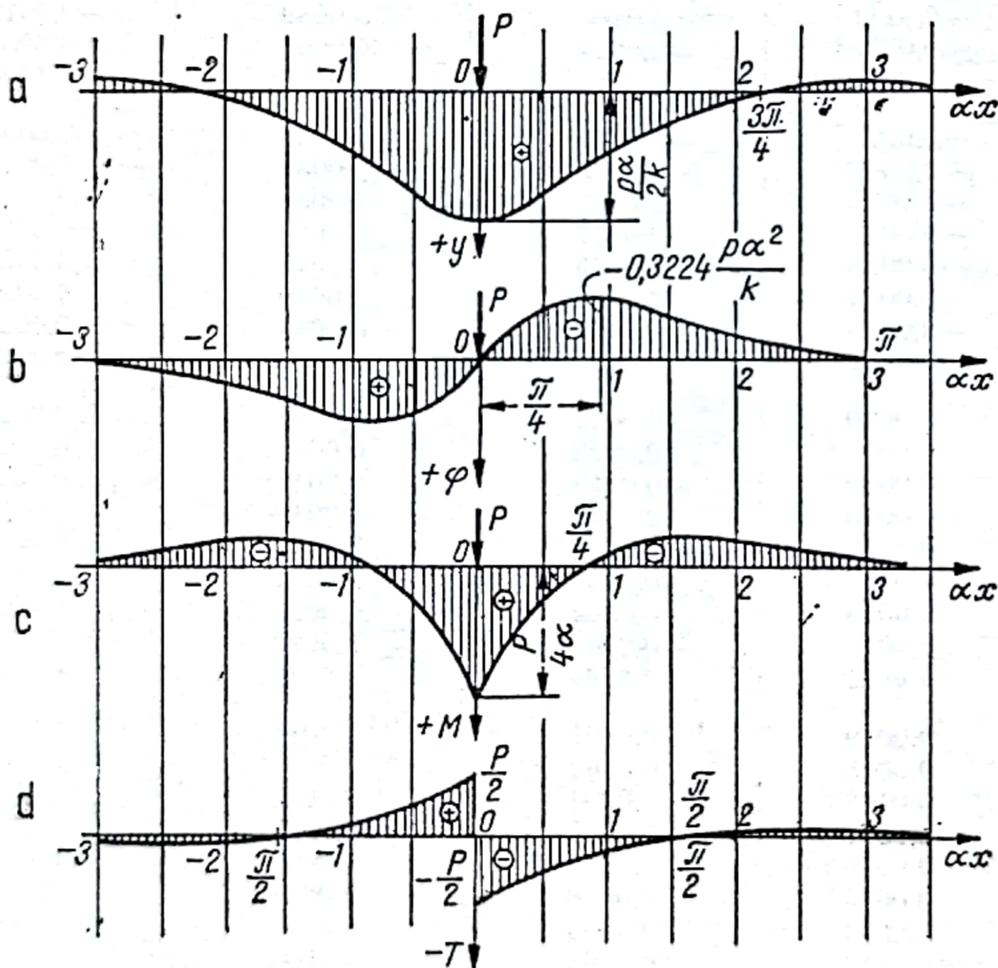


Fig. III.83

4.2.2. **Cuplu concentrat.** Exprimînd cuplul concentrat sub forma $M_0 = P \cdot \Delta x$ (fig. III.84) rezultă

$$v = \frac{P\alpha}{2k}\varphi_1(\alpha x) - \frac{P\alpha}{2k}\varphi_1[\alpha(x+\Delta x)] = -\frac{\alpha}{2k}P\cdot\Delta x\,\frac{\varphi_1[\alpha(x+\Delta x)] - \varphi_1(\alpha x)}{\Delta x}$$

(III.247)

Trecînd la limită $\Delta x \to 0$ şi $P\cdot\Delta x \to M_0$ se obţine

$$v = -\frac{\alpha}{2k}M_0\frac{d\varphi_1(\alpha x)}{dx} =$$

$$= \frac{M_0\alpha^2}{k}\cdot e^{-\alpha x}\sin\alpha x \qquad \text{(III.248)}$$

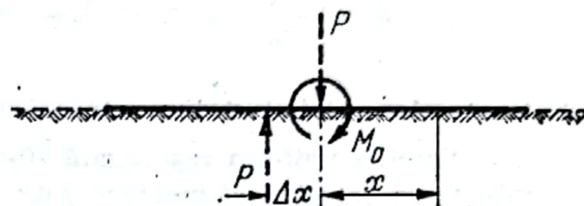


Fig. III.84

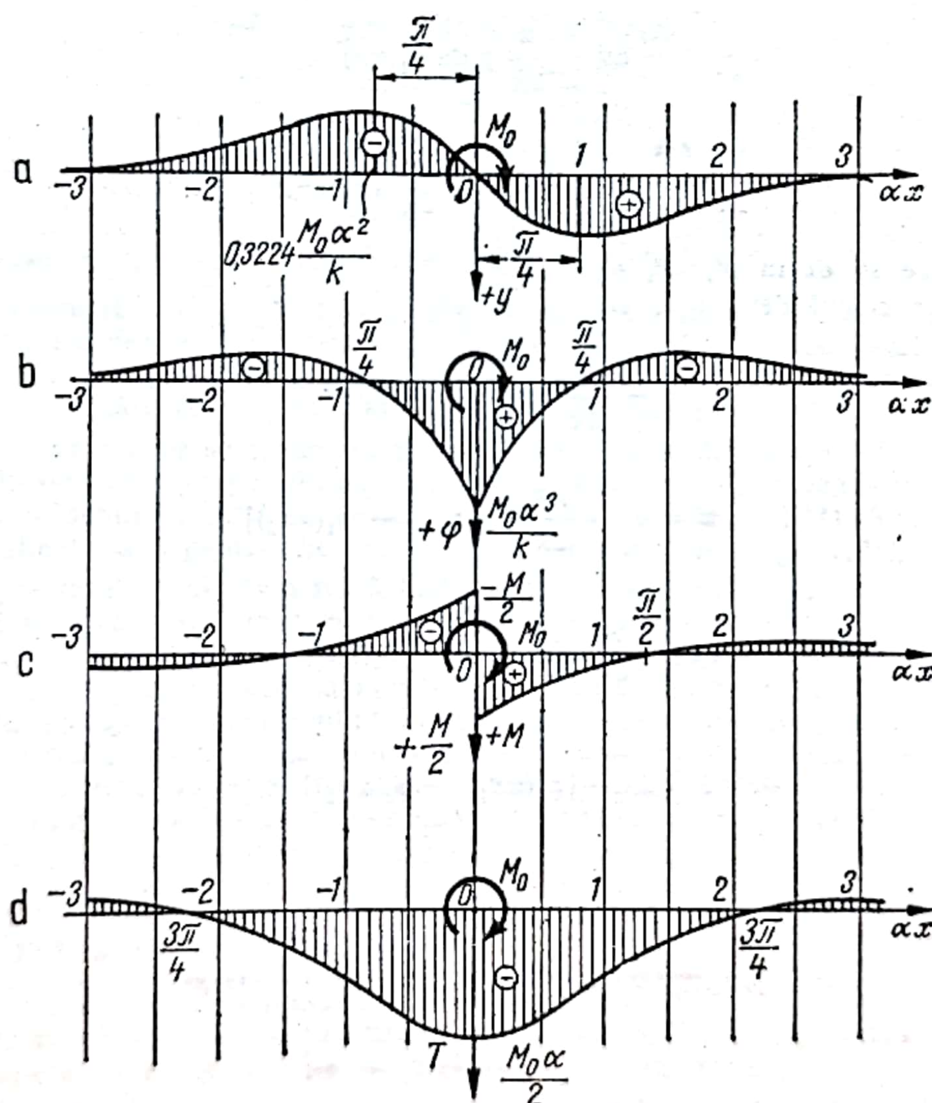


Fig. III.85

Prin derivări succesive se obțin v', v'', v'''.
Formulele de calcul ale mărimilor statice devin

$$v = \frac{M_0\alpha^2}{k}\,\varphi_2(\alpha x)$$

$$\varphi = v' = \frac{M_0\alpha^3}{k}\,\varphi_3(\alpha x)\,;\quad M = \frac{M_0}{2}\,\varphi_4(\alpha x)\,;\quad T = -\frac{M_0\alpha}{2}\,\varphi_1(\alpha x) \qquad \text{(III.249)}$$

Variația acestor mărimi statice este arătată în fig. III.85, *a—d*.

4.2.3. **Sarcină uniform repartizată** (fig. III.86). Mărimile statice v, v', M și T se obțin prin integrarea forțelor elementare $p\,dx$, folosind relațiile de la forța concentrată.

Dacă $p(x) = p = \text{const.}$

$$dv = \frac{\alpha}{2k}\,p\,dx\,\varphi_1(\alpha x)$$

$$v = \frac{p\alpha}{2k}\int_{x_1}^{x_2}\varphi_1(\alpha x)dx = -\frac{p}{2k}\,[\varphi_4(\alpha x_2) - \varphi_4(\alpha x_1)]. \qquad \text{(III.250)}$$

Prin derivare se obțin v', v'', v'''
Formulele de calcul devin:

$$v = -\frac{p}{2k}\,[\varphi_4(\alpha x_2) - \varphi_4(\alpha x_1)]$$

$$\varphi = v' = \frac{p\alpha}{2k}\,[\varphi_1(\alpha x_1) - \varphi_1(\alpha x_2)]$$

$$M = \frac{p}{4\alpha^2}\,[\varphi_2(\alpha x_2) - \varphi_2(\alpha x_1)] \qquad \text{(III.251)}$$

$$T = \frac{p}{4\alpha}\,[\varphi_3(\alpha x_1) - \varphi_3(\alpha x_2)].$$

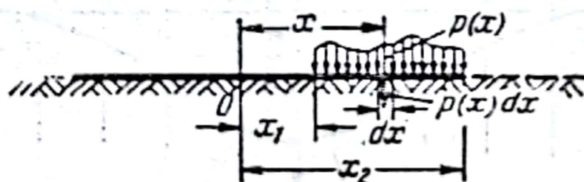


Fig. III.86

Formulele (III. 251) sînt valabile în cazul în care secţiunea considerată este la stînga porţiunii încărcate. Dacă secţiunea se consideră în interiorul acestei porţiuni, sarcina distribuită se împarte în două: la stînga şi la dreapta secţiunii considerate; se calculează separat influenţa produsă în secţiune de fiecare din cele două încărcări, suprapunînd apoi efectele lor. Formulele de calcul capătă atunci forma

$$v = -\frac{p}{2k}\left[\varphi_4(\alpha x_2) + \varphi_4(\alpha x_1) - 2\right]$$

$$\varphi = v' = \frac{p\alpha}{2k}\left[\varphi_1(\alpha x_1) - \varphi_1(\alpha x_2)\right]$$

$$M = \frac{p}{4\alpha^2}\left[\varphi_2(\alpha x_2) + \varphi_2(\alpha x_1)\right] \qquad \text{(III.252)}$$

$$T = \frac{p}{4\alpha}\left[\varphi_3(\alpha x_1) - \varphi_3(\alpha x_2)\right].$$

În aceste formule x_1 şi x_2 se introduc întotdeauna pozitive.

4.2.4. **Încărcări complexe.** În cazul cînd pe grindă acţionează mai multe încărcări de acelaşi fel, sau încărcări complexe ($P_i, \ldots, p_i, \ldots, M_i \ldots$), la calculul mărimilor statice v, v' M şi T se aplică principiul suprapunerii liniare a efectelor, însumînd termenii proveniţi din fiecare încărcare de pe grindă, inclusiv cele fictive (v. pct. 4.3).

Semnul încărcărilor se consideră pozitiv dacă P şi p sînt dirijate de sus în jos şi M_0 roteşte în sens orar (ca pe schemele din fig. III.80 şi III.84. În caz contrar, sarcinile se introduc cu semn negativ, funcţiile $\varphi(\alpha x)$ se găsesc în tabelul III.18. Se calculează abscisa rectificată αx_i pentru fiecare încărcare în parte (P_1, $P_2, \ldots, M_1$, $M_2, \ldots$, etc.).

Prin x_i se înţelege distanţa reală, luată în valoare absolută (cm, m), de la punctul de aplicaţie al încărcării sau marginile acesteia (pentru sarcina distribuită) la secţiunea în care se calculează mărimile statice. Cu cantităţile αx_i se intră în tabel, rezultînd pe orizontală funcţiile $\varphi(\alpha x)$ căutate (la nevoie se fac interpolări). Se precizează că, pentru funcţiile $\varphi_2(\alpha x)$ şi $\varphi_4(\alpha x)$, valorile din tabel se introduc cu semnul lor pentru forţe şi cuple concentrate, situate la stînga secţiunii considerate. Dacă încărcările sînt la dreapta secţiunii, valorile lui $\varphi_2(\alpha x)$ şi $\varphi_4(\alpha x)$ se iau cu semn schimbat faţă de cel din tabel. În formule se introduc: $k_1 = F \cdot L^{-3}$; $k = k_1 b = F \cdot L^{-2}$; $\alpha = L^{-1}$; $P = F^1$; $p = F^1 \cdot L^{-1}$; $M_0 = F^1 \cdot L^1$.

4.3. Grinda de lungime finită

O grindă se consideră de lungime finită cînd sarcinile care o acţionează influenţează cele două capete ale ei, A şi B($\alpha x_A \lhd 7$ şi $\alpha x_B \lhd 7$) (fig. III.87).

Calculul se face cu formulele de la grinda infinită, transformînd grinda finită în grindă infinită, astfel ca segmentul AB al grinzii noi (infinite) să se comporte în con-

dițiile reale ale grinzii finite, inițiale. Aceasta înseamnă că la cele două capete ale grinzii finite AB, după natura acestora, să se respecte, pentru :

— capăt liber : $T = 0$; $M = 0$;
— capăt rezemat sau articulat : $v = 0$; $M = 0$
— capăt încastrat : $v = 0$; $v' = 0$.

Condițiile pot fi îndeplinite dacă se transformă grinda de lungime finită într-o grindă de lungime infinită și se introduc de o parte și de alta, dincolo de capete, încărcările fictive T_1, T_2, T_3, T_4 (forțe sau cuple concentrate). Valorile celor patru încărcări fictive se stabilesc pe baza celor patru condiții ce se pun la capetele A și B ale grinzii finite (patru condiții). Odată forțele fictive determinate, calculul se face aplicînd formulele de la grinda de lungime infinită pentru segmentul AB, luînd în considerație toate încărcările, inclusiv cele fictive.

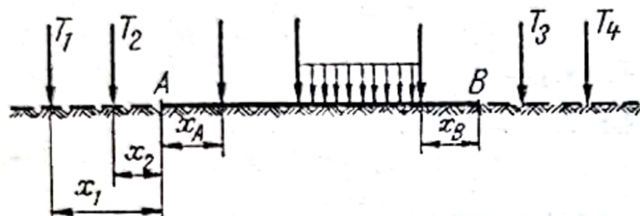


Fig. III.87

Amplasarea încărcărilor fictive se face arbitrar. Convenabil se amplasează la abscisele transformate $\alpha x_i = \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π, $\frac{3\pi}{4}$ de capetele A și B ale grinzii, în care caz se obțin simplificări în ecuațiile de condiție, deoarece ordonatele funcțiilor $\varphi(\alpha x)$ sînt în acest caz, pe rînd, nule.

Astfel, dacă încărcările fictive sînt forțe concentrate, ele se amplasează :

— pentru un capăt liber ($M = 0$; $T = 0$) una la $\frac{\pi}{4}$ avînd $\varphi_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ și alta la $\frac{\pi}{2}$ avînd $\varphi_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

— pentru un capăt simplu rezemat sau articulat la $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{3\pi}{4}$;

— pentru un capăt încastrat, la $\frac{3\pi}{4}$ și π.

Forțele fictive se pot lua și sub forma unei forțe și a unui cuplu, concentrate, aplicate în capetele grinzii (A și B) (fig. III.88).

Prin folosirea simetriei și antisimetriei se pot obține de asemenea simplificări ale sistemului de ecuații.

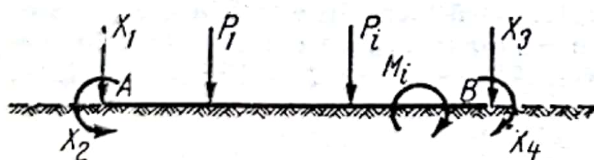


Fig. III.88

Grinda de lungime l comportă simplificări cînd $\alpha(l + x_i) > 7$ (x_i fiind distanța de la marginea grinzii la forța fictivă), în care caz din fiecare ecuație dispar cîte două necunoscute. Practic, aceasta înseamnă aproximativ că $\alpha l > 6$.

Astfel, grinda finită poate fi :

— lungă, cînd $\alpha l > 6$;
— de lungime medie, cînd $0{,}6 < \alpha l < 6$;
— scurtă, cînd $\alpha l < 0{,}6$. În acest caz, rezolvarea se face considerînd grinda absolut rigidă ($I = \infty$).

4.4. Grinda de lungime semiinfinită

Constituie o situaţie combinată a cazurilor tratate, fiind la un capăt infinită ($\alpha x_A > 7$) şi la altul finită ($\alpha x_B < 7$).

La capătul în care se aplică sarcinile ($\alpha x < 7$) grinda se transformă într-o grindă de lungime infinită cu ajutorul încărcărilor fictive T_1, T_2, punînd cele două condiţii de capăt, în mod analog ca la grinda finită.

Un caz particular îl constituie grinda semiinfinită acţionată la un capăt de o forţă P şi un cuplu M_0 şi neîncărcată pe restul lungimii (fig. III.89).

În acest caz se obţin direct relaţiile:

$$v = -\frac{2P\alpha}{k}\varphi_4(\alpha x) - \frac{2M_0\alpha^2}{k}\varphi_3(\alpha x)$$

$$v' = \frac{2P\alpha^2}{k}\varphi_1(\alpha x) + \frac{4M_0\alpha^3}{k}\varphi_4(\alpha x)$$

$$M = \frac{P}{\alpha}\varphi_2(\alpha x) + M_0\varphi_1(\alpha x) \qquad \text{(III.253)}$$

$$T = P\varphi_3(\alpha x) - 2M_0\alpha\varphi_2(\alpha x).$$

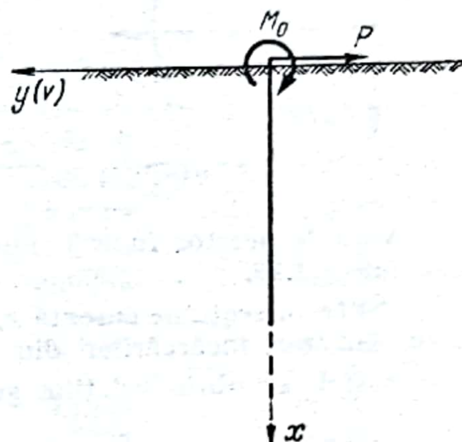


Fig. III.89

4.5. Metoda Umanski-Krîlov

Metoda se aplică la calculul grinzilor de lungime finită ($\alpha l < 7$) şi se recomandă în general pentru grinzi avînd $\alpha l \leqslant 5$, în care caz rigurozitatea calculului este asigurată.

Se foloseşte soluţia generală a ecuaţiei liniei elastice exprimată cu ajutorul funcţiilor hiperbolice:

$$v = A_1 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + B_1 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + C_1 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + D_1 \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha x \qquad \text{(III.254)}$$

Se dă constantelor de integrare o semnificaţie fizică determinîndu-se constantele v_0, φ_0, M_0, T_0 din capătul considerat origine (O) (fig. III.90).

Pentru regiunea grinzii cuprinsă între origine şi prima încărcare, relaţiile de calcul se exprimă prin formulele:

$$v = v_0 f_1(\alpha x) + \frac{\varphi_0}{\alpha} f_2(\alpha x) - \frac{4M_0\alpha^2}{k} f_3(\alpha x) - \frac{4T_0\alpha}{k} f_4(\alpha x)$$

$$\varphi = v' = -4\alpha v_0 f_4(\alpha x) + \varphi_0 f_1(\alpha x) - \frac{4M_0\alpha^3}{k} f_2(\alpha x) - \frac{4T_0\alpha^2}{k} f_3(\alpha x) \qquad \text{(III.255)}$$

$$M = \frac{k}{\alpha^2} v_0 f_3(\alpha x) + \frac{k}{\alpha_3}\varphi_0 f_4(\alpha x) + M_0 f_1(\alpha x) + \frac{T_0}{\alpha} f_2(\alpha x)$$

$$T = \frac{k}{\alpha} v_0 f_2(\alpha x) + \frac{k}{\alpha^2}\varphi_0 f_3(\alpha x) - 4\alpha M_0 f_4(\alpha x) + T_0 f_1(\alpha x)$$

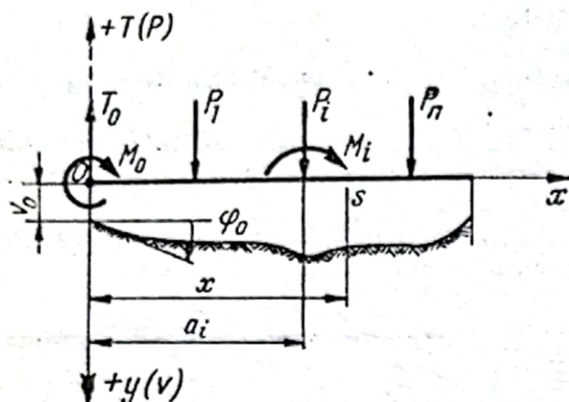


Fig. III.90

unde s-a notat:

$$f_1(\alpha x) = \text{ch}\,\alpha x \cos \alpha x$$

$$f_2(\alpha x) = \frac{1}{2}(\text{ch}\,\alpha x \sin \alpha x + \text{sh}\,\alpha x \cos \alpha x)$$

$$f_3(\alpha x) = \frac{1}{2}\,\text{sh}\,\alpha x \sin \alpha x \quad \text{(III.256)}$$

$$f_4(\alpha x) = \frac{1}{4}(\text{ch}\,\alpha x \sin \alpha x - \text{sh}\,\alpha x \cos \alpha x).$$

Valorile acestor funcții, numite *funcțiile fundamentale ale lui Kîrlov*, sînt date în tabelul III.19.

Pentru o secțiune curentă x, expresiile (III.256) se corectează prin introducerea efectului tuturor încărcărilor din stînga secțiunii.

Astfel, se obțin relațiile generale:

$$v = v_0 f_1(\alpha x) + \frac{\varphi_0}{\alpha} f_2(\alpha x) - \frac{4\alpha^2}{k} \sum M_i f_3[\alpha(x - a_i)] - \frac{4\alpha}{k} \sum P_i f_4[\alpha(x - a_i)]$$

$$\varphi = v' = -4\alpha v_0 f_4(\alpha x) + \varphi_0 f_1(\alpha x) - \frac{4\alpha^3}{k} \sum M_i f_2[\alpha(x - a_i)] - \frac{4\alpha^2}{k} \sum P_i f_3[\alpha(x - a_i)]$$

$$M = \frac{k}{\alpha^2} v_0 f_3(\alpha x) + \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 f_4(\alpha x) + \sum M_i f_1[\alpha(x - a_i)] + \frac{1}{\alpha} \sum P_i f_2[\alpha(x - a_i)] \quad \text{(III.257)}$$

$$T = \frac{k}{\alpha} v_0 f_2(\alpha x) + \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 f_3(\alpha x) - 4\alpha \sum M_i f_4[\alpha(x - a_i)] + \sum P_i f_1[\alpha(x - a_i)].$$

În sumele din relațiile (III.257) intră și M_0 și T_0.

Determinarea valorilor inițiale v_0, φ_0, M_0, T_0 se face pe baza celor patru condiții la capetele grinzii.

Din condițiile puse în capătul origine, doi din acești parametri sînt în generali nuli, iar ceilalți doi rezultă din scrierea condițiilor la capătul opus.

Cînd capătul grinzii (originea O) este:

— capăt liber, atunci: $M_0 = 0$; $T_0 = 0$;

— capăt articulat sau simplu rezemat: $M_0 = 0$, $v_0 = 0$;

— capăt încastrat: $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

Tabelul III.19

Valorile funcţiilor Krilov pentru calculul grinzilor pe mediu elastic

$$f_1(\alpha x) = \text{ch}\,\alpha x \cdot \cos \alpha x$$

$$f_2(\alpha x) = \frac{1}{2}(\text{ch}\,\alpha x \cdot \sin \alpha x + \text{sh}\,\alpha x \cdot \cos \alpha x)$$

$$f_3(\alpha x) = \frac{1}{2}\,\text{sh}\,\alpha x \cdot \sin \alpha x$$

$$f_4(\alpha x) = \frac{1}{4}(\text{ch}\,\alpha x \cdot \sin \alpha x - \text{sh}\,\alpha x \cdot \cos \alpha x)$$

αx	$f_1(\alpha x)$	$f_2(\alpha x)$	$f_3(\alpha x)$	$f_4(\alpha x)$
0,00	*1,0000*	*0,0000*	*0,0000*	*0,0000*
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2825
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,2612
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
$\pi/2$	*0,0000*	*1,2546*	*1,1507*	0,6273
1,60	−0,0754	1,2535	1,1873	0,6615
1,70	−0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,80	−0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,90	−1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
2,00	−1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,10	−2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,20	−2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,30	−3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,40	−4,0976	−0,1386	1,8461	1,9461
2,50	−4,9128	−0,5885	1,8105	2,1293
2,60	−5,8003	−1,1236	1,7256	2,3065
2,70	−6,7565	−1,7509	1,5827	2,4725
2,80	−7,7759	−2,4770	1,3721	2,6208
2,90	−8,8471	−3,3079	1,0838	2,7443

Tabelul III.19 (continuare)

αx	$f_1(\alpha x)$	$f_2(\alpha x)$	$f_3(\alpha x)$	$f_4(\alpha x)$
3,00	−9,9669	−4,2485	0,7069	2,8346
3,10	−11,1119	−5,3023	0,2303	2,8823
π	*−11,5919*	*−5,7744*	*0,0000*	*2,8872*
3,20	−12,2656	−6,4711	− 0,3574	2,8769
3,30	−13,4048	−7,7549	− 1,0678	2,8068
3,40	−14,5008	−9,1507	− 1,9121	2,6589
3,50	−15,5198	−10,6525	− 2,9014	2,4195
3,60	−16,4218	−12,2508	− 4,0459	2,0735
3,70	−17,1622	−13,9315	− 5,3544	1,6049
3,80	−17,6875	−15,6761	− 6,8343	0,9969
3,90	−17,9387	−17,4599	− 8,4909	0,2321
4,00	−17,8498	−19,2524	−10,3265	− 0,7073
4,10	−17,3472	−21,0160	−12,3404	− 1,8392
4,20	−16,3505	22,7055	−14,5274	− 3,1812
4,30	−14,7722	−24,2669	−16,8773	− 4,7501
4,40	−12,5180	25,6373	−19,3743	− 6,5615
4,50	− 9,4890	−26,7447	−21,9959	− 8,6290
4,60	− 5,5791	−27,5057	−24,7117	−10,9638
4,70	− 0,6812	−27,8273	−27,4823	−13,5732
$3\pi/2$	*0,0000*	*−27,8317*	*−27,8272*	*−13,9159*
4,80	5,3164	−27,6052	−30,2589	−16,4604
4,90	12,5239	−26,7239	−32,9814	−19,6232
5,00	21,0504	−25,0565	−35,5775	−23,0526
5,10	30,9997	−22,4661	−37,9619	−26,7317
5,20	42,4661	−18,8057	−40,0350	−30,6346
5,30	55,5317	−13,9201	−41,6826	−34,7247
5,40	70,2637	−7,6440	−42,7727	−38,9524
5,50	86,7044	0,1901	−43,1593	−43,2557
5,60	104,8687	9,7544	−42,6775	−47,5558
5,70	124,7352	21,2199	−41,1454	−51,7563
5,80	146,2448	34,7564	−38,3640	−55,7429
5,90	169,2837	50,5203	−34,1198	−59,3805
6,00	193,6813	68,6578	−28,2116	−62,5106
6,10	219,2004	89,2947	−20,3043	−64,9518
6,20	245,5231	112,5249	−10,2356	−66,4981
2π	*267,7468*	*133,8725*	*0,0000*	*−66,9362*
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	−66,9175
6,40	298,8909	166,9722	17,5362	−65,9486

Tabelul III.19 (continuare)

αx	$f_1(\alpha x)$	$f_2(\alpha x)$	$f_3(\alpha x)$	$f_4(\alpha x)$
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	−63,3105
6,60	349,2554	231,8801	57,2528	−58,6870
6,70	371,4244	267,9374	82,2255	−51,7430
6,80	390,2947	306,0558	110,9087	−42,1190
6,90	404,7145	347,3499	143,4927	−30,1819
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	−13,2842
7,10	414,8263	428,2849	220,8718	6,7296
7,20	407,4216	469,4772	265,7664	31,0281
7,30	389,3783	509,4157	314,7265	60,0189
7,40	358,7306	546,9343	367,5688	94,1019
7,50	313,3700	580,6710	423,9858	133,6506
7,60	251,0334	609,0402	483,5233	179,0035
7,70	169,3472	630,2295	545,5557	230,4412
7,80	65,8475	642,1835	609,2596	288,1681
$5\pi/2$	*0,0000*	*643,9927*	*643,9926*	*321,9964*
7,90	−62,0375	642,5872	673,6057	352,3123
8,00	−216,8647	628,8779	737,3101	422,8713
8,10	−401,1674	598,2344	798,8179	499,7008
8,20	−617,4142	547,5808	856,2878	582,4975
8,30	−867,9091	473,5998	907,5542	670,7544
8,40	−1154,6587	372,7866	950,1158	763,7226
8,50	−1 479,3701	241,4136	981,0984	860,3917
8,60	−1 843,2880	75,6088	997,2527	959,4484
8,70	−2 247,0402	− 128,5824	994,9377	1 059,2289
8,80	−2 690,4845	− 375,1167	970,1255	1 157,6839
8,90	−3 172,6917	− 667,9794	918,3664	1 252,3561
9,00	−3 691,4815	−1 010,8800	834,8607	1 340,3007
9,10	−4 243,5551	−1 407,3690	714,4085	1 418,0930
9,20	−4 224,0587	−1 860,5265	551,4928	1 481,7611
9,30	−5 426,5154	−2 372,9486	340,3091	1 526,7834
9,40	−6 042,3167	−2 946,2708	74,8875	1 548,0229
3π	*−6 195,8239*	*−3 097,9120*	*0,0000*	*1 548,9560*
9,50	−6 660,9594	−3 581,4756	− 250,9959	1 539,7419
9,60	−7 269,3664	−4 278,1693	− 643,4861	1 495,5985
9,70	−7,851,7063	−5 034,4714	−1 108,6183	1 408,6174
9,80	−8 389,5687	−5 847,0360	−1 652,2517	1 271,2663
9,90	−8 860,9431	−6 710,2070	−2 279,7354	1 075,3680
10,00	−9 240,8733	−7 616,1462	2 995,7095	812,3636

Observații:

— Pentru calculul lui α vezi pct. 4.1.2.

$$\alpha(\text{cm}^{-1});\quad k = kb(\text{daN/cm}^2);\quad x(\text{cm});\ a_i(\text{cm}).$$

— Semnul încărcărilor se ia conform convenției T și M din fig. III.90 (forțele sînt pozitive dacă acționează de sus în jos, momentele dacă rotesc în sens orar; altfel se iau cu semn schimbat).

— Prin ΣM_i ... și ΣP_i ... se înțeleg numai încărcările din stînga secțiunii considerate, inclusiv T_0 și M_0.

— Prin x se înțelege distanța de la origine la secțiunea în care se calculează mărimile statice. Prin a_i se înțelege distanțele de la origine la diversele încărcări de pe grindă. Rezultă că $(x - a_i)$ reprezintă distanța de la încărcarea P_i sau M_i la secțiunea de calcul.

Exemplul de calcul III.2. O talpă de fundație reazemă continuu pe un mediu elastic (avînd k_1 = 15 daN/cm³. Încărcările sînt; P = 300 kN; M = 50 kNm (fig. III.91).

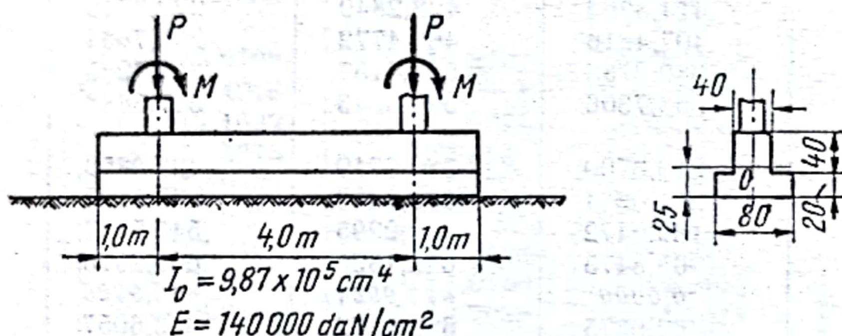


Fig. III.91

Să se calculeze săgețile și presiunile sub grindă, forțele tăietoare și momentele încovoietoare în grindă. Momentul de inerție al secțiunii grinzii este $I_0 = 9{,}87 \cdot 10^5$ cm⁴; modulul de elasticitate al grinzii E=140 000 daN/cm² și factorul de amortizare,

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_1 b}{4\,EI_0}} = \sqrt[4]{\frac{15 \cdot 80}{4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 9{,}87 \cdot 10^5}} = 0{,}00683\ \text{cm}^{-1}$$

$\alpha a = 0{,}00683 \cdot 100 = 0{,}683 < 7$; grindă finită

$\alpha l = 0{,}00683 \cdot 600 = 4{,}098 < 6$; grindă finită de lungime medie.

(Se pot utiliza metodele forțelor fictive sau Umansky). Se va folosi metoda forțelor fictive.

Calculul se face separat pentru încărcarea cu forțe și separat pentru acea cu momente. Se obține astfel o încărcare simetrică, și una antisimetrică, încît valorile se vor calcula numai pentru jumătate din grindă. Întrucît condițiile de capăt sînt $M = 0$, $T = 0$, forțele fictive se aplică rațional la $\alpha x = \pi/4$ și $\alpha x = \pi/2$ de capetele grinzii. Pentru cazul încărcării cu forțe concentrate, din motive de simetrie forțele fictive sînt egale.

Pentru scrierea expresiilor în secțiunile caracteristice 0, 1, 2, se calculează anticipat, în tabelul următor, funcțiile $\varphi(\alpha x)$ necesare, folosind tabelul III.18 și cunoscînd că $\alpha = 0{,}00683$ cm⁻¹.

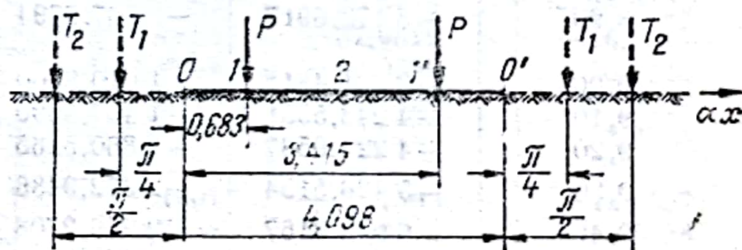


Fig. III.92

Observație. La stabilirea valorilor funcțiilor din tabel s-au făcut interpolările necesare.

A. *Diagrame de eforturi din forțele concentrate* (fig. III. 92).

Determinarea forțelor fictive T_1 și T_2

$$M_0 = \frac{1}{4\alpha}\,\Sigma P_i\,\varphi_3(\alpha x_i) = 0 \quad \text{sau} \quad \Sigma P_i\,\varphi_3(\alpha x_i) = 0$$

$$T_0 = -\frac{1}{2}\,\Sigma P_i\,\varphi_4(\alpha x_i) = 0 \quad \text{sau} \quad \Sigma P_i\,\varphi_4(\alpha x_i) = 0$$

$\alpha = 0{,}00683\ cm^{-1}$

Secțiunea	Încărcarea	αx_i	Valorile funcțiilor			
			$\varphi_1(\alpha x)$	$\varphi_2(\alpha x)$	$\varphi_3(\alpha x)$	$\varphi_4(\alpha x)$
0	T_2	$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	0,2083	0,2079	−0,2074	0,000
		$4{,}098 + \frac{\pi}{2} = 5{,}669$	+0,0008	−0,0019	+0,0048	+0,0028
	T_1	$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$	0,6448	0,3219	0,000	0,3228
		$4{,}098 + \frac{\pi}{4} = 4{,}883$	−0,0062	−0,0073	+0,0087	+0,0013
	P	0,683	0,7104	0,3182	0,0740	0,3922
		3,415	−0,0405	−0,00882	−0,02283	−0,03170
1	T_2	$\frac{\pi}{2} + 0{,}683 = 2{,}254$	0,0156	0,0816	−0,1477	−0,0661
		$3{,}415 + \frac{\pi}{2} = 4{,}986$	−0,00448	−0,00661	0,00844	0,00183
	T_1	$\frac{\pi}{4} + 0{,}683 = 1{,}468$	0,2531	0,2290	−0,2050	0,02405
		$3{,}415 + \frac{\pi}{4} = 4{,}20$	−0,02030	−0,01307	0,00575	−0,00732
	P	0	1,000	0,000	1,000	1,000
		2,732	−0,0336	−0,0267	−0,0857	−0,0597
2	T_2	$\frac{\pi}{2} + \frac{4{,}098}{2} = 3{,}620$	−0,0361	−0,0123	−0,0115	−0,0238
	T_1	$\frac{\pi}{4} + \frac{4{,}098}{2} = 2{,}834$	−0,0381	+0,0179	−0,0739	−0,0560
	P	1,366	0,3021	0,2497	−0,1972	0,0524

Ecuațiile devin ;

$$T_2\left[\varphi_3\left(\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_3(5{,}669)\right]+T_1\left[\varphi_3\left(\frac{\pi}{4}\right)+\varphi_3(4{,}883)\right]+30\,000\,[\varphi_3(0{,}683)+\varphi_3(3{,}415)]=0$$

$$T_2\left[\varphi_4\left(\frac{\pi}{2}\right)-\varphi_4(5{,}669)\right]+T_1\left[\varphi_4\left(\frac{\pi}{4}\right)-\varphi_4(4{,}883)\right]-30\,000\,[\varphi_4(0{,}683)+\varphi_4(3{,}415)]=0.$$

Funcția $\varphi_4(\alpha x)$ fiind antisimetrică, se ia cu semn schimbat pentru încărcările aflate la dreapta secțiunii de calcul.

Sistemul devine ;

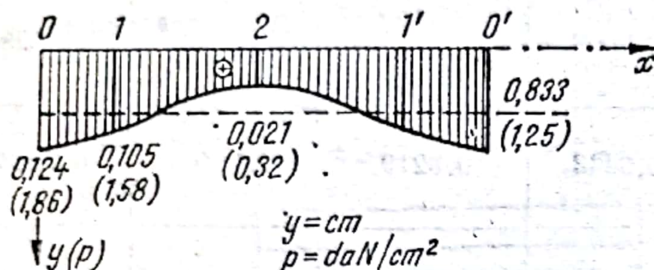


Fig. III. 93

$$T_2[-0{,}2074+0{,}0048]+T_1[0+0{,}0087]+$$
$$+30\,000\,[0{,}0740-0{,}02283]=0$$

$$T_2[+(0)-(0{,}0028)]+T_1[+(0{,}3228)-(0{,}0013)]-$$
$$-30.000[0{,}3922-0{,}03167]=0$$

Rezultă : $T_1=33\,706$ daN ; $T_2=9\,030$ daN.

1) Calculul săgeților (fig. III.93)

$$v=\frac{\alpha}{2k}\sum P_i\varphi_1(\alpha x)$$

Introducînd $k=k_1b=80\cdot 15=1\,200$ daN/cm^2 ; $P=30\cdot 10^3$ daN ; $T_1=33{,}71\cdot 10^3$ daN și $T_2=9\cdot 10^3$ daN, rezultă ;

$$v=\frac{0{,}00683}{2\cdot 1\,200}\cdot 10^3\sum P_i\varphi_1(\alpha x)=$$
$$=2{,}85\cdot 10^{-3}\sum P_i\varphi_1(\alpha x)$$

$$v_0=2{,}85\cdot 10^{-3}\,[9(0{,}2083+0{,}0008)+$$
$$+33{,}71(0{,}6448-0{,}0062)+30[0{,}710(4-0{,}0405)]=$$
$$=0{,}124\text{ cm}$$

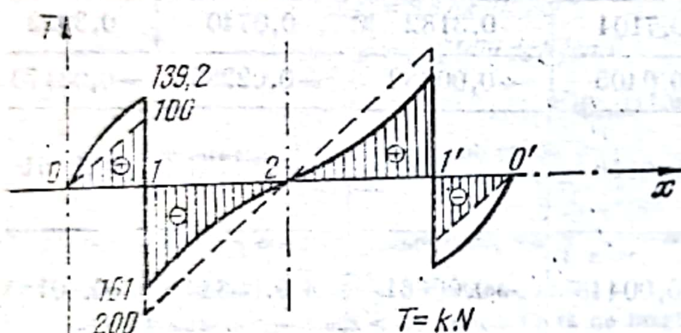


Fig. III.94

$$v_1=2{,}85\cdot 10^{-3}\,[9(0{,}0156-0{,}00448)+33{,}71(0{,}2531-0{,}02030)+30(1-0{,}0336)]=0{,}105\text{ cm}$$

$$v_2=2\cdot 2{,}85\cdot 10^{-3}\,[9(-0{,}0361)+33{,}1(-0{,}0381)+30(0{,}3021)]=0{,}0212\text{ cm}.$$

2) Calculul presiunilor sub grindă (v. fig. III.93) $p=k_1v$

$$p_0=k_1v_0=15\cdot 0{,}1238=1{,}857\text{ daN/cm}^2$$

$$p_1=k_1v_1=15\cdot 0{,}105=1{,}575\text{ daN/cm}^2$$

$$p_2=k_1v_2=15\cdot 0{,}0212=0{,}318\text{ daN/cm}^2.$$

Diagrama presiunilor este dată în fig. III.93.
La diagramele v și p, nu s-a adăugat acțiunea greutății proprii a grinzii, greutate constantă.

3) Calculul forțelor tăietoare (fig. III.94)

$$T=-\frac{1}{2}\sum P_i\,\varphi_4(\alpha x)=-\frac{10^3}{2}\sum P_i\,\varphi_4(\alpha x)$$

$$T_0=0$$

$$T_{1_{st}} = -\frac{10^3}{2}\{[9(-0{,}0661) - (0{,}00181)] + 33{,}71\,[0{,}02405 - (-0{,}00732)] - 30(1 - 0{,}0597)\} =$$

$$= 13\,881 \text{ daN} = +139 \text{ kN}$$

$$T_{1_{dr}} = T_{1_{st}} - P = 139 - 300 = -161 \text{ kN}.$$

$$T_2 = 0$$

Diagrama forțelor tăietoare este dată în fig. III.94.

4) Calculul momentelor încovoietoare (fig. III.95)

$$M = \frac{1}{4\alpha}\sum P_i\,\varphi_3(\alpha x_i) = \frac{10^3}{4\cdot 0{,}00683}\cdot$$

$$\cdot \sum P_i\,\varphi_3(\alpha x_i) = 3{,}66\cdot 10^4 \sum P_i\,\varphi_3(\alpha x_i);\ M_0 = 0$$

$$M_1 = 3{,}66\cdot 10^4[9(-0{,}1477 + 0{,}00844) +$$

$$+ 33{,}71(-0{,}2050 + 0{,}00575) + 30(1 - 0{,}0857)] =$$

$$= 713\,500 \text{ daN cm} = 71{,}35 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 2\cdot 3{,}66\cdot 10^4[9(-0{,}0155) + 33{,}71(-0{,}0739) +$$

$$+ 30(-0{,}1972)] = -625600 \text{ daN cm} = -62{,}56 \text{ kNm}.$$

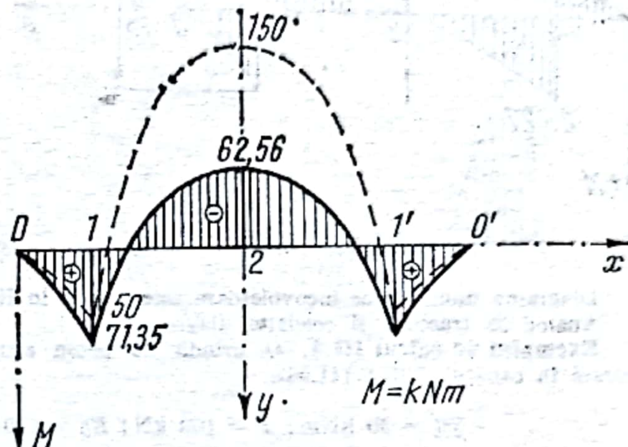


Fig. III.95

Diagrama M este dată în fig. III.95.

Liniile punctate arată variațiile mărimilor statice în ipoteza de grindă perfect rigidă. Se remarcă în general, la compararea celor două situații, că la calculul grinzii pe mediu elastic se obțin, pentru presiunile pe teren, valori mai mari, iar pentru solicitările în grindă valori mai mici.

B. *Încărcarea grinzii cu momentele* $\mathfrak{M}$ = 50 kNm (fig. III.96)

Încărcările fictive $\mathfrak{M}_1$ și $\mathfrak{M}_2$ sînt antisimetrice. S-au așezat la $\pi/4$ și $\pi/2$ fiindcă funcțiile $\varphi(\alpha x_i)$ sînt extrase în tabelul de la primul punct.

Determinarea încărcărilor fictive;

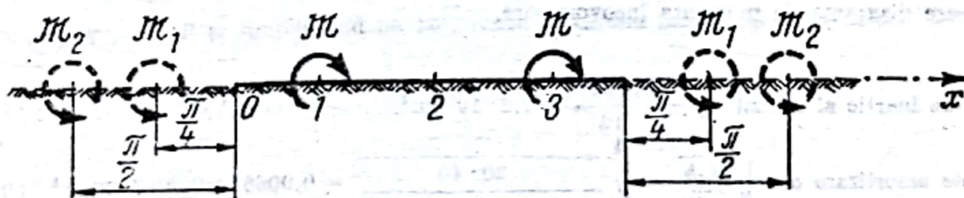


Fig. III.96

$$M_0 = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{M}_i\varphi_4(\alpha x_i) = 0 \text{ sau } \sum \mathfrak{M}_i\varphi_4(\alpha x_i) = 0$$

$$T_0 = -\frac{\alpha}{2}\sum \mathfrak{M}_i\,\varphi_1(\alpha x_i) = 0 \text{ sau } \sum \mathfrak{M}_i\,\varphi_1(\alpha x_i) = 0.$$

Ținînd seama de semnul momentelor și de antisimetria funcției $\varphi_4(\alpha x)$, ecuațiile se scriu;

$$-\mathfrak{M}_2\left[\varphi_4\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varphi_4(5{,}669)\right] - \mathfrak{M}_1\left[\varphi_4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \varphi_4(4{,}883)\right] + \mathfrak{M}[\varphi_4(0{,}683) + \varphi_4(3{,}415)] = 0$$

$$-\mathfrak{M}_2\left[\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi_1(5{,}669)\right] - \mathfrak{M}_1\left[\varphi_1\left(\frac{\pi}{4}\right) + \varphi_1(4{,}883)\right] + \mathfrak{M}[\varphi_1(0{,}683) + \varphi_1(3{,}415)] = 0.$$

Rezultă $\mathfrak{M}_1 = 55{,}79$ kNm și $\mathfrak{M}_2 = -10{,}20$ kNm.
Diagrama M(fig. III.97)

$$M_0 = 0$$

$$M_{1\,st} = \frac{1{,}020}{2}\left[\varphi_4(2{,}253) - \varphi_4(4{,}985) - \right.$$

$$-\frac{5{,}576}{2}\left[\varphi_4(1{,}468) - \varphi_4(4{,}20)\right] - \frac{5}{2}\left[\varphi_4(0) + \right.$$

$$\left.+\varphi_4(2{,}732)\right] = -24{,}73 \text{ kNm}$$

$$M_{1\,dr} = \mathfrak{M}_{1\,st} + \mathfrak{M} = -24{,}73 + 50 = 25{,}27 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 0.$$

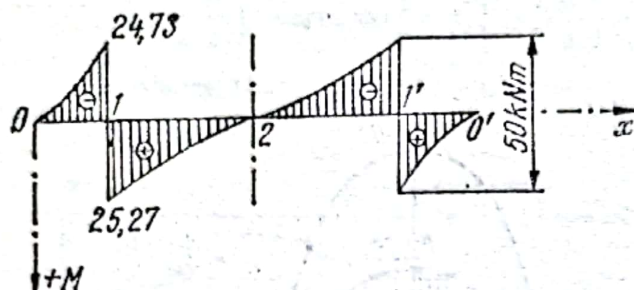


Fig. III.97

Diagrama momentelor încovoietoare este redată în fig. III.97.
Analog se trasează și celelalte diagrame.

Exemplul de calcul III.3. O grindă de beton armat cu secțiunea 40 × 60 este liberă în capătul *0* și încastrată în capătul *4* (fig. III.98).

$$\mathfrak{M} = 30 \text{ kNm};\; P = 100 \text{ kN};\; E_b = 140\,000 \text{ daN/cm}^2;\; k_1 = 20 \text{ daN/cm}^3.$$

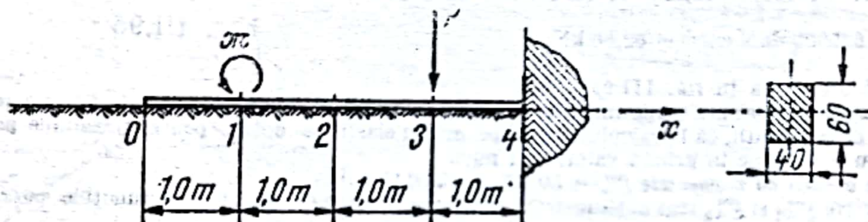


Fig. III.98

Să se traseze diagrama de momente încovoietoare.

Momentul de inerție al grinzii $I_0 = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 7{,}2 \cdot 10^5 \text{cm}^4$.

Factorul de amortizare $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_1 b}{4EI_0}} = \sqrt[4]{\frac{20 \cdot 40}{4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 7{,}2 \cdot 10^5}} = 0{,}00667 \approx 0{,}0067 \text{ cm}^{-1}$

$\alpha l = 0{,}0067 \cdot 400 = 2{,}68 < 5$. Grindă finită de lungime medie, nesimetrică.
Se folosește metoda Umansky.
Valorile funcțiilor $f(\alpha x)$ pentru $\alpha = 0{,}0067 \text{ cm}^{-1}$ se dau în tabelul următor.

x_{cm}	αx	Valorile funcțiilor extrase din tabelul III.19			
		$f_1(\alpha x)$	$f_2(\alpha x)$	$f_3(\alpha x)$	$f_4(\alpha x)$
100	0,67	0,9664	0,6655	2,2240	0,0501
200	1,34	0,4668	1,1966	0,8657	0,3949
300	2,01	−1,6153	0,9399	1,6584	1,2491
400	2,68	−6,5600	−1,6177	1,6163	2,4405

Observație. La extragerea funcțiilor s-au făcut interpolările necesare în tabel. S-a utilizat tabelul III.19.

– Determinarea parametrilor inițiali: v_0, φ_0, M_0, T_0.
Condițiile în origine (0) (capăt liber) anulează doi parametri, fiindcă:

$$T_0 = 0 \text{ și } M_0 = 0$$

v_0, φ_0 se determină din condițiile de la capătul 4 (capăt încastrat)

$$v_4 = 0 \text{ și } \varphi_4 = 0.$$

Condițiile devin:

$$v_4 = v_0 f_1(2{,}68) + \frac{\varphi_0}{2\alpha} f_2(2{,}68) - \frac{4\alpha^2}{k} \mathfrak{M} f_2(2{,}01) -$$

$$- \frac{4\alpha}{k} P f_4(0{,}67) = 0$$

$$\varphi_4 = -4\alpha v_0 f_4(2{,}68) + \varphi_0 f_1(2{,}68) - \frac{4\alpha^3}{k} \mathfrak{M} f_2(2{,}01) -$$

$$- \frac{4\alpha^2}{k} P f_3(0{,}67) = 0.$$

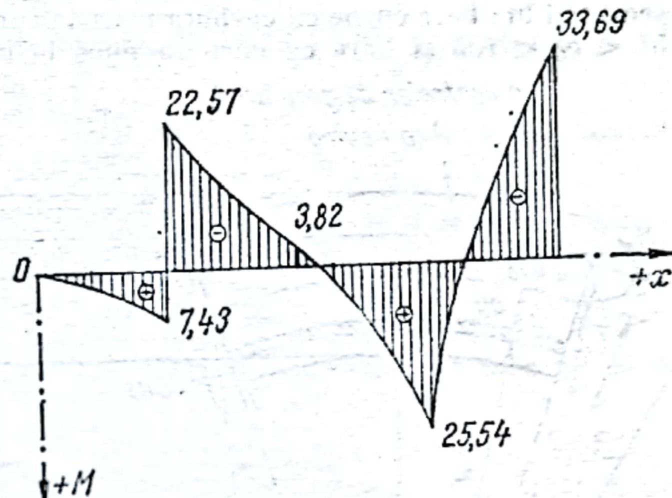


Fig. III.99

Introducînd valorile funcțiilor $f(\alpha x)$ și

$k = k_1 b = 20 \cdot 40 = 800$ daN/cm²;

$\mathfrak{M} = -30$ kNm $= -3 \cdot 10^5$ daNcm;

$\alpha = 0{,}67 \cdot 10^{-2}$ cm^{-1}

$P = -100$ kN $= -10^4$ daN

rezultă: $\varphi_0 = 6{,}61 \cdot 10^{-5}$ rad; $v_0 = 2{,}08 \cdot 10^{-2}$ cm.

– Calculul ordonatelor diagramei M

$$M = \frac{k}{\alpha^2} v_0 f_3(\alpha x) + \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 f_4(\alpha x) + \mathfrak{M} f_1[\alpha(x-a_i)] + \frac{1}{\alpha} P f_2[\alpha(x-a_i)].$$

Înlocuind k, α, v_0, φ_0, M, P și simplificînd cu 10^5, rezultă expresia momentului (în kNm)

$$M = 37{,}1\, f_3(\alpha x) - 17{,}6\, f_4(\alpha x) - 30\, f_1[\alpha(x-a_i)] - 149\, f_2[\alpha(x-a_i)]$$

$x_0 = 0$; $M_0 = 0$;

Momentele în secțiunile considerate sînt:

$x_1 = 1$m: $M_{1\,st} = 37{,}1\ (0{,}2240) - 17{,}6\ (0{,}0501) = 7{,}43$ kNm

$M_{1\,dr} = M_{1\,st} + \mathfrak{M} = 7{,}43 - 30 = -22{,}57$ kNm

$x_2 = 2$m: $M_2 = 37{,}1\ (0{,}8657) - 17{,}6\ (0{,}3949) - 30(0{,}9664) = -3{,}822$ kNm

$x_3 = 3$m: $M_3 = 37{,}1\ (1{,}6584) - 17{,}6\ (1{,}2491) - 30\ (0{,}4668) = +25{,}543$ kNm

$x_4 = 4$m: $M_4 = 37{,}1\ (1{,}6163) - 17{,}6\ (2{,}4405) - 30(-1{,}6153) - 149\ (0{,}6655) = -33{,}689$ kNm.

Diagrama M s-a trasat în fig. III.99.
Analog se pot trasa și celelalte diagrame (v, φ, T).

5. BARE CURBE PLANE SOLICITATE ÎN PLANUL CURBURII

5.1. Generalități

Prin bare curbe plane se înțeleg barele a căror axă longitudinală este o curbă plană oarecare.

Ele se clasifică în funcție de raportul ρ_G/h, a razei de curbură ρ_G și înălțimea h a secțiunii în: bare curbe cu curbura mare la care $\rho_G < 5\,h$, bare cu curbură medie la care $5h < \rho_G < 10h$ și bare cu curbura mică la care $\rho_G > 10\,h$.

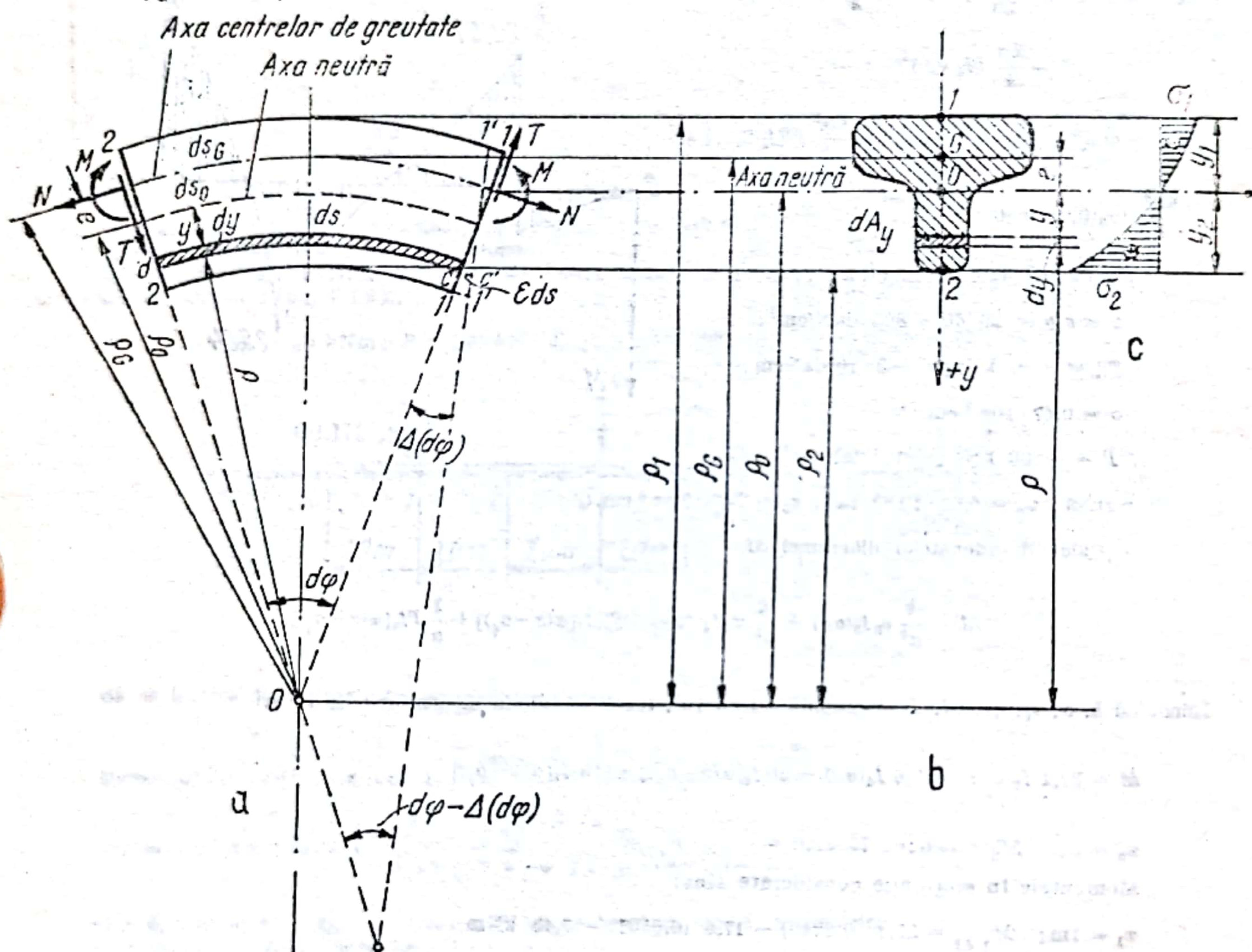


Fig. III.100

În continuare se consideră bare cu curbura mare, avînd secțiuni cu o axă de simetrie situată în planul de curbură.

5.2. Încovoierea pură

În cazul încovoierii pure, pe baza ipotezei lui Bernoulli, o secțiune transversală inițial plană înainte de deformare se rotește în jurul axei neutre a secțiunii rămînînd plană după deformare. Două secțiuni situate la distanța $ds_0 = \rho_0 d\varphi$ (fig. III.100, *a*, *b*) se rotesc

una față de alta cu un unghi $\Delta(\mathrm{d}\varphi)$ iar o fibră oarecare, situată la distanța y față de axa neutră, suferă o lungire specifică

$$\varepsilon = \frac{cc'}{cd} = \frac{cc'}{ds} = \frac{y\Delta(\mathrm{d}\varphi)}{(\rho_0 - y)\,\mathrm{d}\varphi}. \qquad \text{(III.258)}$$

din care, pe baza legii lui Hooke, se obține expresia efortului unitar pe secțiune

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey\Delta(\mathrm{d}\varphi)}{(\rho_0 - y)\mathrm{d}\varphi}. \qquad \text{(III.259)}$$

Din relațiile anterioare rezultă că la barele curbe supuse la încovoiere deformațiile specifice și eforturile unitare normale nu mai variază liniar, ci variază *hiperbolic* pe înălțimea secțiunii (fig.III.100,*c*).

Determinarea expresiilor lui $\Delta(\mathrm{d}\varphi)$ și ρ_0 din formulele de mai înainte se face pe baza relațiilor de echivalență

$$N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \frac{E\Delta(\mathrm{d}\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \frac{y\mathrm{d}A}{\rho_0 - y} = \frac{E\Delta(\mathrm{d}\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\, k = 0 \qquad \text{(III.260a)}$$

și

$$M = \int_A \sigma y \mathrm{d}A = \frac{E\Delta(\mathrm{d}\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \frac{y^2}{\rho_0 - y}\,\mathrm{d}A. \qquad \text{(III.260b)}$$

Pentru *încovoiere pură* ($N = 0$) poziția axei neutre se obține din condiția

$$\int_A \frac{y\mathrm{d}A}{\rho_0 - y} = 0. \qquad \text{(III.261)}$$

Notînd cu ρ distanța unei fibre oarecare la centrul de curbură ($\rho = \rho_0 - y$), din relația (III.260a) rezultă raza de curbură a suprafeței neutre:

$$\rho_0 = \frac{A}{\displaystyle\int_A \frac{\mathrm{d}A}{\rho}} \qquad \text{(III.262)}$$

și distanța axei neutre la axa centrelor de greutate ale barei

$$e = \rho_G - \rho_0 = \rho_G - \frac{A}{\displaystyle\int_A \frac{\mathrm{d}A}{\rho}} \approx \frac{I_G}{A\rho_G} \qquad \text{(III.263)}$$

în care I_G este momentul de inerție al secțiunii față de axa centrului de greutate ce trece prin G. Efectuînd integralele din membrul doi al relației (III.260 b) rezultă

$$\int_A \frac{y^2 \mathrm{d}A}{\rho_0 - y} = Ay_G \tag{III.264}$$

și deci:

$$-\frac{E\Delta(\mathrm{d}\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} Ay_G = M. \tag{III.265}$$

În sistemul de axe: $y_G = -e$ rezultă efortul unitar normal

$$\sigma = \frac{My}{Ae(\rho_0 - y)} = \frac{My}{k_1\rho_0(\rho_0 - y)A} = \frac{M(\rho_0 - \rho)}{A(\rho_G - \rho_0)\rho}. \tag{III.266}$$

Eforturile unitare în fibrele extreme au expresiile

$$\sigma_1 = -\frac{M(\rho_0 - \rho_1)}{A(\rho_G - \rho_0)\rho_1} = -\frac{My_1}{eA\rho_1} \tag{III.267a}$$

$$\sigma_2 = \frac{M(\rho_0 - \rho_2)}{A(\rho_G - \rho_0)\rho_2} = \frac{My_2}{eA\rho_2}. \tag{III.267b}$$

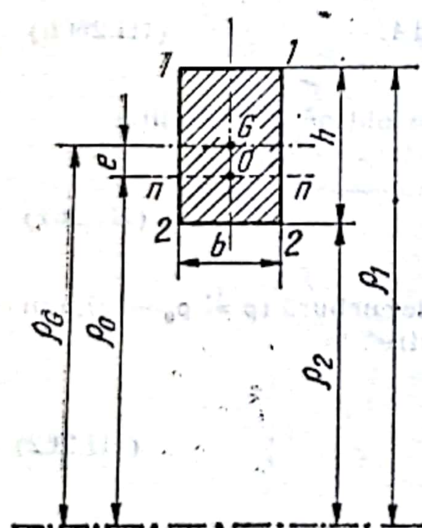


Fig. III.101

Dacă centrul de greutate al secțiunii este spre centrul de curbură față de suprafața neutră: $|\sigma_2| > |\sigma_1|$.

În relațiile de mai înainte s-a notat (v. și fig. III. 100):

ρ_G — raza de curbură a axei centrului de greutate al secțiunii barei;

ρ_0 — raza de curbură a suprafețelor neutre;

ρ — raza de curbură a unei fibre oarecare situate la distanța y de suprafața neutră;

ρ_1 și ρ_2 — distanța fibrelor extreme, exterioară și interioară la centrul de curbură.

Pentru o secțiune dreptunghiulară (fig. III.101) rezultă:

$$\rho_0 = \frac{h}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_2}} \tag{III.268}$$

și

$$e \approx \frac{h^2}{12\rho_G} \text{ și } \rho_0 = \frac{\rho_G}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho_G}\right)^2}. \tag{III.269}$$

Dacă raza de curbură ρ_0 este mare în raport cu $h/2$ se poate lua $k = h^2/12\,\rho_0^2$.

Pentru secţiunea din (fig. III.102, *a*) raza de curbură a suprafeţei neutre are expresia [1]:

$$\rho_0 = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2'} + b_2 \ln \frac{\rho_2'}{\rho_2} + b_3 \ln \frac{\rho_2}{\rho_3}} . \tag{III.270}$$

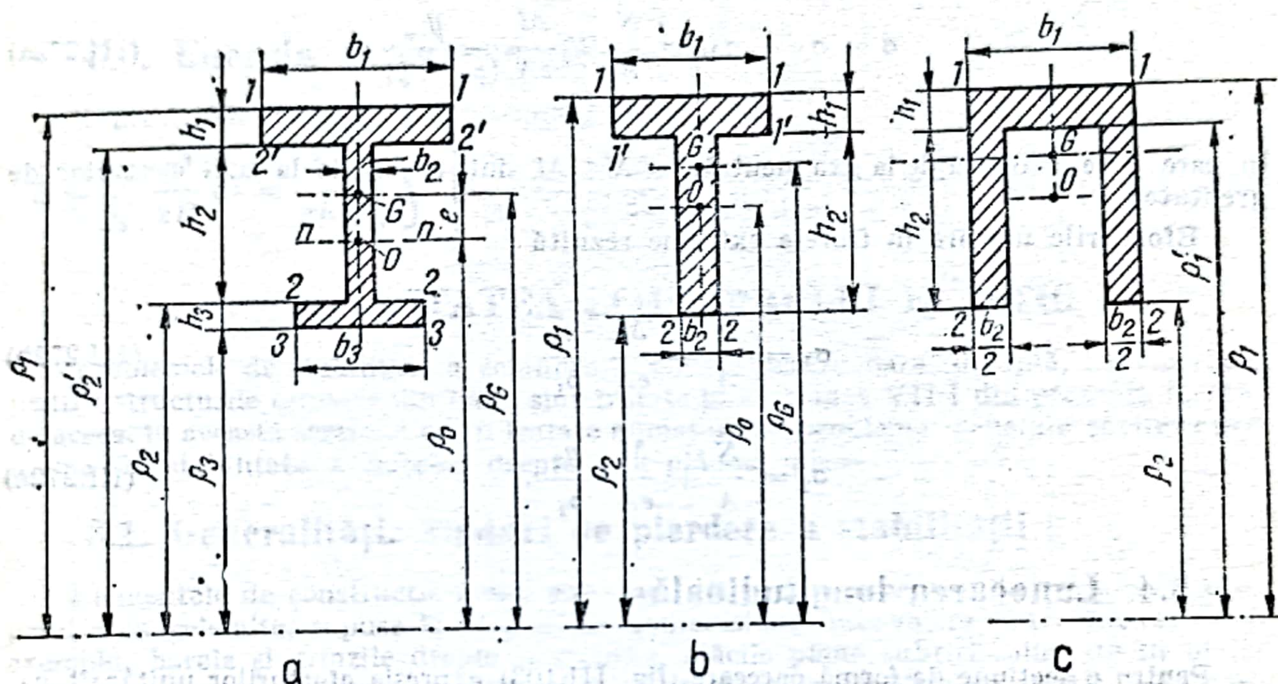


Fig. III. 102

Pentru secţiunile din fig. III.102, *b* şi III. 102, *c* se foloseşte tot formula (III.270) în care ultimul termen de la numărător şi numitor este nul iar $\rho_2' = \rho_1'$ (fig. III. 102, *c*).

Pentru secţiunea inelară rezultă:

$$\rho_0 = \frac{D^2 - d^2}{8\left(\sqrt{R_G^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{R_G^2 - \frac{D^2}{4}}\right)} \tag{III.271}$$

Pentru secţiune circulară plină se foloseşte formula (III.271) făcînd $d = 0$.

Valoarea lui ρ_0 trebuie calculată foarte exact, deoarece în expresiile lui σ intervine diferenţa $\rho_0 - \rho_i$, mărimi foarte apropiate numeric.

Excentricitatea c a axei neutre creşte odată cu creşterea curburii barei, dar nu depăşeşte 15% din înălţimea secţiunii.

---

[1]) Pentru alte forme de secţiuni vezi lucrarea [93]

5.3. Încovoierea cu efort axial

Efortul unitar normal într-o secțiune a unei bare curbe supuse la un efort axial N și un moment încovoietor M are expresia:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{eA} \frac{y}{(\rho_0 - y)} \tag{III.272a}$$

în care y se măsoară de la axa neutră, iar N și M sînt raportate la axa centrelor de greutate.

Eforturile unitare în fibrele extreme rezultă

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} - \frac{M}{eA} \frac{y_1}{\rho_1} \tag{III.272b}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} + \frac{M}{eA} \frac{y_2}{\rho_2}. \tag{III.272c}$$

5.4. Lunecarea longitudinală

Pentru o secțiune de formă oarecare (fig. III.103) expresia eforturilor unitare tangențiale la nivelul y față de axa neutră este

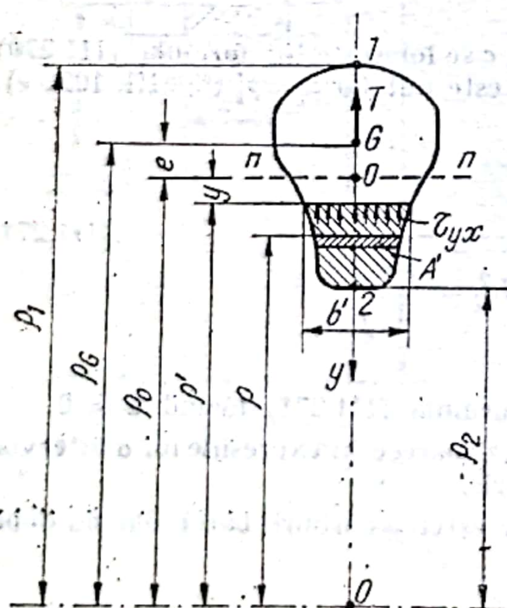


Fig. III.103

$$\tau_{xy} = \frac{T}{A} \frac{\rho_G}{\rho' b' e} \left(\rho_0 \int_{\rho_2}^{\rho'} \frac{dA}{\rho} - A' \right). \tag{III.273}$$

Pentru o secțiune dreptunghiulară rezultă

$$\tau_{xy} = \frac{T}{A} \cdot \frac{\rho_G}{\rho' e} \left[\rho_0 \ln \frac{\rho'}{\rho_2} - (\rho' - \rho_2). \right]. \tag{III.274}$$

5.5. Domeniul de aplicare al formulelor

Formulele (III.266), (III.267), (III.272), (III.273), (III.274) sînt aplicabile la bare curbe cu curbura mare $R \triangleleft 5h \ldots 6h$. Pentru bare cu curbura

medie expresia efortului unitar normal se poate considera cu bună aproximaţie

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{\rho_G A} + \frac{My}{I_z} \cdot \qquad \text{(III.275)}$$

Pentru bare cu curbura mică la care $R > 10\ h$ se poate neglija şi termenul $M/\rho_G A$ astfel incit eforturile unitare se calculează ca la barele drepte.

5.6. Energia de deformaţie

Expresia energiei de deformaţie este

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} \mathrm{d}V = \frac{1}{2E} \int_A \int_x \left[\frac{N}{A} - \frac{M}{\rho_G A} + \frac{My}{k\rho_G A(\rho_G - y_G)} \right]^2 \mathrm{d}A\ \mathrm{d}x. \qquad \text{(III.276)}$$

6. STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC

Problemele de stabilitate a echilibrului elastic pentru bara dreaptă, bara curbă şi pentru structurile formate din bare, sint tratate în secţiunea VIII din prezenta lucrare, de aceea, în această secţiune vor fi tratate numai unele probleme generale şi citeva probleme de stabilitate a barelor drepte şi a plăcilor plane.

6.1. Generalităţi. Moduri de pierdere a stabilităţii

Elementele de construcţie avind una sau două din dimensiunile lor mici în comparaţie cu celelalte, supuse la eforturi de compresiune, încovoiere sau răsucire, ca de exemplu, barele şi grinzile drepte sau curbe, plăcile plane subţiri solicitate în planul lor median, ca şi invelitorile subţiri, îşi pierd stabilitatea echilibrului elastic la anumite valori ale sarcinilor exterioare, numite *sarcini critice*, respectiv la anumite valori ale eforturilor unitare numite *rezistenţe critice*. Pierderea stabilităţii este însoţită de apariţia de deformaţii mari, care pot avea ca urmare distrugerea elementului şi prăbuşirea construcţiei.

Un sistem elastic, ca şi un corp rigid, se poate găsi în *echilibru elastic stabil*, care se recunoaşte prin aceea că sistemul revine în poziţia sa iniţială dacă este puţin deplasat de o cauză oarecare în afara acestei poziţii. Dacă sistemul nu mai revine în poziţia iniţială, după îndepărtarea cauzei care l-a deplasat, el se găseşte în *echilibru labil*. Dacă sistemul poate avea, în anumite limite mai multe poziţii de echilibru faţă de cea iniţială el este în *echilibru indiferent*.

Ca şi în cazul studiului stabilităţii corpurilor rigide, pentru poziţia de echilibru stabil, energia potenţială a sistemului este minimă, pentru poziţia de echilibru stabil ea este maximă, în timp ce pentru echilibru indiferent, energia potenţială rămîne constantă pentru deplasări mici în jurul acestei poziţii de echilibru.

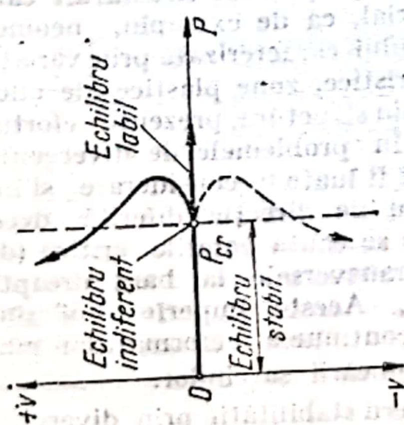
Din punct de vedere al modului în care se produce pierderea stabilităţii, caracterizat prin forma curbei deplasare (săgeată)—sarcină, $v = f(P)$, şi pe această bază a ipotezelor avute în vedere la stabilirea sarcinii critice de pierdere a stabilităţii, se disting:

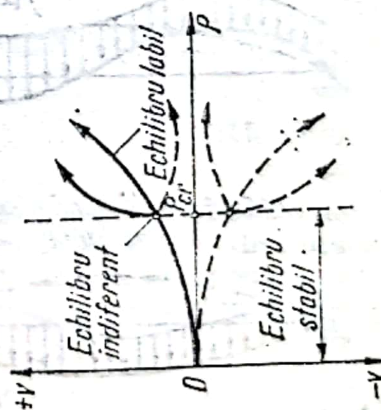
1) *Pierderea stabilităţii prin bifurcarea echilibrului*, în care, în diagrama $v = f(P)$, la atingerea sarcinii critice P_{cr} poate să apară o discontinuitate bruscă a pantei curbei $v = f(P)$. În acest caz, curba prezintă două ramuri, din care una dreaptă şi alta caracterizată printr-o creştere bruscă a deformaţiilor (tabelul III.20, col. 1, pct. a, b, c), corespunde pierderii stabilităţii.

Tabelul III.20

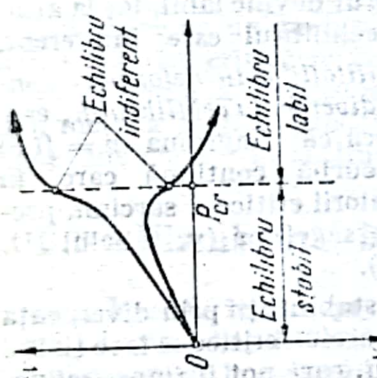
Moduri de pierdere a stabilității echilibrului elastic

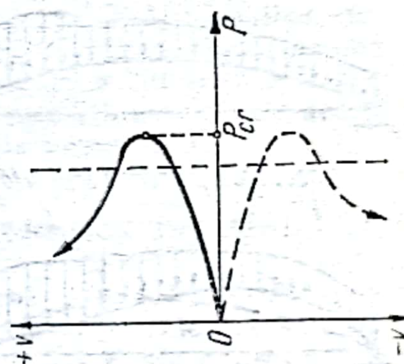
1) Pierderea stabilității prin bifurcarea echilibrului	2) Pierderea stabilității prin divergența echilibrului	3) Pierderea stabilității prin traversare
a) Bare din materiale ce ascultă de legea lui Hooke	a) Bare drepte reale din oțel moale cu imperfecțiuni	f) În tot domeniul pentru diagrama $v = f(P)$
+v, 0, −v, P_{cr}, P, Echilibru indiferent, Echilibru stabil, Echilibru labil	Curba reală la materiale cu imperfecțiuni, +v, −v, P'_{cr}, P_{cr}, Curba teoretică (a), Echilibru stabil, Echilibru labil	v, f, d, c, b, v_a, a, 0, P_{cr}, P
b) Bare teoretice fără imperfecțiuni din oțel moale, comprimate centric	d) Bare din materiale ideal elastice ce ascultă de legea lui Hooke, calculate conform teoriei de ordinul III	g) Într-un anumit domeniu al diagramei $v = f(P)$



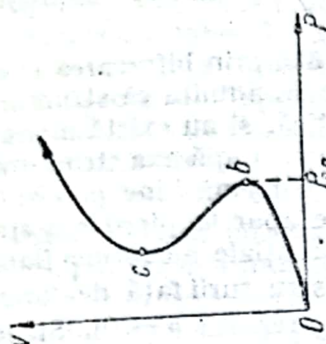


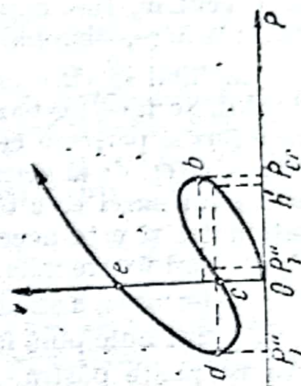
c) Bare fără imperfecţiuni comprimate excentric





e) Bare comprimate excentric din oţel moale calculate conform metodei capacităţii portante





h) Într-un punct al diagramei $v = f(P)$

Pierderea bruscă a echilibrului prin bifurcare poartă denumirea generică de *flambaj*. Exemple de pierdere a stabilității prin bifurcare sînt : flambajul barelor drepte, comprimate centric, flambajul arcelor, flambajul lateral la încovoiere al grinzilor, flambajul prin răsucire, flambajul plăcilor plane etc.

Calculul sarcinii critice de flambaj, în cazul pierderii stabilității prin bifurcarea echilibrului, se face pe baza unor ipoteze teoretice ideale, și anume se admite că structura are o formă perfectă ce poate fi exprimată printr-o lege matematică, și nu există nici un fel de abateri de la această formă, sarcinile acționează perfect centric după axa structurii, materialul barei este omogen și izotrop, curba caracteristică are o formă bine precizată matematic și este aceeași în toată structura, iar deformațiile ce apar la pierderea stabilității sînt foarte mici, ceea ce permite *liniarizarea* ecuațiilor diferențiale ale formei flambate (deformate) a structurii. Pe baza acestor ipoteze, deplasările structurii față de forma inițială sînt nule pînă la atingerea sarcinii critice (pentru $P < P_{cr}$ rezultă $v = 0$). Structura își poate păstra, măcar teoretic, forma inițială și după depășirea sarcinii critice, dacă nici o cauză exterioară nu o scoate din această poziție. Dacă însă ea este puțin deplasată în afară poziției de echilibru, structura rămîne deformată apărînd săgeți remanente (pentru $P > P_{cr}$ este posibil atît $v = 0$, cît și $v \neq 0$), deci pentru sarcini ce depășesc valorile critice echilibrul devine labil, iar la atingerea sarcinii critice echilibrul este indiferent.

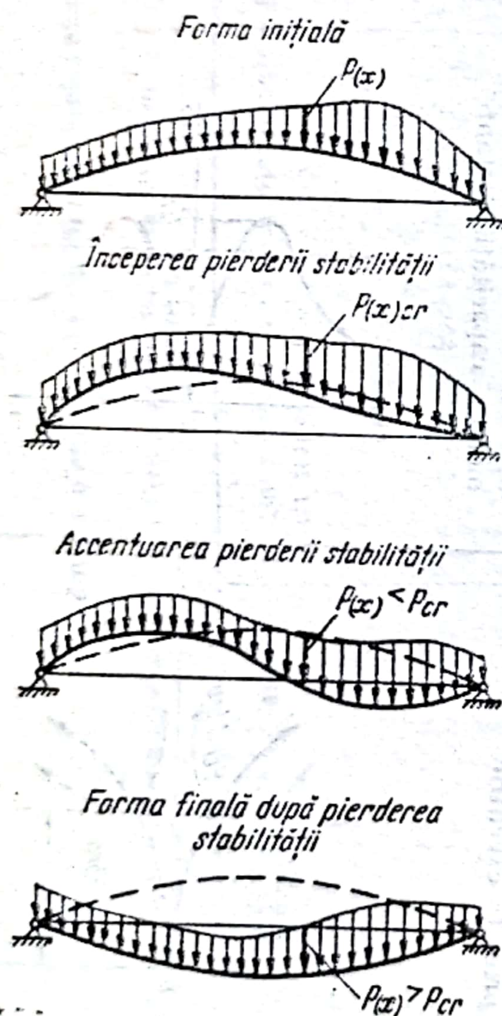


Fig. III. 104

2) *Pierderea stabilității prin deformare continuă*, respectiv prin *divergența echilibrului*, este caracterizată prin aceea că diagrama $v = f(P)$ este de la început o curbă continuă care, în apropierea atingerii valorii critice a sarcinii, prezintă creșteri mari ale săgeților (v. tabelul III. 20, col. 2 pct. *d* și *e*).

În cazul pierderii stabilității prin divergența echilibrului, calculul sarcinii critice se face ținînd seama de *imperfecțiuni*, care pot fi *imperfecțiuni geometrice*, ca de exemplu abateri de la forma teoretică a axei, aplicarea cu anumite excentricități a sarcinilor, abateri geometrice în forma secțiunilor transversale sau existența unor slăbiri locale etc., și *imperfecțiuni structurale* care se referă la material, ca de exemplu, neomogenitatea materialului caracterizată prin variații ale curbei caracteristice, zone plastice ale unor secțiuni sau părți din structură, prezența eforturilor reziduale etc. În problemele de divergență ale echilibrului pot fi luate în considerare și influența unor sarcini de direcție diferită decît acelea pentru care se caută valorile critice (de exemplu, sarcini transversale la bara dreaptă supusă la flambaj). Aceste imperfecțiuni sînt cauza dezvoltării continue a deformațiilor încă de la începutul aplicării sarcinilor.

În cazul pierderii stabilității prin divergența echilibrului, sarcinile critice se determină

în considerare forma deformată a structurii, folosind calculul de ordinul II sau III.

3) *Pierderea stabilității prin traversare* la care diagrama $v = f(P)$ poate avea una din formele din tabelul III.20, pct. *f*, g, h, deformațiile crescînd continuu de la început, pînă la o valoare a sarcinii $P = P_{cr}$ (sau $p = p_{cr}$) la care structura își pierde brusc stabilitatea, prezentînd apoi o nouă formă stabilă de echilibru corespunzînd unor deformații foarte mari față de poziția inițială. Acest gen de pierdere a stabilității apare la sisteme cu împingeri : arce cu săgeți foarte mici (fig. III. 104), arce pleoștite subțiri, învelitori subțiri cu curbură foarte mică etc.

Problemele de pierdere a stabilității prin traversare, din cauza deplasărilor mari ce apar, se pot rezolva numai operînd cu deplasări finite, ceea ce conduce la calcule foarte laborioase, din care cauză, în general, pentru stabilirea sarcinilor critice, se folosesc formule stabilite pe cale experimentală, valabile numai pentru formele și sarcinile avute în vedere la experimentare

6.2. Metode generale pentru stabilirea sarcinilor critice de pierdere a stabilității

Ținînd seama de modurile arătate mai înainte de pierdere a stabilității elastice, stabilirea sarcinilor critice se poate face prin mai multe metode : metoda statică, metoda energetică, metoda aproximațiilor succesive, metoda variațională a lui Ritz — Timoșenko, metoda grafică, precum și prin metode numerice. Cele mai utilizate dintre aceste metode sînt expuse în secțiunea VIII. cap. 3 și 4 din prezenta lucrare.

6.3. Flambajul barei drepte supusă la compresiune simplă [1]

6.3.1. Metode bazate pe bifurcarea echilibrului. În cadrul acestora se disting:

6.3.1.1. Flambajul în domeniul elastic. Prima formulă pentru calculul sarcinii critice de flambaj la o bară dreaptă a fost stabilită de Euler (1757) și are expresia

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2}. \quad \text{(III.277a)}$$

Aceasta a fost stabilită prin metoda statică, integrînd ecuația simplificată a fibrei medii deformate

$$v''(x) + \alpha^2 v(x) = 0 \quad \text{(III.277 a)}$$

în care: $\alpha = \sqrt{P/EI}$; E este modulul de elasticitate al materialului; I — momentul de inerție minim al secțiunii barei; l_f — lungimea de flambaj a barei, respectiv distanța dintre două puncte de inflexiune consecutive a fibrei medii deformate a barei presupusă prelungită la infinit. Lungimile de flambaj funcție de condițiile de rezemare și încărcare sînt date în secțiunea VIII.

[1] Pentru flambajul barelor supuse la compresiune excentrică, flambajul barelor cu sarcini transversale, flambajul arcelor, flambajul prin încovoiere al grinzilor și flambajul cadrelor, vezi secțiunea VIII.

Rezistența critică de flambaj are expresia

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \text{(III.278 a)}$$

în care $\lambda = \frac{l_f}{i}$ este *coeficientul de subțirime* sau de *zveltețe* al barei; i este raza minimă de girație.

În formula lui Euler săgeata v rămîne nedeterminată. Pentru calculul săgeții trebuie plecat de la formula exactă a curburii $1/\rho = v''/(1 + v'^2)^{3/2} = -M/EI$, după integrare obținîndu-se pentru săgeata maximă expresia

$$v_{max} = \frac{l\sqrt{8}}{\pi}\sqrt{\frac{P}{P_E} - 1}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{P}{P_E} - 1\right)\right] \qquad \text{(III.278 b)}$$

în care $P_E = \pi^2 EI/l_f^2$ este *sarcina critică euleriană*. Dacă se notează $P = P_E + \Delta P$ forța ce acționează bara, în care ΔP este valoarea cu care se depășește sarcina critică euleriană, se poate obține o valoare apropiată a lui v_{max}

$$v_{max} \approx \frac{4 l_f}{\pi} \frac{\sqrt{\Delta/2}}{1 + \Delta} = 0,9\, l_f \sqrt{\Delta} \qquad \text{(III.278 c)}$$

în care $\Delta = \Delta P_E/P$.
Formula (III 278c) permite să se calculeze ușor săgeata maximă pentru anumite depășiri procentuale ale sarcinii critice de flambaj. De exemplu, pentru o depășire de 1% rezultă $v_{max} \approx 0,1\, l_f$ iar pentru o depășire de 5% rezultă o săgeată $v_{max} = 0,20\, l_f$. Săgeți așa de mari pentru depășiri foarte mici ale sarcinii critice fac ca eforturile unitare la marginile secțiunilor, din zona de mijloc a lungimii barelor zvelte, să depășească cu mult limita de curgere a materialului și chiar rezistența lui de rupere, datorită momentului încovoietor suplimentar $M = Pv_{max}$ produs de săgeata v_{max}. Rezultă că depășiri foarte mici ale sarcinii critice de flambaj pot produce ruperea bruscă a barelor, deci, după atingerea sarcinii critice de flambaj barele zvelte ($\lambda > \lambda_p$) nu mai au practic nici o rezervă de rezistență.

6.3.1.2. **Flambajul în domeniul plastic.** Formula lui Euler este valabilă numai în domeniul de proporționalitate a materialului ($\sigma_{cr} < \sigma_p$) respectiv pînă la $\lambda = \lambda_p$. De aceea, Engesser a căutat să extindă formula lui Euler și în domeniul elasto-plastic (pentru $\sigma_{cr} > \sigma_p$) înlocuind în fiecare punct al curbei caracteristice modulul de elasticitate E cu modulul tangent $E_t = \text{tg}\alpha = d\sigma/d\varepsilon$, respectiv cu valoarea tangentei la curba caracteristică în punctul admis pentru σ_{cr} (fig. III.105, *a*), propunînd (în anul 1889) formula mai generală, cunoscută sub numele de *formula Engesser* 1

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{l_f^2} \quad \text{sau} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \qquad \text{(III.279)}$$

valabilă și în domeniul elastic pentru $E_t = E$.

În anul 1895, în urma unor critici aduse formulelor (III.279), Engesser, ţinînd seama că în momentul producerii flambajului, bara încovoindu-se, o parte a secţiunii se supraîncarcă, pentru care $E_1 = E_t$, iar alta se descarcă (fig. III.105, *b*) pentru care rezultă însă $E_2 = E$, propune o nouă formulă îmbunătăţită, denumită *formula Engesser 2*, reactualizată şi confirmată în anul 1909 prin încercările lui Kármann, şi de aceea cunoscută şi sub denumirea de *formula Kármann-Engesser* şi care are expresia

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 T I}{l_f^2} \text{ respectiv } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2} \qquad \text{(III.280)}$$

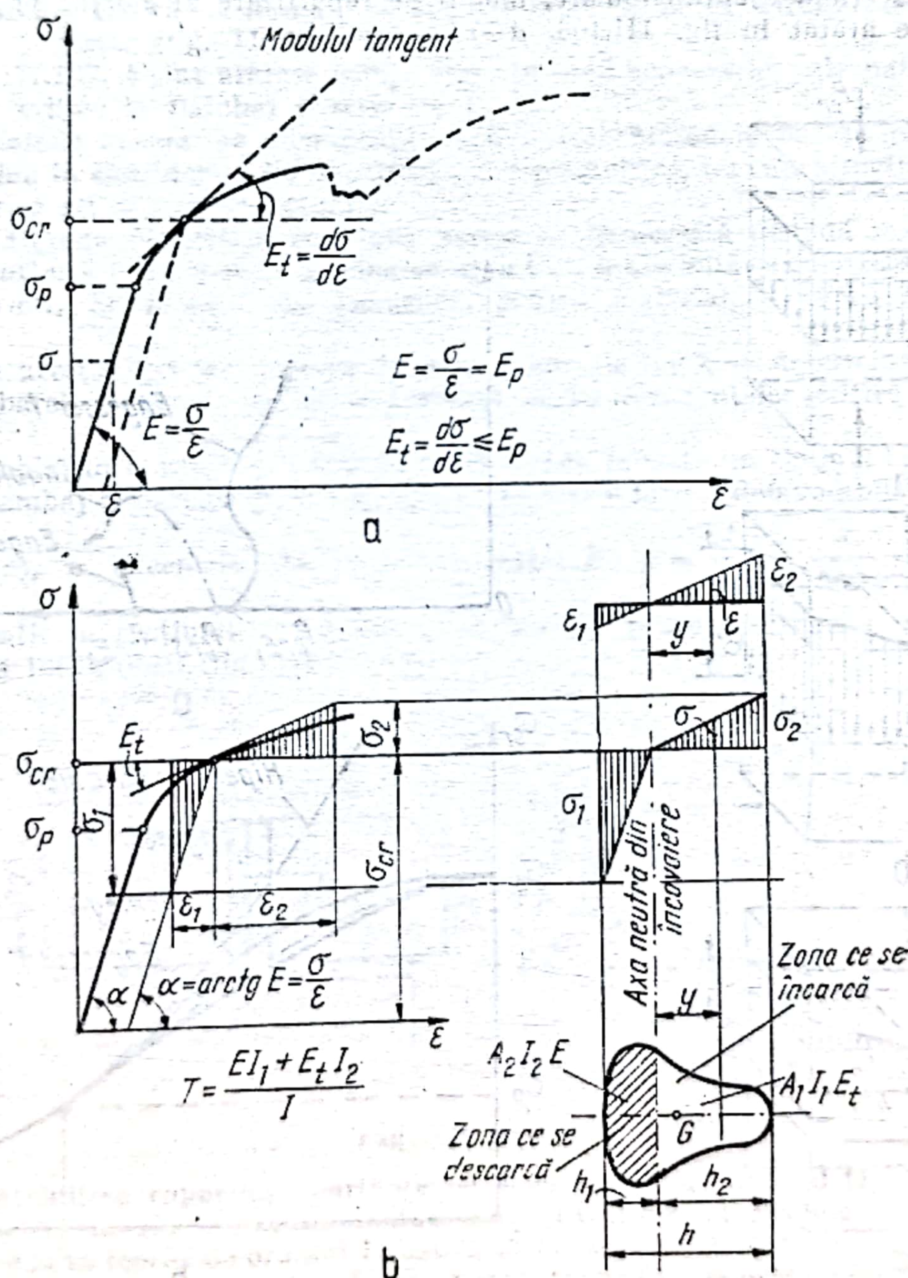


Fig. III.105

în care T este *modulul redus*, sau *modulul transformat*, care depinde atît de E și E_t, cît și de forma secțiunii, și are expresia generală

$$T = \frac{EI_1 + E_t I_2}{I} \qquad \text{(III.281)}$$

în care I_1 este momentul de inerție al zonei care are tendința de întindere, respectiv se descarcă, și I_2 al zonei în care eforturile unitare de compresiune cresc prin încovoiere, ambele luate față de așa-numita „*axă neutră*", iar I momentul de inerție al întregii secțiuni față de axa centrului de greutate (fig. III. 105, *b*).

Pentru secțiuni dreptunghiulare, modul de repartizare al eforturilor unitare pe o secțiune este arătat în fig. III.106, *a—c*.

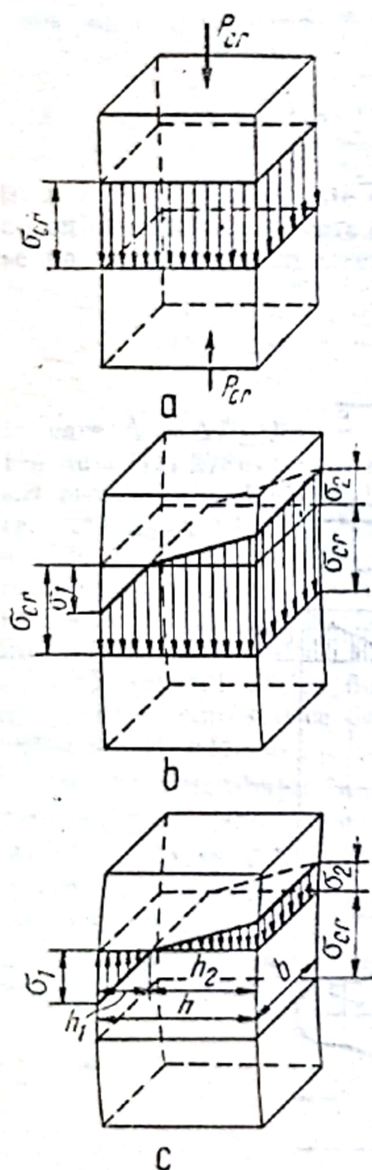


Fig. III.106

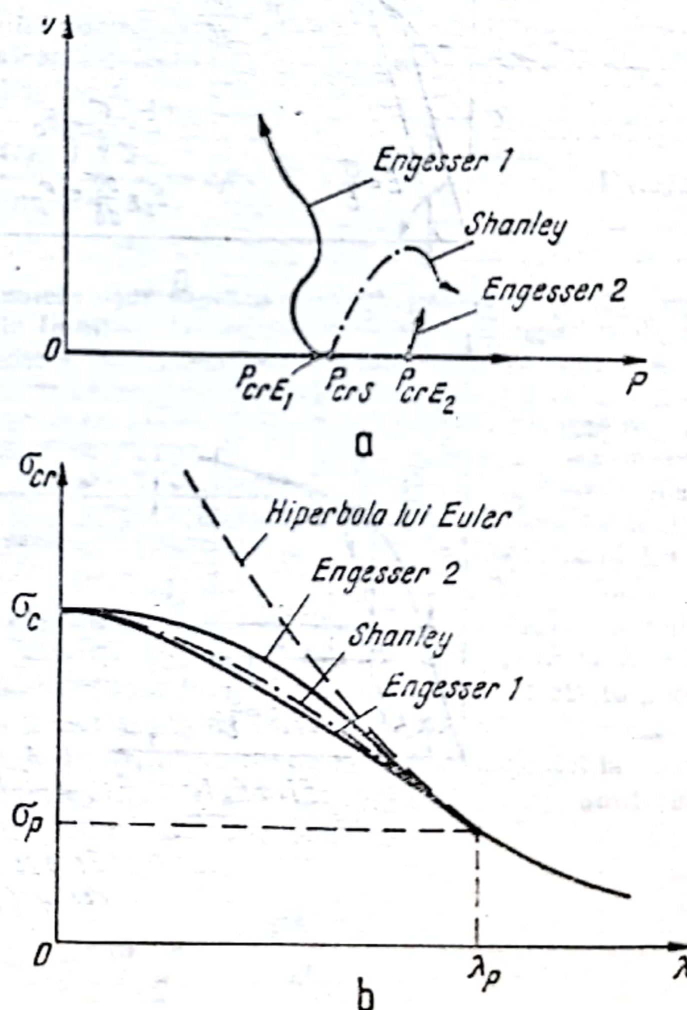


Fig. III.107

Curba rezistenţelor critice de flambaj funcţie de λ, dincolo de limita de proporţionalitate pentru un material dat, se obţine luînd pentru fiecare valoare a lui $\sigma_{cr} > \sigma_p$ pe $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ din curba caracteristică reală a materialului, deducîndu-se apoi λ corespunzător. Sarcina critică de flambaj, conform formulei Engesser 2 (III.280), este mai mare ca aceea corespunzătoare formulei lui Engesser 1 (III.279).

Shanley, în anul 1947, dovedeşte că şi în stadiul în care bara începe să se încovoaie prin flambaj, la începutul flambajului, este posibilă o situaţie de echilibru stabil, dacă în acelaşi timp are loc, aşa cum se întîmplă practic, şi o mică creştere a sarcinii P. În acest caz, în zona secţiunii întinsă prin încovoiere nu apare practic nici o descărcare, din care cauză E_2 este acelaşi pe toată secţiunea, şi are valoarea $E_2 = E_t = d\sigma/d\varepsilon$. În acest caz sarcina critică de flambaj se apropie mult de aceea corespunzătoare primei teorii a lui Engesser (fig. III.107,*a*)

În fig. III.107, *b* sînt arătate comparativ, în mod schematic, cele patru curbe ale rezistenţelor critice la flambaj funcţie de λ.

6.3.2. Metode bazate pe divergenţa echilibrului. Metodele bazate pe divergenţa echilibrului iau în considerare fie imperfecţiunile geometrice, fie cele structurale, fie atît cele geometrice cît şi cele structurale.

6.3.2.1. Metoda capacităţii (sarcinii) portante. În această metodă se consideră că bara are o curbură iniţială şi că sarcina se aplică cu o anumită excentricitate, ambele stabilite apriori. Se admite, de asemenea, pentru material, o curbă caracteristică simplificată.

Pe baza acestor ipoteze, pentru diferite valori ale lui λ se determină capacitatea portantă a barei, respectiv σ_{cr} şi se trasează curba rezistenţelor critice de flambaj $\sigma_{cr} = f(\lambda)$.

De exemplu, în normele din R.F.G. (DIN 4114), folosite un timp şi la noi, pentru calculul la flambaj al barelor drepte de oţel se admite o formă defavorabilă de secţiune (fig. III.108, *a*), o excentricitate iniţială a forţei P: $u = \frac{i}{20} + \frac{s}{500}$ (în care i este raza de giraţie a secţiunii, iar s lungimea barei), precum şi curba caracteristică simplificată a lui Prandtl (fig. III.108, *b*)

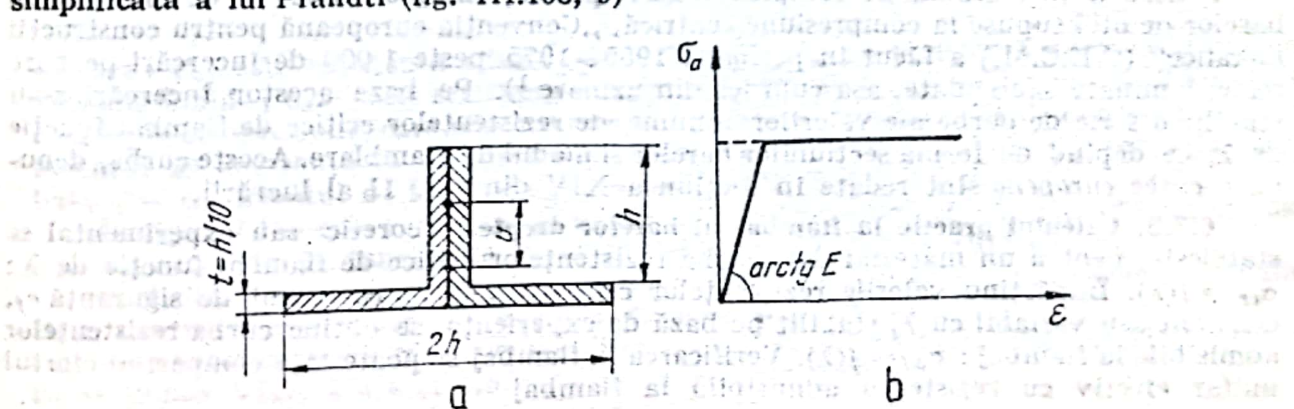


Fig. III.108

6.3.2.2. Stabilirea capacităţii portante pe baza teoriei de ordinul II. Calculul stabilităţii unor structuri (bare drepte solicitate axial şi transversal, sisteme de bare, cadre etc.) se face pe baza teoriei de ordinul II sau a altor metode, tratate în secţiunea VIII.

6.3.2.3. Formule experimentale. Încercările făcute pe bare reale din oţel au confirmat exactitatea formulei Euler pentru domeniul de proporţionalitate, cu o eroare de 1%,

($\lambda > \lambda_p$). În schimb, pentru flambajul în domeniul plastic, unde imperfecțiunile au o influență mult mai mare, nu s-a găsit o formulă teoretică simplă, mulțumitoare. De aceea, s-a căutat, și se caută, să se stabilească *formule experimentale* bazate pe încercări făcute pe piese reale, care includ în mod automat toate imperfecțiunile posibile ale acestora.

În unele țări din Europa s-a folosit, și se mai folosește încă, formulele propuse încă din anul 1903 de Tetmajer, stabilite de el pe baza a cîtorva zeci de încercări făcute la Zürich între 1887—1901 pe bare reale, din diferite materiale. Tetmajer a propus pentru domeniul plastic o formulă de forma

$$\sigma_{cr} = a + b\lambda + c\lambda^2 \qquad \text{(III.282 } a\text{)}$$

în care a, b, c sînt coeficienți de material stabiliți experimental.

În domeniul elastic ($\lambda > \lambda_p$) Tetmajer recomandă formula Euler.

Pentru oțelul moale avînd $\sigma_p = 1\,900$ (și $\sigma_r = 3\,700$) daN/cm² formulele propuse de Tetmajer sînt

— în domeniul plastic: $\lambda < \lambda_p = 105$

$$\sigma_{cr} = 3\,100 - 11{,}4\lambda \ \text{(daN/cm}^2\text{)}; \qquad \text{(III 282 } b\text{)}$$

— în domeniul elastic: $\lambda > \lambda_p = 105$

$$\sigma_{cr} = 21\,220\,000/\lambda^2 \ \text{(daN/cm}^2\text{)}. \qquad \text{(III 282 } c\text{)}$$

În S.U.A. se folosește formula parabolică a lui Johnson, care, pentru OL 37 are forma

$$\sigma_{cr} = 2800 - 0{,}0913\lambda^2 \ \text{(daN/cm}^2\text{)} \qquad \text{(III 282 } d\text{)}$$

Pentru a ține seama de complexul de imperfecțiuni geometrice și de material al barelor de oțel supuse la compresiune centrică, „Convenția europeană pentru construcții metalice" (C.E.C.M.) a făcut în perioada 1955—1975 peste 1 000 de încercări pe bare reale, laminate sau sudate, așa cum ies din uzinare [1]). Pe baza acestor încercări s-au stabilit o serie de curbe ale valorilor minime ale rezistențelor critice de flambaj funcție de λ, ce depind de forma secțiunilor barelor și modul de asamblare. Aceste curbe, denumite *curbe europene* sînt redate în secțiunea XIV din vol. II al lucrării.

6.3.3. **Calculul practic la flambaj al barelor drepte.** Teoretic sau experimental se stabilește, pentru un material dat, curba rezistențelor critice de flambaj funcție de λ: $\sigma_{cr} = f(\lambda)$. Împărțind valorile rezistențelor critice σ_{cr} la un coeficient de siguranță c_f, constant sau variabil cu λ, stabilit pe bază de experiență, se obține curba rezistențelor admisibile la flambaj: $\sigma_{af} = f(\lambda)$. Verificarea la flambaj se poate face comparînd efortul unitar efectiv cu rezistența admisibilă la flambaj

$$\sigma_{ef} \leqslant \sigma_{af}. \qquad \text{(III.283)}$$

În normele noastre de calculul structurilor, ca metodă de calcul la flambaj se folosește, pentru toate materialele, metoda coeficientului de flambaj φ care constă în a

---

[1]) Revista "Construction Metalique", nr. 3, 1970.

împărţi sarcina ce acţionează bara la aria brută a secţiunii înmulţită cu un coeficient φ care are expresia

$$\varphi = \frac{\sigma_{af}}{\sigma_{ac}} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{lim}} \frac{c}{c_f} \leqslant 1 \qquad \text{(III.284a)}$$

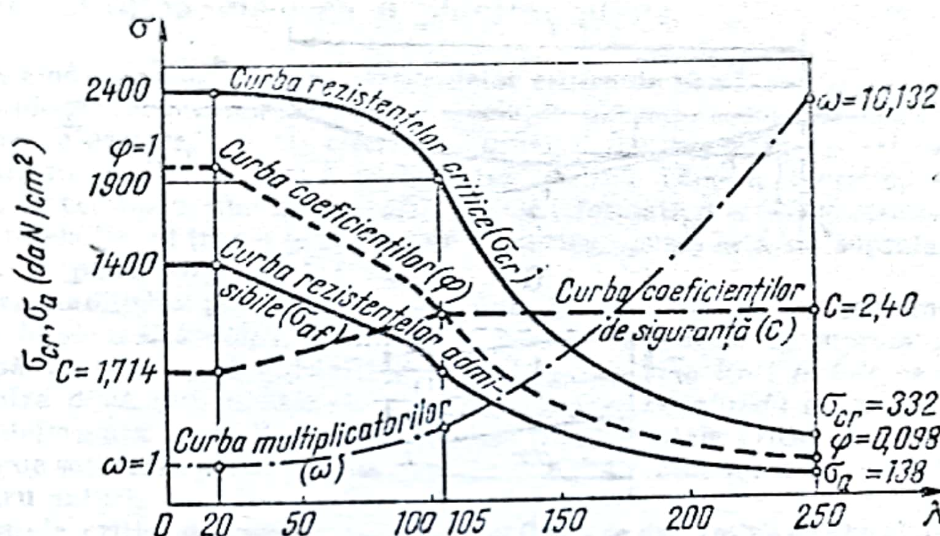


Fig. III.109

şi a compara rezultatul astfel obţinut cu rezistenţa admisibilă la compresiune simplă a materialului

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{\varphi A_b} \leqslant \sigma_{ac} \qquad \text{(III.284b)}$$

în care: σ_{af} este rezistenţa admisibilă la flambaj; σ_{ac}— rezistenţa admisibilă la compresiune simplă; σ_{cr}— este rezistenţa critică la flambaj; σ_{lim}— rezistenţa limită a materialelor la compresiune, care poate fi rezistenţa de rupere sau limita de curgere; c — coeficientul de siguranţă la compresiune simplă; c_f — coeficientul de siguranţă la flambaj; φ — coeficientul de flambaj; A_b — secţiunea brută a barei;

În fig. III.109 este reprezentat, pentru bare drepte din OL 37, modul cum variază σ_{cr}, c_f, σ_{af} şi φ în funcţie de λ, în conformitate cu STAS 1911-65.

Coeficienţii de flambaj φ pentru bare din alte materiale folosite în construcţii sînt daţi, pentru fiecare material în parte, în vol. II a Manualului.

Flambajul barelor drepte pentru diferite condiţii de rezemare şi solicitări este tratat în secţiunea VIII, § 4.4 şi 4.5.

6.4. Influenţa forţei tăietoare asupra sarcinii critice de flambaj

În cazul barelor supuse la compresiune, prin încovoierea lor laterală în timpul flambajului, apar şi forţe tăietoare (fig. III.110, a), deplasarea unei secţiuni fiind produsă atît de momentele încovoietoare cît şi de forţele tăietoare, respectiv:

$$v = v_M + v_T.$$

Deplasarea produsă de forțele tăietoare rezultă din lunecarea relativă a două secțiuni vecine, (fig. III.110, *b*) care are expresia

$$\gamma = \frac{dv}{dx} = \frac{\tau_m}{G} = \frac{kT}{GA}. \tag{III.285}$$

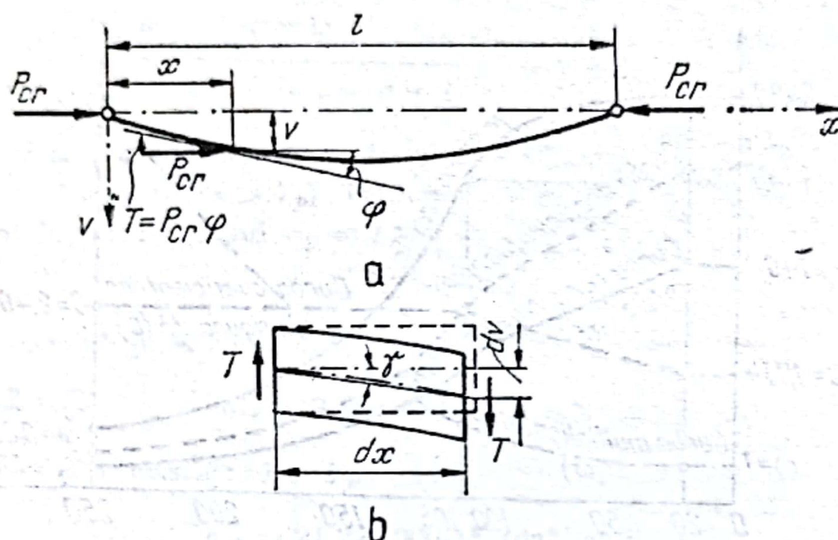


Fig. III.110

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate rezultă

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{k}{GA}\frac{dT}{dx}. \tag{III.286}$$

Cum, în stare deformată, $M = P_{cr}v$ și $T = P_{cr}\sin\varphi \approx P_{cr}\,\mathrm{tg}\,\varphi = P_{cr}\varphi = P_{cr}\frac{dv}{dx}$, ecuația (III.286) devine

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI\left(1 - \frac{kP_{cr}}{GA}\right)}v = 0 \tag{III.287}$$

și are soluția

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l_f^2}\frac{k}{GA}} = \frac{P_E}{1 + \frac{k}{GA}P_E}, \tag{III.288}$$

în care $k/GA = \gamma_1$ reprezintă lunecarea specifică pentru o forță tăietoare egală cu unitatea, deci

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \gamma_1 P_E}, \tag{III.289}$$

iar $P_E = \pi^2 EI/l_f^2$ este *forța critică euleriană*. Influența forței tăietoare intervine de obicei numai la barele compuse solidarizate cu pene, plăcuțe sau zăbreluțe, deoarece la bare cu secțiunea plină: $1 + \gamma_1 P_E \approx 1$ și deci $P_{cr} \approx P_E$. Pentru calculul barelor de lemn compuse, vezi secțiunea XI, din metal secțiunea XIV și din beton armat secțiunea XV.

6.5. Stabilitatea elastică a plăcilor plane

6.5.1. Metode pentru stabilirea rezistențelor critice de voalare. Plăcile plane subțiri solicitate în planul lor median. respectiv șaibele, la anumite valori ale sarcinilor, numite *sarcini critice de voalare*, sau ale *eforturilor unitare*, numite *rezistențe critice de voalare*, trec în echilibru labil, își pierd stabilitatea putînd căpăta, teoretic, o infinitate de suprafețe de echilibru, numite *suprafețe voalate*, formate dintr o succesiune de suprafețe curbe, unele ieșind într-o parte, altele în partea opusă, față de suprafața mediană inițial plană a plăcii (fig. III.111, *a—d*).

Pierderea stabilității plăcilor plane solicitate în planul lor median se numește *voalare* sau *pierdere locală a stabilității*. Liniile după care se intersectează suprafața deformată a plăcii după voalare cu planul inițial nevoalat se numesc *linii nodale de voalare*, iar distanța dintre două linii nodale de voalare succesive, *semiundă de voalare*.

Forma deformată a plăcilor ca și sarcinile și rezistențele critice de voalare depind de condițiile de solicitare pe contur, de raportul lungimii laturilor și de modul de fixare pe cele patru laturi.

Rezistențele critice de voalare $\sigma_{x\,cr}$, $\sigma_{y\,cr}$ și $\tau_{xy\,cr}$ se determină de obicei prin metoda statică pentru cazurile simple de solicitare și prin metoda energetică, pentru cazurile mai complexe.

1) *În metoda statică* se consideră placa voalată sub acțiunea componentelor, normale pe planul plăcii, a eforturilor secționale ce lucrează pe conturul ei: $N_x = t\sigma_x$, $N_y = t\sigma_y$ și $N_{xy} = t\,\tau_{xy} = t\tau_{yx}$ (fig. III.112) scriindu-se ecuația de proiecție pe normala la placă, ajungîndu-se prin eliminarea succesivă a necunoscutelor, la *ecuația cu derivate parțiale a stabilității plăcilor plane*:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

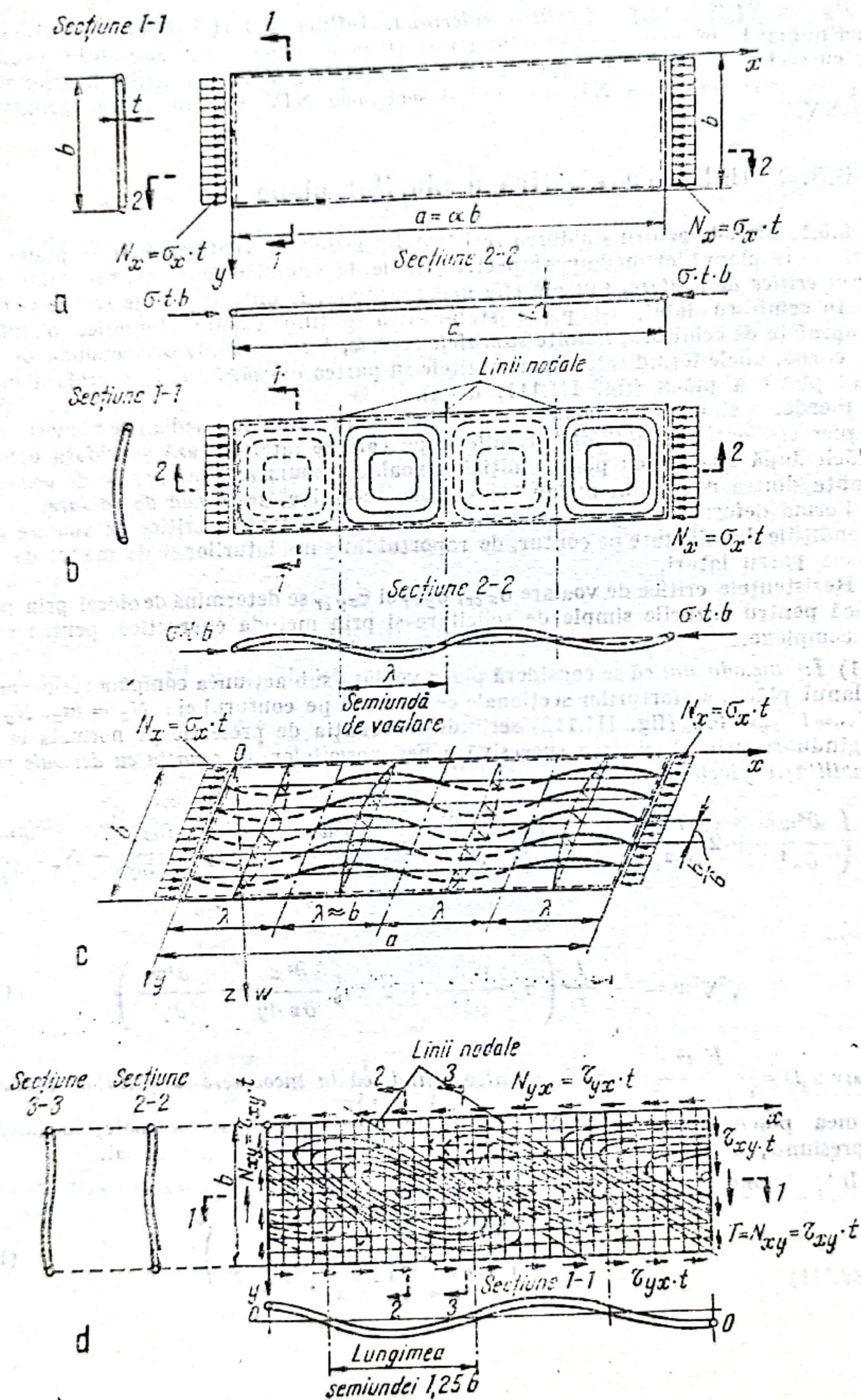
sau

$$\nabla^2\nabla^2 w = -\frac{t}{D}\left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\,\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(III.290)}$$

în care: $D = \dfrac{E\,t^3}{12(1-\mu^2)}$ este *rigiditatea cilindrică la încovoiere a plăcilor plane*; t — grosimea plăcii; $N_x = \sigma_x t$, $N_y = \sigma_y t$ — eforturile secționale normale, considerate de compresiune; $N_{xy} = N_{yx} = \tau_{xy} t = \tau_{yx} t$ efortul secțional tangențial.

Introducînd notația:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{1\cdot t\cdot b^2} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2 \qquad \text{(III.291)}$$



Secțiune 1-1
1
x
t
b
b
2
2
a = αb
$N_x = \sigma_x \cdot t$
$N_x = \sigma_x \cdot t$
1
y
Secțiune 2-2
a
$\sigma \cdot t \cdot b$
$\sigma \cdot t \cdot b$
a
Linii nodale
Secțiune 1-1
1
2
2
$N_x = \sigma_x \cdot t$
1
b
Secțiune 2-2
$\sigma \cdot t \cdot b$
$\sigma \cdot t \cdot b$
λ
Semiundă de voalare
$N_x = \sigma_x \cdot t$
$N_x = \sigma_x \cdot t$
0
x
b
λ
λ≈b
λ
λ
a
c
y
z w
Linii nodale
Secțiune 3-3
Secțiune 2-2
2
3
$N_{yx} = \tau_{yx} \cdot t$
$N_{xy} = \tau_{xy} \cdot t$
x
$\tau_{xy} \cdot t$
b
1
1
$T = N_{xy} = \tau_{xy} \cdot t$
y
Secțiune 1-1
$\tau_{yx} \cdot t$
2
3
0
0
d
Lungimea semiundei 1,25 b

Fig. III.111

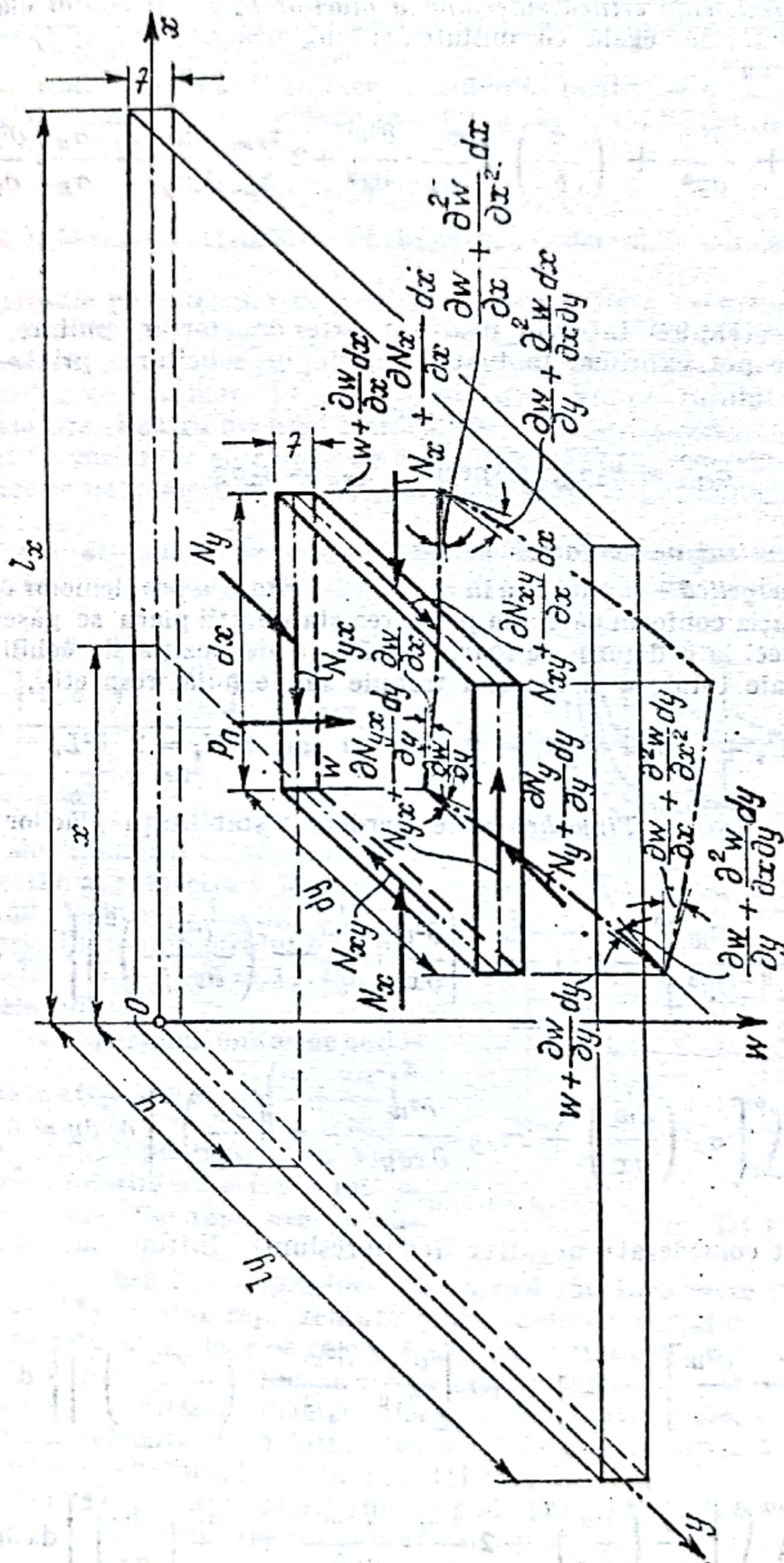


Fig. III.112

unde σ_E reprezintă *rezistența critică euleriană a plăcilor plane* în stadiu elastic, pentru o fîșie de placă de lățime egală cu unitatea și lungimea de flambaj $l_f = b$; ecuația (III.290) capătă forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_E}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\tau_{xy}}{\sigma_E}\,\frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y} + \frac{\sigma_y}{\sigma_E}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{III.292}$$

Deoarece în relația (III.292) intervin doar rapoarte de eforturi unitare, rezistențele critice de voalare se pot exprima, în toate cazurile de solicitare, printr-o relație de forma

$$\sigma_{cr\,v} = k_\sigma \sigma_E, \quad \text{respectiv} \quad \tau_{cr\,v} = k_\tau \sigma_E \tag{III.293}$$

în care k este *parametrul de voalare.*

2) *În metoda energetică* — aplicabilă în marea majoritate a problemelor de voalare — pornind de la observația conform căreia la pierderea stabilității placa se găsește în echilibru indiferent, și deci la o deformare foarte mică față de poziția de echilibru, creșterea energiei potențiale totale a sistemului trebuie să fie nulă, respectiv,

$$\delta^2\pi = \delta^2(U_i + U_e) = \delta^2(U_i - 2\,L_e) = 0 \quad \text{sau} \quad \delta^2 U_i = 2\ \ \delta^2 L_e \tag{III.294}$$

se ajunge la *ecuația Bryan — Timoshenko* de pierdere a stabilității plăcilor plane care) are expresia

$$\frac{D}{2}\int_0^a\!\!\int_0^b\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy + \tag{III.295}$$

$$+\frac{t}{2}\int_0^a\!\!\int_0^b\left[\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx dy = 0,$$

în care σ_x și σ_y sînt considerate negative (compresiuni). Introducînd și aici notația (III.291) se obține

$$\int_0^a\!\!\int_0^b\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx dy + \tag{III.296}$$

$$+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\int_0^a\!\!\int_0^b\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_E}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\tau_{xy}}{\sigma_E}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\sigma_y}{\sigma_E}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx dy = 0.$$

Prima integrală reprezintă energia potenţială de încovoiere a plăcii, iar a doua variaţia lucrului mecanic al eforturilor secţionale (exterioare) ce acţionează pe laturile plăcii, prin deformarea acestora în timpul voalării.

Rezolvarea ecuaţiei (III.296) se face considerînd pentru w o expresie care să satisfacă condiţiile de contur şi să reprezinte cît mai bine suprafaţa flambată a plăcii, de obicei o serie dublă de forma

$$w = C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y) + \ldots \qquad (III.297)$$

Pornind şi de la relaţia (III.296) se obţin pentru rezistenţele critice expresii de forma (III.293).

6.5.2. Expresiile parametrilor de voalare k pentru cîteva cazuri curente de solicitări pe contur. Parametrii de voalare k_σ, respectiv k_τ, depind de felul şi legea de variaţie a eforturilor unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy}, pe laturile plăcii, de raportul lungimii laturilor $\alpha = a/b$, de condiţiile de rezemare pe cele patru laturi ale conturului şi de numărul de semiunde de voalare. Pentru aceleaşi condiţii de solicitare şi rezemare se obţine, pentru parametrul de voalare, *o ghirlandă de curbe*, fiecare curbă corespunzînd unui număr întreg de semiunde de voalare $n = 1,2,3,\ldots$ Toate curbele ghirlandelor sînt tangente la o valoare minimă.

6.5.2.1. Placă articulată pe contur supusă la compresiune simplă pe cele patru laturi. Considerînd $\sigma_y = \varkappa\sigma_x$ se obţine pentru parametrul de voalare expresia

$$k_\sigma = \frac{\left[\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + n^2\right]^2}{\frac{m^2}{\alpha^2} + \varkappa n^2} \qquad (III.298)$$

în care m şi n sînt numărul de semiunde de voalare pe direcţia x, respectiv y, iar $\alpha = a/b$ raportul lungimii laturilor. În fig. III.113 sînt redate variaţiile parametrului k_σ funcţie de α, pentru $n = 1$, $m = 1 \ldots 4$, şi cîteva valori ale lui $\varkappa$.

Pentru cazul compresiunii uniforme pe două laturi rezultă $\varkappa = 0$ şi deci $k_\sigma = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha n^2}{m}\right)^2$.

Valorile minime se obţin pentru $n = 1$. Variaţiile lui k_σ pentru diferite valori ale lui m sînt reprezentate de curbe tangente la valoarea minimă $k = 4$

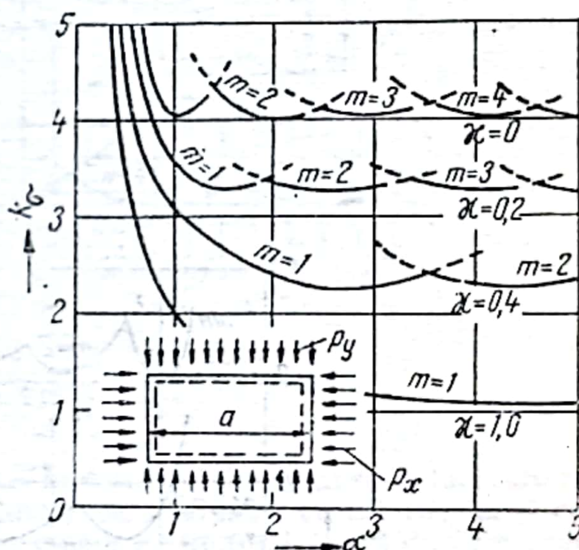
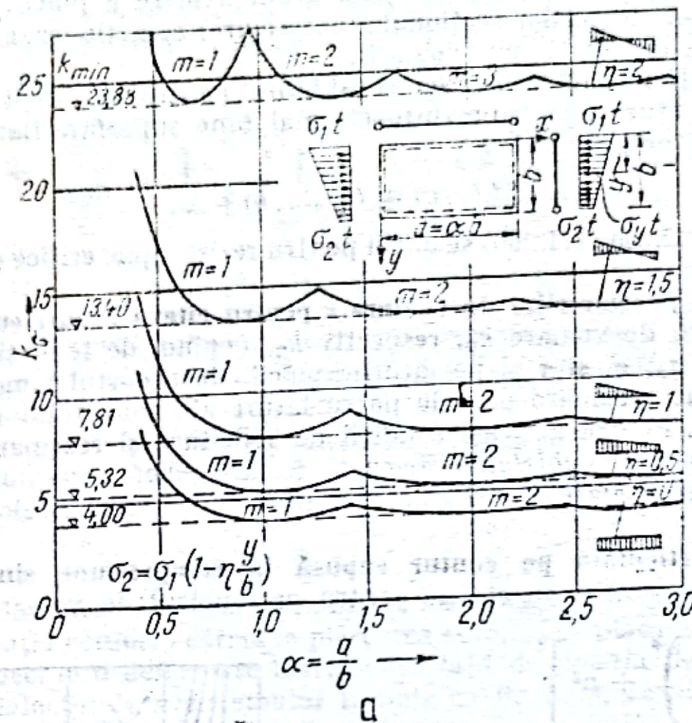


Fig. III.113

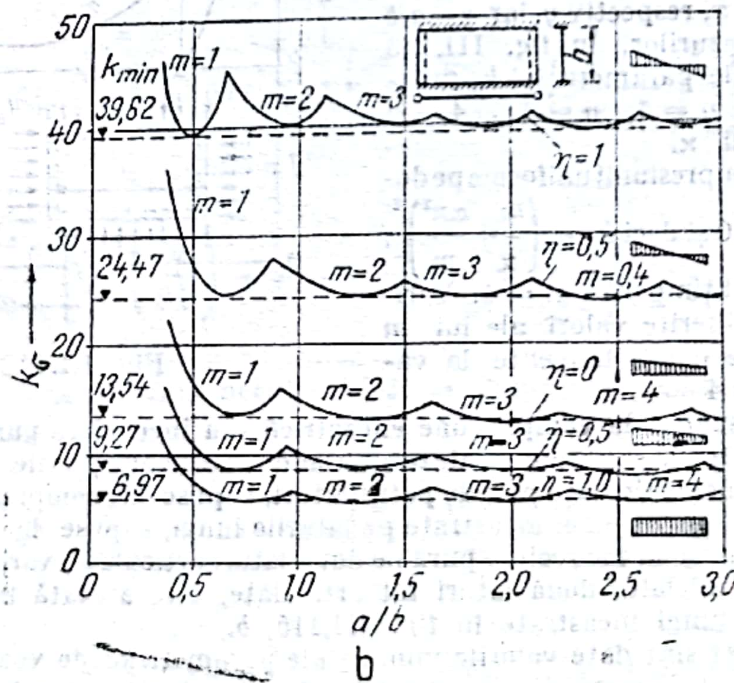
6.5.2.2. Placa supusă la compresiune excentrică sau încovoiere pură pe două laturi opuse. În fig. III.114, *a* sînt reprezentate ghirlandele de variaţie ale parametrului de voalare k_σ pentru plăci articulate pe cele patru laturi, supuse la compresiune excentrică, iar în fig. III.114, *b* pentru plăci încastrate pe laturile lungi, supuse la aceeaşi solicitare.

Pentru plăci supuse la încovoiere pură pe două laturi articulate, variaţia parametrilor de voalare, pentru celelalte două laturi tot articulate, este arătată în fig. III.115, *a*, iar pentru laturile lungi încastrate în fig. III.115, *b*.

În tabelul III.21 sînt date valorile minime ale parametrilor de voalare pentru diferite solicitări pe laturile scurte (*b*) considerate articulate şi diferite moduri de rezemare pe laturile lungi.



k_{min}
25
23,88
m=1
m=2
m=3
η=2
$\sigma_1 t$
x
b
y
$a=\alpha b$
$\sigma_2 t$
$\sigma_y t$
20
15
13,40
η=1,5
10
7,81
η=1
5,32
η=0,5
5
4,00
η=0
$\sigma_2=\sigma_1\left(1-\eta\frac{y}{b}\right)$
k_σ
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
$\alpha=\frac{a}{b}$
a



50
k_{min}
m=1
m=2
m=3
39,62
40
η=1
30
24,47
η=0,5
m=0,4
20
k_σ
13,54
η=0
m=4
9,27
η=0,5
10
6,97
η=1,0
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
a/b
b

Fig. III.114

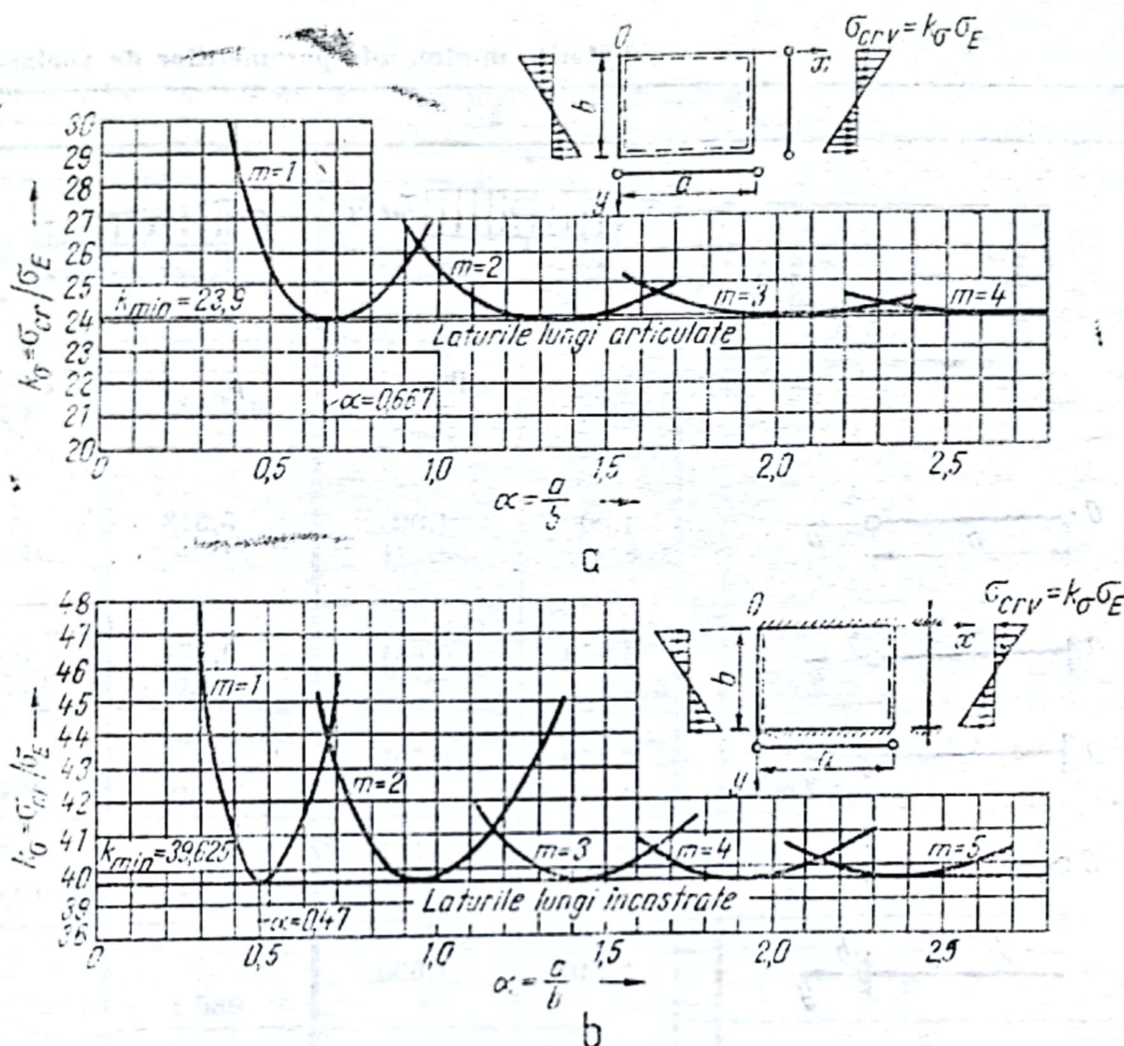


Fig. III.115

6.5.2.3. **Placă supusă la lunecare uniformă.** În cazul plăcilor supuse la lunecare uniformă, suprafețele de voalare sînt limitate de linii nodale formînd cu laturile lungi contururi romboidale (v. fig. III.111, *d*), unghiul dintre laturi fiind sub 45°. Semiundele de voalare sînt de circa 1,25 *b* la plăcile articulate pe laturile lungi și de 0,8 *b* la cele încastrate pe aceste laturi.

Parametrul de voalare k_τ variază după o curbă continuu asimtotă la o valoare minimă, funcție de condițiile de rezemare pe laturile lungi.

În fig. III.116 sînt arătate curbele de variație a parametrului k_τ funcție de α pentru plăci articulate și încastrate pe contur.

Pentru plăci articulate parametrul de voalare poate fi exprimat prin relațiile

$$k_\tau = 5,34 + 4,00/\alpha^2 \text{ (pentru } \alpha \geq 1)$$

(III.299a)

$$k_\tau = 4,00 + 5,34/\alpha^2 \text{ (pentru } \alpha < 1)$$

Valorile minime ale parametrilor de voalare k_{min}

0	1	2		3	
	σ_x, a, b, x, y, t	σ_1, $\sigma_2=\sigma_1$, b		σ_1, $\sigma_2=0{,}5\sigma_1$, b	
		k_{min}	pentru $\alpha \geqslant$	k_{min}	pentru $\alpha \geqslant$
1	0 o———o b → y (b)	4,00	1,00	5,318	0,998
2	0 ⊢———o b → y	6,969	0,661	9,274	0,660
3	0 ⊢———⊣ b → y	5,409	0,795	—	—
4	0 o———⊣ b → y	5,409	0,795	—	—
5	0 ———⊣ b → y, $\mu=0{,}33$	1,246	1,630	—	—
6	0 ⊢——— b → y, $\mu=0{,}33$	1,216	1,630	—	—
7	0 ———o b → y, $\mu=0{,}33$	~0,406	100	—	—
8	0 o——— b → y, $\mu=0{,}33$	~0,406	100	—	—

OBSERVAȚII 1) Raportul lungimii laturilor $\alpha = a/b$;

2) În toate cazurile de solicitare arătate în linia 1, sarcinile acționează numai pe laturile $x = 0$ și $x = a$, considerate articulate, laturile $y = 0$ și $y = b$, nesolicitate pot fi încastrate (⊢), articulate (o —) sau libere (—), așa cum este indicat în coloana 1.

Tabelul III.21

pentru diferite condiții de rezemare și solicitare pe laturi

4		5		6	
σ_1 (−) b $\sigma_2=0$		σ_1 (−) b (+) $\sigma_2=-0{,}5\sigma_1$		σ_1 (−) b (+) $\sigma_2=-\sigma_1$	
k_{min}	pentru $\alpha \geqslant$	k_{min}	pentru $\alpha \geqslant$	k_{min}	pentru $\alpha \geqslant$
7,810	0,983	13,399	0,915	23,877	0,667
13,540	0,653	24,466	0,608	39,522	0,473
11,730	0,763	—	—	39,521	0,473
9,542	0,797	—	—	23,941	0,665
5,796	1,580	—	—	—	—
1,563	1,667	—	—	2,063	1,667
~1,626		—	—	—	—
~0,542		—	—	~0,811	—

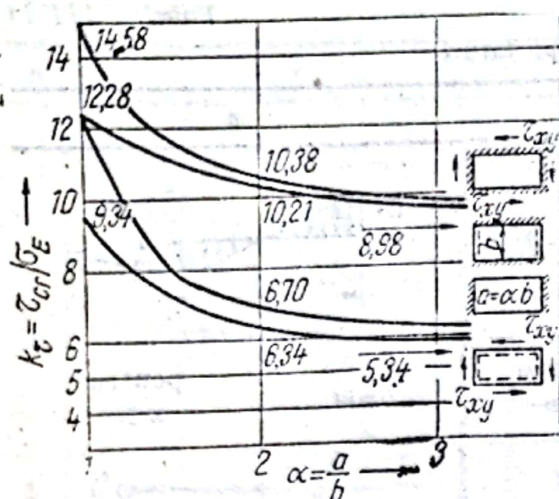


Fig. III.116

iar pentru plăci încastrate pe toate laturile

$$k_\tau = 8{,}98 + 5{,}6/\alpha^2 \quad (\text{pentru} \quad \alpha \geqslant 1) \tag{III.299b}$$

$$k_\tau = 5{,}6 + 8{,}98/\alpha^2 \quad (\text{pentru} \quad \alpha < 1).$$

Expresia rezistenței tangențiale critice de voalare, este (III.293):

$$\tau_{cr\,v} = k_\tau \sigma_E.$$

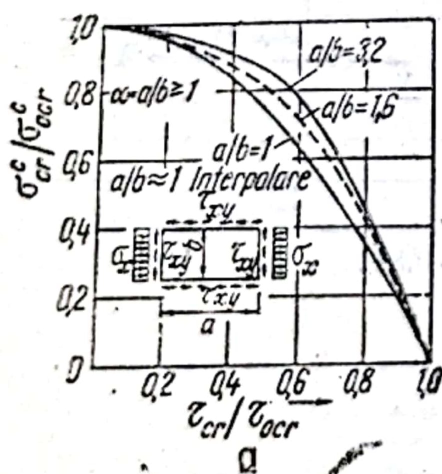
6.5.3. Plăci supuse la solicitări compuse. În cazul plăcilor dreptunghiulare supuse simultan la eforturi unitare normale σ pe două laturi opuse și la lunecare τ pe contur, rezistența critică la care se poate produce voalarea, σ_{cr}, se exprimă în funcție de rezistența tangențială critică τ_{cr} care acționează simultan, folosind ca parametri rezistențele critice de voalare corespunzătoare celor două solicitări simple: σ_{0cr} și τ_{0cr}, considerate că lucrează fiecare separat, printr-o funcție de forma

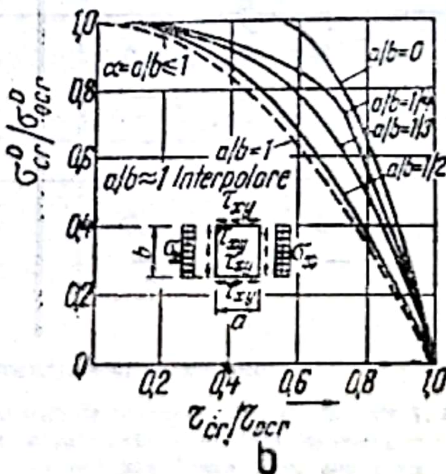
$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{0cr}} = \Phi\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{0cr}}\right) \tag{III.300}$$

în care: σ_{cr} și τ_{cr} sînt perechile de rezistențe critice de voalare pentru starea de eforturi compusă, respectiv perechea de valori σ și τ lucrînd simultan, la care placa voalează, iar σ_{0cr} și τ_{0cr} rezistențele critice de voalare corespunzînd numai unei singure solicitări.

Pentru plăci supuse la compresiune simplă și lunecare, funcția Φ poate fi aproximată printr-un arc de parabolă (fig. III.117, *a* și *b*) avînd expresia

$$\frac{\sigma_{cr}^c}{\sigma_{0cr}^c} = 1 - \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{0cr}}\right)^2. \tag{III.301}$$





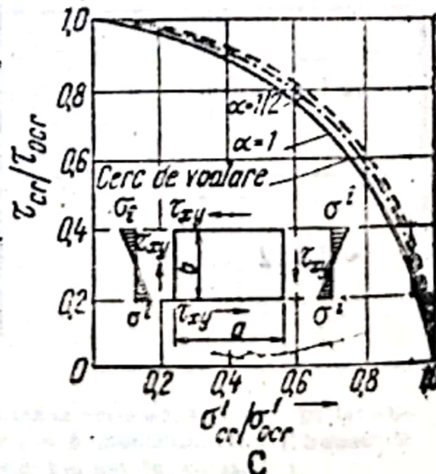


Fig. III.117

Pentru plăci supuse la încovoiere și lunecare funcția Φ poate fi exprimată printr-un arc de cerc (fig. III.117, *c*) avînd expresia

$$\frac{\sigma_{cr}^{I}}{\sigma_{0\,cr}^{I}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{0\,cr}}\right)^2}. \qquad \text{(III.302)}$$

Practic, pentru un anumit caz dat în care pe contur lucrează simultan eforturile unitare efective σ și τ, se presupune că una din cele două rezistențe efective este cea critică rezultînd valoarea critică a celei de a doua. De exemplu, dacă τ_{ef} este considerat τ_{cr}, rezultă σ_{cr} corespunzător care trebuie să fie mai mare ca σ_{ef}.

6.6. Voalarea plăcilor de oțel

Problemele de voalare se pun în general numai la construcțiile metalice, la care se folosesc plăci plane subțiri.

Pentru plăci de oțel, la care $E = 2{,}1 \cdot 10^4$ kN/cm² rezultă

$$\sigma_E = 18\,980\ (l/b)^2, \text{ în kN/cm}^2 \text{ sau } \sigma_E = 189{,}8\ (100\ l/b)^2, \text{ în daN/cm}^2. \qquad \text{(III.303)}$$

Rezistențele critice de voalare, exprimate în daN/cm², au expresia generală

$$\sigma_{cr\,v} = 189{,}8\,k_\sigma \left(\frac{100l}{b}\right)^2 \text{daN/cm}^2 \text{ și } \tau_{cr\,v} = 189{,}8\ k_\tau \left(\frac{100\ l}{b}\right)^2 \text{daN/cm}^2 \qquad \text{(III.304)}$$

în care parametrul de voalare are valorile de mai înainte, funcție de condițiile de solicitare și rezemare.

În secțiunea a XIV din vol II al lucrării sînt tratate și alte cazuri de voalare, voalarea plăcilor rigidizate, precum și procedeele de calcul practic la voalare al plăcilor metalice.

7. SOLICITĂRI ÎN DOMENIUL PLASTIC

7.1. Generalități

O secțiune lucrează în *domeniul elastic* atît timp cît eforturile unitare în fibrele cele mai solicitate nu depășesc limita elastică a materialului. Dacă această limită este depășită pe o anumită porțiune a secțiunii, restul secțiunii fiind solicitată în domeniul elastic, secțiunea lucrează în *domeniul elasto-plastic*, iar dacă limita elastică este depășită pe întreaga secțiune, aceasta lucrează în *domeniul plastic*.

În acest capitol se tratează unele probleme privind calculul secțiunilor în domeniul elasto-plastic și plastic.

La calculul secțiunilor în domeniul elasto-plastic și plastic se admit următoarele ipoteze și simplificări:

1) Secțiunile transversale ale barelor sînt constante și au o axă de simetrie în care acționează sarcinile.

2) Secțiunile rămîn plane și la solicitări dincolo de limita elastică (valabilitatea ipotezei lui Bernoulli).

3) Deformațiile sînt infinit mici.

4) Curba caracteristică a materialului este aceeași la întindere ca și la compresiune.

În calculele practice, curbele caracteristice reale (fig. III.118, *a*) se înlocuiesc cu una din curbele caracteristice schematizate, arătate în fig. III.118, de obicei curba Prandtl (fig. III. 118, *c*), curba cu zonă de consolidare (fig. III.118, *b*) sau o curbă exponențială $\varepsilon = \sigma^n$ (fig. III.118, *d*).

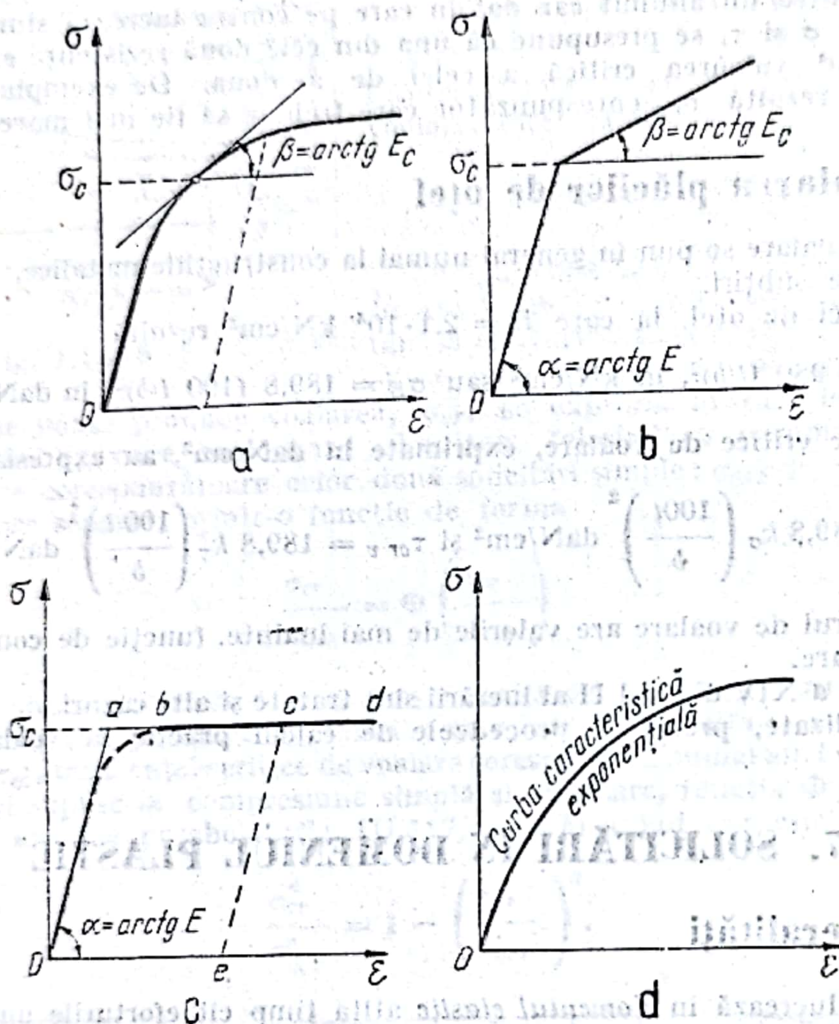


Fig. III.118

7.2. Încovoiere pură

7.2.1. Stadiul de lucru. În cazul secțiunilor supuse la încovoiere pură se disting următoarele patru stadii de lucru arătate în fig. III. 119 în care s-a presupus diagrama caracteristică curbă (*a*) din fig. III.118.

1) *Stadiul elastic,* în care efortul unitar maxim este sub limita de curgere, distribuția eforturilor unitare pe secțiune fiind cea liniară (fig. III.119, *d*) exprimată prin relația $\sigma = My/I_z$

2) *Stadiul elastic limită,* în care efortul unitar maxim, în fibra cea mai solicitată, atinge valoarea limitei de curgere (fig. III.119, *e*), expresia momentului încovoietor limită fiind

$$M_{lim} = \frac{\sigma_c I_z}{y_{max}}. \tag{III.305}$$

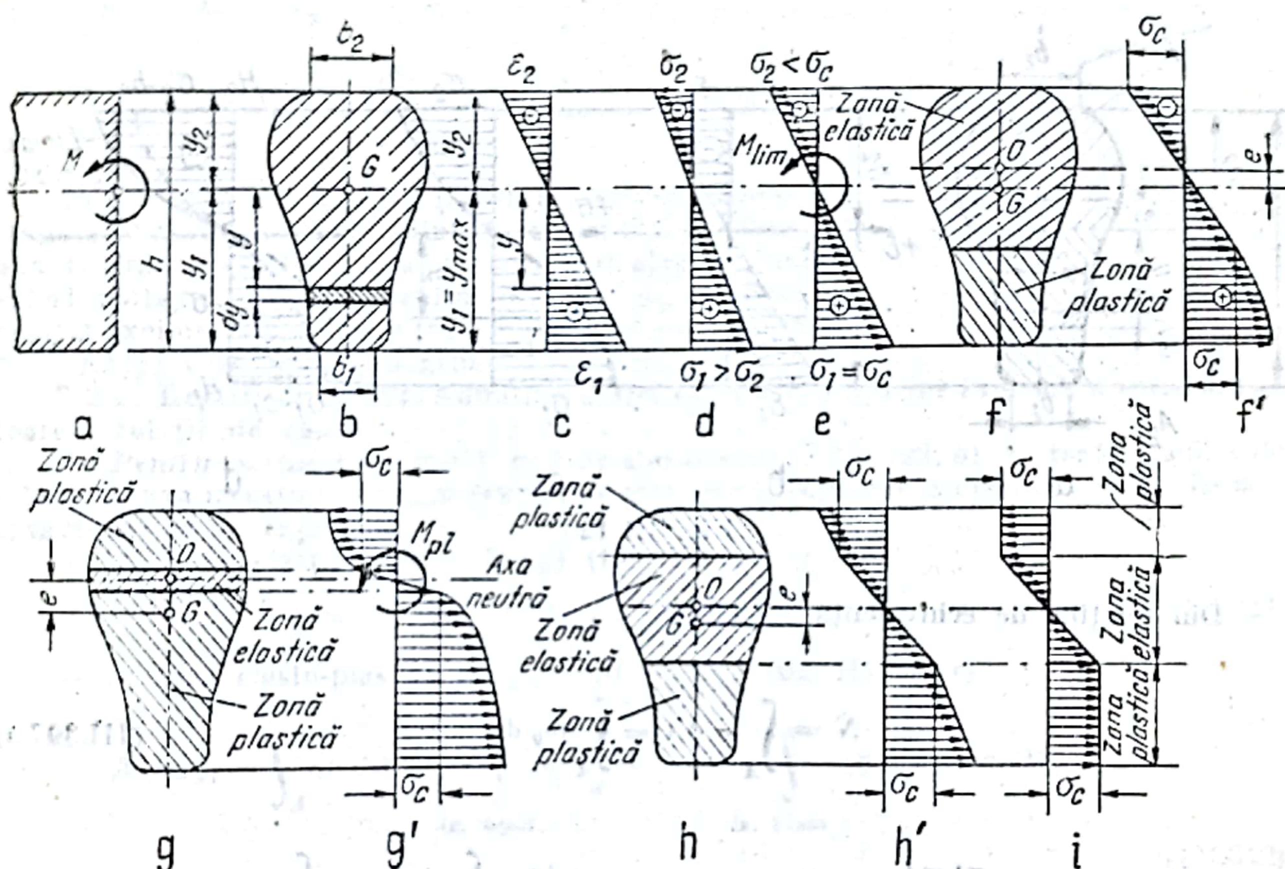


Fig. III.119

3) *Stadiul elasto-plastic,* în care o parte din secţiune se plastifică, partea centrală rămînînd în domeniul elastic (fig. III.119, *f*). În acest stadiu, pe măsură ce momentul încovoietor crește, zonele plastificate se măresc, zona elastică se micșorează, iar la secţiunile cu o axă de simetrie axa neutră se deplasează spre marginea cu mai mult material a secţiunii, care începe să se plastifice mai tîrziu (fig. III.119, *f*, *f'*).

4) *Stadiul plastic,* în care întreaga secţiune este plastificată (fig. III.119, *g*, *g'*). Momentul încovoietor corespunzător acestui stadiu, notat M_{pl} și denumit *moment plastic* sau *moment capabil*, nu mai crește, rămînînd constant; în consecinţă, în secţiunea respectivă se formează o *articulaţie plastică* care se comportă ca o articulaţie cu frecare, respectiv se deformează sub moment constant.

În fig. III.119, *h*, *h'* este arătată diagrama de repartizare a eforturilor unitare σ pentru curba caracteristică din fig. III.118, *b*, iar în fig. III.119, *i* pentru curba caracteristică a lui Prandtl (fig. III.118*c*).

Pentru o secțiune cu o axă de simetrie și o curbă caracteristică oarecare (fig. III.119 și III.120, admițînd menținerea planeității secțiunilor, rezultă

$$y = \frac{h_1}{\varepsilon_1}\varepsilon = \frac{h_2}{\varepsilon_2}\varepsilon \text{ și } dy = \frac{h_1}{\varepsilon_1}d\varepsilon = \frac{h_2}{\varepsilon_2}d\varepsilon. \qquad \text{(III.306)}$$

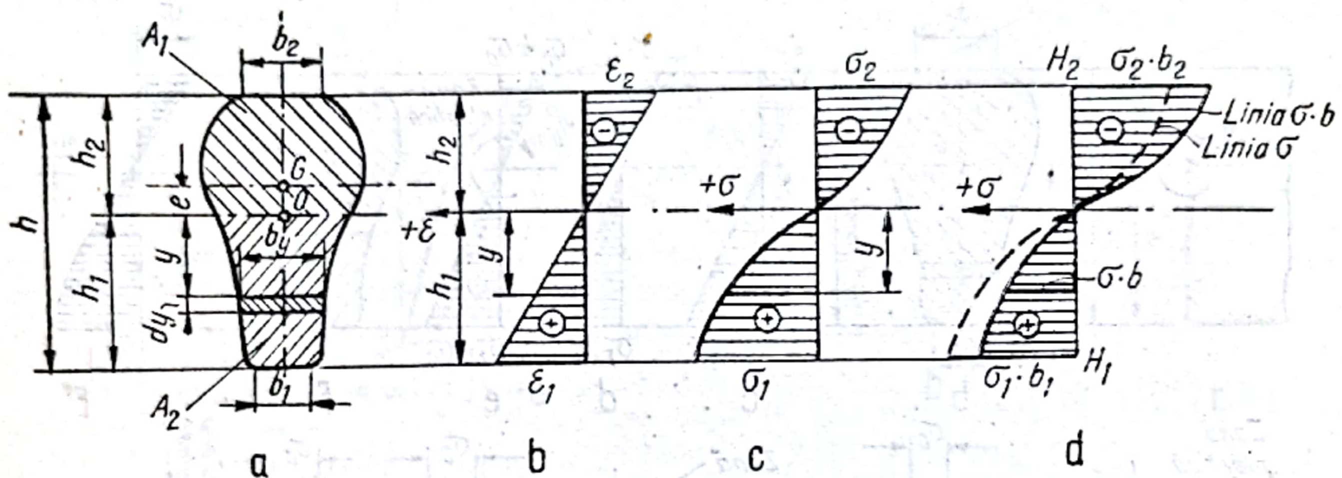


Fig. III.120

Din relațiile de echivalență se obține

$$N = \int_A \sigma\, dA = \int_A \sigma b_y\, dy = 0 \qquad \text{(III.307 a)}$$

$$M = \int_A \sigma y\, dA = \int_A \sigma y b_y\, dy. \qquad \text{(III.307 b)}$$

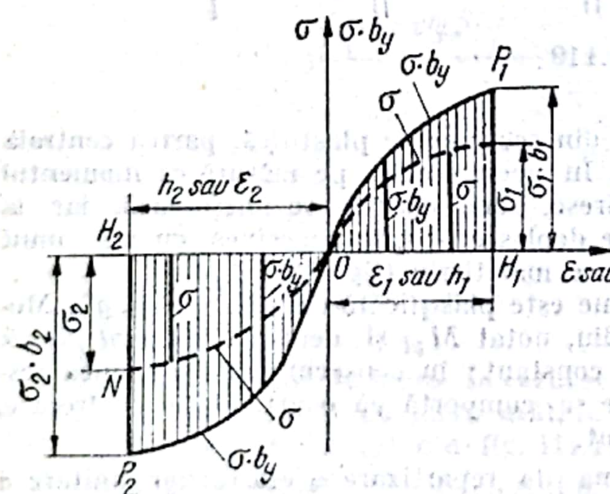


Fig. III.121

Dacă b este variabil cu y, multiplicînd ordonatele curbei caracteristice $\sigma_1 O \sigma_2$ cu b_y se obține curba $P_1\,O\,P_2$ (fig. III.121) de unde

$$\int_0^{h_1} \sigma b_y\, d\varepsilon = \int_0^{h_2} \sigma b_y\, d\varepsilon \qquad \text{(III.308)}$$

din care rezultă că ariile suprafețelor H_1P_1O și H_2P_2O (fig. III.121), sînt egale între ele.

Introducînd relaţiile (III.306) în (III.307b) rezultă

$$M = \frac{h_1^2}{\varepsilon_1^2}\int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma b_y \varepsilon d\varepsilon\,; \qquad \text{(III.309)}$$

cum $\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_1}{h_1} = \frac{\varepsilon_2}{h_2}$ rezultă

$$M = \rho^2 \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma b_y \varepsilon d\varepsilon. \qquad \text{(III.310)}$$

Integrala din relaţia (III.309) reprezintă momentul static al diagramei σb_y, limitată de curba P_1OP_2, faţă de axa neutră, şi se efectuează prin încercări, alegînd diferite valori pentru ε_1, din care rezultă σ_1, ε_2 şi σ_2. Cunoscînd poziţia axei neutre se poate trasa curba moment—curbură $M = f(1/\rho)$ care are alura generală din fig. III.122.

Fig. III.122

7.2.2. **Relaţii de calcul.** Admiţînd curba caracteristică a lui Prandtl, rezultă următoarele relaţii de calcul:

1) *Pentru secţiuni cu dublă axă de simetrie* (fig. III.123, *a*), în toate stadiile de solicitare axa neutră trece prin centrul de greutate al secţiunii. Momentele încovoietoare caracteristice au expresiile:

— în faza elastică ($M < M_{lim}$) (fig. III.123, *b*)

$$M_{lim} = \sigma_c W_z\,; \qquad \text{(III.311)}$$

— în faza elasto-plastică ($M_{lim} < M < M_{pl}$) (fig. III.123, *c*)

$$M_{el-pl} = \int_A \sigma y \, dA = \int_{\text{(z. elast.)}} \sigma_c \frac{y}{a} y \, dA + \int_{\text{(z. plast.)}} \sigma_c y \, dA = \sigma_c (W_e + S_{pl})\,; \qquad \text{(III.312)}$$

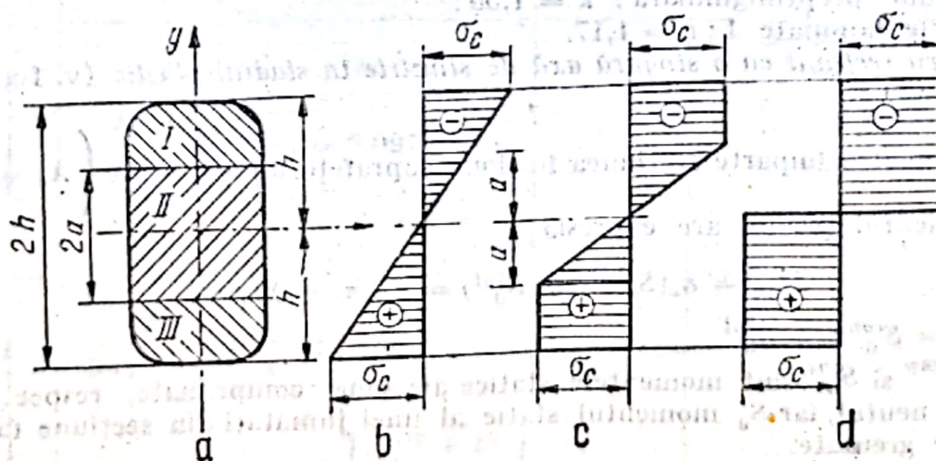


Fig. III.123

— în faza plastică ($M = M_{pl}$) (fig. III.123,d)

$$M_{pl} = 2\sigma_c S_0 = \sigma_c W_{pl}. \tag{III.313}$$

În aceste relații, σ_c este limita de curgere a materialului; S_{pl} — momentul static al fiecăreia din cele două zone plastificate față de axa neutră; W_e — modulul de rezistență al zonei elastice; W_{pl} — modulul de rezistență la secțiunii plastificate; S_0 — momentul static al unei jumătăți de secțiune față de axa neutră.

Pentru o secțiune dreptunghiulară de înălțime $2h$, lățime b și înălțime $2a$ a zonei elastice rezultă

$$M_{lim} = \sigma_c W_{el} = \frac{2}{3} bh^2\sigma_c$$

$$M_{el-pl} = \sigma_c \left[b(h^2 - a^2) + \frac{2ba^2}{3} \right] \tag{III.314}$$

$$M_{pl} = \sigma_c bh^2 = \sigma_c W_{pl}.$$

Raportul între momentul încovoietor plastic și momentul încovoietor limită rezultă:

$$\frac{M_{pl}}{M_{lim}} = \frac{bh^2\sigma_c}{\frac{2}{3} bh^2\sigma_c} = \frac{3}{2} = 1{,}5, \tag{III.315}$$

adică momentul pe care-l poate lua o secțiune dreptunghiulară complet plastificată este cu 50% mai mare decît momentul limită.

Notînd:

$$k = \frac{M_{pl}}{M_{lim}} = \frac{\sigma_c W_{pl}}{\sigma_c W_{el}} = \frac{2S_0}{W_{el}}$$

rezultă rezerva de rezistență pentru diferite secțiuni după cum urmează:

— secțiune circulară: $k = 1{,}70$;
— secțiune dreptunghiulară: $k = 1{,}50$;
— profile laminate I: $k = 1{,}17$.

2) *Pentru secțiuni cu o singură axă de simetrie în stadiul plastic* (v. fig. III.119 și III.120) rezultă:

— axa neutră împarte secțiunea în două suprafețe de arii egale $\left(A_c = A_i = \frac{A}{2}\right)$;

— momentul plastic are expresia

$$M_{pl} = \sigma_c(S_0^{comp} + S_0^{int}) = 2S_0\sigma_c = W_{pl}\sigma_c \tag{III.316}$$

unde $W_{pl} = S_0^{comp} + S_0^{int}$

în care: S_0^{comp} și S_0^{int} sînt momentele statice ale zonei comprimate, respectiv întinse, față de axa neutră, iar S_0 momentul static al unei jumătăți din secțiune față de axa centrului de greutate.

În tabelul III.22 se găsesc expresiile momentelor statice $2S_0$ și valorile coeficienților $k = M_{pl}/M_{lim}$ pentru cîteva forme de secțiuni tehnice.

— în faza plastică ($M = M_{pl}$) (fig. III.123,d)

$$M_{pl} = 2\sigma_c S_0 = \sigma_c W_{pl}. \tag{III.313}$$

În aceste relații, σ_c este limita de curgere a materialului; S_{pl} — momentul static al fiecăreia din cele două zone plastificate față de axa neutră; W_e — modulul de rezistență al zonei elastice; W_{pl} — modulul de rezistență la secțiunii plastificate; S_0 — momentul static al unei jumătăți de secțiune față de axa neutră.

Pentru o secțiune dreptunghiulară de înălțime $2h$, lățime b și înălțime $2a$ a zonei elastice rezultă

$$M_{lim} = \sigma_c W_{el} = \frac{2}{3} bh^2\sigma_c$$

$$M_{el-pl} = \sigma_c \left[b(h^2 - a^2) + \frac{2ba^2}{3} \right] \tag{III.314}$$

$$M_{pl} = \sigma_c bh^2 = \sigma_c W_{pl}.$$

Raportul între momentul încovoietor plastic și momentul încovoietor limită rezultă:

$$\frac{M_{pl}}{M_{lim}} = \frac{bh^2\sigma_c}{\frac{2}{3} bh^2\sigma_c} = \frac{3}{2} = 1{,}5, \tag{III.315}$$

adică momentul pe care-l poate lua o secțiune dreptunghiulară complet plastificată este cu 50% mai mare decît momentul limită.

Notînd:

$$k = \frac{M_{pl}}{M_{lim}} = \frac{\sigma_c W_{pl}}{\sigma_c W_{el}} = \frac{2S_0}{W_{el}}$$

rezultă rezerva de rezistență pentru diferite secțiuni după cum urmează:

— secțiune circulară: $k = 1{,}70$;

— secțiune dreptunghiulară: $k = 1{,}50$;

— profile laminate I: $k = 1{,}17$.

2) *Pentru secțiuni cu o singură axă de simetrie în stadiul plastic* (v. fig. III.119 și III.120) rezultă:

— axa neutră împarte secțiunea în două suprafețe de arii egale $\left(A_c = A_i = \frac{A}{2}\right)$;

— momentul plastic are expresia

$$M_{pl} = \sigma_c(S_0^{comp} + S_0^{int}) = 2S_0\sigma_c = W_{pl}\sigma_c \tag{III.316}$$

unde $W_{pl} = S_0^{comp} + S_0^{int}$

în care: S_0^{comp} și S_0^{int} sînt momentele statice ale zonei comprimate, respectiv întinse, față de axa neutră, iar S_0 momentul static al unei jumătăți din secțiune față de axa centrului de greutate.

În tabelul III.22 se găsesc expresiile momentelor statice $2S_0$ și valorile coeficienților $k = M_{pl}/M_{lim}$ pentru cîteva forme de secțiuni tehnice.

Tabelul III.22

Modulul de rezistență plastică, coeficienții k și momentele de inerție generalizate pentru cîteva secțiuni tehnice

Forma secțiunii transversale	Modulul de rezistență $W_{pl} = S_0^{comp} + S_0^{int}$	Coeficientul k	Momentul de inerție generalizat I_g
D	$\frac{D^3}{6}$	1,7	$q(n)R^{n+3}$
t, $2R$	$4R^2t$	1,27	$q(n)\,(3+n)R^{n+2}$
h, b	$\frac{bh^2}{4}$	1,5	$\frac{bh^{n+2}}{(2+n)\,2^{n+1}}$
h, b	$\frac{bh^2}{6}(2-\sqrt{2}) = 0{,}0977bh^2$		—
b, h, B	$\frac{h^2}{3\,(B-b)^2}\cdot\left[B^3+b^3-(B^2+b^2)\sqrt{\frac{B^2+b^2}{2}}\right]$		—

Tabelul III.22 (continuare)

Forma secțiunii transversale	Modulul de rezistență $W_{pl} = S_0^{comp} + S_0^{int}$	Coeficientul k	Momentul de inerție generalizat I_g
(secțiune I: h_1, t_1, h, b)	$\frac{1}{4}[bh^2 - (b - t_1)h_1^2]$ Pentru profile laminate I $(1{,}14 \ldots 1{,}17)W_z$	— 1,14..1,17	$\frac{bh^{n+2} - (b - t_1)h_1^{n+2}}{(2 + n) \cdot 2^{1+n}}$
(secțiune I: t_1, h, h_1, t, b)	Pentru $h_1 > b$ $\frac{t}{4}[2b(t + h_1) - b^2 + h_1^2]$ Pentru $h_1 < b$ $\frac{t_1}{4b}[t_1(b^2 - h_1^2) + 2bh_1(t_1 + h_1)]$	—	—

În același tabel se găsesc, pentru secțiuni cu dublă axă de simetrie, expresiile momentelor generalizate de inerție, corespunzătoare unor curbe caracteristice schematizate printr-o funcție de putere, de forma

$$\sigma = E_0|\varepsilon|^{n-1}\varepsilon \tag{III.317}$$

în care E_0 și n sînt constante de material.

Momentele generalizate de inerție au expresia

$$I_g = 2\int_0^{h/2} y^{n+1}\,\mathrm{d}A \tag{III.318a}$$

În formulele din coloana 4 a tabelului III.22, $q(n)$ se exprimă prin relația

$$q(n) = \frac{2^{2+n}}{3+n}\,\frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2+n)} \tag{III.318b}$$

a cărei variație este arătată în fig. III.124.

Expresia efortului unitar din încovoiere se exprimă prin relația:

$$\sigma = \frac{M}{I_g}\cdot y^n. \tag{III.319}$$

În fig. III.124. *b* este arătată variaţia efortului unitar σ pe secţiune, pentru diferite valori ale parametrului $m = 1/n$.

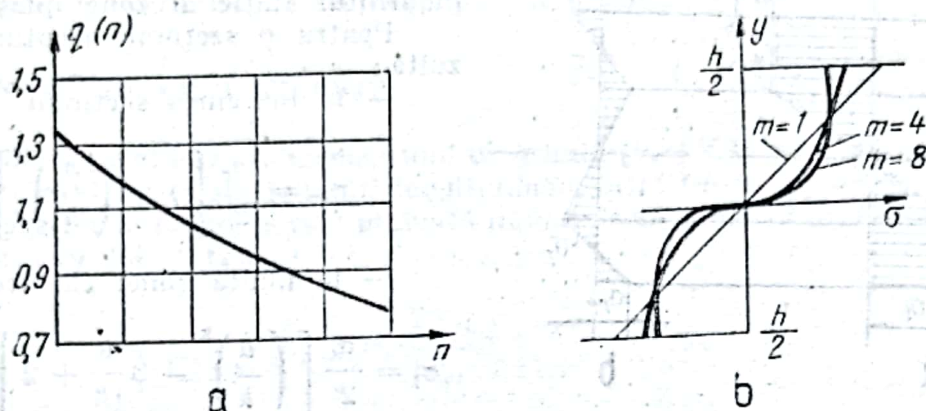


Fig. III.124

7.2.3. Calculul deformaţiilor grinzilor încovoiate, în stadiul elasto-plastic. Acest calcul se face ţinînd seama că deformaţiile sînt produse numai de zona elastică centrală, de înălţime $2a$, zonele plastificate neinfluenţînd deformaţia grinzii:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_c}{EI} \tag{III.320}$$

în care: $M_c = \sigma_c I/a$ este un moment încovoietor convenţional, iar I este momentul de inerţie al întregii secţiuni.

Folosind formula Maxwell — Mohr, săgeata (sau rotirea) unei secţiuni este dată de relaţia

$$v = \int_0^l \frac{mM_c}{EI} \, dx = \int \frac{m}{\rho} \, dx \tag{III.321}$$

în care: m este momentul încovoietor într-o secţiune produs de o sarcină (forţă sau moment) egală cu unitatea aplicată în secţiunea în care se caută deplasarea, iar $1/\rho$ curbura în aceeaşi secţiune produsă de sarcinile date, care se determină din diagrama $1/\rho = f(M)$ (v.fig.III.122).

7.2.4. Eforturi remanente. Descărcînd o grindă care a fost solicitată în domeniul elasto-plastic sau plastic, ea rămîne cu eforturi unitare şi deformaţii remanente. Prin descărcare, fibrele solicitate în domeniul plastic, revin pe curba caracteristică Prandtl după o linie elastică (linia $c-e$ în fig. III.118, *c*),deci din diagrama de eforturi unitare *a b o c d* din stadiul elasto-plastic se scade diagrama liniară *coh* (fig. III.125, *a*). Diagrama de eforturi unitare remanente rezultă din diferenţa celor două diagrame şi este redată în fig. III. 125, *b* Valoarea efortului unitar remanent σ_r la marginea secţiunii este dată de relaţia

$$\sigma_r = \sigma_c \frac{S_{pl} + W_{el} - W}{W} \tag{III.322}$$

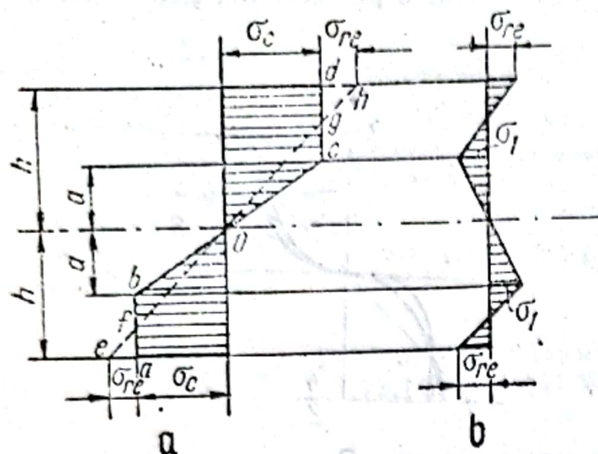


Fig. III.125

în care W este modulul de rezistență al întregii secțiuni; W_{el} al zonei elastice și S_{pl} momentul static al zonei plastice.

Pentru o secțiune dreptunghiulară rezultă:

— la marginea secțiunii

$$\sigma_{re} = \frac{\sigma_c}{2}\left[1 - \left(\frac{a}{h}\right)^2\right]; \qquad \text{(III.323)}$$

— la limita zonei elastice

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_c}{2}\left[\left(\frac{a}{h}\right)^3 - 3\frac{a}{h} + 2\right]. \qquad \text{(III.324)}$$

7.3 Încovoiere cu întindere sau compresiune

La secțiunile supuse la un moment încovoietor M și un efort de întindere sau compresiune N, axa neutră nemaitrecînd prin centrul de greutate al secțiunii, deformațiile plastice apar în fibrele extreme ale secțiunii în care eforturile unitare produse de încovoiere și cele produse de efortul axial, au același semn. Prin creșterea eforturilor M și N, simultan sau separat, plastificarea secțiunii se extinde pe zona eforturilor unitare de același semn, cuprinzînd pînă la urmă întreaga secțiune.

Determinarea capacității portante a unei secțiuni supuse la încovoiere și efort axial se poate face numai dacă de la început se stabilește procentul din secțiune ce urmează să se plastifice. În acest scop se folosesc diagrame speciale. În fig. III.126 este redată o asemenea diagramă pentru secțiuni dreptunghiulare.

În diagramă se intră cu o dreaptă trecînd prin origine, definită de tangenta

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M}{M_c} : \frac{N_c}{N} \qquad \text{(III.325)}$$

în care M și $N = P$ sînt eforturile ce acționează secțiunea; M_c este momentul elastic limită, care, lucrînd singur, ar produce în fibrele extreme atingerea limitei de curgere; $N_c = A\sigma_c$ este efortul axial care lucrînd singur duce la plastificarea secțiunii.

Intersecția acestei drepte cu curbele care limitează procentele din secțiunea ce se

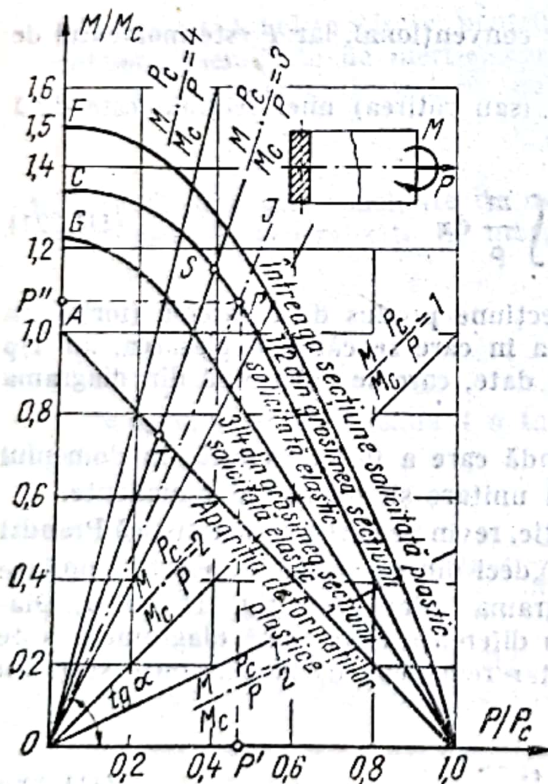


Fig. III.126

plastifică, determină, prin coordonatele punctului de intersecţie, rapoartele N/N_c (în abscisă) şi M/M_c (în ordonată) pe baza cărora se determină eforturile reale N şi M ce duc la plastificarea procentului de secţiune stabilit dinainte.

7.4. Încovoiere cu forfecare

Din condiţiile de echilibru ale elementului de grindă (v. § 3.3. şi fig. III.74) rezultă că în zona plastificată nu există lunecări longitudinale între fibre ($\sigma_{1y} = \sigma_{2y} = \sigma_c$), în consecinţă întreaga forţă tăietoare este preluată numai de zona elastică. Efortul unitar este dat de formula lui Jurawsky

$$\tau = \frac{TS_{el}}{bI_{el}}; \tag{III.326}$$

în care: T este forţa tăietoare în secţiune; S_{el} — momentul static al părţii care alunecă din zona elastică, faţă de axa neutră; I_{el} — momentul de inerţie al zonei elastice faţă de aceeaşi axă; b — lăţimea secţiunii în planul de alunecare considerat.

Pentru o secţiune dreptunghiulară τ variază parabolic numai pe înălţimea zonei elastice de înălţime $2a$ (fig. III.127).

În realitate, solicitarea la încovoiere cu forfecare fiind o solicitare compusă, analiza plastificării secţiunii trebuie făcută pe baza unuia din criteriile de plasticitate. În practică se foloseşte în special criteriul Huber-Mises-Hencky, care admite ca plastificarea într-un punct dintr-un corp începe cînd:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_c^2. \tag{III.327}$$

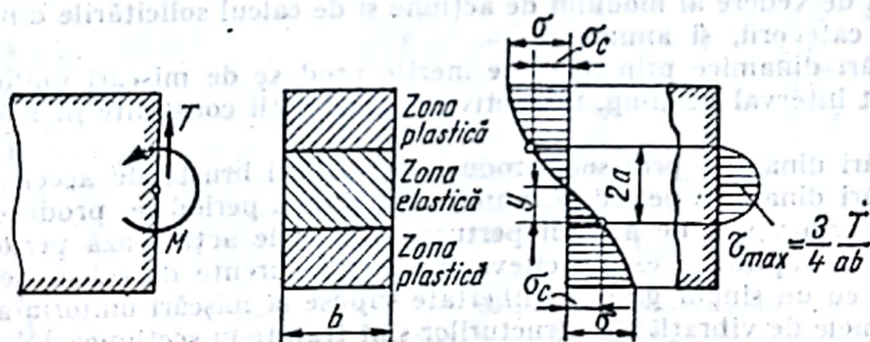


Fig. III.127

Pentru o grindă supusă numai la eforturi unitare σ_x şi τ_{xy} produse de încovoiere şi lunecare, criteriul de plasticitate din relaţia (III.327) capătă forma:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}} = \sigma_c \tag{III.328}$$

Pornind de la observaţia că pentru o secţiune dreptunghiulară, în zona elastică: $\sigma = \sigma_c y/a$, şi $\tau_{xy} = 3T(a^2 - y^2)/4ba^3$, se demonstrează că dacă

$$T \geqslant \frac{4ab\,\sigma_c}{3}, \tag{III.329}$$

plastificarea este determinată de eforturile unitare tangenţiale, iar dacă:

$$T \leqslant \frac{4ab\,\sigma_c}{3}, \qquad (III.330)$$

eforturile unitare normale sînt determinate în comportarea plastică a grinzii.

Dacă secţiunea se plastifică complet, devenind o articulaţie plastică, teoretic, zona elastică dispare, în aşa fel încît forţa tăietoare din articulaţie nu ar mai putea fi transmisă. În realitate, în centrul secţiunii rămîne totdeauna un mic sîmbure elastic care transmite toată forţa tăietoare, şi care practic nu reduce momentul plastic calculat pentru întreaga secţiune plastificată.

8. SOLICITĂRI DINAMICE

8.1. Generalităţi

Prin solicitări dinamice se înţeleg solicitările datorate forţelor de inerţie produse de masele în mişcare ale corpurilor. Dacă acceleraţiile aplicate maselor corpurilor sînt mici, forţele de inerţie produse de ele pot fi în general neglijate, corpurile fiind considerate ca acţionate static, în schimb, dacă acceleraţiile sînt importante, influenţa forţelor de inerţie generate de ele nu mai poate fi neglijată, corpurile trebuind să fie considerate ca acţionate dinamic.

Solicitările dinamice sînt mai defavorabile decît cele statice, deoarece deformaţiile şi eforturile produse de ele nu mai sînt proporţionale cu valoarea sarcinilor ce le produc, fiind mult mai mari.

Din punct de vedere al modului de acţiune şi de calcul solicitările dinamice se grupează în trei categorii, şi anume:

— solicitări dinamice prin forţe de inerţie produse de mişcări uniform accelerate într-un anumit interval de timp, respectiv de acceleraţii constante în mărime şi direcţie;

— solicitări dinamice prin şoc, produse de variaţii bruşte de acceleraţii şi viteze;

— solicitări dinamice periodice, numite şi vibraţii periodice, produse de vibraţiile libere ale corpurilor, sau de acţiuni perturbatorii ce le acţionează periodic.

În prezentul capitol se expun cîteva probleme curente de calcul pentru elemente de construcţie cu un singur grad de libertate supuse la mişcări uniform accelerate şi la şocuri. Problemele de vibraţii ale structurilor sînt tratate în secţiunea IX a manualului.

8.2. Solicitări prin forţe de inerţie [1]

Elementele de construcţie supuse la forţe de inerţie produse de mişcări uniform accelerate, conform principiului lui d'Alembert, se calculează, ca şi elementele supuse la solicitări statice, dacă pe lîngă forţele (exterioare şi de legătură) efectiv aplicate se adaugă şi forţele de inerţie egale cu produsul dintre fiecare element de masă şi acceleraţia sa, avînd direcţia inversă direcţiei acceleraţiei.

1) *Eforturile unitare în cablul unei cutii de ascensor* de greutate G atîrnată de un cablu de secţiune A şi greutate specifică γ (fig. III.128) supus unei acceleraţii constante

---

[1]) Pentru alte cazuri de solicitări prin forţe de inerţie vezi Manualul inginerului mecanic, Bucureşti, Editura tehnică, 1974, cap. 18.

a, se scriu

$$\sigma_d = \frac{N_{st}}{A} + \frac{N_d}{A} = \frac{G + \gamma\, A x}{A} + \frac{G + \gamma\, A x}{A g}\, a = \left(\frac{G + \gamma\, A x}{A}\right)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = \frac{G + \gamma\, A x}{A}\,\psi \qquad \text{(III.331)}$$

în care: x este distanța de la cutia ascensorului la secțiunea cablului în care se calculează efortul; g — accelerația gravitației; $\psi = 1 + \frac{a}{g}$ — *coeficientul dinamic sau multiplicatorul de impact*.

2) *Eforturile unitare într-un inel circular* supus la o mișcare de rotație uniformă, ω (fig. III. 129) au expresia:

$$\sigma_d = \frac{N_{xd}}{A} = \frac{Dq}{2A} = \frac{DA\gamma}{2Ag}\cdot\frac{\omega^2 D}{2} = \frac{\gamma\cdot\omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g} = \frac{\pi^2 n^2 \gamma D^2}{3\,600 g} \qquad \text{(III.332)}$$

în care: A este secțiunea inelului; D — diametrul său; N_{xd} — efortul axial dinamic; q — sarcina dinamică pe unitate de lungime a inelului; γ — greutatea specifică a materialului; $\omega = n\pi/30$ rot/min viteza unghiulară; v — viteza liniară; n — numărul de rotații pe minut.

3) *Efortul unitar dinamic* într-o secțiune x a unei bare drepte avînd la cap o masă G/g, care se rotește cu o viteză unghiulară ω în jurul unei axe normale pe axa barei (fig. III. 130) are expresia

$$\sigma_{xd} = \frac{N_{xd}}{A} = \frac{1}{A}\left(\int_x^l \frac{\gamma}{g} A x\, \mathrm{d}x + \frac{G}{g}\, l\right)\omega^2. \qquad \text{(III.333)}$$

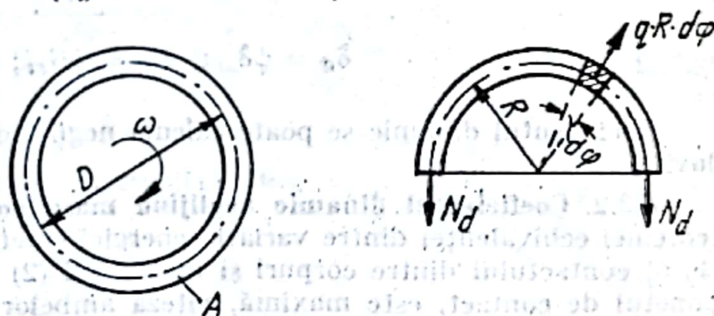


Fig. III.129

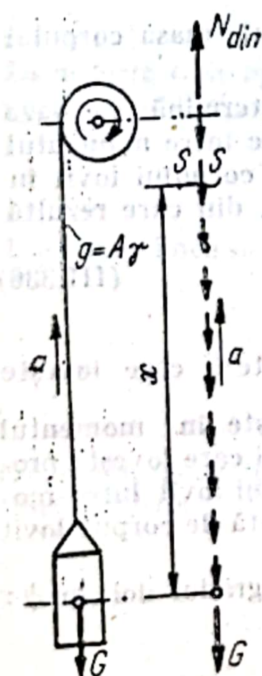


Fig. III.128

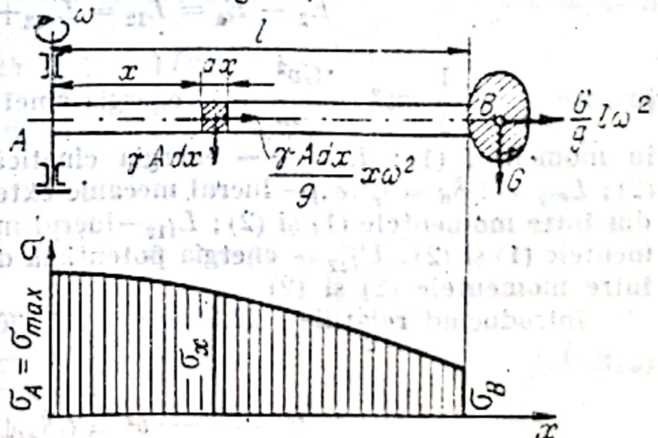


Fig. III.130

Efortul unitar maxim are loc pentru $x = 0$ și se scrie

$$\sigma_d = \frac{l\omega^2}{Ag}\left(\frac{\gamma A l}{2} + G\right). \tag{III.334}$$

8.3. Solicitări prin șoc

8.3.1. Ipoteze. Calculul eforturilor unitare și deformațiilor în structurile supuse șocului în faza imediat următoare, respectiv cînd sarcinile ce le acționează se aplică brusc cu întreaga lor valoare, sau cu o viteză inițială v, în momentul contactului, se face în general pe baza unui calcul aproximativ în care se admit următoarele ipoteze:

— structura supusă șocului se comportă perfect elastic ca și în cazul solicitărilor statice;

— după lovire corpul care lovește rămîne în contact cu corpul lovit pînă la atingerea deformațiilor maxime;

— nu se ține seama de efectul deformațiilor locale în timpul șocului, respectiv de pierderile de energie prin deformații plastice locale;

— transmiterea deformațiilor în toată structura supusă șocului se face instantaneu cu șocul.

Pe baza acestor ipoteze atît deplasările dinamice, cît și eforturile se obțin direct din deplasările, respectiv eforturile statice, prin multiplicarea acestora cu un coeficient $\psi > 1$, denumit *coeficient dinamic* sau *multiplicator de impact*.

$$\delta_d = \psi\delta_{st}; \quad G_d = \psi G_{st}; \quad \sigma_d = \psi\sigma_{st}. \tag{III.335}$$

Coeficientul dinamic se poate calcula neglijînd sau ținînd seama de masa corpului lovit.

8.3.2. Coeficientul dinamic neglijînd masa corpului lovit. Se determină pe baza teoremei echivalenței dintre variația energiei cinetice și lucrul mecanic între momentul (1) al contactului dintre corpuri și momentul (2) în care deformația corpului lovit în punctul de contact, este maximă, viteza ambelor corpuri fiind nulă, din care rezultă

$$E_2 - E_1 = L_{12} = L_{e12} + L_{i12} = L_{e12} - U_{i12} \tag{III.336}$$

în care $E_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gv^2}{2g}$ este energia cinetică a corpului de greutate G care lovește în momentul (1); $E_2 = 0$ — energia cinetică a corpului care lovește în momentul (2); $L_{e12} = G\delta_d = \psi G\delta_{st}$— lucrul mecanic exterior al greutății corpului care lovește produs între momentele (1) și (2); L_{i12}—lucrul mecanic interior al corpului lovit între momentele (1) și (2); U_{i12} — energia potențială de deformație înmagazinată de corpul lovit între momentele (1) și (2)

Introducînd relațiile (III.335) în (III.336) se obține ecuația de gradul doi în ψ:

$$0 - \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2 = G\delta_{st}\psi - \frac{1}{2}G\delta_{st}\psi^2 = 0 \tag{III.337a}$$

sau

$$\psi^2 - 2\psi - \frac{v^2}{g\delta_{st}} = 0 \tag{III.337b}$$

a cărei soluţie pozitivă dă expresia coeficientului dinamic

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}}. \tag{III.338}$$

Dacă corpul care loveşte cade liber de la o înălţime h rezultă $v^2 = 2gh$ şi deci

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}. \tag{III.339}$$

în care $\delta_{st} = \delta_{11} G$, δ_{11} fiind deplasarea punctului în care are loc ciocnirea pentru o forţă $P = 1$ lucrînd static. Notînd $k = G/\delta_{st} = 1/\delta_{11}$ denumită *constanta elastică a sistemului*, coeficientul dinamic se mai poate scrie.

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2k}{Gg}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hk}{G}}. \tag{III.340}$$

Dacă forţa G se aplică brusc cu întreaga ei intensitate, însă fără viteză iniţială ($h = 0$), coeficientul dinamic are valoarea

$$\psi = 2. \tag{III.341}$$

Dacă înălţimea de cădere este de circa $h \geqslant 5\,\delta_{st}$, coeficientul dinamic se poate considera

$$\psi \approx 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{2hk}{G}} \tag{III.342}$$

eroarea faţă de formula exactă fiind sub 5%.
Dacă înălţimea de cădere este foarte mare $h \geqslant 55\,\delta_{st}$ se poate lua

$$\psi \approx \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2hk}{G}} \tag{III.343}$$

eroarea faţă de formula exactă fiind în acest caz sub 10%.

Tabelul III.23

Constante elastice la bare drepte cu mase concentrate

k — constanta elastică
EA — modulul de rigiditate la efort axial
EI — modulul de rigiditate la încovoiere

Schița sistemului	Constanta elastică k
EA, l	$k = \dfrac{1}{l} EA$
EI, a, b, l	$k = \dfrac{3(a+b)}{a^2b^2} EI$ Pentru $a = b$ rezultă $k = \dfrac{48}{l^3} EI$
EI, a, b, l	$k = \dfrac{12(a+b)^3}{a^3b^2(3a+4b)} EI$ Pentru $a = b = \dfrac{l}{2}$ rezultă $k = \dfrac{768}{7}\dfrac{EI}{l^3} \approx \dfrac{110\,EI}{l^3}$
EI, a, b, l	$k = \dfrac{3(a+b)^3}{a^3b^3} EI$ Pentru $a = b$ rezultă $k = \dfrac{192}{l^3} EI$
EI, a, b, l	$k = \dfrac{3}{a^3} EI$
EI, a, b, l	$k = \dfrac{3}{(a+b)b^2} EI$
EI, a, b, l	$k = \dfrac{12}{b^3(3a+4b)} EI$

Dacă corpul care lovește se deplasează orizontal cu viteza v_0, $L_{e12} = 0$ deoarece forța gravitațională este normală pe direcția deplasării δ, coeficientul dinamic capătă forma

$$\psi = \sqrt{\frac{v_0^2}{\delta_{st}g}} = v_0\sqrt{\frac{k}{Gg}}. \qquad \text{(III.344)}$$

În tabelul III.23 sînt date constantele elastice pentru bare drepte cu o singură deschidere, avînd diferite condiții de rezemare.

8.3.3. **Coeficientul dinamic luînd în considerare masa corpului lovit.** În acest caz se disting două faze, și anume:

— faza ciocnirii, care durează din momentul contactului pînă în momentul în care cele două corpuri, în punctul de contact, au aceeași viteză; în această fază, viteza corpului care lovește și vitezele diferitelor elemente de masă ale corpului lovit, imediat după ciocnire, se calculează pe baza *teoremei conservării impulsului*.

— faza deformării dintre momentul cînd cele două corpuri au în punctul de contact aceeași viteză și momentul în care deformațiile corpului lovit sînt maxime, vitezele relative ale elementelor lui de masă sînt nule și în care energia cinetică a sistemului se transformă în energie potențială de deformație; fază în care se aplică teorema energiei cinetice.

Impulsul barei lovite se calculează considerînd că vitezele diferitelor ei elemente de masă sînt proporționale cu proiecția deplasărilor lor pe direcția sarcinii ce produce șocul.

De influența masei proprii a barei lovite asupra coeficientului dinamic se ține seama multiplicînd energia corpului ce lovește bara, energie măsurată prin înălțimea de cădere h, sau pătratul vitezei corpului care lovește, v^2, în momentul șocului, cu un coeficient c_1, funcție de cele două mase.

În acest caz, forma generală a multiplicatorului de impact este dată de relația generală:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{kv^2}{gG}c_1} \qquad \text{(III.345a)}$$

sau

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{G}c_1}. \qquad \text{(III.345b)}$$

Pentru grinzi drepte valoarea coeficientului c_1 este dată în coloana 4 din tabelul III.24.

Dacă se ține seama de masa corpului lovit, multiplicatorul dinamic este mai mic decît dacă această masă se neglijează.

Formulele (III.345) sînt valabile și dacă în punctul de contact pe corpul lovit de masă $M_1 = G_1/g$, este fixat un alt corp de masă $M_2 = G_2/g$. În acest caz coeficientul c_1 (din coloana 4, tabelul III.24) se înlocuiește cu coeficientul c_2 din coloana a 5-a a tabelului III.24.

Tabelul III.24

Coeficienții dinamici în cazul șocului la bare drepte avînd mase concentrate pe bare

ψ — coeficientul dinamic

$G = P = Mg$ — greutatea corpului ce cade

$G_1 = M_1 g$ — greutatea barei

$G_2 = M_2 g$ — greutatea unui corp cu masa concentrată fixat pe bară

c — coeficient de corecție

Schița sistemului	Formula generală a coeficientului dinamic	Coeficientul de corecție c		
		Masa barei se neglijează	Se ține seama de masa barei M_1 $c = c_1$	Se ține seama de masa corpului fixat de bară $c = c_2$
1	2	3	4	5
$P = Mg$; $G_2 = M_2 g$; $G_1 = M_1 g$; EA; h; l	$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Gl} c}$	$c = 1$	$c_1 = G \frac{G + \frac{G_1}{3}}{\left(G + \frac{G_1}{2}\right)^2}$	$c_2 = G \frac{G + \frac{G_1}{3} + G_2}{\left(G + \frac{G_1}{2} + G_2\right)^2}$

$P = Mg$; h; $G_2 = M_2 g$; G_1; $l/2$; $l/2$; l	$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{96hEI}{Gl^3} c}$	$c = 1$	$c_1 = G \frac{G + \frac{17G_1}{35}}{\left(G + \frac{5G_1}{8}\right)^2}$	$c_2 = G \frac{G + \frac{17G_1}{35} + G_2}{\left(G + \frac{5G_1}{8} + G_2\right)^2}$
$P = Mg$; h; $G_2 = M_2 g$; $G_1 = M_1 g$; $l/2$; $l/2$; l	$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{384hEI}{Gl^3} c}$	$c = 1$	$c_1 = G \frac{G + \frac{13G_1}{35}}{\left(G + \frac{G_1}{2}\right)^2}$	$c_2 = G \frac{G + \frac{13G_1}{35} + G_2}{\left(G + \frac{G_1}{2} + G_2\right)^2}$
P; h; G_2; G_1; l	$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{6hEI}{Gl^3} c}$	$c = 1$	$c_1 = G \frac{G + \frac{33G_1}{140}}{\left(G + \frac{3G_1}{8}\right)^2}$	$c_2 = G \frac{G + \frac{33G_1}{140} + G_2}{\left(G + \frac{3G_1}{8} + G_2\right)^2}$

9. RĂSUCIREA ÎMPIEDICATĂ A BARELOR DREPTE CU PEREȚI SUBȚIRI

9.1. Generalități. Ipoteze

Prin bare avind secțiunea cu pereți subțiri, se înțeleg barele a căror secțiune transversală, de o formă oarecare deschisă sau închisă, este formată din segmente drepte sau curbe, avind grosimea pereților foarte mică în raport cu dimensiunile generale ale secțiunii transversale.

La aceste bare supuse la răsucire, secțiunile transversale inițial plane nu mai rămîn plane, se strîmbă, ies din planul lor inițial, respectiv se deplanează. Dacă deplanarea secțiunilor transversale nu este împiedicată, barele sînt supuse la *răsucire liberă* sau *răsucire primară* tratată în paragraful 2.3.5. Dacă însă deplanarea secțiunilor este împiedicată, barele sînt supuse la *răsucire împiedicată* sau *răsucire secundară*, tratată în acest capitol.

În general, deplanarea secțiunilor este împiedicată în cazurile în care condițiile de rezemare restring ieșirea din plan a punctelor secțiunilor transversale (reazeme încastrate total sau elastic) sau cînd momentul de răsucire variază în lungul barelor. Din cauza împiedicării deplanării secțiunilor transversale, în timpul răsucirii, fibrele longitudinale ale barelor nu se mai pot lungi sau scurta liber, pe secțiunile transversale apărînd și eforturi unitare suplimentare datorate numai împiedicării deplanării secțiunilor, respectiv eforturile normale σ_ω și tangențiale τ_ω, importante ca mărime, și care, în cele mai multe cazuri, nu mai pot fi neglijate.

Deoarece secțiunile nu mai rămîn plane, ipoteza lui Bernoulli este înlocuită cu ipoteza indeformabilității formei secțiunii transversale, conform căreia proiecția conturului secțiunii transversale pe planul inițial nedeformat rămîne neschimbată ca formă. În afară de această ipoteză se mai admit și următoarele ipoteze:

— secțiunea transversală a barei este constantă în lungul ei;

— eforturile unitare din răsucire împiedicată normale σ_ω și tangențiale τ_ω, într-un punct al unei secțiuni transversale sînt constante pe grosimea peretelui secțiunii din acel punct (la răsucirea liberă eforturile tangențiale τ_r variază liniar pe grosimea pereților;

— eforturile unitare tangențiale τ_ω sînt în orice punct al secțiunii tangente la linia mediană a profilului;

— pentru bare cu pereți subțiri cu profil deschis se neglijează deformațiile produse de eforturile unitare tangențiale;

— pentru bare cu pereți subțiri cu profil închis se admite că deplanarea secțiunilor transversale la răsucirea împiedicată este proporțională cu deplanarea acesteia produsă de răsucirea liberă.

9.2. Centrul de răsucire

Centrul de răsucire, numit uneori și *centrul de încovoiere*, este punctul din planul secțiunii transversale a unei bare, care se bucură de proprietatea că dacă suportul forței tăietoare trece prin el, momentul de răsucire este nul și secțiunea nu este supusă la răsucire.

Coordonatele centrului de răsucire C în raport cu un sistem de axe $O'z'y'$, alese arbitrar, cu originea în punctul P, însă paralele cu axele principale de inerție ale sec-

țiunii Czy (fig. III.131), sînt

$$\xi' = \frac{\int_A \omega_p y \, dA}{I_z}; \qquad \eta' = -\frac{\int_A \omega_p z \, dA}{I_y} \qquad \text{(III.346)}$$

în care: ω_p este suprafața sectorială a secțiunii în raport cu polul P; y și z — coordonatele unui punct oarecare al axei secțiunii în raport cu axele principale centrale de inerție Czy ale secțiunii; I_z și I_y — momentele de inerție ale secțiunii în raport cu aceste axe.

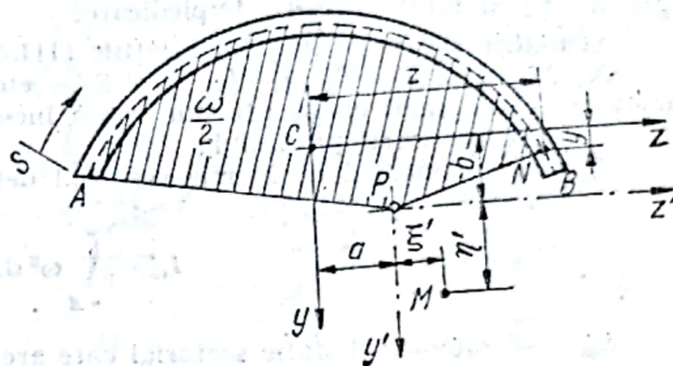


Fig. III.131

Suprafața sectorială ω, numită și *coordonată sectorială*, a unui punct de pe secțiunea transversală este dublul ariei suprafeței cuprinse între raza vectoare corespunzătoare polului P arbitrar ales și originei s a suprafeței sectoriale, linia mediană a secțiunii și raza vectoare corespunzătoare punctului în care se calculează suprafața sectorială. Variația ariei sectoriale de-a lungul liniei mediane a secțiunii se poate reprezenta sub forma unei diagrame. Pentru porțiunile curbe diagrama va fi curbilinie, iar pentru segmentele drepte, diagrama va fi liniară, panta fiind egală cu distanța de la pol la segmentul respectiv. Convenție de semn: pentru segmentele parcurse de raza vectoare în sens orar, pornind de la raza vectoare de origine, diagrama ω este pozitivă. Unitatea de măsură a suprafeței sectoriale ω este $[L^2]$.

Punctul situat pe linia mediană a secțiunii, pentru care suprafața sectorială este nulă se numește *punct sectorial neutru* sau *punct de suprafață sectorială nulă*.

Dacă se alege ca pol centrul de răsucire al secțiunii, iar originea coordonatelor sectoriale se alege pe baza condiției $\int_A \omega \cdot dA = 0$, suprafața sectorială se numește *suprafață sectorială principală*.

La profilele cu o axă de simetrie, centrul de răsucire se află pe acea axă, iar la cele cu două axe de simetrie se află la intersecția lor.

9.3. Răsucirea împiedicată a barelor cu pereți subțiri avînd profilul deschis

9.3.1. Eforturi unitare. În cazul cel mai general de solicitare la care apare și răsucirea împiedicată, admițînd principiul suprapunerii efectelor, expresiile eforturilor unitare sînt date de relațiile

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} + \sigma_\omega = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{B_\omega \cdot \omega}{I_\omega} \qquad \text{(III.347)}$$

$$\tau = \tau_{T_y} + \tau_{T_z} + \tau_t + \tau_\omega = \frac{T_y \cdot S_z}{t \cdot I_z} + \frac{T_z \cdot S_y}{t \cdot I_y} + \frac{M_t \cdot t}{I_t} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{t \cdot I_\omega}. \qquad \text{(III.348)}$$

În relația (III. 347) primii trei termeni sînt cei corespunzători solicitării de încovoiere compusă, determinați pe baza ipotezei secțiunilor plane, iar ultimul termen reprezintă efortul unitar normal produs numai de împiedicarea deplanării secțiunii. În relația (III. 348) primii doi termeni exprimă efortul unitar tangențial produs de forțele tăietoare în cazul barelor cu pereți subțiri; termenul al treilea reprezintă efortul unitar tangențial produs de răsucirea liberă, iar cel de al patrulea termen reprezintă efortul unitar tangențial τ_{ω} datorat răsucirii împiedicate.

Semnificațiile notațiilor din relațiile (III.347) și (III.348) sînt:

N, M_z, M_y, T_z, T_y, I_z, I_y, S_z și S_y — eforturile secționale și caracteristicile geometrice ale secțiunii cunoscute din teoria încovoierii compuse

t — grosimea profilului;

I_{ω} — momentul de inerție sectorial definit de relația

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 \, dA \, [L^6] \tag{III.349}$$

S_{ω} — momentul static sectorial care are expresia

$$S_{\omega} = \int_A \omega \, dA \, [L^4] \tag{III.350}$$

B_{ω} — bimomentul de încovoiere — răsucire definit de formula

$$B_{\omega} = -EI_{\omega}\varphi'' [FL^2] \tag{III.351}$$

M_{ω} — momentul de încovoiere-răsucire definit prin expresia.

$$M_{\omega} = \frac{\partial B_{\omega}}{\partial x} = -EI_{\omega}\varphi''' \; [F \cdot L] \tag{III.352}$$

în care: φ este rotirea secțiunii de abscisă x față de secțiunea cu originea O.

La secțiunile deschise sensul fizic al momentului de încovoiere-răsucire M_{ω} este că acesta reprezintă momentul fluxului de forfecare suplimentar în raport cu centrul de greutate al secțiunii.

Suprafața sectorială ω, funcție de care se calculează caracteristicile sectoriale geometrice S_{ω} și I_{ω}, se determină luînd ca pol centrul de răsucire al secțiunii transversale.

M_r este momentul de răsucire liberă (momentul lui Saint-Vénant);

$I_t = \frac{1}{3}\Sigma bt^3$ $[L^4]$ — caracteristica geometrică a secțiunii, la răsucire liberă.

Caracteristicile sectoriale ale cîtorva forme de secțiuni mai des întîlnite în tehnică ca și caracteristicile pentru profilele I și U sînt date în vol. II, secțiunea XIV a manualului.

Deplasarea în direcția axei Ox, respectiv deplanarea punctelor situate pe linia mediană a secțiunii, este dată prin relația

$$u = \omega \cdot \varphi'. \tag{III.353}$$

9.3.2. Ecuația diferențială a răsucirii împiedicate. Momentul de răsucire M_x din secțiunea de abscisă x este preluat prin momentul interior M_t al eforturilor unitare tangențiale calculate în ipoteza răsucirii libere și momentul interior M_ω datorat împiedicării deplanării secțiunii transversale (fig. III.132, $a-c$).

$$M_x = M_t + M_\omega. \qquad \text{(III.354)}$$

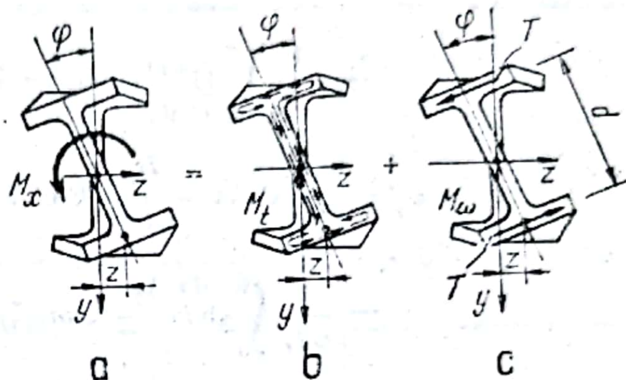


Fig. III.132

Înlocuindu-se în relația (III.354) expresiile M_t și M_ω și ordonînd termenii, se obține ecuația diferențială a răsucirii împiedicate, care permite determinarea unghiului de răsucire φ și deci a valorilor B_ω și M_ω.

$$\varphi^{IV} - k^2\varphi'' = f(x) \qquad \text{(III.355)}$$

în care:

$$k = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \qquad \text{(III.356)}$$

unde k este caracteristica de încovoiere-răsucire a barei

$$f(x) = -\frac{m_x}{EI_\omega} \qquad \text{(III.357)}$$

$m_x = \frac{\partial M_x}{\partial x}$ — momentul exterior de răsucire repartizat în lungul axei barei și calculat în raport cu linia centrelor de greutate.

Soluția generală a ecuației (III.355) va fi formată din:

— soluția ecuației diferențiale liniare, omogene cu coeficienți constanți, $\overline{\varphi}$;

— o soluție particulară $\overline{\overline{\varphi}}$, care satisface ecuația diferențială neomogenă

$$\overline{\varphi} = C_1 + C_2x + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx \qquad \text{(III.358)}$$

$$\overline{\overline{\varphi}} = \int_0^x f(x-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta. \qquad \text{(III.359)}$$

Considerînd că pentru secțiunea $x = 0$ rezultă $\varphi = \varphi_0$, $\varphi' = \varphi_0'$, $B_\omega = B_{\omega_0}$, și $M_x = M_{x_0}$, iar în lungul barei acționează un moment de răsucire repartizat $m_x(\zeta)$, soluția generală a ecuației diferențiale capătă forma:

$$\varphi_x = \varphi_0 + \varphi_0' \frac{\operatorname{sh} kx}{k} + \frac{B_{\omega_0}}{GI_t}(1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_{x_0}}{kGI_t}(kx - \operatorname{sh} kx) +$$

$$+ \frac{1}{kGI_t}\int_0^x [k(x-\zeta) - \operatorname{sh} k(x-\zeta)] m_x(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{(III.360)}$$

în care ζ este o variabilă auxiliară.

Derivînd relația (III.360) succesiv în raport cu x se obține:

$$\varphi'_x = \varphi'_0 \operatorname{ch} kx - \frac{B_{\omega_0}}{GI_t} k \operatorname{sh} kx + \frac{M_{x_0}}{GI_t}(1 - \operatorname{ch} kx) +$$

$$+ \frac{1}{GI_t} \int_0^x [1 - \operatorname{ch} k(x - \zeta)] m_x(\zeta)\, d\zeta$$

$$\varphi''_x = k\varphi'_0 \operatorname{sh} kx - \frac{B_{\omega_0}}{GI_t} k^2 \operatorname{ch} kx - \frac{M_{x_0}}{GI_t} k \operatorname{sh} kx -$$

$$- \frac{k}{GI_t} \int_0^x \operatorname{sh} k(x - \zeta) m_x(\zeta)\, d\zeta$$

$$\varphi'''_x = k^2 \varphi'_0 \operatorname{ch} kx - \frac{B_{\omega_0}}{GI_t} k^3 \operatorname{sh} kx - \frac{M_{x_0}}{GI_t} k^2 \operatorname{ch} kx -$$

$$- \frac{k^2}{GI_t} \int_0^x \operatorname{ch} k(x - \zeta) m_x(\zeta)\, d\zeta.$$

Pe baza acestor relații se pot scrie expresiile bimomentului și momentului de încovoiere-răsucire într-o secțiune de abscisă x

$$B_{\omega_x} = -\varphi''_x EI_\omega = -\frac{\varphi'_0 GI_t}{k} \operatorname{sh} kx + B_{\omega_0} \operatorname{ch} kx + \frac{M_{x_0}}{k} \operatorname{sh} kx +$$

$$+ \frac{1}{k} \int_0^x \operatorname{sh} k(x - \zeta) m_x(\zeta) d\zeta \qquad \text{(III.361)}$$

$$M_{\omega_x} = -\varphi'''_x EI_\omega = -GI_t \varphi'_0 \operatorname{ch} kx + B_{\omega_0} k \operatorname{sh} kx + M_{x_0} \operatorname{ch} kx +$$

$$+ \int_0^x \operatorname{ch} k(x - \zeta) m_x(\zeta) d\zeta \qquad \text{(III.362)}$$

Momentul rezultant de răsucire este

$$M_x = M_{x_0} + \int_0^x m_x(\zeta)\, d\zeta. \qquad \text{(III.363)}$$

Se observă că toate expresiile de mai înainte depind de variația momentului de răsucire repartizat $m_x(\zeta)$.

În tabelul III.25 sînt date, pentru cîteva tipuri de încărcări și rezemări de bare mai des întîlnite în practică, funcțiile bimomentelor, variația lor în lungul barei și valorile lor maxime. În tabelul III.26 sînt date formulele coeficienților care intervin în calculul bimomentelor, precum și valorile acestor coeficienți în funcție de argumentul kl.

Tabelul III.25

Formulele de calcul ale bimomentului de încovoiere-răsucire B_ω

Încărcarea și diagrama de variație a bimomentului	Legea de variație a bimomentului	Valori maxime[1]	
	$B_\omega = -B\dfrac{\text{ch}kx}{\text{ch}\,kl}$	$x = 0$ $x = l$	$B_\omega = B_a$ $B_\omega = B$
	$B_\omega = -Ml\dfrac{\text{sh}k(l-x)}{kl\ \text{ch}\ kl}$	$x = 0$	$B_\omega = Mlb$
	$B_\omega = -\dfrac{m}{k^2\ \text{ch}\ kl}\cdot$ $\cdot\,[kl\,\text{sh}\,k(l-x) -$ $-\,\text{ch}\,kl + \text{ch}\,kx]$	$x = 0$	$B_\omega = ml^2c$
	$B_{\omega 1} = -\dfrac{M}{k\ \text{ch}kl}\left[\left(\text{sh}\,kl -\right.\right.$ $\left.\left.-\,\text{sh}\dfrac{kl}{2}\right)\text{ch}\,kx - \text{ch}\,kl\,\text{sh}\,kx\right]$ $B_{\omega 2} = \dfrac{M}{k\,\text{ch}\,kl}\,\text{sh}\,k(l-x)\cdot$ $\cdot\left(\text{ch}\dfrac{kl}{2} - 1\right)$	$x = 0$ $x = \dfrac{l}{2}$	$B_\omega = Mld$ $B_\omega = \dfrac{Ml}{2}h$
	$B_\omega = -B_A\dfrac{\text{sh}\,k(l-x)}{\text{sh}\,kl} -$ $-\,B_B\dfrac{\text{sh}\,kx}{\text{sh}\,kl}$	$x = 0$ $x = l$	$B_\omega = B_A$ $B_\omega = B_B$

[1] Expresiile și valorile coeficienților $a \ldots w$ sînt date în tabelul III.26.

Tabelul III.25 (continuare)

Încărcarea și diagrama de variație a bimomentului	Legea de variație a bimomentului	Valori maxime	
	$B_\omega = \frac{m}{k^2}\cdot\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\operatorname{ch}\frac{kl}{2}}\right]$	$x = \frac{l}{2}$	$B_\omega = ml^2 p$
	$B_\omega = \frac{M}{2k}\frac{sh\, kx}{ch\,\frac{kl}{2}}$	$x = \frac{l}{2}$	$B_\omega = \frac{Ml}{2} f$
	$B_\omega = \frac{m}{k^2}\cdot\left[1 - \frac{kl\operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2}-x\right)}{2\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\right]$	$x = 0$, $x = l$	$B_\omega = ml^2 g$
		$x = \frac{l}{2}$	$B_\omega = ml^2 j$
	$B_{\omega 1} = \frac{M}{2k}\cdot\frac{\operatorname{ch} kx - \operatorname{ch} k\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}$	$x = 0$ $x = \frac{l}{2}$ $x = l$	$B_\omega = \frac{Ml}{2} n$

Tabelul III.25 continuare

Încărcarea și diagrama de variație a bimomentului	Legea de variație a bimomentului		Valori maxime
	$B_\omega = \frac{m}{k^2}\left[1 - \text{ch}\,kx + \frac{1 + kl\,\text{sh}\,kl - \text{ch}\,kl - \frac{k^2l^2}{2}}{kl\,\text{ch}\,kl - \text{sh}\,kl}\cdot\text{sh}\,kx\right]$	$x = l$	$B_\omega = \frac{ml^2}{2}w$
	$B_{\omega1} = \frac{M}{k}\,\frac{1}{kl\,\text{ch}\,kl - \text{sh}\,kl}\cdot\left(kl\,\text{ch}\frac{kl}{2} - \text{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right)\text{sh}\,kx$	$x = \frac{l}{2}$	$B_\omega = \frac{Ml}{2}v$
	$B_{\omega2} = \frac{M}{k}\left[\frac{\text{sh}\,kx}{kl\,\text{ch}\,kl - \text{sh}\,kl}\cdot\left(kl\,\text{ch}\frac{kl}{2} - \text{sh}\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}\right) - \text{sh}\,k\left(x - \frac{l}{2}\right)\right]$	$x = l$	$B_\omega = \frac{Ml}{2}u$

În tabelul III.27 sînt date expresiile valorilor φ, M_t, B_ω și M_ω pentru cîteva tipuri mai uzuale de încărcări și rezemări la capete.

Pentru calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunilor alcătuite din elemente drepte se folosește tabelul III.28.

Cunoscîndu-se valorile B_ω, M_t și M_ω dintr-o anumită secțiune, eforturile unitare σ și τ se calculează conform relațiilor amintite. În fig. III. 133 sînt reprezentate diagramele eforturilor unitare σ_ω, τ_t, τ_ω care apar la o secțiune dublu T solicitată la răsucire împiedicată.

Expresiile și valorile coeficienților care intră în calculul bimomentului

$$r = \frac{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}{k^2l^2\,\mathrm{sh}\,kl}; \qquad t = \frac{kl\,\mathrm{sh}\,kl - 2\,\mathrm{ch}\,kl + 2}{k^3l^3\,\mathrm{sh}\,kl}$$

$$a = \frac{1}{\mathrm{ch}\,kl}; \qquad c = \frac{kl\,\mathrm{sh}\,kl - \mathrm{ch}\,kl + 1}{k^2l^2\,\mathrm{ch}\,kl}$$

$$d = \frac{\mathrm{sh}\,kl - \mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl}; \qquad v = \frac{kl\,\mathrm{sh}\,kl - \mathrm{ch}\,kl + 1 - kl\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}{kl(kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl)}$$

$$u = \frac{\mathrm{sh}\,kl - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\,kl - \mathrm{sh}\,kl}; \qquad g = \frac{\frac{kl}{2}(\mathrm{ch}\,kl + 1) - \mathrm{sh}\,kl}{k^2l^2\,\mathrm{sh}\,kl}$$

kl	r	s	t	p	a	b	c	f
0,0	0,3333	0,1667	0,08333	0,1250	1,0000	1,0000	0,5000	0,5000
0,1	0,3331	0,1665	0,08325	0,1248	0,9960	0,9972	0,4988	0,4996
0,2	0,3324	0,1659	0,08294	0,1244	0,9803	0,9869	0,4951	0,4983
0,3	0,3314	0,1649	0,08258	0,1239	0,9566	0,9710	0,4891	0,4963
0,4	0,3298	0,1636	0,08202	0,1229	0,9250	0,9499	0,4812	0,4934
0,5	0,3279	0,1620	0,08129	0,1218	0,8868	0,9242	0,4715	0,4898
0,6	0,3256	0,1599	0,08044	0,1205	0,8435	0,8951	0,4605	0,4855
0,7	0,3229	0,1576	0,07943	0,1189	0,7967	0,8634	0,4485	0,4805
0,8	0,3199	0,1550	0,07825	0,1172	0,7477	0,8301	0,4358	0,4749
0,9	0,3166	0,1522	0,07709	0,1153	0,6977	0,7959	0,4228	0,4688
1,0	0,3130	0,1491	0,07577	0,1132	0,6480	0,7616	0,4097	0,4621
1,2	0,3052	0,1424	0,07285	0,1087	0,5522	0,6947	0,3838	0,4475
1,4	0,2966	0,1351	0,06970	0,1037	0,4649	0,6324	0,3594	0,4317
1,6	0,2875	0,1275	0,06639	0,0985	0,3880	0,5760	0,3370	0,4150
1,8	0,2781	0,1198	0,06299	0,0933	0,3218	0,5260	0,3167	0,3979
2,0	0,2686	0,1121	0,05960	0,0880	0,2658	0,4820	0,2985	0,3808
2,5	0,2452	0,0939	0,05142	0,0753	0,1631	0,3946	0,2607	0,3393
3,0	0,2239	0,0778	0,04406	0,0639	0,0993	0,3317	0,2316	0,3017
3,5	0,2046	0,0644	0,03772	0,0541	0,0603	0,2852	0,2085	0,2690
4,0	0,1877	0,0533	0,03237	0,0459	0,0366	0,2498	0,1896	0,2410
5,0	0,1600	0,0373	0,02421	0,0335	0,0135	0,2000	0,1605	0,1973
6,0	0,1389	0,0270	0,1856	0,0250	$0{,}496\cdot10^{-2}$	0,1667	0,1390	0,1658
7,0	0,1225	0,0201	0,01459	0,0192	$0{,}182\cdot10^{-2}$	0,1429	0,1225	0,1426
8,0	0,1094	0,0155	0,01172	0,0151	$0{,}671\cdot10^{-3}$	0,1251	0,1094	0,1249
9,0	0,0988	0,0123	0,00960	0,0121	$0{,}247\cdot10^{-3}$	0,1111	0,0988	0,1111
10,0	0,0900	0,0100	0,00800	0,00987	$0{,}908\cdot10^{-4}$	0,1000	0,0900	0,1000
11,0	0,0826	0,00826	0,00676	0,00820	$0{,}334\cdot10^{-4}$	0,0909	0,0826	0,0909
12,0	0,0764	0,00694	0,00579	0,00691	$0{,}123\cdot10^{-4}$	0,0833	0,0764	0,0833
13,0	0,0710	0,00592	0,00501	0,00590	$0{,}452\cdot10^{-5}$	0,0769	0,0710	0,0769
14,0	0,0663	0,00510	0,00437	0,00509	$0{,}166\cdot10^{-5}$	0,0714	0,0663	0,0714
15,0	0,0622	0,00445	0,00385	0,00444	$0{,}612\cdot10^{-6}$	0,0667	0,0622	0,0667

de încovoiere-răsucire B_ω din tabelul III.25 *Tabelul III.26*

$$s = \frac{\mathrm{sh}\, kl - kl}{k^2l^2\,\mathrm{sh}\, kl};\quad p = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2} - 1}{k^2l^2\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}};\quad b = \frac{\mathrm{th}\, kl}{kl};\quad f = \frac{\mathrm{ch}\, kl - 1}{kl\,\mathrm{sh}\, kl}$$

$$j = \frac{\mathrm{sh}\, kl - kl\,\mathrm{ch}\,\frac{kl}{2}}{k^2l^2\,\mathrm{sh}\, kl};\quad w = \frac{kl\,\mathrm{sh}\, kl - 2\,\mathrm{ch}\, kl + 2}{kl\,(kl\,\mathrm{ch}\, kl - \mathrm{sh}\, kl)}$$

$$h = \frac{\mathrm{sh}\, kl - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}{kl\,\mathrm{ch}\, kl};\quad n = \frac{\mathrm{sh}\, kl - 2\,\mathrm{sh}\,\frac{kl}{2}}{kl(\mathrm{ch}\, kl - 1)}$$

$$p = fn;\quad r + s = f;\quad sb + t = fc;\quad hf + c = b$$

$$f(r - s) = t;\quad 2(r - g) = f;\quad t = 2gf;\quad as + r = c$$

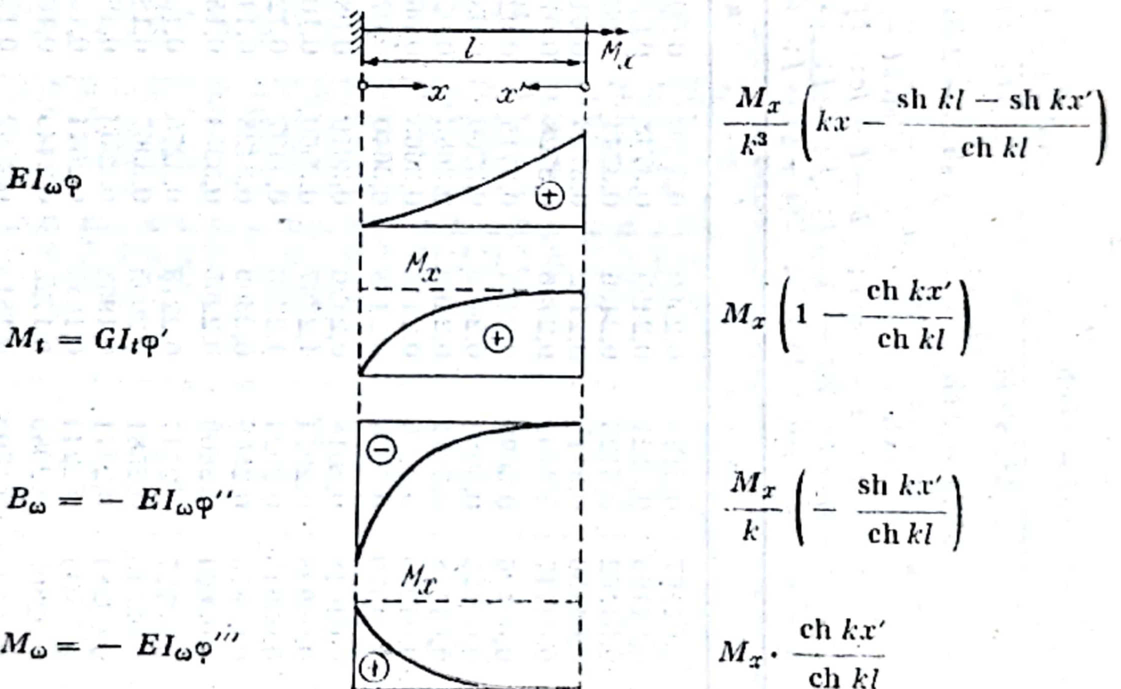
$$ar + s = bf;\quad f(a + 1) = b;\quad 2(s + g) = f;\quad d - v = b(f - v)$$

d	j	v	w	u	h	g	n	kl
0,5000	0,04167	0,3125	0,2500	0,3750	0,0000	0,08333	0,2500	0,0
0,4990	0,04165	0,3124	0,2499	0,3748	0,00124	0,08332	0,2499	0,1
0,4959	0,04162	0,3123	0,2496	0,3744	0,00491	0,08328	0,2496	0,2
0,4909	0,04156	0,3115	0,2492	0,3738	0,0108	0,08321	0,2495	0,3
0,4843	0,04147	0,3107	0,2486	0,3728	0,0187	0,08312	0,2492	0,4
0,4762	0,04136	0,3099	0,2479	0,3715	0,0281	0,08300	0,2487	0,5
0,4670	0,04123	0,3085	0,2470	0,3700	0,0388	0,08284	0,2482	0,6
0,4569	0,04108	0,3071	0,2460	0,3683	0,0503	0,08266	0,2475	0,7
0,4461	0,04090	0,3056	0,2446	0,3663	0,0622	0,08246	0,2467	0,8
0,4351	0,04070	0,3038	0,2435	0,3640	0,0743	0,08223	0,2459	0,9
0,4239	0,04048	0,3018	0,2420	0,3616	0,0862	0,08198	0,2449	1,0
0,4017	0,03998	0,2974	4,2387	0,3560	0,1087	0,08140	0,2428	1,2
0,3805	0,03940	0,2924	4,2350	0,3497	0,1286	0,08073	0,2403	1,4
0,3607	0,03875	0,2869	0,2309	0,3428	0,1453	0,07999	0,2375	1,6
0,3425	0,03804	0,2809	0,2265	0,3354	0,1590	0,07915	0,2344	1,8
0,3258	0,03727	0,2747	0,2218	0,3275	0,1696	0,07825	0,2311	2,0
0,2902	0,03515	0,2581	0,2095	0,3067	0,1857	0,07577	0,2218	2,5
0,2612	0,03284	0,2411	0,1968	0,2853	0,1907	0,07303	0,2117	3,0
0,2371	0,03044	0,2244	0,1844	0,2644	0,1890	0,07012	0,2011	3,5
0,2166	0,02803	0,2085	0,1725	0,2445	0,1834	0,06717	0,1904	4,0
0,1837	0,02347	0,1803	0,1513	0,2092	0,1674	0,06136	0,1697	5,0
0,1584	0,01946	0,1569	0,1337	0,1801	0,1501	0,05597	0,1509	6,0
0,1385	0,01609	0,1379	0,1191	0,1566	0,1342	0,05115	0,1345	7,0
0,1227	0,01333	0,1224	0,1071	0,1376	0,1204	0,04692	0,1205	8,0
0,1099	0,01111	0,1097	0,0972	0,1222	0,1086	0,04322	0,1087	9,0
0,0993	0,00933	0,0993	0,0889	0,1096	0,0987	0,04001	0,0987	10,0
0,0905	0,00789	0,0905	0,0818	0,0992	0,0902	0,03719	0,0902	11,0
0,0831	0,00674	0,0831	0,0758	0,0905	0,0829	0,03475	0,0829	12,0
0,0768	0,00580	0,0768	0,0705	0,0831	0,0767	0,03254	0,0767	13,0
0,0714	0,00504	0,0714	0,0659	0,0768	0,0713	0,03061	0,0713	14,0
0,0666	0,00441	0,0666	0,0619	0,0713	0,0666	0,02889	0,0666	15,0

Tabelul III.27

Expresiile rotirii φ, a momentului de răsucire pură M_t, a bimomentului de încovoiere-răsucire B_ω și a momentului de încovoiere-răsucire M_ω în cazul răsucirii împiedicate pentru bare având diferite situații de rezemare și încărcare

1. Consolă acționată de un moment de răsucire concentrat M_x



$EI_\omega \varphi$	$\frac{M_x}{k^3}\left(kx - \frac{\text{sh}\, kl - \text{sh}\, kx'}{\text{ch}\, kl}\right)$
$M_t = GI_t \varphi'$	$M_x\left(1 - \frac{\text{ch}\, kx'}{\text{ch}\, kl}\right)$
$B_\omega = -EI_\omega \varphi''$	$\frac{M_x}{k}\left(- \frac{\text{sh}\, kx'}{\text{ch}\, kl}\right)$
$M_\omega = -EI_\omega \varphi'''$	$M_x \cdot \frac{\text{ch}\, kx'}{\text{ch}\, kl}$

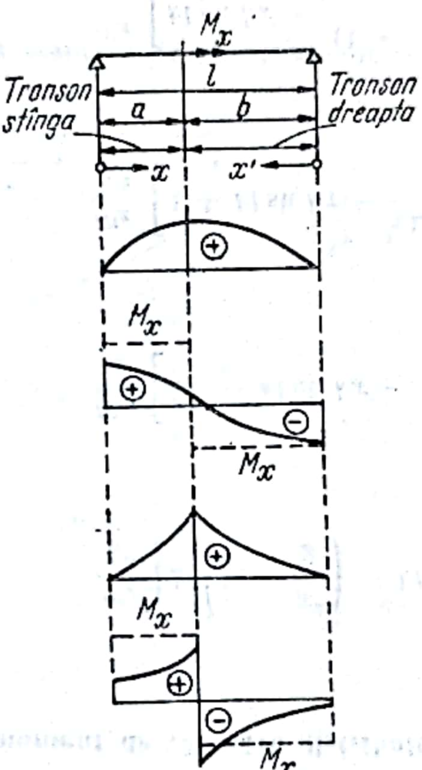
Tabelul III.27 (continuare)

2. Consolă acționată de un moment de răsucire distribuit uniform m_x

$EI_\omega \varphi$		$\frac{m_x}{k^4}\left[k^2\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) - kl\,\text{sh}\,kx + \frac{(1 + kl\,\text{sh}\,kl)(\text{ch}\,kx - 1)}{\text{ch}\,kl}\right]$
$M_t = GI_t\varphi'$		$\frac{m_x}{k}\left[kx' - kl\,\text{ch}\,kx + \frac{(1 + kl\,\text{sh}\,kl)\,\text{sh}\,kx}{\text{ch}\,kl}\right]$
$B_\omega = -EI_\omega\varphi''$		$\frac{m_x}{k^2}\left[1 + kl\,\text{sh}\,kx - \frac{(1 + kl\,\text{sh}\,kl)\,\text{ch}\,kx}{\text{ch}\,kl}\right]$
$M_\omega = -EI_\omega\varphi'''$		$\frac{m_x}{k}\left[kl\,\text{ch}\,kx - \frac{(1 + kl\,\text{sh}\,kl)\,\text{sh}\,kx}{\text{ch}\,kl}\right]$

Tabelul III. 27 (continuare)

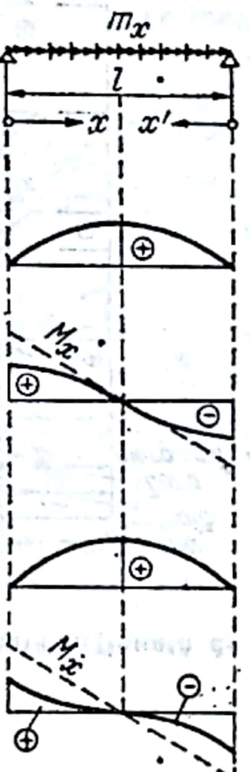
3. Grindă simplu rezemată acționată de un moment de răsucire concentrat M_x



	Tronson stînga	Tronson dreapta
$EI_\omega \varphi$	$\frac{M_x}{k^3}\left(\frac{b}{l}\,kx - \frac{\text{sh}\,kb}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{sh}\,kx\right)$	$\frac{M_x}{k^3}\left(\frac{a}{l}\,kx' - \frac{\text{sh}\,ka}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{sh}\,kx'\right)$
$M_t = GI_t\varphi'$	$M_x\left(\frac{b}{l} - \frac{\text{sh}\,kb}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{ch}\,kx\right)$	$M_x\left(-\frac{a}{l} + \frac{\text{sh}\,ka}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{ch}\,kx'\right)$
$B_\omega = -EI_\omega\varphi''$	$\frac{M_x}{k}\cdot\frac{\text{sh}\,kb}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{sh}\,kx$	$\frac{M_x}{k}\cdot\frac{\text{sh}\,ka}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{sh}\,kx'$
$M_\omega = -EI_\omega\varphi'''$	$M_x\cdot\frac{\text{sh}\,kb}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{ch}\,kx$	$M_x\left(-\frac{\text{sh}\,ka}{\text{sh}\,kl}\cdot \text{ch}\,kx'\right)$

Tabelul III.27 (continuare)

4. Grindă simplu rezemată acționată de un moment de răsucire distribuit uniform m_x



$EI_\omega \varphi$	$\frac{m_x}{k^4}\left(\frac{k^2}{2}xx' - 1 + \frac{\text{sh}\, kx + \text{sh}\, kx'}{\text{sh}\, kl}\right)$
$M_t = GI_t \varphi'$	$\frac{m_x}{k}\left[k\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{\text{ch}\, kx - \text{ch}\, kx'}{\text{sh}\, kl}\right]$
$B_\omega = -EI_\omega \varphi''$	$\frac{m_x}{k^2}\left(1 - \frac{\text{sh}\, kx + \text{sh}\, kx'}{\text{sh}\, kl}\right)$
$M_\omega = -EI_\omega \varphi'''$	$\frac{m_x}{k}\left(-\frac{\text{ch}\, kx - \text{ch}\, kx'}{\text{sh}\, kl}\right)$

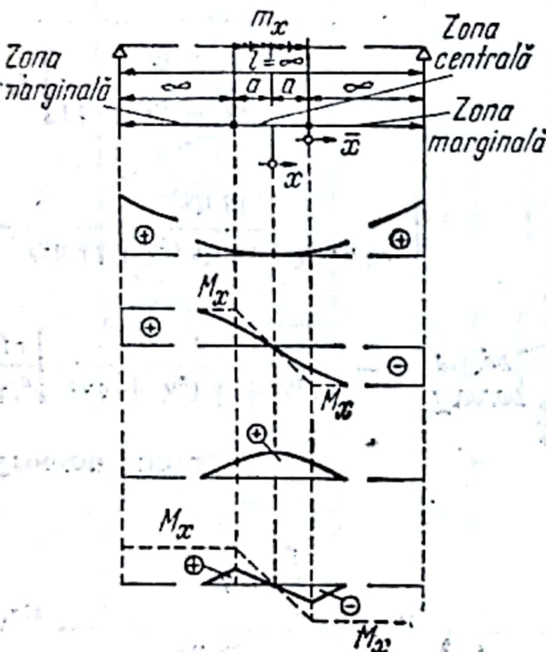
Tabelul III.27 (continuare)

5. Grindă simplu rezemată acționată de două momente de răsucire concentrate M_x.

	Zona centrală	Zona marginală
$EI_\omega \varphi$	$\frac{M_x}{k^3} e^{-ka}(1 - \mathrm{ch}\, kx)$	$\frac{M_x}{k^3}[-k\bar{x} + e^{-ka} \cdot (1 - \mathrm{ch}\, ka \cdot e^{-k\bar{x}})]$
$M_t = GI_t \varphi'$	$M_x e^{-ka}(-\mathrm{sh}\, kx)$	$M_x(-1 + e^{-ka} \cdot \mathrm{ch}\, ka \cdot e^{-k\bar{x}})$
$B_\omega = -EI_\omega \varphi''$	$\frac{M_x}{k} e^{-ka} \cdot \mathrm{ch}\, kx$	$\frac{M_x}{k} e^{-ka} \cdot \mathrm{ch}\, ka \cdot e^{-k\bar{x}}$
$M_t = -EI_\omega \varphi'''$	$M_x e^{-ka} \cdot \mathrm{sh}\, kx$	$M_x(-e^{-ka} \cdot \mathrm{ch}\, ka\, e^{-k\bar{x}})$

Tabelul III.27 (continuare)

6. Grindă simplu rezemată acționată de un moment de răsucire distribuit uniform, pe lungimea $2a$.

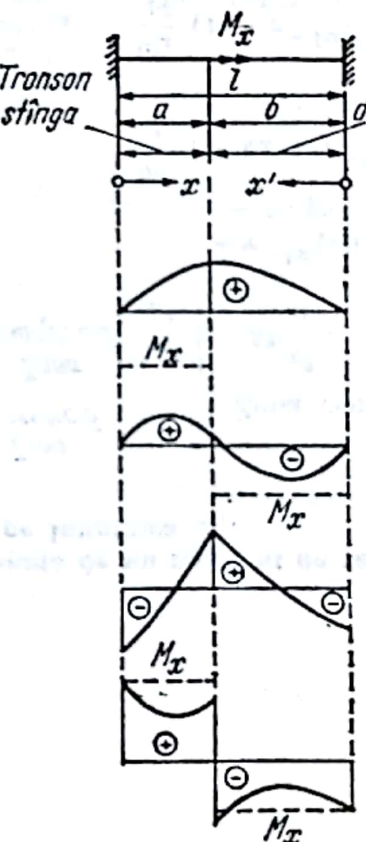


	Zona centrală	Zona marginală
$EI_\omega\varphi$	$\frac{m_x}{k^4}\left[-k^2\frac{x^2}{2}+ e^{-ka}(\text{ch}\,kx-1)\right]$	$\frac{m_x}{k^4}\left[-k^2\left(\frac{a^2}{2}+a\bar{x}\right)- e^{-ka}(\text{sh}\,ka\cdot e^{-k\bar{x}}+1)\right]$
$M_t=GI_t\varphi'$	$\frac{m_x}{k}(-kx+e^{-ka}\cdot\text{sh}\,kx)$	$\frac{m_x}{k}(-ka+e^{-ka}\cdot\text{sh}\,ka\cdot e^{-k\bar{x}})$
$B_\omega=-EI_\omega\varphi''$	$\frac{m_x}{k^2}(1-e^{-ka}\cdot\text{ch}\,kx)$	$\frac{m_x}{k^2}\cdot e^{-ka}\cdot\text{sh}\,ka\cdot e^{-k\bar{x}}$
$M_t=-EI_\omega\varphi'''$	$\frac{m_x}{k}(-e^{-ka}\cdot\text{sh}\,kx)$	$\frac{m_x}{k}(-e^{-ka}\cdot\text{sh}\,ka\cdot e^{-k\bar{x}})$

Tabelul III.27 (continuare)

7. Grindă dublu încastrată acționată de un moment de răsucire concentrat M_x.

$$\lambda_{1;2} = \frac{\dfrac{\text{sh}\,ka + \text{sh}\,kb}{\text{sh}\,kl} - 1}{2\,\text{th}\,k\dfrac{l}{2}} \pm \frac{\left(\dfrac{a-b}{l} - \dfrac{\text{sh}\,ka - \text{sh}\,kb}{\text{sh}\,kl}\right)\dfrac{l}{2}\,\text{th}\,k\dfrac{l}{2}}{l - \dfrac{2}{k}\,\text{th}\,k\dfrac{l}{2}}$$



	Tronson stînga	Tronson dreapta
$EI_\omega\varphi$	$\dfrac{M_x}{k^3}\left[\dfrac{(kb+\lambda_2)\,x + \lambda_1 x'}{l} - \dfrac{(\text{sh}\,kb+\lambda_2)\,\text{sh}\,kx + \lambda_1\,\text{sh}\,kx'}{\text{sh}\,kl}\right]$	$\dfrac{M_x}{k^3}\left[\dfrac{\lambda_2 x + (ka+\lambda_1)\,x'}{l} - \dfrac{\lambda_2\,\text{sh}\,kx + (\text{sh}\,ka+\lambda_1)\,\text{sh}\,kx'}{\text{sh}\,kl}\right]$
$M_t = GI_t\varphi'$	$M_x\left[\dfrac{kb+\lambda_2-\lambda_1}{kl} - \dfrac{(\text{sh}\,kb+\lambda_2)\,\text{ch}\,kx - \lambda_1\,\text{ch}\,kx'}{\text{sh}\,kl}\right]$	$M_x\left[\dfrac{\lambda_2 - ka - \lambda_1}{kl} - \dfrac{\lambda_2\,\text{ch}\,kx - (\text{sh}\,ka+\lambda_1)\,\text{ch}\,kx'}{\text{sh}\,kl}\right]$
$B_\omega = -EI_\omega\varphi''$	$\dfrac{M_x}{k}\cdot\dfrac{(\text{sh}\,kb+\lambda_2)\,\text{sh}\,kx + \lambda_1\,\text{sh}\,kx'}{\text{sh}\,kl}$	$\dfrac{M_x}{k}\cdot\dfrac{\lambda_2\,\text{sh}\,kx + (\text{sh}\,ka+\lambda_1)\,\text{sh}\,kx'}{\text{sh}\,kl}$
$M_\omega = -EI_\omega\varphi'''$	$M_x\cdot\dfrac{(\text{sh}\,kb+\lambda_2)\,\text{ch}\,kx - \lambda_1\,\text{ch}\,kx'}{\text{sh}\,kl}$	$M_x\cdot\dfrac{\lambda_2\,\text{ch}\,kx - (\text{sh}\,ka+\lambda_1)\,\text{ch}\,kx'}{\text{sh}\,kl}$

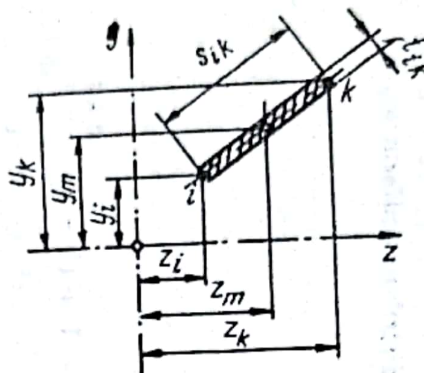
Tabelul III.27 (continuare)

8. Grindă dublu încastrată acţionată de un moment de răsucire distribuit uniform m_x

$$\lambda = 1 - \frac{k\frac{l}{2}}{\operatorname{th} k\frac{l}{2}}$$

$EI_\omega\varphi$	$\frac{m_x}{k^4}\left[k^2\left(\frac{l}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) + \lambda\frac{x+x'}{l} - 1 + (1-\lambda)\frac{\operatorname{sh} kx + \operatorname{sh} kx'}{\operatorname{sh} kl}\right]$
$M_t = GI_t\varphi'$	$\frac{m_x}{k}\left[k\left(\frac{l}{2} - x\right) + (1-\lambda)\frac{\operatorname{ch} kx - \operatorname{ch} kx'}{\operatorname{sh} kl}\right]$
$B_\omega = -EI_\omega\varphi''$	$\frac{m_x}{k^2}\left[1 - (1-\lambda)\frac{\operatorname{sh} kx + \operatorname{sh} kx'}{\operatorname{sh} kl}\right]$
$M_\omega = -EI_\omega\varphi'''$	$\frac{m_x}{k}\left[-(1-\lambda)\frac{\operatorname{ch} kx - \operatorname{ch} kx'}{\operatorname{sh} kl}\right]$

Elemente pentru calculul caracteristicilor geometrice la răsucire

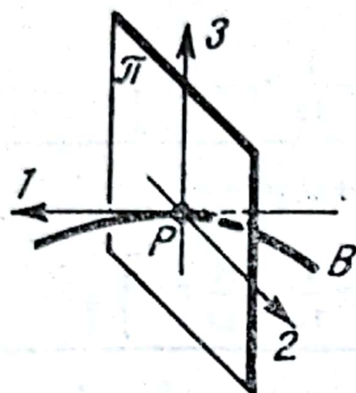


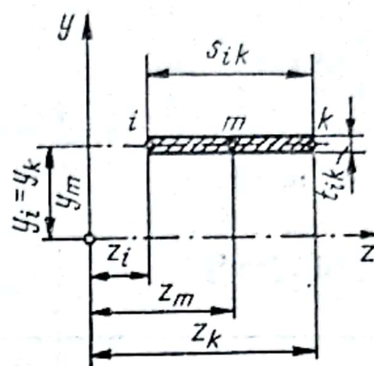
ΔA – aria elementului considerat

Moment static $S_y = \int_A z\,dA$ [cm³]	$\frac{1}{2}\Delta A(z_i + z_k)$ $\Delta A z_m$
Moment static $S_z = \int_A y\,dA$ [cm³]	$\frac{1}{2}\Delta A(y_i + y_k)$ $\Delta A y_m$
Moment static sectorial $S_\omega = \int_A \omega\,dA$ [cm⁴]	$\frac{1}{2}\Delta A(\omega_i + \omega_k)$ $\Delta A\omega_m$
Moment de inerție centrifugal $I_{zy} = \int_A zy\,dA$ [cm⁴]	$\frac{1}{6}\Delta A(2z_iy_i + 2z_ky_k + z_ky_i + z_iy_k)$ $\Delta A\left[z_my_m + \frac{1}{12}(z_k - z_i)(y_k - y_i)\right]$
Moment static sectorial liniar în raport cu axa Oz $\int_A z\omega\,dA$ [cm⁵]	$\frac{1}{6}\Delta A(2z_i\omega_i + 2z_k\omega_k + z_k\omega_i + z_i\omega_k)$ $\Delta A\left[z_m\omega_m + \frac{1}{12}(z_k - z_i)(\omega_k - \omega_i)\right]$
Moment static sectorial liniar în raport cu axa Oy $\int_A y\omega\,dA$ [cm⁵]	$\frac{1}{6}\Delta A(2y_i\omega_i + 2y_k\omega_k + y_i\omega_k + y_k\omega_i)$ $\Delta A\left[y_m\omega_m + \frac{1}{12}(y_k - y_i)(\omega_k - \omega_i)\right]$

Tabelul III.28

împiedicată ale secţiunilor alcătuite din dreptunghiuri elementare





$\Delta A z_i$ $\Delta A z_m$	$\frac{1}{2}\Delta A(z_i + z_k)$ $\Delta A z_m$
$\frac{1}{2}\Delta A(y_i + y_k)$ $\Delta A y_m$	$\Delta A y_i$ $\Delta A y_m$
$\frac{1}{2}\Delta A(\omega_i + \omega_k)$ $\Delta A \omega_m$	$\frac{1}{2}\Delta A(\omega_i + \omega_k)$ $\Delta A \omega_m$
$\frac{1}{2}\Delta A(z_i y_i + z_i y_k)$ $\Delta A z_m y_m$	$\frac{1}{2}\Delta A(z_i y_i + z_k y_i)$ $\Delta A z_m y_m$
$\frac{1}{2}\Delta A(z_i \omega_i + z_i \omega_k)$ $\Delta A z_m \omega_m$	$\frac{1}{6}\Delta A(2z_i\omega_i + 2z_k\omega_k + z_i\omega_k + z_k\omega_i)$ $\Delta A\left[z_m\omega_m + \frac{1}{12}(z_k - z_i)(\omega_k - \omega_i)\right]$
$\frac{1}{6}\Delta A(2y_i\omega_i + 2y_k\omega_k + y_i\omega_k + y_k\omega_i)$ $\Delta A\left[y_m\omega_m + \frac{1}{12}(y_k - y_i)(\omega_k - \omega_i)\right]$	$\frac{1}{2}\Delta A(y_i\omega_i + y_i\omega_k)$ $\Delta A y_m \omega_m$

Moment de inerție $I_y = \int z^2 \, dA$ [cm⁴]	$\frac{1}{3}\Delta A(z_i^2 + z_i z_k + z_k^2)$ $\Delta A\left[z_m^2 + \frac{1}{12}(z_k - z_i)^2\right]$
Moment de inerție $I_z = \int_A y^2 \, dA$ [cm⁴]	$\frac{1}{3}\Delta A(y_i^2 + y_i y_k + y_k^2)$ $\Delta A\left[y_m^2 + \frac{1}{12}(y_k - y_i)^2\right]$
Moment de inerție sectorial $I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA$ [cm⁶]	$\frac{1}{3}\Delta A(\omega_i^2 + \omega_i \omega_k + \omega_k^2)$ $\Delta A\left[\omega_m^2 + \frac{1}{12}(\omega_k - \omega_i)^2\right]$

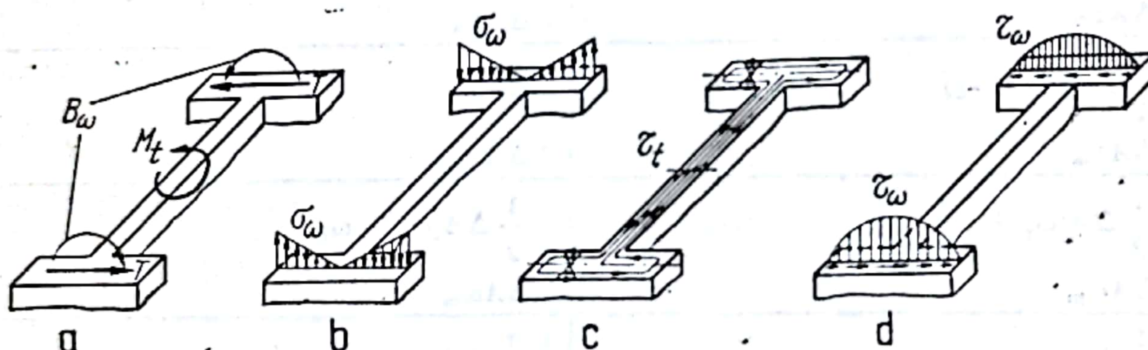


Fig. III.133

9.4. Răsucirea barelor cu pereți subțiri avînd profilul închis

9.4.1. Caracteristici geometrice ale secțiunilor. În cazul secțiunilor închise, expresia deplanării în direcția axei Ox este

$$u(x) = u_0(x) - \theta\left[\int_0^s r\,ds - \psi\int_0^s \frac{ds}{t}\right] \qquad \text{(III.364)}$$

unde $\psi = \dfrac{2A_m}{\oint \dfrac{ds}{t}}$ este funcția de torsiune, iar A_m, aria mărginită de linia mediană a conturului închis.

Tabelul III.28 (continuare)

$\Delta A z_i^2$	$\frac{1}{3}\Delta A(z_i^2 + z_i z_k + z_k^2)$
$\Delta A z_m^2$	$\Delta A\left[z_m^2 + \frac{1}{12}(z_k - z_i)^2\right]$
$\frac{1}{3}\Delta A(y_i^2 + y_i y_k + y_k^2)$	$\Delta A y_i^2$
$\Delta A\left[y_m^2 + \frac{1}{12}(y_k - y_i)^2\right]$	$\Delta A y_m^2$
$\frac{1}{3}\Delta A(\omega_i^2 + \omega_i\omega_k + \omega_k^2)$	$\frac{1}{3}\Delta A(\omega_i^2 + \omega_i\omega_k + \omega_k^2)$
$\Delta A\left[\omega_m^2 + \frac{1}{12}(\omega_k - \omega_i)^2\right]$	$\Delta A\left[\omega_m^2 + \frac{1}{12}(\omega_k - \omega_i)^2\right]$

Dacă se notează:

$$\overline{\omega} = \int_0^s r\,\mathrm{d}s - \psi\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{t}, \tag{III.365}$$

aceasta reprezintă deplanarea unitară, adică deplasarea relativă a unui punct al secțiunii transversale în direcția axei Ox cînd în urma deplanării libere secțiunea se rotește cu un radian pe unitatea de lungime.

Pentru secțiunile poligonale expresia deplanării unitare se scrie sub forma

$$\overline{\omega} = \sum_{s=0}^{s} r_{ik}\cdot s_{ik} - \psi\sum_{s=0}^{s}\frac{s_{ik}}{t_{ik}} \tag{III.366}$$

unde

$$\psi = \frac{2A_m}{\sum\frac{s_{ik}}{t_{ik}}}. \tag{III.367}$$

Poziția centrului de răsucire se stabilește cu aceleași relații ca în cazul secțiunilor deschise, cu observația că în loc de ω se introduce $\overline{\omega}$. Raza vectoare origine se alege astfel încît

$$\oint \overline{\omega}\,\mathrm{d}A = 0.$$

Dacă secţiunea are o axă de simetrie centrul de răsucire se află pe ea, iar în cazul secţiunilor cu două axe de simetrie acesta se află la intersecţia lor.

Momentul de inerţie sectorial se determină cu relaţia

$$I_{\overline{\omega}} = \int \overline{\omega}^2 \, \mathrm{d}A.$$

Caracteristica geometrică a secţiunii la răsucire pură se stabileşte cu expresia

$$I_t = 2\psi A_m. \qquad \text{(III.368)}$$

Dacă secţiunea are porţiuni deschise şi închise expresia devine

$$I_t \approx 2\psi A_m + \frac{1}{3} \sum s_{ik} \cdot t_{ik}^3. \qquad \text{(III.369)}$$

Momentul static sectorial are expresia

$$\overline{S}_{\overline{\omega}} = S_{\overline{\omega}} - \frac{\oint S_{\overline{\omega}} \, \mathrm{d}\omega}{2A_m} \qquad \text{(III.370)}$$

$S_{\overline{\omega}} = \int_A \overline{\omega} \, \mathrm{d}A$ pentru secţiunea considerată tăiată în dreptul intersecţiei axei de simetrie cu secţiunea.

9.4.2. **Eforturi unitare şi deformaţii.** Admiţînd ipoteza simplificatoare că deplanarea secţiunii transversale în cazul răsucirii împiedicate a barelor cu pereţi subţiri cu secţiunea închisă este proporţională cu deplanarea din cazul răsucirii libere, raportul de proporţionalitate fiind

$$\frac{\beta'(x)}{\varphi'(x)} = f(x)$$

Ecuaţia diferenţială a răsucirii împiedicate la barele cu pereţi subţiri cu secţiunea închisă şi la care momentul de răsucire exterior M_x are o expresie oarecare, este:

$$\varphi^{IV} - \bar{k}^2 \varphi'' = \nu \frac{m_x}{EI_{\overline{\omega}}} - \frac{m_x''}{GI_c} \qquad \text{(III.371)}$$

unde:

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_{\overline{\omega}}} \nu}. \qquad \text{(III.372)}$$

$$\nu = 1 - \frac{I_t}{I_c} \qquad \text{(III.373)}$$

Tabelul III.29

Expresiile bimomentului de încovoiere-răsucire la o consolă cu secțiune tubulară cu contur dreptunghiular pentru diverse tipuri de încărcări

Felul solicitării	Ecuația bimomentului
	$B_{\bar{\omega}}(x) = M\frac{\nu}{\bar{k}}(\operatorname{sh}\bar{k}x - \operatorname{th}\bar{k}l\operatorname{ch}\bar{k}x),$ unde $\bar{k} = \sqrt{\frac{\nu G I_t}{E I_{\bar{\omega}}}}$ $\lvert B_{\bar{\omega}_{max}}\rvert = B_{\bar{\omega}}(0) = M\frac{\nu}{\bar{k}}\operatorname{th}\bar{k}l$
	$B_{\bar{\omega}}(x) = M\frac{\nu}{\bar{k}}\left\{\operatorname{sh}\bar{k}x + \left[\frac{\operatorname{sh}\bar{k}(l-a)}{\operatorname{ch}\bar{k}l} - \operatorname{th}\bar{k}l\right]\operatorname{ch}\bar{k}x\right\}$ $\lvert B_{\bar{\omega}_{max}}\rvert = B_{\bar{\omega}}(0) = M\frac{\nu}{\bar{k}}\left[\frac{\operatorname{sh}\bar{k}(l-a)}{\operatorname{ch}\bar{k}l} - \operatorname{th}\bar{k}l\right]$
	$B_{\bar{\omega}}(x) = ml\frac{\nu}{\bar{k}}\left[\operatorname{sh}\bar{k}x - \frac{1}{\bar{k}l\operatorname{ch}\bar{k}l}(1 + \bar{k}l\operatorname{sh}\bar{k}l)\operatorname{ch}\bar{k}x + \frac{1}{\bar{k}l}\right]$ $\lvert B_{\bar{\omega}_{max}}\rvert = B_{\bar{\omega}}(0) = ml\frac{\nu}{\bar{k}}\left(\frac{\operatorname{ch}\bar{k}l - 1}{\bar{k}l\operatorname{ch}\bar{k}l} - \operatorname{th}\bar{k}l\right)$

ν este *coeficientul de deplanare* sau *coeficientul lui Ebner*.

$$I_c = \oint r^2\,\mathrm{d}A \tag{III.374}$$

În cazurile curente întîlnite în practică M_x este un polinom al cărui grad nu este mai mare decît doi, astfel că ecuația (III.371) se poate scrie

$$\varphi^{IV} - \bar{k}^2\varphi'' = \frac{m_x\nu}{EI_{\bar{\omega}}}. \tag{III.375}$$

Se observă că relația este identică cu cea obținută în cazul barelor cu secțiunea deschisă, aici intervenind în plus termenul ν.

Efortul unitar normal suplimentar $\sigma_{\overline{\omega}}$ produs de răsucirea împiedicată se determină cu expresia.

$$\sigma_{\overline{\omega}} = \frac{B_{\overline{\omega}}\overline{\omega}}{I_{\overline{\omega}}}. \qquad \text{(III.376)}$$

Bimomentul de încovoiere-răsucire se determină din ecuația diferențială

$$\frac{d^2 B_{\overline{\omega}}}{dx^2} - \bar{k}^2 \cdot B_{\overline{\omega}} = \nu\, m_x. \qquad \text{(III.377)}$$

În tabelul III.29 se dau expresiile bimomentului de încovoiere-răsucire $B_{\overline{\omega}}$ pentru cîteva tipuri de încărcări în cazul unei console cu secțiune tubulară cu contur dreptunghiular. Efortul unitar tangențial datorit împiedicării răsucirii este dat de expresia.

$$\tau_{\overline{\omega}} = \frac{M_t}{2A_m\, t} - \frac{M_{\overline{\omega}}\, S_{\overline{\omega}}}{t\, I_{\overline{\omega}}} \qquad \text{(III.378)}$$

unde:

$M_{\overline{\omega}} = \dfrac{dB_{\overline{\omega}}}{dx}$ este moment de încovoiere-răsucire.

PARTEA A DOUA

TEORIA ELASTICITĂȚII

10. ELEMENTE DE ELASTICITATE PLANĂ[1)]

10.1. Generalități

10.1.1. **Obiect.** Teoria elasticității, ca și rezistența materialelor, are ca obiect determinarea stării de eforturi unitare, a stării de deformații, precum și a deplasărilor punctelor corpurilor elastice, supuse unor acțiuni oarecare. Spre deosebire însă de rezistența materialelor, unde, pentru ușurarea calculelor, se admite ipoteza simplificatoare a secțiunilor plane (Bernoulli), care limitează în general aplicarea formulelor la corpuri cu fibră medie, respectiv bare și grinzi, teoria elasticității caută soluționarea cît mai generală și riguroasă a problemelor, indiferent de forma corpurilor. De aceea în practica inginerească ea este folosită la calculul eforturilor unitare și deplasărilor în elemente de construcții, la care, prin forma lor, nu mai sînt aplicabile formulele stabilite în rezistența materialelor.

10.1.2. **Ipoteze.** Ipotezele admise în teoria elasticității sînt aceleași ca și în rezistența materialelor (v. pct. 1.2) cu excepția ipotezei secțiunilor plane care este înlocuită cu ipoteza menținerii continuității corpurilor, conform căreia corpurile își păstrează continuitatea și după deformare. Pe baza acestei ipoteze se pot scrie așa numitele ecuații de continuitate, respectiv de compatibilitate, care adăugate la celelalte relații permite rezolvarea problemelor.

10.1.3. **Principii admise în teoria elasticității**

Acestea sînt:

1) *Principiul independenței acțiunilor*, respectiv *principiul suprapunerii efectelor* (v. pct. 1.2).

2) *Principiul lui Saint Venant*, conform căruia: „un sistem de forțe aplicat pe o regiune mică a unui corp dă naștere în corp la o stare de eforturi unitare care, cu excepția unei zone mici din jurul punctului lor de aplicație, depinde numai de acțiunea lor rezultantă și nu de modul lor de distribuție în zona de aplicație".

10.1.4. **Precizarea problemelor.** Starea de eforturi unitare într-un punct al unui corp elastic plan acționat de forțe lucrînd în planul lui, numit și *șaibă*, este complet determinată de tensorul eforturilor unitare T_σ (formula (III.9b) din acel punct, iar starea de deformații de tensorul deformațiilor specifice T_ε [formula (III.20), în care $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$].

Rezultă că problemele elasticității plane pentru o șaibă acționată oricum sînt complet determinate dacă se cunosc următoarele opt funcții, și anume:

— trei funcții ale eforturilor unitare

$$\sigma_x = f_1(x, y); \; \sigma_y = f_2(x, y); \; \tau_{xy} = \tau_{yx} = f_3(x, y), \qquad \text{(III.379a)}$$

---

1) Pentru completări vezi: A. Caracostea. Elasticitatea plană, în „Manual pentru calculul construcțiilor" Ediția 1959 secțiunea V, precum și A. Caracostea și M. Soare. „Teoria elasticității". București, I.C.F., 1956.

— trei funcții ale deformațiilor specifice

$$\varepsilon_x = f_4(x, y);\ \varepsilon_y = f_5(x, y);\ \gamma_{xy} = f_6(x,y); \tag{III.379b}$$

— două funcții ale deplasărilor

$$u = f_7(x, y);\ v = f_8(x, y). \tag{III.379c}$$

10.2. Elasticitatea plană în coordonate carteziene

10.2.1. Ecuațiile generale. Acestea sînt:

1) *Ecuațiile de echilibru static* (ecuațiile lui Navier) care se obțin din cele trei ecuații de echilibru ale unui element de șaibă (fig. III.134) și se scriu:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + m_x = 0;\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + m_y = 0;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \tag{III.380}$$

2) *Ecuațiile de deformații* (ecuațiile lui Cauchy) se obțin exprimînd deformațiile specifice în funcție de deplasări (fig. III.135).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{III.381}$$

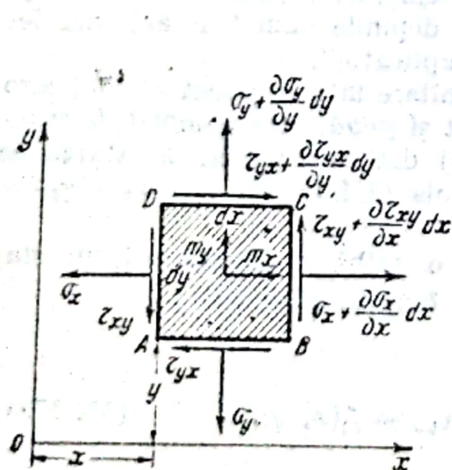


Fig. III. 134

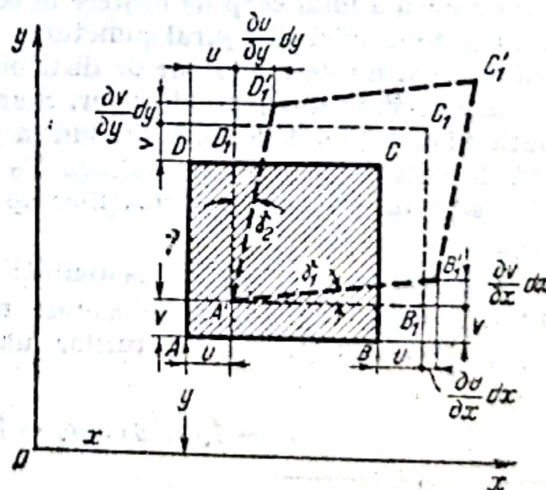


Fig. III. 135

3) *Ecuaţiile fizice* (Ecuaţiile lui Poisson) reprezintă *legea generalizată a lui Hooke* şi se scriu sub una din următoarele două forme:

— deformaţiile specifice în funcţie de eforturile unitare

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha_t\,\Delta t;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha_t\,\Delta t \qquad \text{(III.382a)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy};$$

în care Δt este variaţia de temperatură.

— eforturile unitare în funcţie de deformaţiile specifice

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y - (1+\mu)\,\alpha_t\,\Delta t]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x - (1+\mu)\,\alpha_t\,\Delta t] \qquad \text{(III.382b)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{1-\mu}{2}\,\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.$$

4) *Ecuaţiile de compatibilitate* (ecuaţiile lui Saint-Venant) se obţin din ecuaţii de deformaţie, eliminînd deplasările u şi v, şi se pot exprima în funcţie de:

— deformaţiile specifice:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}; \qquad \text{(III.383a)}$$

— eforturile unitare

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\mu)\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) + E\alpha_t\,\Delta t = 0 \qquad \text{(III.383b)}$$

5) *Reducerea sistemelor de ecuaţii generale.* Cele 4 ecuaţii generale se pot reduce în raport cu:

— eforturile unitare

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + m_x = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + m_y = 0 \qquad \text{(III.384)}$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\mu)\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) + E\alpha_t\,\Delta t = 0$$

— deplasările

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - 2(1+\mu)\alpha t\frac{\partial t}{\partial x} + 2\frac{1-\mu^2}{E}m_x = 0$$

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 2(1+\mu)\alpha_t\frac{\partial t}{\partial y} + 2\frac{1-\mu^2}{E}m_y = 0. \quad \text{(III. 385)}$$

Rezolvarea problemei elasticității plane se reduce la integrarea unuia din sistemele de ecuații cu derivate parțiale de mai înainte, din care, pe baza relațiilor prezentate anterior, se deduc apoi toate cele opt funcții căutate (III. 379).

10.2.2. **Condițiile la limită.** Constantele și funcțiile arbitrare de integrare rezultate din integrarea ecuațiilor diferențiale de mai înainte, se determină pe baza condițiilor la limită, respectiv a condițiilor pe contur, care se pot exprima în eforturi sau în deplasări, după cum urmează:

1) În eforturi se pune condiția ca în orice punct de pe conturul corpului considerat, eforturile unitare trebuie să echilibreze sarcinile exterioare cunoscute, care acționează în acel punct. Conform fig. III.136 dacă BC este latura elementului ce limitează corpul în punctul considerat, rezultă:

$$p_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$p_t = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \quad \text{(III.386)}$$

Dacă sarcina p se descompune după axe rezultă (fig. III.137)

$$p_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha$$

$$p_y = \sigma_y \sin\alpha + \tau_{xy}\cos\alpha. \quad \text{(III.387)}$$

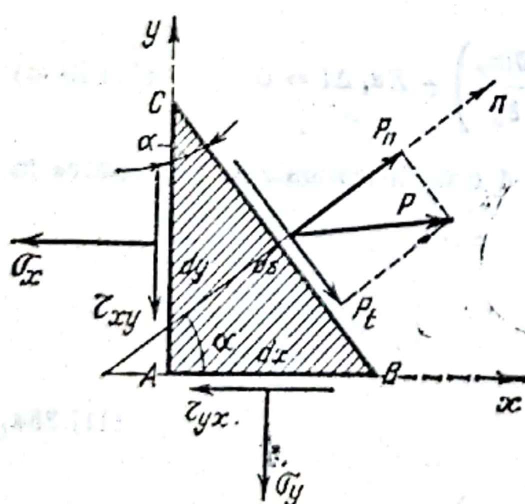


Fig. III. 136

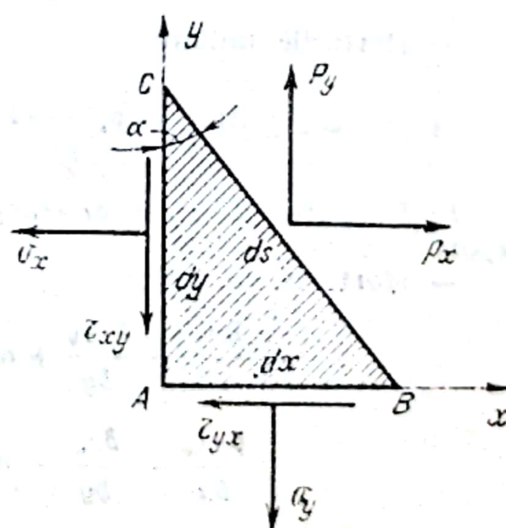


Fig. III. 137

2) Condiţiile la limită în deplasări, în care, conform fig. III.138, rezultă direct relaţiile:

$$u_n = u\cos\alpha + v\sin\alpha$$
$$v_n = v\cos\alpha - u\sin\alpha \qquad \text{(III.388a)}$$

de unde rezultă relaţia inversă:

$$u = u_n\cos\alpha - v_n\sin\alpha$$
$$v = u_n\sin\alpha + v_n\cos\alpha. \qquad \text{(III.388b)}$$

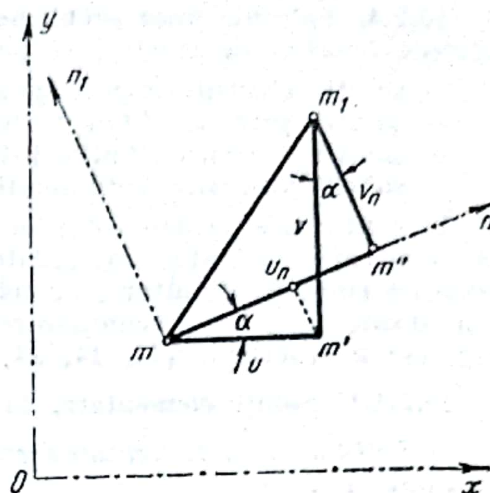


Fig. III. 138

10.2.3. **Funcţia eforturilor unitare.** Metoda generală de rezolvare a sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (III.380) a fost stabilită în anul 1862 de Airy, şi ea constă în a găsi o funcţie $F_\sigma(x,y)$ numită *funcţia eforturilor unitare* sau *funcţia Airy* din care, prin derivare de două ori, să rezulte direct eforturile unitare

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial y^2}\ ;\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial x^2}\ ;\ \tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial x\,\partial y} + m_x y + m_y x\right). \qquad \text{(III.389)}$$

Relaţiile (III.389) satisfac primele două ecuaţii de echilibru (III.380) ori care ar fi F_σ. Pentru ca şi ecuaţia a treia să fie satisfăcută trebuie ca:

$$\sigma_x + \sigma_y = \Delta F_\sigma$$

să satisfacă şi ecuaţia de continuitate

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha_t\,\Delta t = \Delta\Delta F_\sigma + E\alpha_t\,\Delta t = 0 \qquad \text{(III.390)}$$

în care:

$$\Delta\Delta F_\sigma = \frac{\partial^4 F_\sigma}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F_\sigma}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F_\sigma}{\partial y^4}. \qquad \text{(III.391)}$$

Cunoscînd funcţia Airy F_σ, prin derivare de două ori conform formulelor (III.389), se obţin eforturile unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy}, din care, pe baza relaţiilor (III.382a) se obţin deformaţiile specifice.

Deplasările rezultă integrînd relaţiile (III.381), în care acestea se exprimă în eforturi unitare, obţinînd expresiile

$$Eu = \int(\sigma_x - \mu\sigma_y)\,dx + E\alpha_t\int\Delta t\,dx + Y \qquad \text{(III.392a)}$$

$$Ev = \int(\sigma_y - \mu\sigma_x)\,dy + E\alpha_t\int\Delta t\,dy + X \qquad \text{(III.392b)}$$

unde X este o funcţie numai de x şi Y numai de y.

10.2.4. Soluțiile unor probleme de elasticitate plană în coordonate carteziene. Soluțiile funcției de eforturi se pot obține sub una din următoarele forme:

— soluții elementare prin polinoame sau serii de puteri;
— soluții prin serii trigonometrice;
— soluții sub formă finită, prin funcții transcendente;
— soluții numerice aproximative prin diferențe finite sau elemente finite.

În continuare se dau soluțiile cîtorva probleme întîlnite în practica inginerească. Pentru fiecare caz tratat sînt redate numai funcția eforturilor unitare (Airy) precum și expresiile eforturilor unitare. Pe figuri sînt reprezentate variația eforturilor unitare pe secțiuni caracteristice, precum și a componentelor u și v ale deplasărilor, a căror expresii se găsesc în lucrările [11, 14, 24, 84].

10.2.4.1. Soluții elementare, în care funcția Airy este exprimată printr-un polinom.

1) *Șaibă dreaptă de secțiune dreptunghiulară supusă la încovoiere pură* (fig. III. 139,*a*). Funcția Airy

$$F_\sigma = -\frac{M}{4h^2}y^3. \qquad \text{(III.393)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_x = -\frac{3M}{2h^3}y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0$$
$$\sigma_{max} = p = \frac{3M}{2h^2} = 1{,}5\frac{M}{h^2}. \qquad \text{(III.394)}$$

Repartizarea eforturilor unitare și deplasărilor este arătată în fig. III.139,*b*.

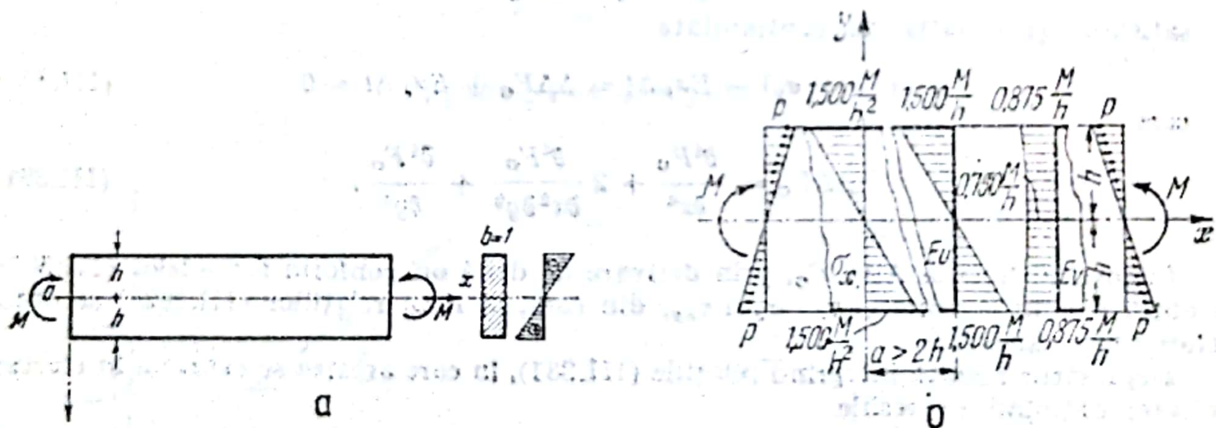


Fig. III.139

2) *Șaibă dreptunghiulară avînd a ⩾ 2 h supusă la o sarcină uniform repartizată* (fig. III.140).

Funcția Airy

$$F_\sigma = -\frac{p}{40h^3}[10h^3x^2 + 15h^2x^2y + (5a^2 - 2h^2)y^3 + (y^5 - 5y^3x^2)]. \qquad \text{(III.395)}$$

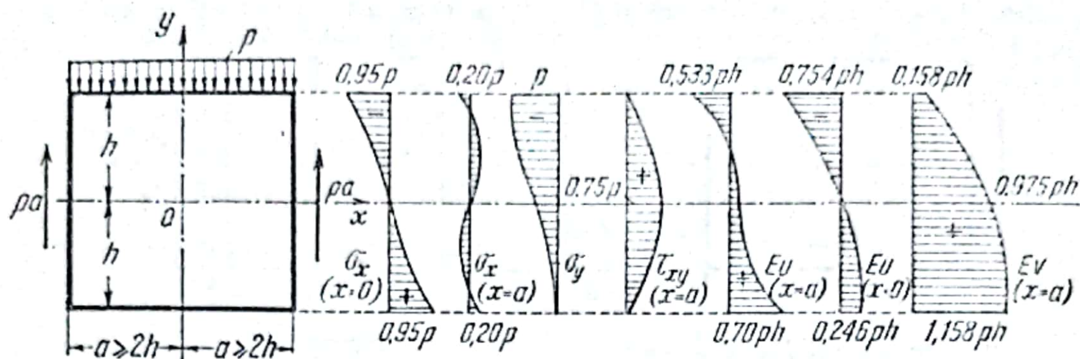


Fig. III.140

Eforturile unitare

$$\sigma_x = -\frac{3p}{4h^3}(a^2 - x^2)\,y + \frac{p}{10h^3}(3h^2 - 5y^2)\,y$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{4h^3}(2h^3 + 3h^2y - y^3) \qquad \text{(III.396)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3p}{4h^3}\,x(h^2 - y^2).$$

În fig. III.140 sînt arătate variaţiile eforturilor unitare şi deplasărilor pe secţiunile $x = 0$ şi $x = a$. Pentru $a < 2\ h$ formulele nu mai sînt corecte, folosindu-se în acest caz relaţiile de la grinzi pereţi, expuse în lucrarea [91].

3) *Şaibă dreptunghiulară supusă la greutate proprie* (fig. III.141 $a-c$). În acest caz $m_x=0$ şi $m_y=-g$.

Funcţia Airy

$$F_\sigma = \frac{g}{2}\,x^2\,(h + y) \qquad \text{(III.397)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_x = 0\,; \quad \sigma_y = g(h + y)\,; \quad \tau_{xy} = 0 \qquad \text{(III.398)}$$

4) *Şaibă dreptunghiulară în consolă avînd* $l \geqslant 4h$ *acţionată de o forţă concentrată la capătul liber* (fig. III.142).

Funcţia Airy

$$F_\sigma = \frac{3Pxy}{4h} - \frac{Pxy^3}{4h^3}. \qquad \text{(III.399)}$$

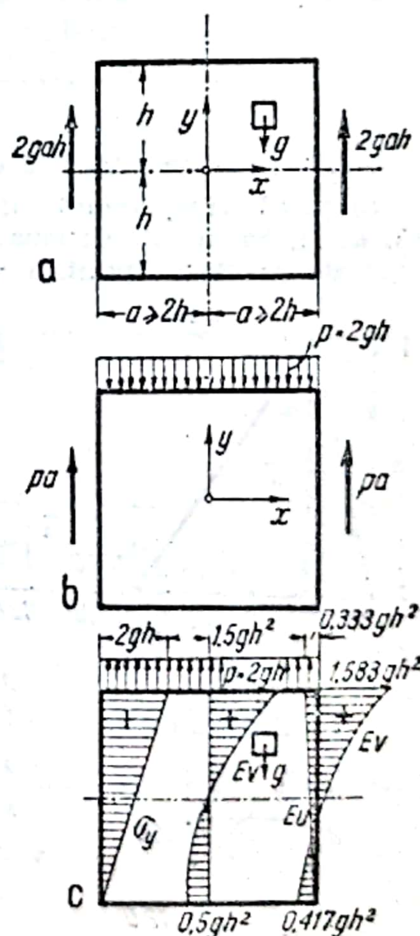


Fig. III.141

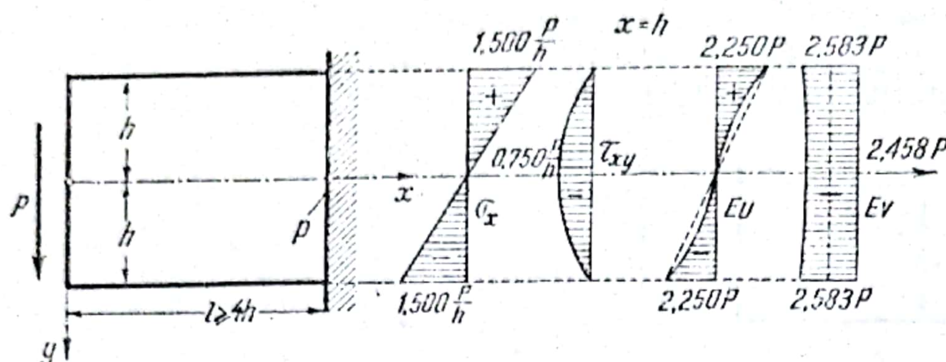


Fig. III.142

Eforturile unitare

$$\sigma_x = \frac{3P\,xy}{2h^3}\;;\;\sigma_y = 0\;;\;\tau_{xy} = \frac{3P(h^2 - y^2)}{4h^3}\,. \tag{III.400}$$

Ecuația fibrei medii deformate

$$v(x) = \frac{3P}{2Eh^3}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2x}{2} + \frac{l^3}{3}\right). \tag{III.401}$$

Relațiile de mai înainte corespund celor stabilite în Rezistența materialelor.

5) *Șaibă triunghiulară încastrată la bază supusă la o sarcină hidrostatică* (fig. III. 143, *a*, *b*). Șaiba este acționată de forțele masice de greutate g și de împingerea unui lichid de greutate specifică γ.

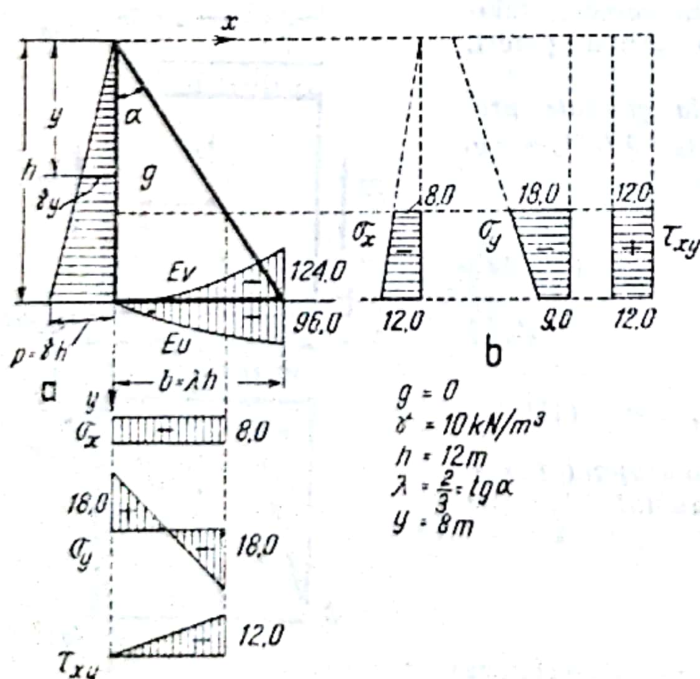


Fig. III.143

Funcția Airy

$$F_\sigma = \frac{1}{6}\left(\frac{g}{\mathrm{tg}\alpha} - \frac{2\gamma}{\mathrm{tg}^3\alpha}\right)x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{tg}^2\alpha} - g\right)x^2y - \frac{\gamma}{6}y^3. \tag{III.402}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_x = -\gamma y\,;\;\sigma_y = \left(\frac{g}{\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{2\gamma}{\mathrm{tg}^3\alpha}\right)x + \left(\frac{\gamma}{\mathrm{tg}^2\alpha} - g\right)y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{\mathrm{tg}^2\alpha}\,x. \tag{III.403}$$

6) *Nod de cadru*. Rigla transmite numai un moment M, care produce în stîlp, la distanța l de axa grinzii forțele tăietoare T_y și $-T_y(T_y = M/2l)$ (fig. III.144, *a*).

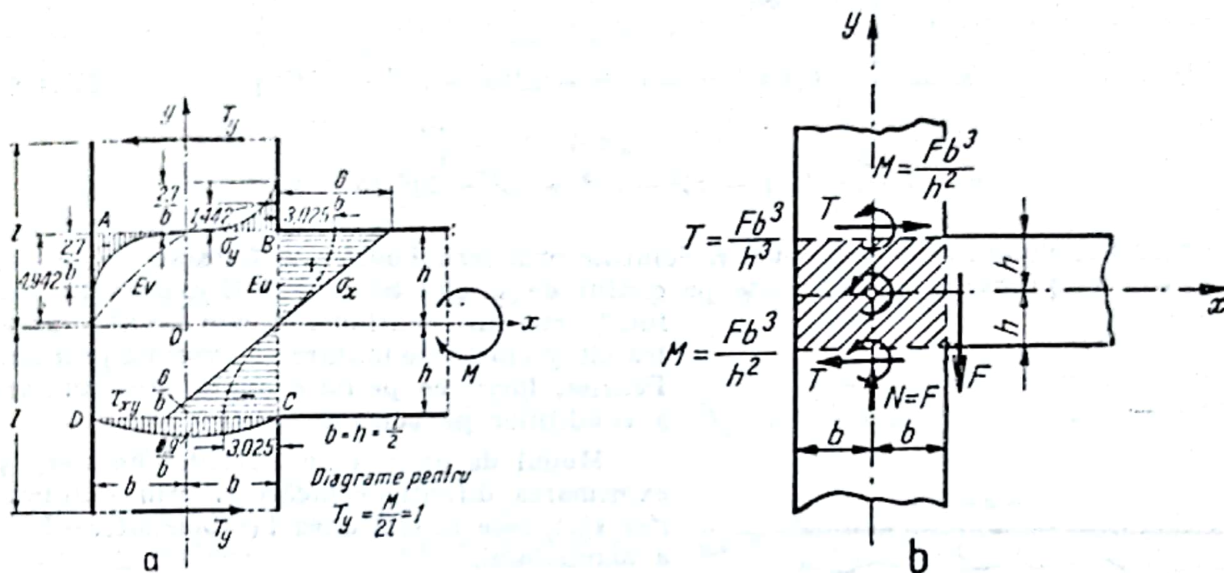


Fig. III.144

Funcția Airy

$$F_\sigma = \frac{T_y}{40b^3h^3}\Bigg[(10h^3 - 15h^2l + b^2l)(3b^2 - x^2)xy + 5b^2l(2by^2 - x^3 + 3xy^2)y + 3l\left(x^2 - \frac{5}{3}y^2\right)x^3y\Bigg]. \qquad \text{(III.404)}$$

Eforturile unitare în regiunea de prindere *ABCD*.

$$\sigma_x = \frac{3T_yl}{4b^3h^3}(2b^3 + 3b^2x - x^3)y$$

$$\sigma_y = -\frac{3T_y}{20b^3h^3}[10h^3 + 2l(3b^2 - 5x^2) - 5l(3h^2 - y^2)]\,xy \qquad \text{(III.405)}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3T_y}{40b^3h^3}(b^2 - x^2)[10h^3 - 15h^2l + b^2l - 5l(x^2 - 3y^2)]$$

Repartizarea eforturilor unitare și deplasările pe secțiunile $x = b$ și $y = h$ pentru $T_y = 1$ sînt arătate pe figură.

Rigla transmite o forță F aplicată în secțiunea $x = b$ (fig. III.144,*b*).

Funcția Airy

$$F_\sigma = \frac{F}{16h^3b}[y^3(b - x)^2 - (b-x)^4y + (8b^2 - 3h^2)(b-x)^2y + 2h^3x^3]. \qquad \text{(III.406)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_x = \frac{3}{8}\,\frac{F(b-x)^2}{bh^3}$$

$$\sigma_y = \frac{F}{8h^3b}\,[y^3 + 2h^3 + (2b^2 + 12bx - 6x^2 - 3h^2)y] \tag{III.407}$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{8h^3b}\,[2(b-x)^2 - 8b^2 + 3h^2 - 3y^2](b-x).$$

10.2.4.2. Soluții prin serii Fourier. Soluțiile prin serii Fourier se folosesc în special la șaibele dreptunghiulare acționate pe contur de sarcini ce nu pot fi exprimate prin funcții analitice continue, în care caz atît acestea cît și eforturile unitare se exprimă prin serii Fourier, lucru ce permite exprimarea unitară a condițiilor pe contur.

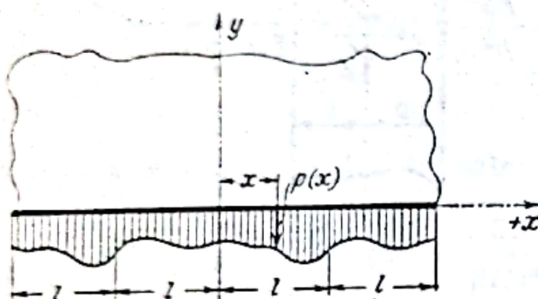


Fig. III.145

Modul de operare cu seriile Fourier, și exprimarea diferitelor încărcări prin serii Fourier sînt date în secțiunea I (tabelele I.7—I.10) a manualului.

1) *Semiplan elastic acționat de o sarcina periodică normală pe linia de separație* (fig. III.145). Sarcina $p(x)$ acționînd pe linia ce limitează semiplanul ($y = 0$) are perioada $2l$ și se exprimă prin relația:

$$p(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos\alpha_n x + \sum_1^\infty b_n \sin\alpha_n x \tag{III.408}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} p(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} p(x)\cos\alpha_n x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} p(x)\sin\alpha_n x\,dx. \tag{III.409}$$

Forma generală a funcției Airy se scrie

$$F_\sigma = C_0x^2 + \sum_1^\infty (C_{1n} + C_{2n}\alpha_n y)e^{-\alpha_n y}\cos\alpha_n x + \sum_1^\infty (C_{3n} + C_{4n}\alpha_n y)e^{-\alpha_n y}\sin\alpha_n x. \tag{III.410}$$

Pentru cazul considerat, la care pentru $y = 0$ rezultă $\sigma_y = p(x)$ și $\tau_{xy} = 0$, iar pentru $y = \infty$ rezultă $\sigma_y = 0$ și $\tau_{xy} = 0$, funcția Airy, capătă forma:

$$F_\sigma = \frac{1}{4} a_0 x^2 - \sum_1^\infty \frac{a_n}{\alpha_n^2}(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x - \sum_1^\infty \frac{b_n}{\alpha_n^2}(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x. \tag{III.411}$$

Eforturile unitare devin

$$\sigma_x = \sum_1^\infty a_n(1 - \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x + \sum_1^\infty b_n(1 - \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x + \sum_1^\infty b_n(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x \tag{III.412}$$

$$\tau_{xy} = \sum_1^\infty a_n \alpha_n y\, e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x - \sum_1^\infty b_n \alpha_n\, e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x.$$

2) *Grindă perete continuă de înălțime mare* ($H \geqslant L$) *acționată de o sarcină periodică* (fig. III.146) dată de relația:

$$p_i(x) = \frac{p_{i0}}{2} + \sum_1^\infty p_{in} \cos \alpha_n x.$$

Funcția Airy

$$F_\sigma = \frac{1}{4} p_{i0} x^2 - \sum_1^\infty \frac{p_{in}}{\alpha_n^2}(1 + \alpha_n y)e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x \tag{III.413}$$

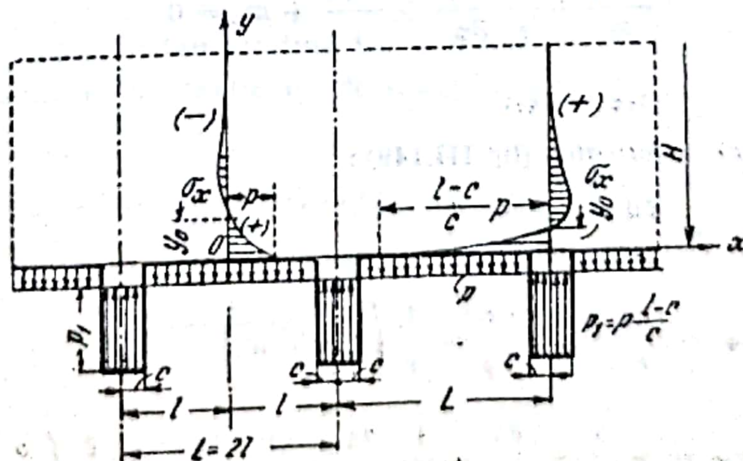


Fig. III.146

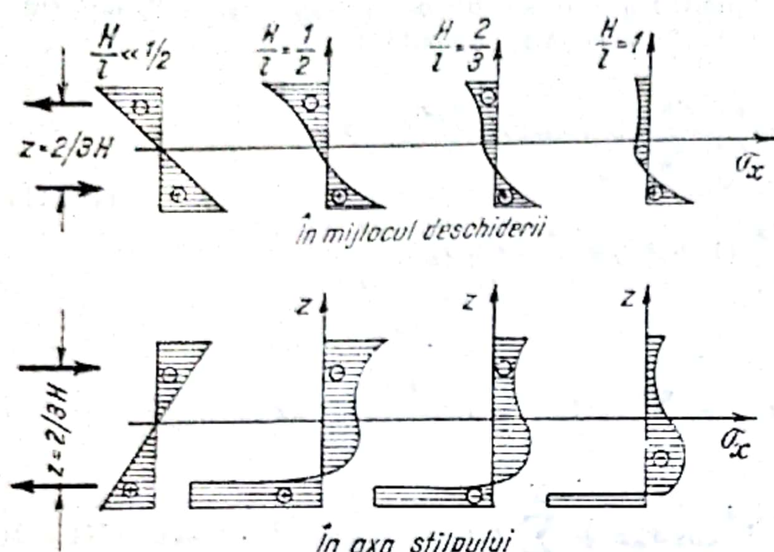


Fig. III.147

Eforturile unitare

$$\sigma_x = \sum_{1}^{\infty} p_{in}(1 - \alpha_n y)\, e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x$$

$$\sigma_y = \frac{p_{i0}}{2} + \sum_{1}^{\infty} p_{in}(1 + \alpha_n y)\, e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x \tag{III.414}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{1}^{\infty} p_{in}\, \alpha_n y\, e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x.$$

Variația eforturilor unitare pe înălțimea grinzii depinde de raportul H/l și ea este arătată pe fig. III.147 pentru o secțiune în mijlocul deschiderilor și pentru alta în axa stîlpilor, pentru cîteva valori ale raportului H/l.

Pentru alte tipuri de grinzi pereți și alte încărcări vezi [5, 11, 13, 91].

10.3. Elasticitatea plană în coordonate polare

10.3.1. **Ecuațiile generale.** În coordonate polare se scriu următoarele ecuații:

1) *Ecuațiile de echilibru static* (fig. III.148):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + m_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + m_\varphi = 0 \tag{III.415}$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}.$$

2) *Ecuațiile de deformație* (fig. III.149):

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) \tag{III.416}$$

$$\gamma_{r\varphi} = -\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right).$$

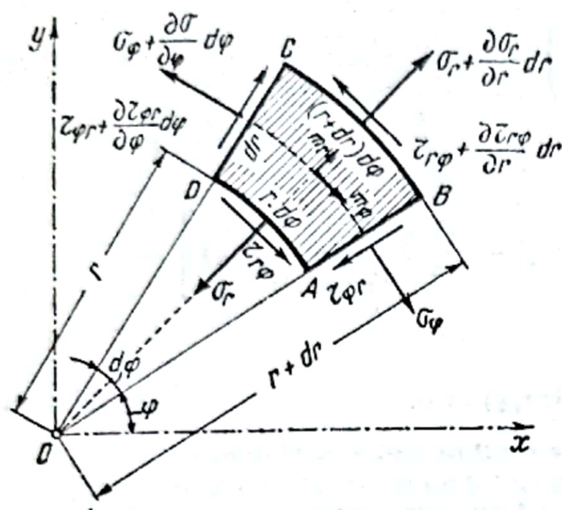


Fig. III.148

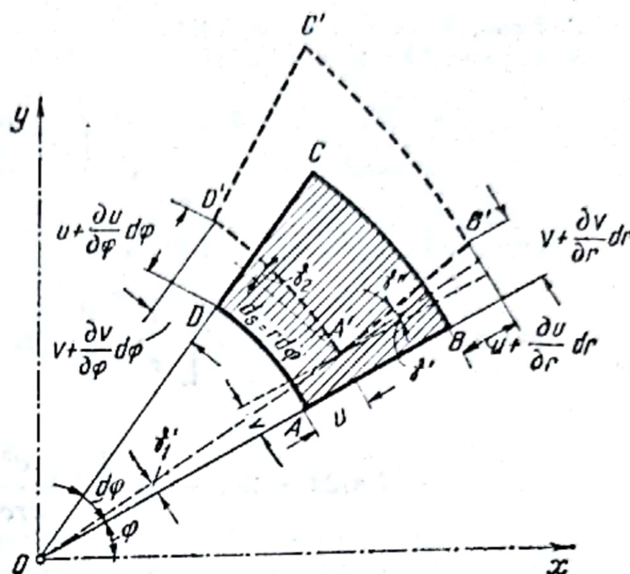


Fig. III.149

3) *Ecuațiile fizice*:

— deformațiile specifice în funcție de eforturile unitare

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\varphi) + \alpha_t\Delta t$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_r) + \alpha_t\,\Delta t \qquad \text{(III.417)}$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\,\tau_{r\varphi}:$$

în care Δt este variația de temperatură.

— eforturile unitare în funcție de deformațiile specifice

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\,[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi - (1+\mu)\,\alpha_t\,\Delta t]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\,[\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r - (1+\mu)\,\alpha_t\,\Delta t] \qquad \text{(III.418)}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{1-\mu}{2}\,\gamma_{r\varphi} = \frac{E}{2(1+\mu)}\,\gamma_{r\varphi}.$$

4) *Ecuația de compatibilitate*:
— exprimată în deplasări

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} - r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial_r}\right) - \frac{\partial^2 (r\gamma_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} = 0; \qquad (III.419)$$

— exprimată în eforturi unitare

$$\mu\Delta\,\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi + (1+\mu)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(\sigma_r - \sigma_\varphi)\right] -$$

$$- E\alpha_t \Delta t + 2(1+\mu)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}(r\tau_{r\varphi}) = 0. \qquad (III.420)$$

10.3.2. **Funcția eforturilor unitare.** Funcția Airy are expresia:

$$\Delta\Delta\, F_{\sigma(r,\,\varphi)} + E\alpha_t\,\Delta t = 0,$$

în care dublul operator a lui Laplace $\Delta\Delta\ F_{\sigma(r,\,\varphi)} = \Delta\Delta\ F_\sigma$

$$\Delta\Delta\, F_\sigma = \frac{\partial^4 F_\sigma}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 F_\sigma}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial F_\sigma}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 F_\sigma}{\partial \varphi^2 \partial r^2} -$$

$$- \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 F_\sigma}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F_\sigma}{\partial \varphi^4}. \qquad (III.421)$$

10.3.3. **Expresiile eforturilor unitare deduse din funcția Airy** (fig. III.150 *a*, *b*). Aceste expresii se obțin prin derivare astfel:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F_\sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial \varphi^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial r^2} \qquad (III.422)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_\sigma}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi}.$$

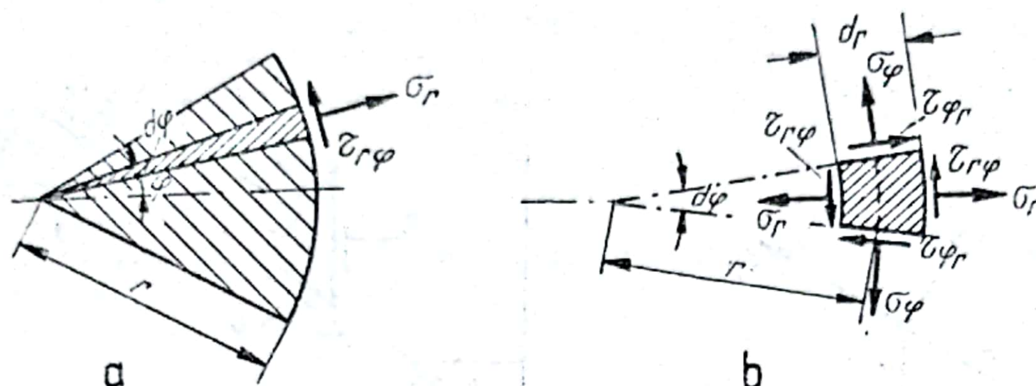


Fig. III.150

10.3.4. **Starea de eforturi unitare simetrică în raport cu polul.** Pentru această stare de eforturi unitare, funcțiile ce intervin nu depind de φ, în consecință toate derivatele în raport cu φ sînt nule.

Operatorul dublu al lui Laplace capătă forma

$$\Delta\Delta\ F_{\sigma(r)} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2F_\sigma}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{dF_\sigma}{dr}\right) =$$

$$= \frac{d^4F_\sigma}{dr^4} + \frac{2}{r}\ \frac{d^3F_\sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\ \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\ \frac{dF}{dr}. \qquad (III.423)$$

Funcția Airy se scrie

$$\Delta\Delta\ F_{\sigma(r)} + E\ \alpha_t\ \Delta t = 0. \qquad (III.424)$$

Eforturile unitare au expresiile

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\ \frac{dF_{\sigma(r)}}{dr}; \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2F_{\sigma(r)}}{dr^2}; \quad \tau_{r\varphi} = 0. \qquad (III.425)$$

10.3.5. **Trecerea de la coordonatele polare la coordonatele carteziene.** Legătura între coordonatele polare și cele carteziene rezultă din relațiile (fig. III.151):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x}; \quad x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi. \qquad (III.426)$$

Din aceste relații se deduc expresiile eforturilor unitare în coordonate carteziene din cele exprimate în coordonate polare (fig. III.152):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r\cos^2\varphi + \sigma_\varphi\sin^2\varphi - 2\ \tau_{r\varphi}\ \sin\varphi\cos\varphi\\ \sigma_y &= \sigma_r\sin^2\varphi + \sigma_\varphi\cos^2\varphi + 2\ \tau_{r\varphi}\ \sin\varphi\cos\varphi \qquad (III.427)\\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\varphi)\ \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{r\varphi}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).\end{aligned}$$

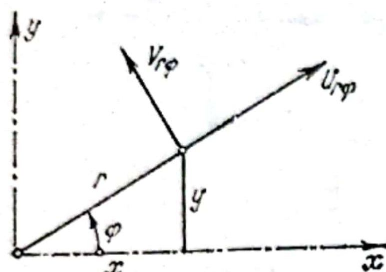


Fig. III.151

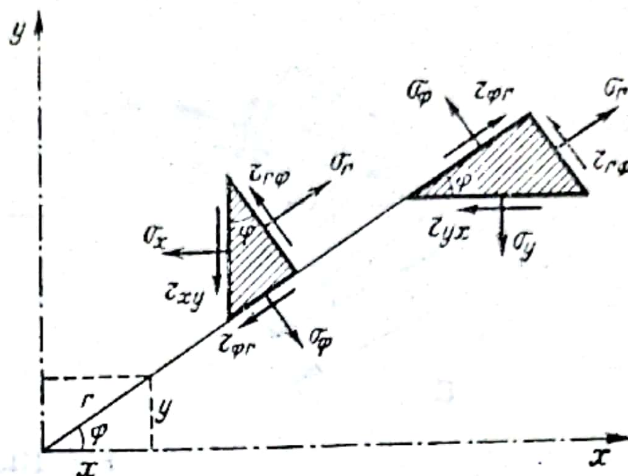


Fig. III.152

10.3.6. Soluțiile unor probleme de elasticitate plană în coordonate polare. În continuare se dau citeva soluții curente.

10.3.6.1. Șaibe circulare și inelare. Se dau numai expresiile următoarelor cazuri curente:

1) *Șaibă circulară plină supusă la presiune uniformă* (fig. III.153).

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r)} = \frac{p}{2}\, r^2 \qquad \text{(III.428)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = p\,; \quad \tau_{r\varphi} = 0. \qquad \text{(III.429)}$$

2) *Șaibă inelară supusă la presiune uniformă pe conturul interior* (fig. III.154).

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r)} = \frac{p_i}{2}\,\frac{r_i^2}{R^2 - r_i^2}\,(r^2 - 2R^2 \ln r) \qquad \text{(III.430)}$$

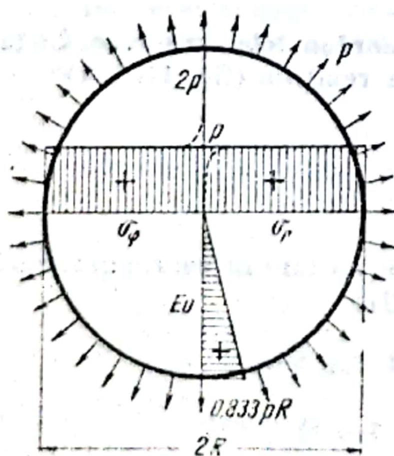


Fig. III.153

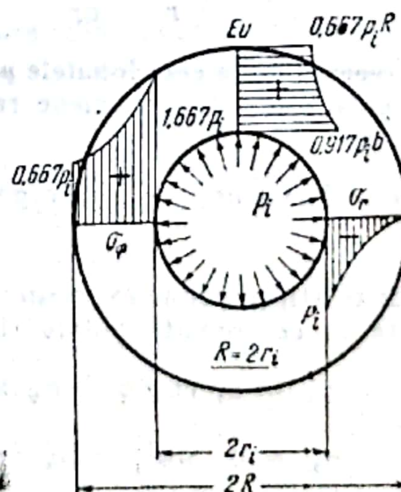


Fig. III.154

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -p_i \frac{r_i^2}{R^2 - r_i^2}\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right]; \quad \sigma_\varphi = p_i \frac{r_i^2}{R^2 - r_i^2}\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 1\right]; \quad \tau_{r\varphi} = 0. \tag{III.431}$$

3) *Şaibă inelară supusă la presiune uniformă pe conturul exterior* (fig. III.155). Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r)} = -\frac{p_e}{2}\frac{R^2}{R^2 - r_i^2}(r^2 - 2r_i^2 \ln r) \tag{III.432}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -p_e \frac{R^2}{R^2 - r_i^2}\left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]; \quad \sigma_\varphi = -p_e \frac{R^2}{R^2 - r_i^2}\left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]; \quad \tau_{r\varphi} = 0. \tag{III.433}$$

4) *Şaibă inelară supusă la variaţii de temperatură* (fig. III.156). Pentru o variaţie uniformă şi liniară a temperaturii pe grosimea şaibei, de la o temperatură interioară t_i la o temperatură exterioară t_e, temperatura într-o fibră la distanţa r de centrul şaibei este dată de relaţia:

$$t_r = t_i - \frac{t_i - t_e}{\ln \frac{R}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i}. \tag{III.434}$$

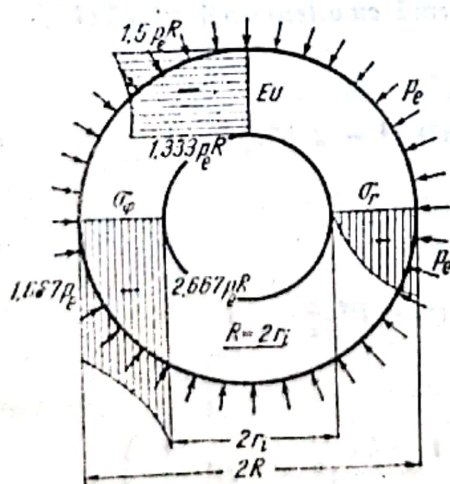


Fig. III.155

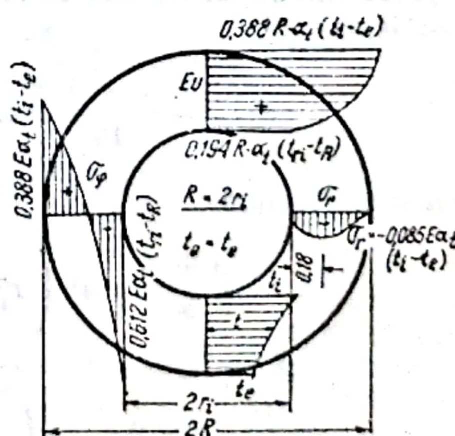


Fig. III.156

Pentru o temperatură medie t_0 la execuţie, rezultă

$$t = t_i - t_0 = t_i - \frac{t_i - t_e}{\ln \frac{R}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i} - t_0 . \qquad (III.435)$$

Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r)} = -\frac{1}{4} E\,\alpha_t(t_i - t_e)\left[\frac{R^2}{R^2 - r_i^2} r^2 - 2\frac{R^2 r_i^2}{R^2 - r_i^2}\ln r - \frac{r^2}{\ln \frac{R}{r_i}}\left(\ln \frac{r}{r_i} - \frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (III.436)$$

Eforturile unitare pentru $t_i > t_e$

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} E\,\alpha_t(t_i - t_e)\left[\frac{R^2}{R^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{R}{r_i}}\right]$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{2} E\,\alpha_t(t_i - t_e)\left[\frac{R^2}{R^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{R}{r_i}} - \frac{1}{\ln \frac{R}{r_i}}\right]; \quad \tau_{r\varphi} = 0 \qquad (III.437)$$

5) *Şaibă inelară în mişcare de rotaţie uniformă cu viteza unghiulară* ω (fig. III.157). Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r)} = \frac{3 + \mu}{16} m\omega^2 [(r_i^2 + R^2)\, r^2 - 2\, R^2 r_i^2 \ln r]. \qquad (III.438)$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} m\omega^2 \left(r_i^2 + R^2 - r^2 - R^2 r_i^2 \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3 + \mu}{8} m\omega^2 \left(r_i^2 + R^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 + r_i^2 R^2 \frac{1}{r^2}\right) \qquad (III.439)$$

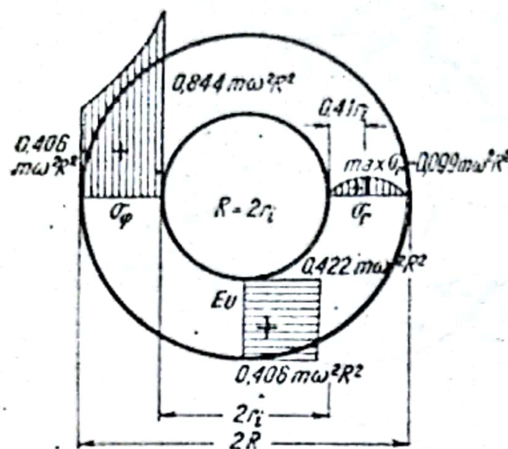


Fig. III.157

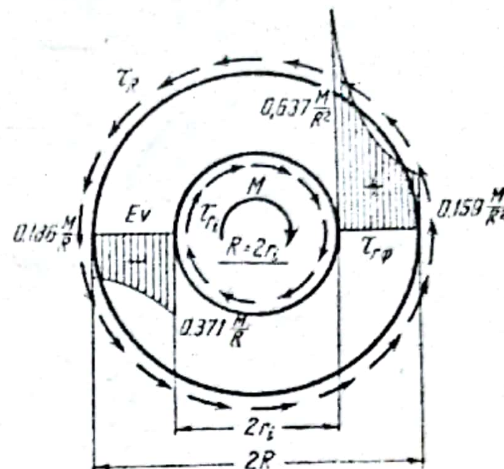


Fig. III.158

Valoarea maximă a lui σ_r se obţine pentru $r = \sqrt{Rr_i}$ şi are expresia

$$\sigma_{r\ max} = \frac{3+\mu}{8} m\, \omega^2 (R - r_i)^2. \qquad \text{(III.440)}$$

6) *Şaibă inelară supusă la acţiunea unui cuplu de moment* M (fig. III.158).
Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r)} = \frac{M}{2\pi r^2} \qquad \text{(III.441)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\varphi = 0; \quad \tau_{r_i} = \frac{M}{2\pi r_i^2}; \quad \tau_R = \frac{M}{2\pi R^2}. \qquad \text{(III.442)}$$

7) *Şaibă inelară tăiată, supusă la un moment încovoietor* M *ce acţionează pe secţiunea tăiată* (fig. III.159)
Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r)} = -\frac{2M}{n}\left[\frac{R^2}{R^2 - r_i^2} r^2 - 2\frac{r_i^2 R^2}{R^2 - r_i^2}\ln r - \frac{r^2}{\ln\frac{R}{r_i}}\left(\ln\frac{r}{r_i} - \frac{1}{2}\right)\right]. \qquad \text{(III.443)}$$

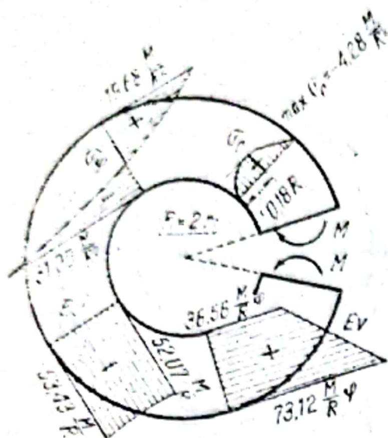


Fig. III.159

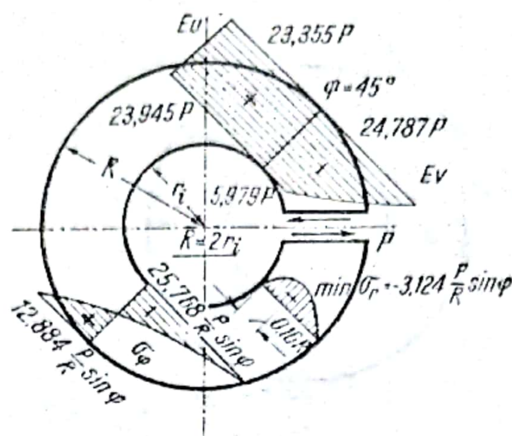


Fig. III.160

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -\frac{4M}{n}\left(\frac{R^2}{R^2 - r_i^2}\,\frac{r^2 - r_i^2}{r^2} - \frac{\ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{R}{r_i}}\right)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{4M}{n}\left(\frac{R^2}{R^2 - r_i^2}\,\frac{r^2 + r_i^2}{r^2} - \frac{\ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{R}{r_i}} - \frac{1}{\ln\frac{R}{r_i}}\right) \qquad \text{(III.444)}$$

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

în care:

$$n = \frac{R^2 - r_i^2}{\ln\frac{R}{r_i}} - 4\frac{R^2 r_i^2}{R^2 - r_i^2}\ln\frac{R}{r_i}. \qquad \text{(III.445)}$$

8) *Şaibă inelară tăiată, acţionată pe feţele tăiate de două forţe* P (fig. III.160). Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r)} = -\frac{P}{2n}\left[-r^3 + 2(r_i^2 + R^2)\,r\,\ln r + \frac{R^2 r_i^2}{r}\right]\sin\varphi. \qquad \text{(III.446)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -\frac{P}{n}\left(-r + \frac{r_i^2 + R^2}{r} - \frac{r_i^2 R^2}{r^3}\right)\sin\varphi$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{P}{n}\left(-3r + \frac{r_i^2 + R^2}{r} + \frac{r_i^2 R^2}{r^3}\right)\sin\varphi \qquad \text{(III.447)}$$

$$\tau_{r\varphi} = -\sigma_r \operatorname{cotg}\varphi$$

in care:

$$n = (R^2 + r_i^2)\ln\frac{R}{r_i} - (R^2 - r_i^2).$$

10.3.6.2. Şaibe în formă de pană. Se dau cazurile curente folosite în construcţii. 1) *Pană acţionată de o forţă concentrată aplicată în vîrf după bisectoare* (fig. III.161). Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = \frac{P}{2\alpha + \sin 2\alpha}\, r\varphi \sin\varphi \quad . \qquad \text{(III.448)}$$

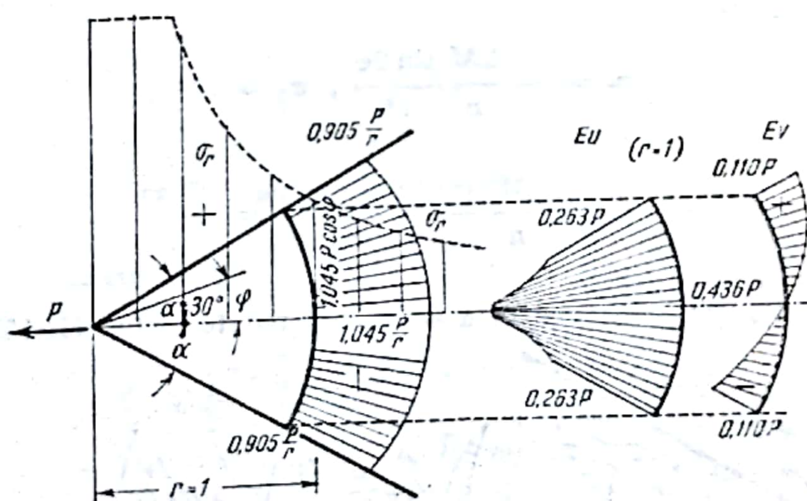


Fig. III.161

Eforturile unitare

$$\sigma_r = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha}\,\frac{\cos\varphi}{r}\,;\ \sigma_\varphi = 0;\ \tau_{r\varphi} = 0 \qquad \text{(III.449)}$$

Pe figură este arătată variaţia lui σ_r, *Eu* şi *Ev* pentru $\alpha = 30°$.

2) *Pană acționată de o forță concentrată Q aplicată la vîrf, normală pe bisectoare* (fig. III.162).

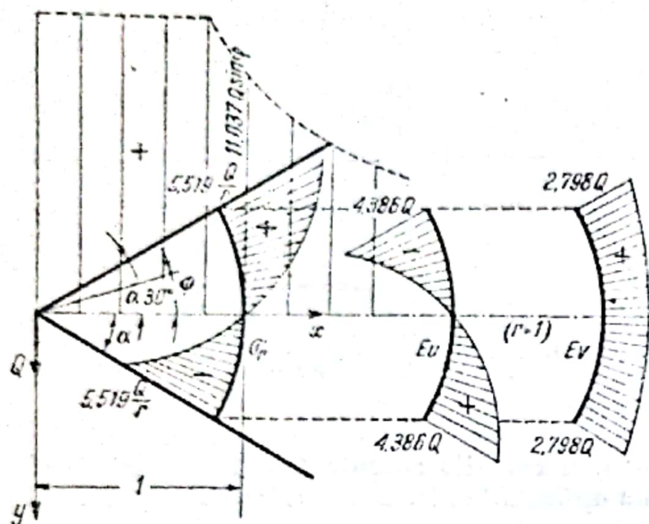


Fig. III.162

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{Q}{2\alpha - \sin 2\alpha} r\varphi \cos \varphi. \tag{III.450}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = \frac{2Q}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\sigma_\varphi = 0;\ \tau_{r\varphi} = 0 \tag{III.451}$$

Variațiile lui σ_r, *Eu* și *Ev* pentru $\alpha = 30°$ sînt arătate în fig. III.162.

3) *Pană acționată de un moment M aplicat la vîrf* (fig. III.163).

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{M}{2n}(2\varphi \cos 2\alpha - \sin 2\varphi). \tag{III.452}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -\frac{2M}{n} \frac{\sin 2\varphi}{r^2};\ \sigma_\varphi = 0$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{M}{n} \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\alpha}{r^2} \tag{III.453}$$

în care: $n = \sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha$.

Variațiile lui σ_r, $\tau_{r\varphi}$, *Eu* și *Ev* pentru $\alpha = 30°$ sînt redate în fig. III.163.

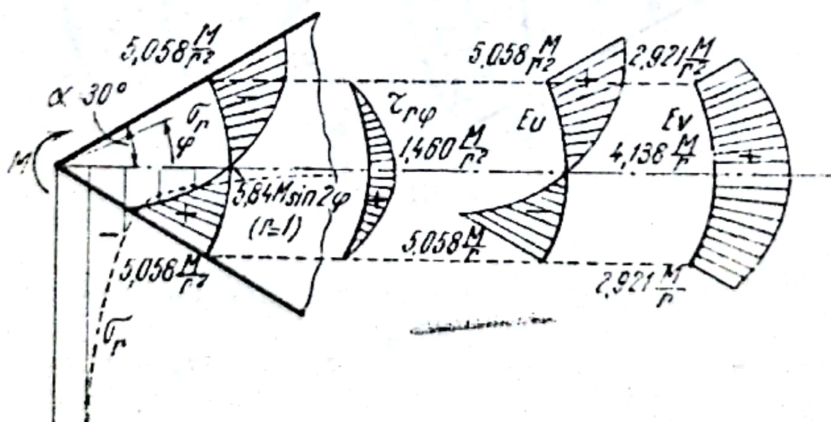


Fig. III.163

4) *Pană acționată pe o latură de o sarcină uniform repartizată* (fig. III.164).
Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{pr^2}{4n}(n + \sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\alpha). \qquad \text{(III.454)}$$

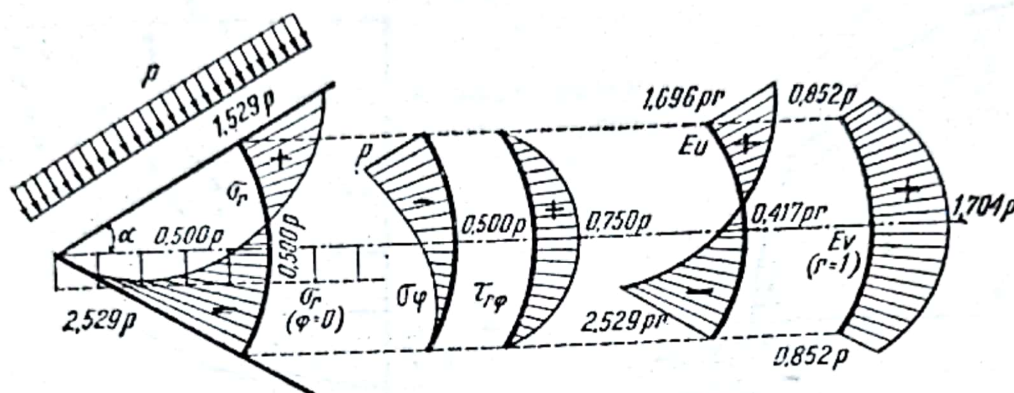


Fig. III.164

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -\frac{p}{2n}(n - \sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\alpha)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{p}{2n}(n + \sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\alpha) \qquad \text{(III.455)}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{p}{2n}(\cos 2\varphi - \cos 2\alpha)$$

în care: $n = \sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha$.
Eforturile secționale

$$N = -pr \sin \alpha; \quad M = \frac{p}{2} r^2; \quad T = -pr \cos \alpha. \qquad \text{(III.456)}$$

5) *Colț de șaibă dreptunghiulară cu laturi foarte mari acționată de o forță concentrată normală pe o latură* (fig. III.165).
Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = \frac{2P}{\pi^2 - 4} r\varphi (2 \sin \varphi + \pi \cos \varphi). \qquad \text{(III.457)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = \frac{4P}{\pi^2 - 4} \frac{1}{r}(2 \cos \varphi - \pi \sin \varphi)$$

$$\text{(III.458)}$$

$$\sigma_\varphi = 0; \quad \tau_{r\varphi} = 0.$$

6) *Colț de șaibă dreptunghiulară cu laturi foarte mari supusă la o sarcină uniform repartizată normală pe latură* (fig. III.166).

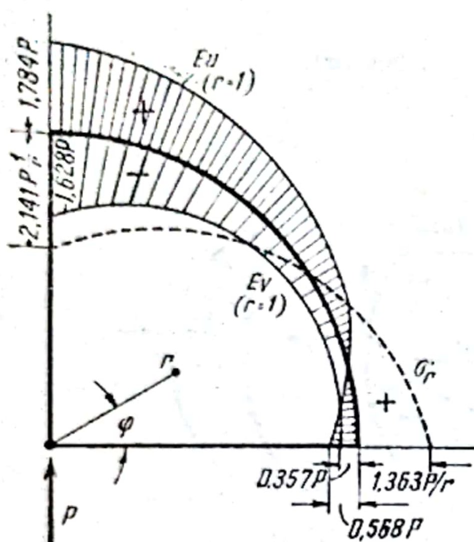


Fig. III.165

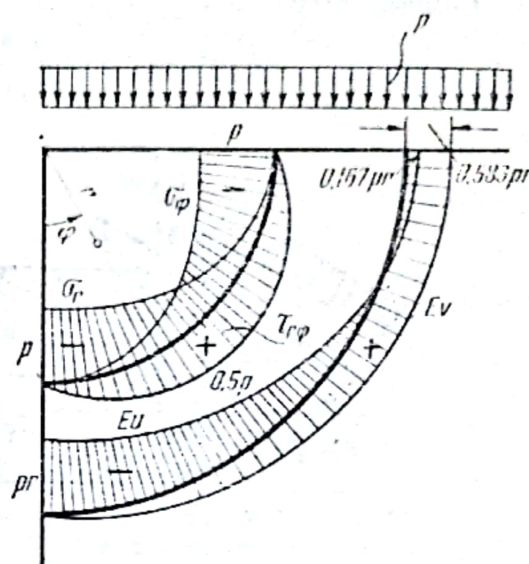


Fig. III.166

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{p}{2} r^2 \sin^2 \varphi. \qquad \text{(III.459)}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -p\cos^2\varphi;\ \ \sigma_\varphi = -p\sin^2\varphi;\ \ \tau_{r\varphi} = \frac{p}{2}\sin 2\varphi. \qquad \text{(III.460)}$$

10.3.6.3. **Semiplan elastic.** Se dau următoarele cazuri:

1) *Semiplan elastic acționat de o forță concentrată normală pe linia de separație* (fig. III.167,*a*).

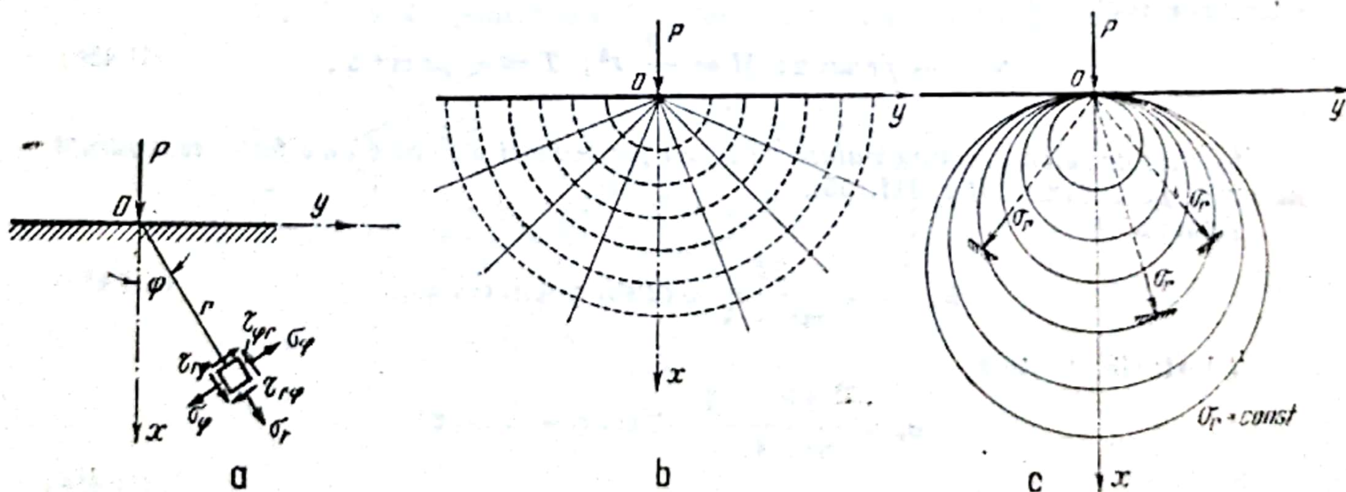


Fig. III.167

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{P}{\pi} r\varphi \sin \varphi. \tag{III.461}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r}; \ \sigma_\varphi = 0; \ \tau_{r\varphi} = 0. \tag{III.462}$$

Deoarece $\sigma_r = 0$ și $\tau_{r\varphi} = 0$, traiectoriile eforturilor unitare principale sînt drepte trecînd prin punctul de aplicație al forțelor și cercuri concentrice așa cum se arată în fig. III.167, *b*. Locul geometric al punctelor de efort unitar constant sînt cercuri cu centrul pe axa Ox tangente la axa Oy (fig. III.167, *c*).

Expresiile eforturilor unitare în coordonate carteziene se obțin din cele de mai înainte folosind formulele de transformare (III.427) și se scriu

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}; \ \sigma_y = -\frac{2P}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}. \tag{III.463}$$

Variația eforturilor unitare σ_x, σ_y și τ_{xy} este arătată în fig. III.168.

Deplasările exprimate în coordonate carteziene au expresiile

$$Eu = \frac{P}{\pi}\left[(1+\mu)\frac{x^2}{x^2+y^2} - 2\mu - \ln(x^2+y^2)\right]$$
$$Ev = \frac{P}{\pi}\left[(1+\mu)\frac{xy}{x^2+y^2} - (1-\mu)\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right]. \tag{III.464}$$

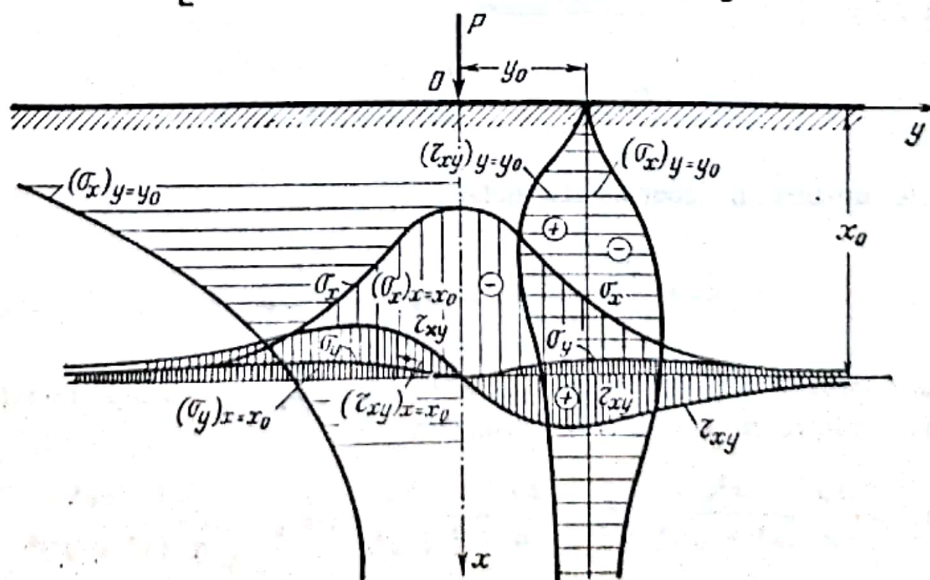


Fig. III.168

2) *Semiplan elastic acționat de o forță concentrată tangențială Q aplicată pe linia de separație* (fig.III.169, *a*).

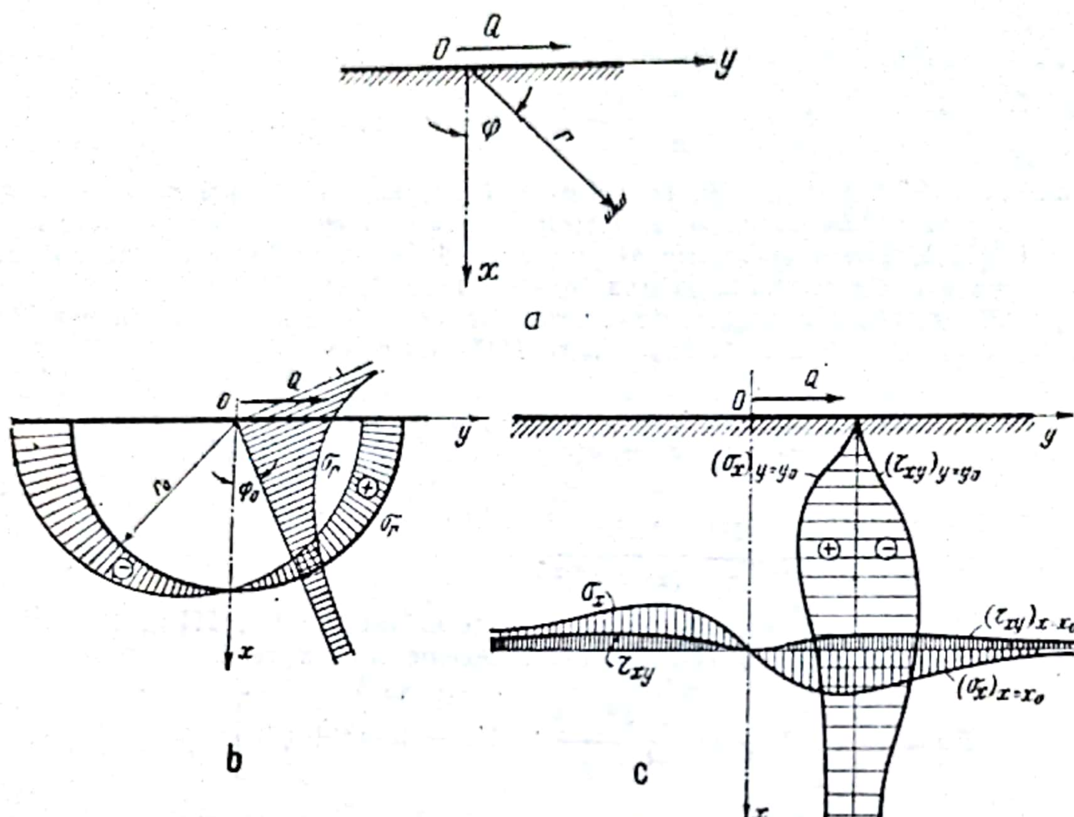


Fig. III.169

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{Q}{\pi} r\varphi \cos\varphi. \qquad \text{(III.465)}$$

Eforturile unitare în coordonate polare

$$\sigma_r = \frac{2Q}{\pi}\frac{\sin\varphi}{r}; \quad \sigma_\varphi = 0; \quad \tau_{r\varphi} = 0. \qquad \text{(III.466)}$$

Variația eforturilor unitare σ_r pentru $r = r_0$ și $\varphi = \varphi_0$ este arătată în fig. III.169,*b*.
Eforturile unitare în coordonate carteziene

$$\sigma_x = \frac{2Q}{\pi}\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}; \; \sigma_y = \frac{2Q}{\pi}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}; \; \tau_{xy} = \frac{2Q}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \text{(III.467)}$$

Variația eforturilor unitare σ_x și τ_{xy} pentru $x = x_0$ și $y = y_0$ este arătată în fig. III.169,*c*.

O forță R de înclinare oarecare făcînd unghiul β cu verticala se descompune într-o componentă verticală și una orizontală și se determină eforturile unitare separat pentru fiecare din ele, însumînd apoi rezultatele. Eforturile, unitare, în coordonate polare, au expresiile

$$\sigma_r = \frac{2R}{\pi} \frac{\cos(\varphi - \beta)}{r}; \quad \sigma_\varphi = 0; \quad \tau_{r\varphi} = 0. \tag{III.468}$$

3) *Semiplan elastic acționat de un moment concentrat M* (fig. III.170, *a*).

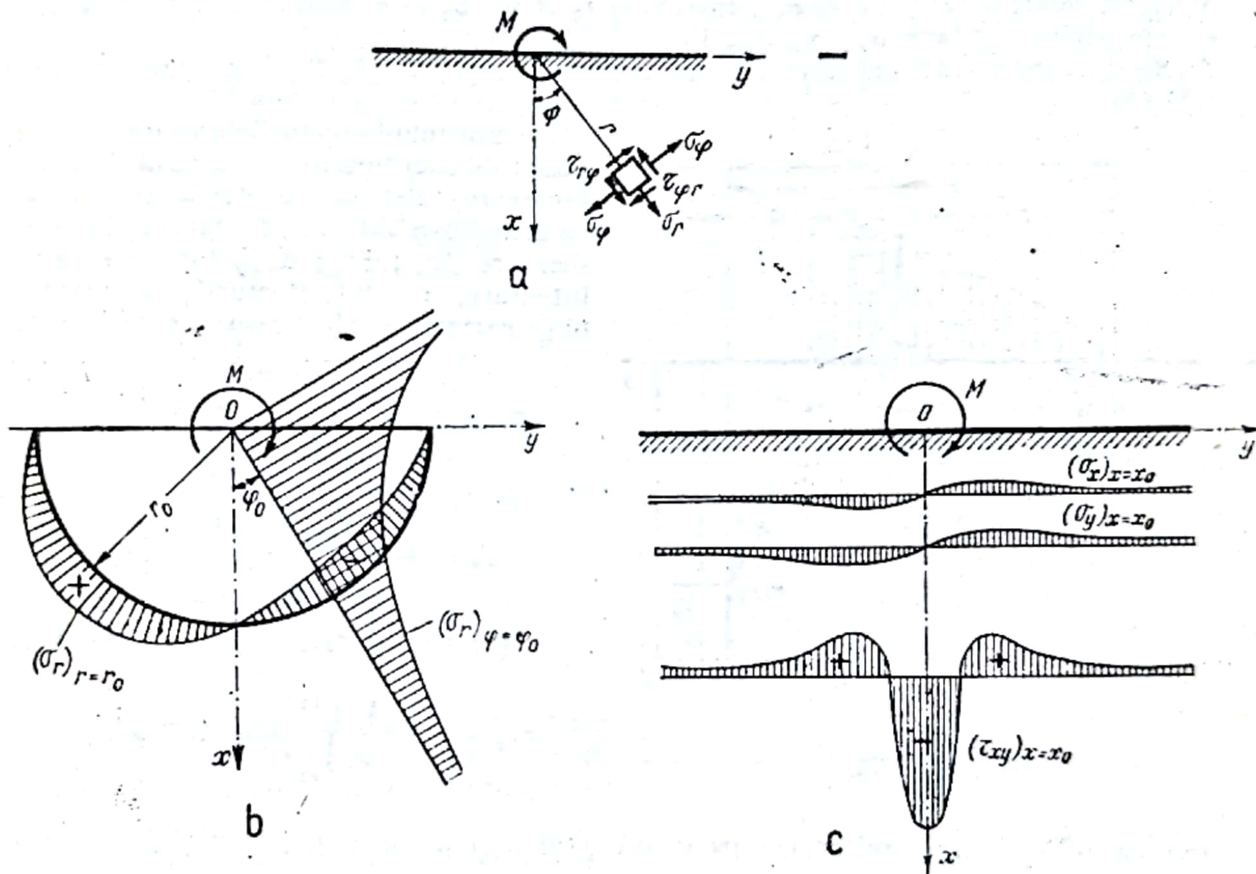


Fig. III.170

Funcția Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{M}{2\pi}(2\varphi + \sin 2\varphi). \tag{III.469}$$

Eforturile unitare în coordonate polare

$$\sigma_r = \frac{2M}{\pi} \frac{\sin 2\varphi}{r^2}; \quad \sigma_\varphi = 0; \quad \tau_{r\varphi} = \frac{2M}{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{r^2}. \tag{III.470}$$

Eforturile unitare în coordonate carteziene

$$\sigma_x = \frac{8M}{\pi}\frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^3};\ \sigma_y = \frac{4M}{\pi}\frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3};$$

$$\tau_{xy} = \frac{2M}{\pi}\frac{x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}. \tag{III.471}$$

Variația eforturilor unitare σ_r pentru $r = r_0$ și $\varphi = \varphi_0$ este arătată în fig. III.170, *b* și a eforturilor unitare σ_x, σ_y, τ_{xy} în fig. III. 170, *c*.

4) *Semiplanul elastic acționat de o încărcare repartizată după o lege oarecare* (fig. III 171).

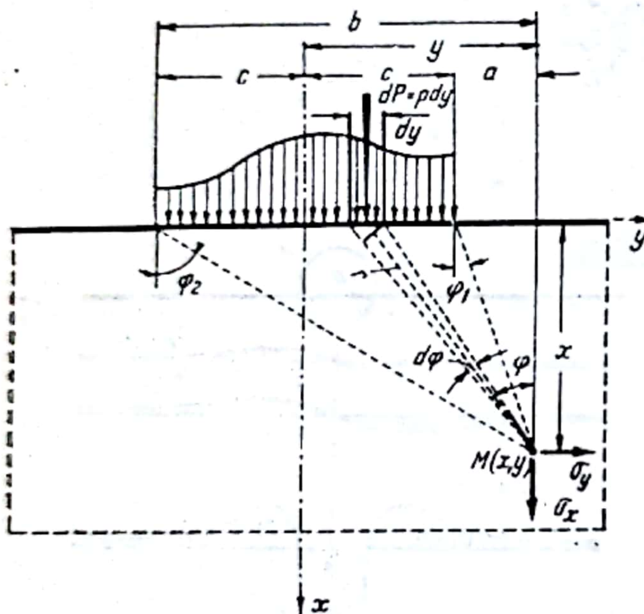


Fig. III.171

Exprimînd eforturile unitare într-un punct de coordonate x și y produse de o încărcare elementară $dP = p(y)\,dy = prd\varphi/\cos\varphi$ se obțin tensiunile elementare $d\sigma_x$; $d\sigma_y$; $d\tau_{xy}$ din care, prin integrare, rezultă eforturile în coordonate carteziene ale căror expresii sînt

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(y)\cos^2\varphi d\varphi;$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(y)\sin^2\varphi d\varphi; \tag{III.472}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(y)\sin 2\varphi d\varphi.$$

Pentru o încărcare uniform repartizată $p(y) = p = \text{const}$ (fig. III.172) rezultă

$$\sigma_x = -\frac{2p}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^2\varphi\, d\varphi = -\frac{p}{2\pi}[2(\varphi_2-\varphi_1)+(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)];$$

$$\sigma_y = -\frac{2p}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^2\varphi\, d\varphi = -\frac{p}{2\pi}[2(\varphi_2-\varphi_1)-(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin 2\varphi d\varphi = -\frac{p}{2\pi}(\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2). \tag{III.473}$$

În relațiile de mai înainte trebuie ținut seama de semnul unghiurilor φ_1 și φ_2. În cazul din fig. III.172 pentru punctul $M(x, y)$ atît φ_1, cît și φ_2 sînt pozitive, în timp ce pentru punctul N, φ_1' este negativ, iar φ_2' este pozitiv.

Cu notațiile din fig. III. 172 eforturile unitare în coordonate carteziene în punctul M se exprimă prin relațiile

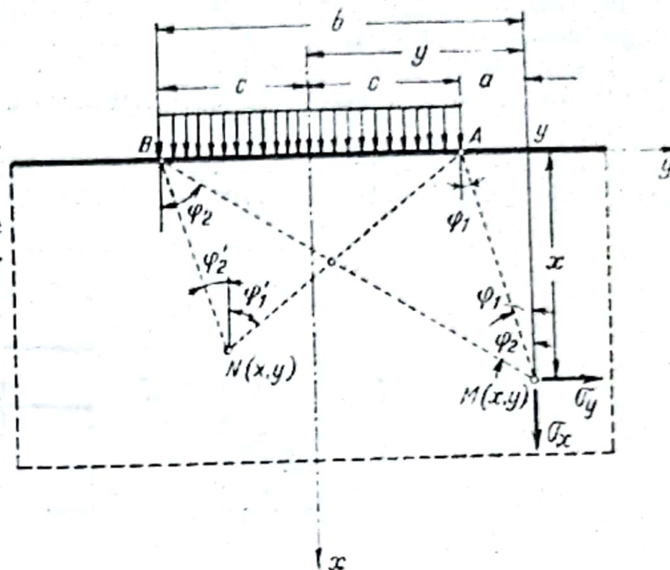


Fig. III.172

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{x} + \operatorname{arctg}\frac{a}{x} + \frac{ax}{a^2+x^2} + \frac{bx}{b^2+x^2}\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{x} + \operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \frac{ax}{a^2+x^2} + \frac{bx}{b^2+x^2}\right) \qquad \text{(III.474)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{p}{\pi}\left(\frac{x^2}{a^2+x^2} + \frac{x^2}{b^2+x^2}\right).$$

5) *Semiplan elastic acționat pe linia de separație de o sarcină tangențială* p_t *uniform repartizată pe o lungime* $2c$ (fig. III. 173).

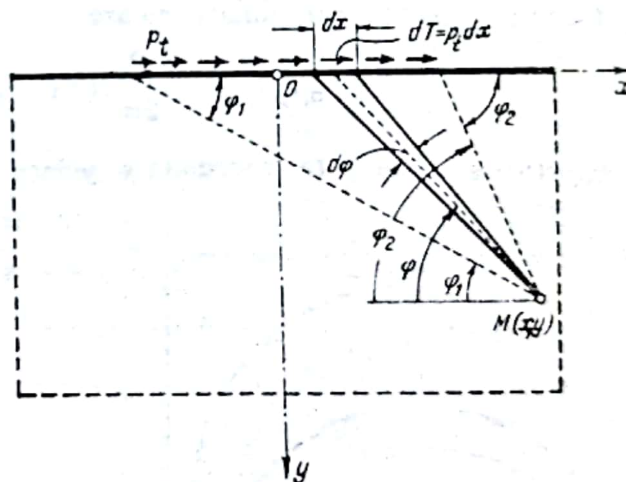


Fig. III.173

Cu notațiile din figură expresiile eforturilor unitare sînt:

$$\sigma_x = -\frac{p_t}{2\pi}\left[4\ln\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} - (\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2)\right]$$

$$\sigma_y = -\frac{p_t}{2\pi}(\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2) \qquad \text{(III.475)}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{p_t}{2\pi}[2(\varphi_2 - \varphi_1) + (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)].$$

6) *Sarcinile înclinate repartizate acționînd pe linia de separație* se descompun în componentele normale și componente tangențiale, calculînd, eforturile pentru fiecare din ele și suprapunînd apoi efectele.

10.3.6.4. Șaiba elastică infinită acționată de forțe și momente aplicate în interiorul ei.

1) *Forță concentrată* (fig. III.174, *a*). Soluția se obține din cazurile precedente 1) și 2) ale semiplanului combinînd cazurile de solicitare din fig. III.174, *b, c, d* și *e*.

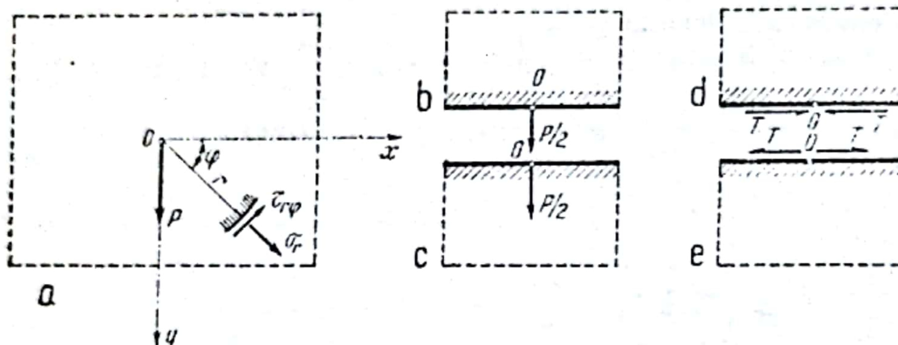


Fig. III.174

Funcția Airy în coordonate polare

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -\frac{P}{2\pi} r\left(\varphi \cos\varphi + \frac{1-\mu}{2} \ln r \sin\varphi\right). \tag{III.476}$$

Eforturile unitare în coordonate polare

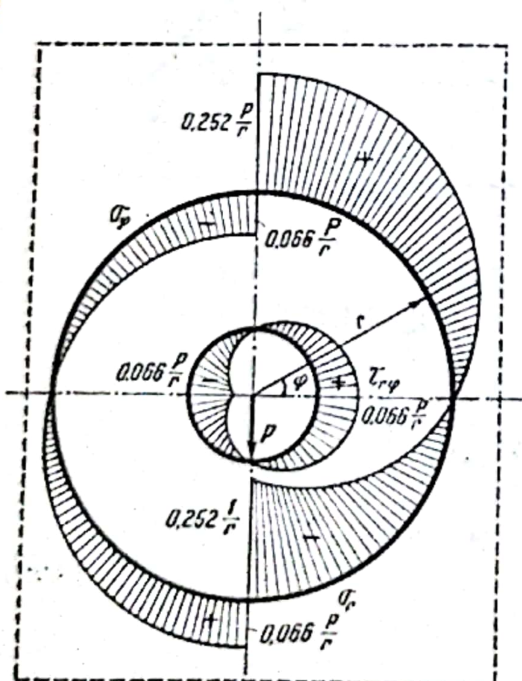


Fig. III.175

$$\sigma_r = \frac{P}{4\pi}(3+\mu)\frac{1}{r}\sin\varphi$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{P}{4\pi}(1-\mu)\frac{1}{r}\sin\varphi \tag{III.477}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{P}{4\pi}(1-\mu)\frac{1}{r}\cos\varphi .$$

Variația eforturilor unitare σ_r, σ_φ și $\tau_{r\varphi}$ este arătată în fig. III.175.

Eforturile unitare în coordonate carteziene

$$\sigma_x = \frac{Py}{4\pi(x^2+y^2)^2}[(1-\mu)y^2-(1+3\mu)x^2]$$

$$\sigma_y = \frac{Py}{4\pi(x^2+y^2)^2}[(1-\mu)x^2+(3+\mu)y^2]$$

(III.478)

$$\tau_{xy} = -\frac{Px}{4\pi(x^2+y^2)^2}[(1-\mu)x^2+(3+\mu)y^2].$$

2) *Moment concentrat* (fig. III.176)
Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = \frac{M}{2\pi}\varphi. \tag{III.479}$$

Eforturile unitare în coordonate polare

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\varphi = 0; \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2}. \tag{III.480}$$

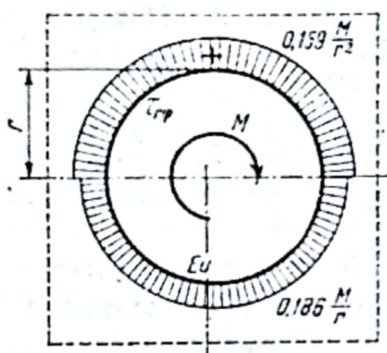


Fig. III.176

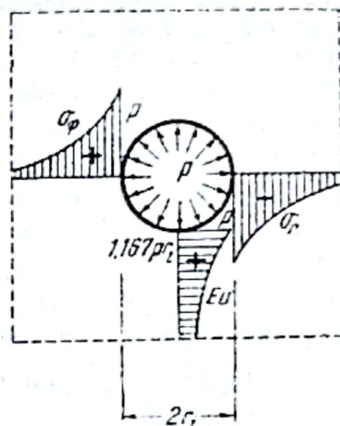


Fig. III.177

Eforturile unitare în coordonate carteziene

$$\sigma_x = -\frac{M}{\pi}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \sigma_y = \frac{M}{\pi}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{M}{2\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{III.481}$$

3) *Presiune uniformă pe un gol circular interior* (fig. III.177).
Funcţia Airy

$$F_{\sigma(r,\varphi)} = -pr_i^2 \ln r \tag{III.482}$$

Eforturile unitare

$$\sigma_r = -p\left(\frac{r_i}{r}\right)^2; \quad \sigma_\varphi = p\left(\frac{r_i}{r}\right)^2; \tau_{r\varphi} = 0 \tag{III.483}$$

BIBLIOGRAFIE

A. Lucrări generale

1. Augustin, P. şi Atanasiu, M. *Bare cu pereţi subţiri*. Bucureşti, Editura tehnică, 1960.
2. Beleş, A. şi Voinea, R. *Rezistenţa materialelor*. Vol. II, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
3. Beliaev, N. M. *Rezistenţa materialelor*. Vol. I şi II (trad. din l. rusă), Bucureşti, Editura tehnică, 1956.

4. Belluzzi, O. *Scienza delle costruzioni*, Vol. I—VI, Bologna, 1957.
5. Beyer, K. *Die Statik im Stahlbetonbau*. 2. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 1948
6. Bezuhov, N. I. *Teoria elasticității și plasticității* (trad. din l. rusă) București, Editura tehnică, 1957.
7. Biezeno, C. B. și Grammel, R. *Technische Dynamik*, 3 Auflage, Berlin, Springer-Verlag, 1971.
8. Bleich, F. *Buckling Strength of Metal Structures*. New York, Mc Graw Hill Book Comp, 1952
9. Bürgermeister, G., Steup, H. și Kretschmar, R. *Stabilitätstheorie*, 3 Auflage. Berlin, Akademie-Verlag, 1966.
10. Caracostea, A. *Curs de rezistența materialelor* (litografiat). București, I.C.F., 1950.
11. Caracostea, A. și Soare, M. *Teoria elasticității* (litografiat), București, I.C.F., 1956.
12. Caracostea, A. *Rezistența materialelor* (litografiat) București, I.C.F., 1956.
13. Caracostea, A. *Rezistența materialelor* (în „Manual pentru calculul construcțiilor") București, Editura tehnică, 1959.
14. Caracostea, A. ș.a. *Elemente pentru calculul și proiectarea construcțiilor metalice* (litografiat) Vol. 1, 2, 3, București, I.C.B., 1973—74.
15. Chmelka, F. și Melan, E. *Einführung in die Festigkeitslehre*, 5 Auflage, Berlin, Springer-Verlag, 1972.
16. Chwalla, E. *Einführung in die Baustatik*. Köln, Stahlbau-Verlags, 1954.
17. Courbon, J., *Cours de résistance des materiaux*. Paris, Dunod, 1955.
18. Courbon, J. *Application de la résistance des materiaux au calcul des ponts*. Paris, Dunod, 1950.
19. Dabrowski, R. *Gekrümmte dünnwandige Träger*. Berlin, Springer Verlag, 1968.
20. Dimitrov, H. și Herberg, W. *Festigkeislehre*. Band 1 u. 2, Auflage 2. Berlin, Gruyter Verlag, 1972.
21. Dreyer, G. și Münder, I. *Festigkeitslehre und Elastizitätslehre*, 20 Auflage, Leipzig, Fachbuchverlag, 1969.
22. Filipescu, Gh. Em. *Statica construcțiilor și rezistența materialelor*. București, Imprimeria națională, 1934.
23. Filonenko-Borodici, M.M. ș.a. *Curs de rezistența materialelor* (trad. din l. rusă), București, Editura tehnică, 1952.
24. Filonenko-Borodici, M. M. *Teoria elasticității* (trad. din l. rusă). București, Editura tehnică, 1957.
25. Flügge, W. *Statik und Dynamyk der Schalen*. München, Springer-Verlag ,1962.
26. Flügge, W. *Festigkeitslehre*. Berlin, Springer-Verlag, 1967.
27. Frocht, M. M. *Photoelasticity*. Vol. I și II., New York, John Wiley a. Sons, 1941—1948
28. Föppl, A. și Föppl L. *Drang u. Zwang*. München, Oldenbourg Verlag, 1928.
29. Föppl. A. *Vorlesungen über technische Mechanik*, Band 1—3. München, Oldenbourg Verlag, 1949—1951.
30. Feodosiev, V. *Résistance des materiaux*. Moscova, Editions MIR, 1971.
31. Girkmann, K. *Flächentragwerke*, 6 Auflage. Berlin, Springer Verlag, 1963.
32. Green. A. E și Zerna, W. *Theoretical Elasticity*. Oxford, 1957.

33. Hartog, J. P. Dean. *Strength of Materials.* New York, Mc Graw Hill Book Comp, 1949.

34. Hartog, J. P. Dean. *Advanced Strength of Materials.* New York, Mc. Graw Hill Book Comp, 1952.

35. Hartog, J. P. Dean. *Mechanical Vibrations.* New York, Mc Graw Hill Book Comp, 1956.

36. Hetenyi, M. *Beams on Elastic Fondation.* Michigan, 1956.

37. Hetenyi, M. *Handbook of Experimental Stress Analysis.* New York, John Wiley a. Sons, 1957.

38. Kollbrunner, C. şi Meister, M. *Knieken.* Berlin, Springer Verlag, 1953.

39. Kollbrunner, C. şi Meister, M. *Ausbeulen.* Berlin, Springer Verlag, 1958.

40. Kollbrunner, C. şi Basler, K. *Torsion in Structures.* Berlin, Springer Verlag, 1969.

41. Korcinski, N. *Rezistenţa materialelor* (litografiat) I.C.B., 1974.

42. Korcinski, N. *Teoria elasticităţii* (litografiat) I.C.B., 1974.

43. L'Hermite, R. *Résistance des materiaux.* Paris, Edit. Dunod, 1951.

44. Love, A. E. *A treatis on the Mathematical Theory of Elasticity* New York, 1944.

45. Marguerre, K. *Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs.* Berlin, Springer Verlag, 1950.

46. Massonnet, Ch. *Résistance des matériaux.* 2 edition, Vol. 1—1967 Vol. 2 — 1973. Liège, Edit. Sciences et Lettres.

47. Mazilu, P. *Rezistenţa materialelor.* I.C.B., 1974.

48. Mitescu, C. *Rezistenţa materialelor* (litografiat). Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1967.

49. Mocanu, D. ş.a. *Calcule de rezistenţă cu specific feroviar.* Vol. I — 1957. Vol. II 1958, Bucureşti, Editura Căilor ferate.

50. Mocanu, D. ş.a. *Calcule de rezistenţă. Probleme speciale din domeniul feroviar.* Bucureşti, Editura Centrului de documentare şi publicaţii—M.T., 1971.

51. Murphy, G. *Advanced Mechanics of Materials.* New York, Mc Graw Hill Book Comp, 1946.

52. Naday, A. *Theory of Flow and Fractures of Solids*; vol. 1—1950, Vol 2—1963, New York, Mc Graw Hill Book Comp.

53. Nădăşan, St. *Curs de Rezistenţa materialelor* Vol. I—IV. Timişoara, Inst. Politehnic, 1953—57.

54. Pflüger, A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik.* 2 Aufl. Berlin, Springer Verlag, 1964.

55. Ponomariov, S. D. ş.a. *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini* (trad. din l. rusă) vol. I—1960, vol. II—1963, vol. III—1964, Bucureşti, Editura tehnică.

56. Popov, P. E. *Introduction to Mechanics of Solids.* Englewood-Cliffs, Prentice Hall Inc, 1968.

57. P ö s c h e l , T. *Elementare Festigkeitslehre*. Berlin, Springer Verlag, 1952.

58. R o i k , C a r l , și L i n d n e r . *Biegetorsionsprobleme gerader, dünnswandiger Stäbe*. Berlin, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, 1972.

59. R o t h . R. și G r i e s s h a b e r , I. *Practische Berechnung auf Biegung und Torsion beanspruchter Stäben mit dünnwandigen Querschnitten*. Leipzig, B.G. Taubner Verlaggesellschaft, 1966.

60. S c h l e c h t e , E. *Festihgkeitslehre für Bauingenieure*. Berlin, 1967.

61. S e e l y F.B. și S m i t h , I. D. *Advanced Mechanics of Materials*. New York, John Willey and Sons, 1955.

62. S h a n l e y , F.R. *Strength of Materials*, New York, Mc Graw Hill Book Comp, 1955.

63. S o k o l n i k o f f , I.S. *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, Mc. Graw Hill Book Comp, 1956.

64. S o u t h w e l l , R. *An Introduction to the Theory of Elasticity, for Engineers and Physicist*. 2, London, Oxford University. Press, 1953.

65. S t a n , D. A. *Rezistența materialelor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1967.

66. S t ü s s i , F. *Baustatik*. Bd. I. u. II. Zürich, Verlag Birkhäuser, 1971.

67. S z a b o , I. *Höhere Technische Mechanik*. 4 Aufl. Berlin, Springer Verlag, 1964.

68. S z a b o , I. *Einführung in die Technische Mechanik*. 6 Aufl. Berlin, Springer Verlag, 1963.

69. T e o d o r e s c u , C.C. *Curs de rezistența materialelor*, București, 1945.

70. T e o d o r e s c u , C.C. și M o c a n u , D.R. *Rezistența materialelor* (litografiat). București, I.C.F., 1954.

71. T e o d o r e s c u , C.C. și M o c a n u D.R., *Rezistența materialelor cu aplicații în domeniul feroviar*. București, Editura Căilor ferate, 1953.

72. T e o d o r e s c u , P.P. *Probleme plane în teoria elasticității*, Vol. I. 1960, vol. II. 1965, București, Editura Academiei R.P.R.

73. T i m o s h e n k o , S. *Résistance des materiaux*. Vol. I și II, Paris, Librairie Ch. Beranger, 1947, 1949.

74. T i m o s h e n k o , S. *Théorie de l'elasticité*. Paris, Librairie Ch. Beranger, 1948.

75. T i m o s h e n k o , S. *Théorie des vibrations*. Paris, Librairie Ch. Beranger, 1947

76. T i m o s h e n k o , S. și G e r e J. *Teoria stabilității elastice* (trad. din l. engleză). București, Editura tehnică, 1967.

77. T i m o s h e n k o , P.S. și V o i n o w s k y-K r i e g e r , S. *Teoria plăcilor plane și curbe* (trad. din. l. engleză) București, Editura tehnică, 1968.

78. T i m o s h e n k o , S. *History of Strength of Materials*. New York, Mc Graw Hill Book Comp, 1953.

79. T r i p a , M. *Rezistența materialelor*, București, Editura didactică și pedagogică, 1967.

80. V o i n e a , R., V o i c u l e s c u , D. și C e a u ș u , V. *Elasticitatea și plasticitatea*. Vol. I și II (litografiat), I. P. B., 1977.

81. Wang, Chi-Teh. *Applied Elasticity.* New York, 1953.
82. Westergard, H.M. *Theory of Elasticity and Plasticity.* New York, John Wiley a. Sons, 1952.
83. Wlassow, W.S. *Dünnwandige elastische Stäben* (trad. din. l. rusă). vol. I şi II. Berlin, V.E.B. Verlag für Bauwesen, 1964.
84. Worch. G. *Elastische Schreiben* (în Beton Kalender). Berlin, B Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, 1972.

B. Manuale inginereşti

85. Boerner, Fr. şi Iung, H. *Statische Tabelle.* Berlin, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, 1957.
86. Beton Kalender, Bd 1 u. 2 Berlin, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, (Ediţiile din anii 1970—1976).
87. Dreyer, G. *Formelsammlung zur Festigkeitslehre u. Elastizität* Leipzig, 1957.
88. Föppl, L. u. Sontag, G. *Tafel u. Tabellen zur Festigkeitslehre.* München, Verlag Oldenbourg, 1951.
89. Hütte, *Mathematische Formel u. Tabellen.* 2. Aufl. Berlin, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn. 1974.
90. Hütte. *Des Ingenieurs Taschenbuch.* Band III. Bautechnik 28 Aufl. Berlin, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, 1956.
91. *Manual pentru calculul construcţiilor.* Bucureşti, Editura tehnică, 1959.
92. *Manualul inginerului,* vol. II. Bucureşti, Editura tehnică, 1966.
93. *Manualul inginerului mecanic.* Bucureşti, Editura tehnică, 1974.
94. *Maşinostroenie.* Tom 1. Kniga Vtoraia, Moscova, 1948.
95. Roark, R. *Formulas for stress and strain.* New York, Mc Graw-Hill Book Comp., 1974.
96. Schleicher, F. *Taschenbuch für Bauingenieure,* Band 1 u, 2. Heidelberg, Springer Verlag, 1955.
97. *Stahl im Hochbau.* 13 Aufl. Düsseldorf, Verlag Stahleisen, 1957.

SECȚIUNEA IV

STATICA CONSTRUCȚIILOR

Prof. ing. **ANDREI CARACOSTEA**
Prof. dr. ing. **GHEORGHE ILIE**

CUPRINS

TABELELE SECŢIUNII IV

1. ELEMENTE GENERALE

Statica construcţiilor, ca disciplină aparte în cadrul Mecanicii construcţiilor, are ca obiect stabilirea metodelor şi procedeelor de determinare a eforturilor şi deformaţiilor, produse de sarcini şi acţiuni, în structurile de rezistenţă ale construcţiilor, care prin schematizări se pot reduce la structuri alcătuite din bare drepte sau curbe.

Din punct de vedere practic, inginerese, problemele Staticii construcţiilor constau în determinarea eforturilor, respectiv solicitărilor, în diferitele secţiuni ale barelor construcţiilor, precum şi a deformaţiilor (deplasările şi rotirile secţiunilor), respectiv a deformatelor structurilor în ansamblul lor produse de diferitele sarcini şi acţiuni la care pot fi supuse în exploatare.

Rezolvarea acestor probleme se face pe baza analizei stării de echilibru a structurilor studiate, considerate ca structuri deformabile elastic, sub acţiunea sarcinilor ce le solicită. În consecinţă, în Statica construcţiilor starea de eforturi şi deplasări a unei structuri se stabileşte în general prin considerarea următoarelor trei aspecte definitorii:

— *aspectul static*, care se exprimă prin condiţiile de echilibru static al structurilor, al părţilor de structură şi al elementelor lor componente;

— *aspectul geometric*, care se exprimă prin condiţiile de compatibilitate, respectiv de continuitate a legăturilor exterioare şi interioare;

— *aspectul fizic*, care stabileşte legătura între eforturi şi deformaţii, pe baza caracteristicilor fizico-mecanice ale materialelor folosite la realizarea structurilor.

1.1. Ipoteze de calcul

Ipotezele admise în Statica construcţiilor sînt:

1) Structurile, ca şi elementele lor, sînt în echilibru sub acţiunea sarcinilor ce le acţionează.

2) Deplasările secţiunilor elementelor structurilor (translaţii şi rotiri), care dau poziţiile deformate ale axelor barelor sistemelor statice în ansamblul lor, sînt foarte mici în comparaţie cu dimensiunile lor iniţiale.

3) Materialele din care sînt alcătuite structurile sînt omogene, izotrope, continue, cu proprietăţi fizico-mecanice constante în timp.

4) La calculul structurilor în domeniul elastic se admite că materialele se comportă perfect elastic, satisfăcînd legea lui Hooke.

5) Secţiunile plane şi normale pe axele barelor înainte de deformare rămîn plane şi normale pe axe şi după deformare (ipoteza lui Bernoulli).

Pe baza ipotezei micilor deplasări, condiţiile de echilibru se pot scrie faţă de configuraţia iniţială, nedeformată, a structurilor. Calculul în această ipoteză defineşte *Statica de ordinul I*, singura de care ne ocupăm în secţiunea de faţă.

Notă. Autorii menţionează că la realizarea acestei secţiuni au fost ajutaţi cu competenţă de şef lucrări dr. ing. VIRGIL FIERBINŢEANU, şef lucrări ing. NICOLAE STĂNILĂ şi asistent ing. IORDAN PETRESCU, cărora le aduc mulţumiri şi pe această cale

Dacă se ține seama și de proporționalitatea între eforturi și deformații, rezultă proporționalitatea între sarcinile ce acționează structurile și deplasările corespunzătoare, ceea ce face ca în Statica de ordinul I să se admită *principiul suprapunerii liniare a efectelor*.

1.2. Criterii de invariabilitate geometrică și determinare statică

Verificarea invariabilității geometrice a structurilor se face analizînd alcătuirea lor din punct de vedere cinematic și din punct de vedere static.

Din punct de vedere cinematic se examinează corelația dintre numărul corpurilor, considerate rigide, ce alcătuiesc structura, și numărul de legături exterioare și interioare.

Pentru un corp liber, gradul de libertate G_{l1}^0 este
- în spațiu $G_{l1}^0 = 6$;
- în plan $G_{l1}^0 = 3$.

Pentru o structură formată din C corpuri, considerate libere, gradul de libertate este
- în spațiu $G_{lc}^0 = 6C$;
- în plan $G_{lc}^0 = 3C$.

Fiecare *legătură simplă* a unui corp cu terenul, sau cu alt corp, reduce cu o unitate gradul lui de libertate. Pentru un sistem format din C corpuri legate între ele și cu terenul prin L_s legături simple, există relația

$$G_l = G_{lc}^0 - L_s. \quad \text{(IV.1)}$$

Pentru sistemele plane relația devine

$$G_l = 3C - (3i + 2a + r) \quad \text{(IV.1a)}$$

în care: i este numărul încastrărilor; a — numărul articulațiilor dintre două bare; r — numărul reazemelor simple ale sistemului

Din punct de vedere static se compară numărul E de ecuații de echilibru static disponibile cu numărul N al forțelor de legătură exterioare și interioare necunoscute. Astfel, gradul de libertate al unui sistem este dat de relația

$$G_l = E - N. \quad \text{(IV.2)}$$

Cu notațiile de mai înainte, pentru structuri plane rezultă

$$G_l = E - N = 3C - (3i + 2a + r). \quad \text{(IV.2a)}$$

Din punct de vedere al invariabilității geometrice și determinării statice, structurile se pot găsi în trei situații, și anume:

1) $G_l > 0$
- *geometric*: $G_{lc}^0 > L_s$ — sistemul este un mecanism;
- *static*: $E > N$ — structura este static determinată.

2) $G_l = 0$
- *geometric*: $G_{lc}^0 = L_s$ — sistemul este strict invariabil;
- *static*: $E = N$ — structura este static determinată.

3) $G_l < 0$
- *geometric*: $G_{lc}^0 < L_s$ — sistemul este invariabil;
- *static*: $E < N$ — structura este static nedeterminată.

Aceste relații constituie un criteriu necesar nu însă și suficient; *trebuie examinat dacă legăturile sînt judicios plasate și nu se formează sisteme critice.*

1.3. Analiza cinematică şi diagrame de deplasări la mecanisme plane cu un grad de libertate

1.3.1. Centre instantanee de rotaţie. După cum este cunoscut din mecanică, orice mişcare instantanee infinit mică a unui corp în plan poate fi asimilată cu o rotaţie instantanee în jurul unui punct *I*, numit *centru instantaneu absolut de rotaţie*. Acesta se găseşte la intersecţia normalelor pe deplasările instantanee a două puncte oarecare ale corpului (fig. IV.1).

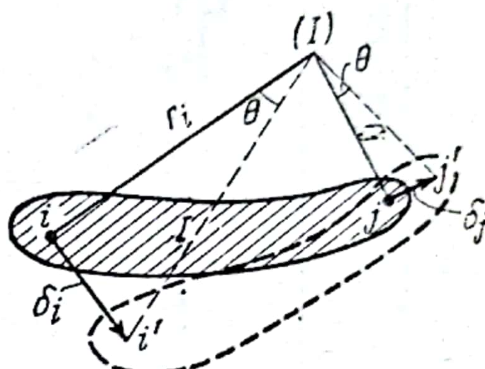


Fig. IV.1

Un corp articulat într-un punct fix al planului său are o singură mişcare posibilă, rotaţia în jurul articulaţiei fixe, care este *centrul lui absolut de rotaţie*.

O articulaţie între două corpuri formează un centru instantaneu relativ de rotaţie între corpurile respective.

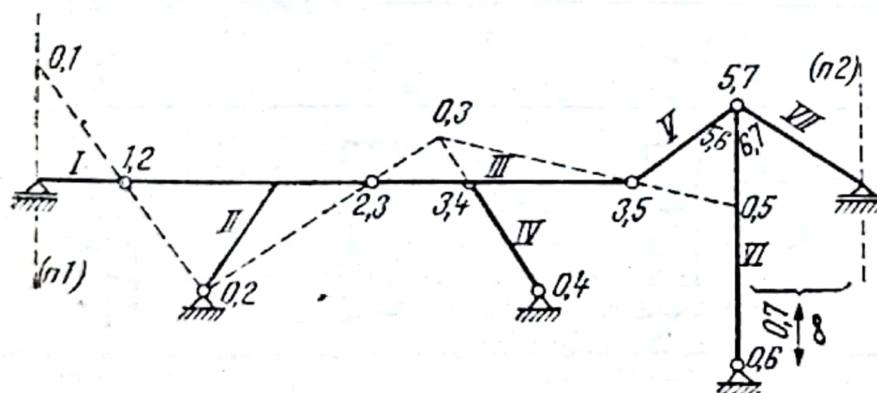
Dacă o şaibă are o legătură simplă cu terenul, centrul ei absolut de rotaţie se găseşte pe direcţia acestei legături.

1.3.2. Teoreme de colinearitate a centrelor instantanee de rotaţie. Acestea se enunţă astfel:

a) *Centrele instantanee absolute de rotaţie a două corpuri şi centrul lor relativ de rotaţie se găsesc pe o aceeaşi dreaptă.*

b) *Cele trei centre relative de rotaţie a trei şaibe ale unui lanţ cinematic luate două cîte două se găsesc pe o aceeaşi dreaptă.*

Observaţie. Dacă două corpuri oarecari ale unui lanţ cinematic sînt legate între ele prin două bare, centrul lor relativ de rotaţie se găseşte la intersecţia barelor de legătură. Dacă barele sînt paralele, centrul relativ de rotaţie este situat la infinit.



a) Centre instantanee cunoscute
(0,2) ; (0,4) ; (0,6)
(1,2);(2,3);(3,4);(3,5);(5,6);(5,7);(6,7)

b) Centre instantanee determinate pe baza teoremelor de coliniaritate

0,1 {0,2 1,2 0,1 / ⊥ reazem (n1)

0,3 {0,2 – 2,3 – 0,3 / 0,4 – 3,4 – 0,3

0,5 {0,3 – 3,5 – 0,5 / 0,6 – 5,6 – 0,5

0,7 {0,6 – 6,7 – 0,7 / ⊥ reazem (n2)

Fig. IV.2

Pe baza acestor două teoreme şi plecînd de la un centru absolut de rotaţie cunoscut, se pot stabili toate centrele de rotaţie absolute şi relative ale tuturor corpurilor unui lanţ cinematic cu un grad de libertate.

În fig. IV.2 este indicat modul de determinare al centrelor instantanee absolute şi relative de rotaţie la un lanţ cinematic cu un grad de libertate.

Tabelul IV.1

Legături corespunzătoare celor trei eforturi secţionale

Efortul	Legătura	Simbolul	Reprezentarea	Scheme cinematice ale legăturii	
				1	2
Toate eforturile		M, N, T	N_i M_i T_i N_i T_i i		I II
Efort axial		N	N_i N_i i I II	N_i N_i I (1,2) II ∞	N_i I (1,2) II N_i ∞
Forţă tăietoare		T	T_i i T_i I II		T_i I (1,2) $\to\infty$ II T_i
Moment încovoietor		M	M_i M_i i I II	M_i M_i I (1,2) II	M_i M_i I (1,2) II

în tabelul IV.1 sînt arătate mecanismele ce trebuie introduse în secțiune pentru deblocarea legăturilor corespunzătoare fiecărui efort secțional (N, T, M).

1.3.3. **Diagrame de deplasări**. Diagramele de deplasări constituie reprezentarea grafică a proiecțiilor pe o direcție dată a deplasărilor instantanee, infinit mici, a tuturor

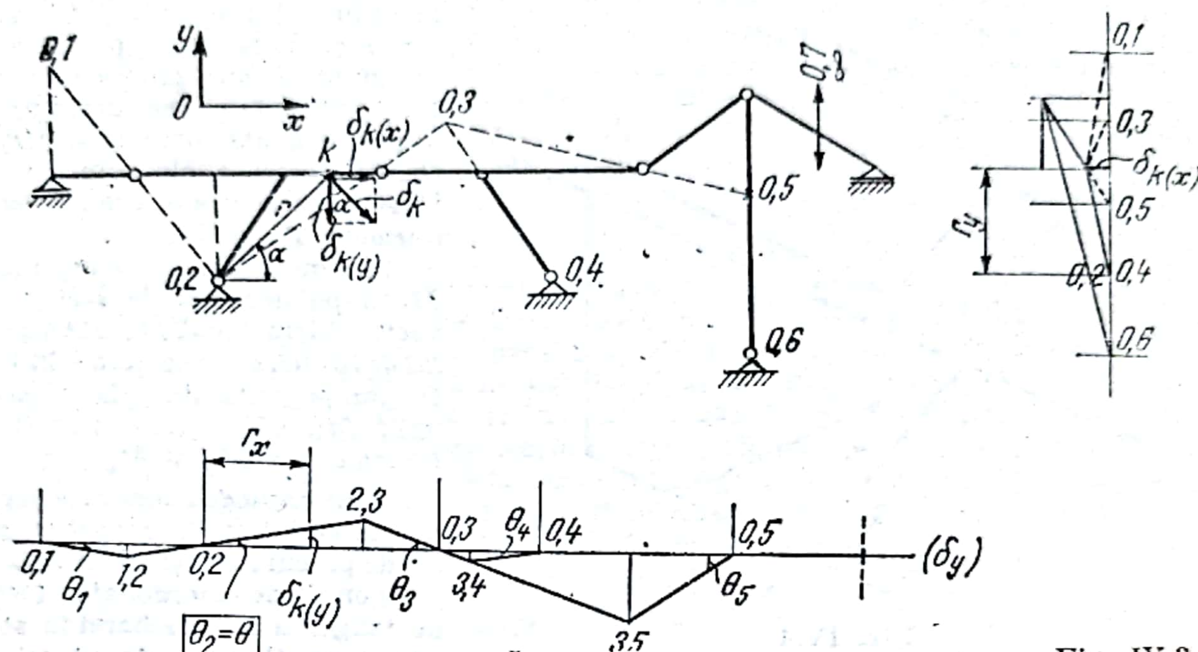


Fig. IV.3

punctelor unui mecanism sau lanț cinematic. Deplasarea instantanee totală a unui punct k oarecare este normală pe raza ce unește punctul cu centrul instantaneu absolut de rotație și are valoarea $\delta_k = r\cdot\theta$ (fig. IV.3). Proiecțiile deplasării δ_k pe două direcții ortogonale Ox și Oy au expresiile

$$\delta_{k(x)} = \delta_k \sin\alpha = r\cdot\theta\cdot\sin\alpha = r_y\cdot\theta\,; \quad \delta_{k(y)} = \delta_k\cos\alpha = r\cdot\theta\cdot\cos\alpha = r_x\cdot\theta$$

în care : θ este unghiul de rotire al corpului (pe care se află punctul k) în jurul centrului său absolut de rotație ; r_x și r_y sînt proiecțiile pe axele Ox și Oy ale razei r, ce unește punctul k al corpului cu centrul instantaneu absolut de rotație.

După cum rezultă din fig. IV.3, diagrama proiecțiilor deplasărilor punctelor unui corp pe o direcție oarecare este totdeauna o funcție liniară. Considerînd un parametru arbitrar al deplasării (de exemplu unghiul θ) se poate construi proiecția deplasărilor tuturor corpurilor mecanismului cu un grad de libertate pe direcția considerată.

1.4. Eforturi secționale în bare

1.4.1. **Semnificația și definirea eforturilor. Convenția de semne.** În Statica construcțiilor prin eforturi se înțeleg forțele de legătură ce apar într-o secțiune a unei bare dintr-o structură, sub acțiunea încărcărilor structurii.

Pentru o bară dintr-o structură spaţială, forţele interioare de legătură considerate în centrul de greutate O al unei secţiuni se definesc prin *torsorul de reducere* al forţelor de la stînga secţiunii (cu componentele: *vectorul forţă* $\bar{R}$ *şi vectorul moment* $\bar{M}_0$), (fig. IV.4).

Descompunînd forţa $\bar{R}$ după normala la secţiune şi planul secţiunii, se obţin componenta N_x după tangenta la axa barei în secţiune numită *efort axial* şi componenta T din planul secţiunii numită *forţă tăietoare*. Aceasta, la rîndul ei, se descompune după două axe ortogonale Oy şi Oz, de obicei axele principale de inerţie ale secţiunii formînd *forţele tăietoare* T_y şi T_z.

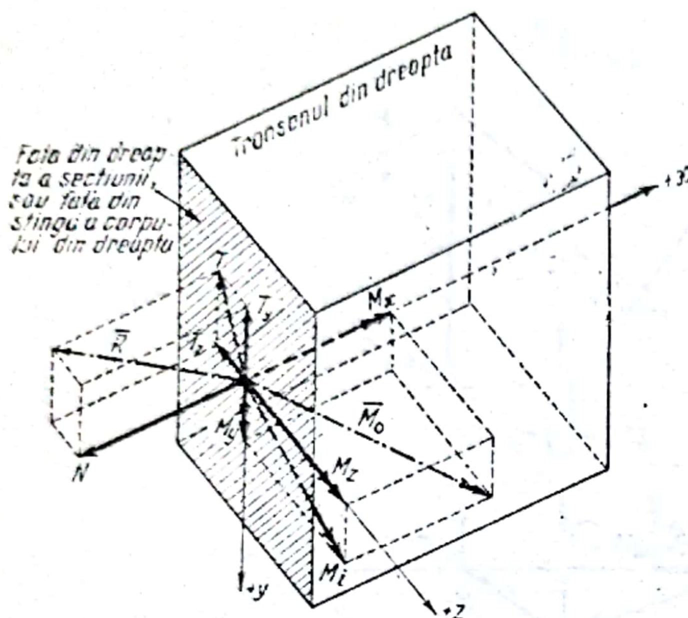


Fig. IV.4

În mod analog, componenta M_x după normala la secţiune a vectorului moment $\bar{M}_0$ este *momentul de răsucire* din secţiune, în timp ce componenta din planul secţiunii, M_i, dă naştere *momentelor încovoietoare* M_y şi M_z.

Convenţia de semne pentru eforturi se stabileşte în raport cu sensul de parcurs ales şi triedrul axelor ortogonale de coordonate, format de tangenta la axa barei în secţiune (axa Ox) şi, de obicei, de axele centrale principale de inerţie ale secţiunii Oy şi Oz. În fig. IV.4 sînt indicate sensurile pozitive ale eforturilor secţionale.

1.4.2. Calculul eforturilor. Diagrame de eforturi. Funcţiile: $N = f_1(p, x)$; $T = f_2(p, x)$; $M = f_3(p, x)$ care exprimă, pentru un sistem de sarcini fixe date, variaţia eforturilor în lungul unei bare se numesc *funcţii de eforturi*. Calculul eforturilor într-o secţiune a unei bare dintr-o structură, ca şi stabilirea funcţiilor de eforturi, se face pe baza *relaţiilor de reducere* sau de *echivalenţă* a forţelor ce acţionează la stînga sau la dreapta secţiunii, fie pe baza *ecuaţiilor de echilibru* luînd izolat una din cele două părţi. Reprezentarea grafică a variaţiei acestor funcţii reprezintă *diagramele de eforturi*.

1.4.3. Relaţii diferenţiale între sarcini şi eforturi la grinzi drepte. *Stabilirea relaţiilor diferenţiale* se face pe baza condiţiilor de echilibru ale unui element de bară dreaptă acţionat în planul xOy de o sarcină distribuită $p(x)$ de înclinare oarecare. Rezultă următoarele relaţii diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x} = -\,p_t(x)\,; \qquad \frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = T(x) + m(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = -\,p_n(x)\,; \qquad \frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(m(x))}{\mathrm{d}x} = -\,p_n(x) + \frac{\mathrm{d}(m(x))}{\mathrm{d}x}. \qquad \text{(IV.3)}$$

În aceste relaţii:

$N(x)$, $T(x)$ şi $M(x)$ sînt funcţiile continue ale eforturilor în lungul grinzii iar $p_n(x)$ şi $p_t(x)$ funcţiile continue ale încărcărilor normale, respectiv tangenţiale, în lungul

grinzii; $m(x)$ este funcția continuă a momentului-sarcină repartizat după o lege oarecare în lungul grinzii.

Dacă sarcinile $p_n(x)$, $p_t(x)$ și momentele $m(x)$ sînt continue pe o porțiune de bară, funcțiile N, T și M sînt și ele continue pe acea porțiune.

Relațiile diferențiale (IV.3) arată că, în cazul unei grinzi drepte încărcate numai cu sarcini continuu normale pe axa ei, între funcția momentului încovoietor, a forței tăietoare și a încărcării — aceasta luată cu semn schimbat — există aceeași legătură ca între funcția primitivă, derivata ei de ordinul întîi și derivata ei de ordinul al doilea.

Dacă grinda este acționată și de un moment de răsucire $m_t(x)$ ce variază continuu în lungul unei bare, rezultă în mod analog

$$\frac{\mathrm{d}M_t(x)}{\mathrm{d}x} = m_t(x). \qquad \text{(IV.4)}$$

Rezultă deci: pentru orice segment de bară dreaptă neîncărcată ($p=0$) forța tăietoare este constantă, iar diagrama M variază liniar; dacă pe segment $p=\text{const.}$, T variază liniar iar M după un arc de parabolă; dacă pe segmentul considerat p variază liniar, T variază după un arc de parabolă, iar M după un arc de parabolă cubică; dacă T este pozitiv M crește, și invers; variația forței tăietoare, respectiv a momentului încovoietor, între două secțiuni este egală cu aria diagramei p, respectiv T între acele secțiuni. Momentele încovoietoare sînt maxime sau minime în secțiunile în care $T=0$. Forțele concentrate P produc salturi în diagrama T egale cu valoarea lor, iar momentele concentrate M, salturi în diagrama M.

1.5. Deformarea elastică a structurilor

Metodele de calcul ale deplasărilor și deformărilor sînt:

— *metode generale*, aplicabile oricăror forme de structuri bazate pe teoreme energetice și pe procedee grafo-analitice, de exemplu: *metoda Maxwell-Mohr, metoda Castigliano, metoda sarcinilor elastice și grinzii conjugate*;

— *metode speciale*, aplicabile numai unor anumite tipuri de structuri, cum ar fi *metoda integrării ecuației diferențiale a fibrei medii deformate* la grinzi drepte, *metoda Villiot* la grinzi cu zăbrele etc.

1.5.1. Lucrul mecanic interior sau lucrul mecanic de deformație. Este lucrul mecanic înmagazinat de structură prin deformare sau lucrul mecanic al eforturilor N, M, T, M_t ce acționează în secțiunile barelor și are expresia

$$L_i = \frac{1}{2}\Sigma\int_0^l \frac{N^2}{EA}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\Sigma\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\Sigma\int_0^l \frac{\eta T^2}{GA}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\Sigma\int_0^l \frac{M_t^2}{GI_t}\,\mathrm{d}s. \qquad \text{(IV.5)}$$

Factorul $^1/_2$ din relația (IV.5) se justifică prin faptul că sarcinile exterioare se aplică static, valoarea lor, și în consecință și a eforturilor, crește treptat de la valoarea 0 la valoarea finală.

Energia potențială de deformație este energia acumulată de un corp prin deformare sub acțiunea sarcinilor. Expresia energiei de deformație U_i este

$$U_i = -L_i. \qquad \text{(IV.6)}$$

Energia potențială de deformație este o funcție omogenă de gradul al doilea a forțelor exterioare sau a deformațiilor produse de acestea; fiind compusă din suma pătratelor eforturilor, este totdeauna pozitivă.

Energia potenţială acumulată de un sistem static prin deformare nu este egală cu suma energiilor potenţiale produse de fiecare cauză în parte, deoarece orice forţă nouă aplicată sistemului producînd deplasări pe direcţiile forţelor deja existente dă naştere la un lucru mecanic suplimentar.

La structurile deformabile solicitate static, există relaţia

$$L_e = U_i \tag{IV.7}$$

conform căreia: *lucrul mecanic exterior este egal cu energia potenţială de deformaţie.*

1.5.2. Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual la structuri deformabile. Principiul lucrului mecanic virtual aplicat structurilor deformabile se enunţă: *suma lucrurilor mecanice virtuale corespunzătoare tuturor forţelor exterioare şi interioare ce acţionează o structură deformabilă supusă unui sistem de forţe în echilibru trebuie să fie nulă pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu toate legăturile.* El se exprimă prin relaţia

$$L_t = L_e + L_i = 0. \tag{IV.8}$$

Pentru problemele practice se utilizează în general două cazuri:

Cazul 1, cunoscut sub denumirea *principiul deplasărilor virtuale,* în care forţele ce acţionează structura sînt *forţele exterioare reale* aflate în echilibru, iar deplasările ce se imprimă structurii sînt *deplasări virtuale.*

Cazul 2, cunoscut sub denumirea de *principiul forţelor virtuale,* în care forţele ce acţionează structura formează un *sistem de forţe virtuale,* iar deplasările imprimate structurii sînt *deplasări reale.*

1.5.3. Teoremele de reciprocitate. Aceste teoreme exprimă condiţiile de reciprocitate ale lucrului mecanic.

1.5.3.1. Teorema reciprocităţii lucrului mecanic (teorema lui Betti). Această teoremă se exprimă analitic sub forma

$$\Sigma F_i \Delta_{ij} = \Sigma F_j \Delta_{ji} \tag{IV.9}$$

şi se enunţă astfel: *dacă asupra unei structuri deformabile elastic se aplică static şi pe rînd două sisteme de forţe generalizate F_i şi F_j, lucrul mecanic produs de primul sistem de forţe generalizate F_i, cînd acesta parcurge cu întreaga lui intensitate deplasările Δ_{ij} produse de cel de al doilea sistem de forţe generalizate F_j, este egal cu lucrul mecanic produs de cel de al doilea sistem de forţe F_j cînd acesta parcurge cu întreaga lui intensitate deplasările Δ_{ji} produse de primul sistem de forţe F_i.*

1.5.3.2. Teorema reciprocităţii deplasărilor elastice sau teorema lui Maxwell. Se deduce direct din teorema lui Betti prin particularizare, considerînd fiecare din cele două sisteme de forţe generalizate F_i şi F_j reduse la o singură forţă generalizată, egală cu unitatea

$$1 \cdot \delta_{ij} = 1 \cdot \delta_{ji}. \tag{IV.10}$$

Teorema lui Maxwell se enunţă: *deplasarea pe direcţia i datorită unei forţe generalizate egală cu unitatea aplicată pe direcţia j este numeric egală cu deplasarea pe direcţia j produsă de o forţă generalizată egală cu unitatea aplicată pe direcţia i.*

1.5.3.3. **Teorema reciprocităţii forţelor şi reacţiunilor.** Această teoremă se exprimă analitic

$$F_{ij}\cdot 1 = F_{ji}\cdot 1 \tag{IV.11}$$

şi se enunţă : *forţa generalizată aplicată în i care produce pe direcţia j o deplasare generalizată egală cu unitatea este numeric eglă cu forţa generalizată aplicată în j care produce pe direcţia i o deplasare generalizată egală cu unitatea.*

Această teoremă se aplică şi legăturilor, respectiv reacţiunilor sistemelor static nedeterminate ; ea se enunţă : *reacţiunea din legătura (reazemul) i cauzată de o deplasare egală cu unitatea imprimată pe direcţia legăturii j este egală cu reacţiunea din j cauzată de o deplasare egală cu unitatea imprimată pe direcţia legăturii i.*

1.5.3.4 **Teorema reciprocităţii dintre deplasări şi reacţiuni.** Această teoremă se exprimă analitic

$$\delta_{ij} = -\, r_{ji} \tag{IV.12}$$

şi se enunţă : *deplasarea elastică pe direcţia i cauzată de o deplasare egală cu unitatea imprimată pe direcţia legăturii j este numeric egală şi de semn contrar cu reacţiunea pe direcţia legăturii j, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată pe direcţia i.*

1.6. Calculul deplasărilor punctuale

1.6.1. **Forma generală a formulei Maxwell-Mohr.** Metoda constă în a aplica în secţiunea şi pe direcţia deplasării căutate, o încărcare virtuală unitară şi anume : pentru o deplasare liniară (săgeată) o forţă unitară virtuală, iar pentru o rotire, un moment unitar virtual. Din încărcarea structurii cu forţele generalizate reale, expresia deplasării punctuale este

$$1\cdot\Delta_{jk}^{F} = \Sigma\int_0^l \frac{nN}{EA}\,\mathrm{d}s + \Sigma\int_0^l \frac{mM}{EI}\,\mathrm{d}s + \int_0^l \frac{\eta t T}{GA}\,\mathrm{d}s \quad \Sigma\int_0^l \frac{m_t M_t}{GI_t}\,\mathrm{d}s. \tag{IV.13}$$

În mod analog, deplasarea punctuală produsă de variaţiile de temperatură capătă forma

$$1\cdot\Delta_{jk}^{t} = \Sigma\int_0^l \alpha t_0 n\,\mathrm{d}s + \int_0^l \alpha\frac{\Delta t}{h}\, m\,\mathrm{d}s. \tag{IV.14}$$

Deplasarea produsă de cedările cunoscute Δ_r ale reazemelor este

$$1\cdot\Delta_{jk}^{r} = -\,\Sigma\bar{R}_r\cdot\Delta_r. \tag{IV.15}$$

În aceste formule s-a notat :

Δ_{jk} — deplasarea punctuală, respectiv săgeata centrului de greutate al secţiunii sau rotirea planului secţiunii, în punctul j al axei unei bare, pe direcţia k, respectiv proiecţia deplasării totale reale a punctului j pe direcţia k ;

N, M, T, M_t — eforturile într-o secţiune a unei bare a structurii, produse de sarcinile reale ;

Expresiile integralelor de forma $\int Mm\,dx$

Nr. linie	Nr. coloană 0: Diagrama M / Diagrama m	1	2
1	M (+) M, s	Mms	$\frac{1}{2}Mms$
2	(+) M, s	$\frac{1}{2}Mms$	$\frac{1}{3}Mms$
3	M (+), s	$\frac{1}{2}Mms$	$\frac{1}{6}Mms$
4	M_1 (+) M_2, s	$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)\,ms$	$\frac{1}{6}(M_1 + 2M_2)\,ms$
5	M_1 (+) (−) M_2, s	$\frac{1}{2}(M_1 - M_2)\,ms$	$\frac{1}{6}(M_1 - 2M_2)\,ms$
6	M (+) (−) M, s/2, s/2	0	$-\frac{1}{6}Mms$
7	M (+), α·s, β·s, s	$\frac{1}{2}Mms$	$\frac{1}{6}(1 + \alpha)\,Mms$
8	1, M (+), 2, s/2, s/2	$\frac{1}{2}Mms$	$\frac{1}{4}Mms$

Column header diagrams: column 1 — m (+) m, 1, 2, s; column 2 — 1, (+) m, 2, s.

Tabelul IV.2

pentru diferite forme de diagrame M şi m

3	4	5	6
m_1, 1, ⊕, m_2, 2, s	m_1, 1, ⊕, ⊖, 2, m_2, s	m, 1, ⊕, ⊖, 2, m, $s/2$, $s/2$	1, ⊕, m, 2, $\alpha \cdot s$, $\beta \cdot s$
$\frac{1}{2} M (m_1 + m_2) s$	$\frac{1}{2} M (m_1 - m_2) s$	0	$\frac{1}{2} Mms$
$\frac{1}{6} M (m_1 + 2m_2) s$	$\frac{1}{6} M (m_1 - 2m_2) s$	$-\frac{1}{6} Mms$	$\frac{1}{6} Mm (1 + \alpha) s$
$\frac{1}{6} M (2m_1 + m_2) s$	$\frac{1}{6} M (2m_1 - m_2) s$	$+\frac{1}{6} Mms$	$\frac{1}{6} Mm (1 + \beta) s$
$\frac{1}{6} [(2m_1 + m_2) M_1 + (m_1 + 2m_2) M_2] s$	$\frac{1}{6} [(2m_1 - m_2) M_1 + (m_1 - 2m_2) M_2] s$	$\frac{1}{6} (M_1 - M_2) ms$	$\frac{1}{6} m [M_1 (1 + \beta) + M_2 (1 + \alpha)] s$
$\frac{1}{6} [(2m_1 + m_2) M_1 - (m_1 + 2m_2) M_2] s$	$\frac{1}{6} [(2m_1 - m_2) M_1 - (m_1 - 2m_2) M_2] s$	$\frac{1}{6} (M_1 + M_2) ms$	$\frac{1}{6} [M_1 (1 + \beta) - M_2 (1 + \alpha)] ms$
$\frac{1}{6} M (m_1 - m_2) s$	$\frac{1}{6} M (m_1 + m_2) s$	$\frac{1}{3} Mms$	$\frac{1}{6} Mm (1 - 2\alpha) s$
$\frac{1}{6} M [(1 + \beta) m_1 + (1 + \alpha) m_2] s$	$\frac{1}{6} M [(1 + \beta) m_1 - (1 + \alpha) m_2] s$	$\frac{1}{6} Mm (1 - 2\alpha) s$	$\frac{1}{3} Mms$
$\frac{1}{4} M (m_1 + m_2) s$	$\frac{1}{4} M (m_1 - m_2) s$	0	$\frac{1}{12} Mm \frac{3 - 4\alpha^2}{\beta} s$

	0	1	2
9	$\gamma > \alpha$	$\frac{1}{2}\gamma\, Mms$	$\frac{1}{6}\gamma^2\, Mms$
10	$\gamma > \alpha$	$\frac{1}{2}(2\gamma - 1)\, Mms$	$\frac{1}{6}\, M\,(3\gamma^2 - 1)\, ms$
11	Parabolă de gradul doi	$\frac{1}{3}\, Mms$	$\frac{1}{4}\, Mms$
12		$\frac{1}{3}\, Mms$	$\frac{1}{12}\, Mms$
13		$\frac{2}{3}\, Mms$	$\frac{5}{12}\, Mms$
14		$\frac{2}{3}\, Mms$	$\frac{1}{4}\, Mms$
15		$\frac{2}{3}\, Mms$	$\frac{1}{3}\, Mms$
16		$\frac{1}{6}(M_1 + 4M + M_2)\, ms$	$\frac{1}{6}(2M + M_2)\, ms$

Tabelul IV.2 (continuare)

3	4	5	6
$\frac{1}{6}\gamma M[3m_1 - \gamma(m_1 - m_2)]s$	$\frac{1}{6}\gamma M[3m_1 - \gamma(m_1 + m_2)]s$	$\frac{1}{6}M\left(4 - \frac{3}{\gamma}\right)m\gamma^2 s$	$\frac{1}{3}Mm\left\{\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) \times \left[\gamma + (\gamma - \alpha)\left(\frac{1-\gamma}{\beta}\right)\right]\right\}s$
$\frac{1}{6}M[(1 - 3\delta^2)m_1 - (1 - 3\gamma^2)m_2]s$	$\frac{1}{6}M[(1 - 3\delta^2)m_1 + (1 - 3\gamma^2)m_2]s$	$\frac{1}{3}Mm\left\{\frac{1}{2}\gamma^2 + (2\delta - 1) \times \left[\gamma^2 - \left(\delta - \frac{1}{2}\right)\left(\delta + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\right]\right\}s$	$\frac{1}{3}Mm\left\{\frac{\alpha^2}{\gamma} + (\gamma - \alpha) \times \left[\frac{\alpha^2}{\gamma}\left(1 + \frac{\delta}{2\beta}\right) + \frac{\delta}{\beta} + \frac{1}{2}\right]\right\}\alpha s$
$\frac{1}{12}M(m_1 + 3m_2)s$	$\frac{1}{12}M(m_1 - 3m_2)s$	$-\frac{1}{6}Mms$	$\frac{1}{12}Mm(1 + \alpha + \alpha^2)s$
$\frac{1}{12}M(3m_1 + m_2)s$	$\frac{1}{12}M(3m_1 - m_2)s$	$\frac{1}{6}Mms$	$\frac{1}{12}Mm(1 + \beta + \beta^2)s$
$\frac{1}{12}M(3m_1 + 5m_2)s$	$\frac{1}{12}M(5m_1 - 3m_2)s$	$-\frac{1}{6}Mms$	$\frac{1}{12}Mm(5 - \beta - \beta^2)s$
$\frac{1}{12}M(5m_1 + 3m_2)s$	$\frac{1}{12}M(5m_1 - 3m_2)s$	$\frac{1}{6}Mms$	$\frac{1}{12}Mm(5 - \alpha - \alpha^2)s$
$\frac{1}{3}M(m_1 + m_2)s$	$\frac{1}{3}M(m_1 - m_2)s$	0	$\frac{1}{3}Mm(1 + \alpha\beta)s$
$\frac{1}{6}(M_1 m_1 + 4Mm + M_2 m_2)s$	$\frac{1}{6}(M_1 m_1 + 4Mm - M_2 m_2)s$	$\frac{1}{6}(M_1 - M_2)ms$	$\frac{1}{6}[M_1\beta + 2M_2 + M_2\alpha - \alpha\beta(M_1 - 2M + M_2)]s$

	0		1	2
17		M_1, M, 1, 2, $s/2$, $s/2$	$\frac{1}{6}(3M_1 - 4M)ms$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}M_1 - M\right)ms$
18		1, M, M_2, 2, $s/2$, $s/2$	$\frac{1}{6}(3M_1 - 4M)ms$	0
19	Parabolă cubică	M, s	$\frac{1}{4}Mms$	$\frac{1}{5}Mms$
20	Parabolă cubică	M	$\frac{1}{4}Mms$	$\frac{1}{20}Mms$
21	Parabolă cubică	M, s	$\frac{1}{4}Mms$	$\frac{2}{15}Mms$
22	Parabolă cubică	M, s	$\frac{1}{4}Mms$	$\frac{7}{60}Mms$
23	Parabolă cubică	M, s	$\frac{3}{8}Mms$	$\frac{11}{40}Mms$
24	Parabolă cubică	M, s	$\frac{3}{8}Mms$	$\frac{1}{10}Mms$

*) Expresia 1: $\frac{1}{8}Mm\cdot\left\{\frac{-\alpha^3-18\alpha^2\cdot\beta}{4}-\frac{5}{16\beta}-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left[4\alpha\beta+\frac{1}{2\beta}+\frac{3}{2}+\left(\frac{5\alpha^2}{2}-\frac{3\alpha}{4}+\beta-\alpha\beta-\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]\right\}s+$

**) Expresia 2: $\frac{1}{8}Mm\cdot\left\{\frac{-\alpha^3-18\alpha^2\beta}{4}-\frac{5}{16\beta}-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left[4\alpha\beta+\frac{1}{2\beta}+\frac{3}{2}+\left(\frac{5\alpha^2}{2}-\frac{3\alpha}{4}+\beta-\alpha\beta-\frac{3}{4}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]\right\}s+$

Tabelul IV.2 (continuare)

3	4	5	6
$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}M_1(2m_1+m_2)-M(m_1+m_2)\right]s$	$\frac{1}{3}\left[M(m_2-m_1)-\frac{1}{2}M_1(m_2-2m_1)\right]s$	$\frac{1}{6}M_1ms$	v. Expresia 1*)
$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}M_2(m_1+2m_2)-M(m_1+m_2)\right]s$	$\frac{1}{3}\left[M(m_2-m_1)+\frac{1}{2}M_2(m_1-2m_2)\right]s$	$-\frac{1}{6}M_2ms$	v. Expresia 2**)
$\frac{1}{20}M(m_1+4m_2)s$	$\frac{1}{20}M(m_1-4m_2)s$	$-\frac{3}{20}Mms$	$\frac{1}{20}Mm(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)s$
$\frac{1}{20}M(4m_1+m_2)s$	$\frac{1}{20}M(4m_1-m_2)s$	$+\frac{3}{20}Mms$	$\frac{1}{20}Mm(1+\beta+\beta^2+\beta^3)s$
$\frac{1}{60}M(7m_1+8m_2)s$	$\frac{1}{60}M(7m_1-8m_2)s$	$-\frac{1}{60}Mms$	$\frac{1}{20}Mm(1+\alpha)\left(\frac{7}{3}-\alpha^2\right)s$
$\frac{1}{60}M(8m_1+7m_2)s$	$\frac{1}{60}M(8m_1-7m_2)s$	$+\frac{1}{60}Mms$	$\frac{1}{20}Mm(1+\beta)\times\left(\frac{7}{3}-\beta^2\right)s$
$\frac{1}{40}M(4m_1+11m_2)s$	$\frac{1}{40}M(4m_1-11m_2)s$	$-\frac{7}{40}Mms$	$\frac{1}{10}Mm\left(1+\alpha+\alpha^2+\frac{\alpha^3}{4}\right)s$
$\frac{1}{40}M(11m_1+4m_2)s$	$\frac{1}{40}M(11m_1-4m_2)s$	$+\frac{7}{40}Mms$	$\frac{1}{10}Mm\left(1+\beta+\beta^2+\frac{\beta^3}{4}\right)s$

$+\frac{1}{3}M_1m\left(\frac{1}{2}\alpha+\alpha\beta+\beta^2\right)s$

$+\frac{1}{3}M_2m\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha^2}{\beta}\right)s$

n, m, t, m_t — eforturile produse în aceeaşi secţiune de sarcina virtuală egală cu unitatea, aplicată în secţiune şi după direcţia pe care se caută deplasarea;
α — coeficientul de dilatare termică liniară;
t_0 — variaţia de temperatură în axa barei;
Δt — diferenţa de temperatură între fibra inferioară şi superioară;
$\bar{R}_r$ — reacţiunea în reazemul r, produsă de sarcina virtuală;
Δ_r — deplasarea cunoscută a reazemului r pe direcţia reacţiunii $\bar{R}_r$;
h — înălţimea secţiunii barei.

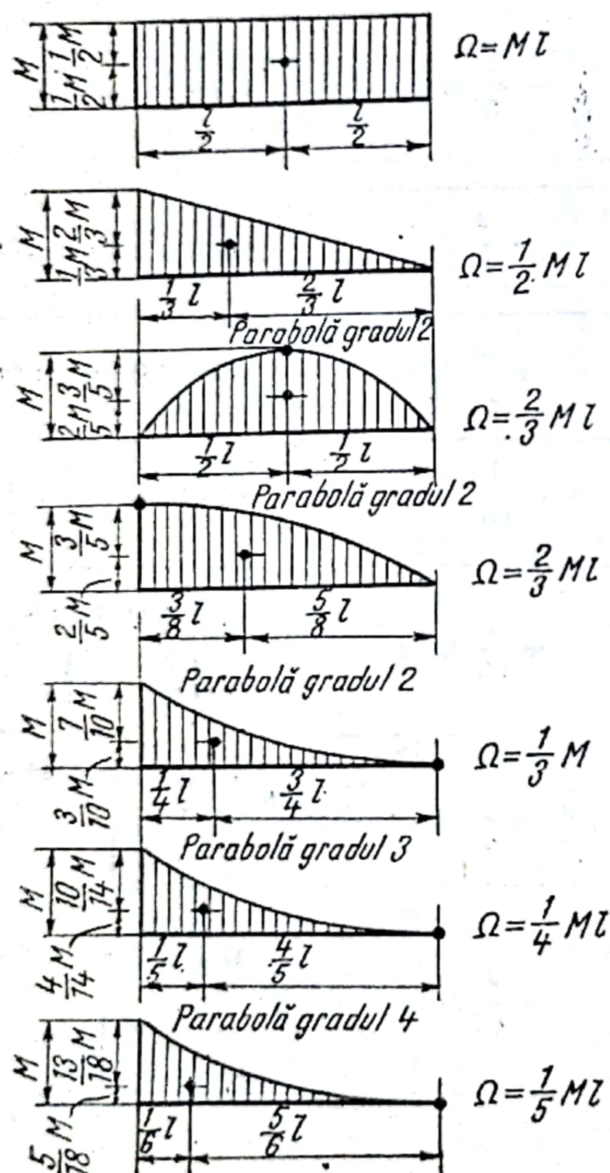


Fig. IV.5

1.6.2. Calculul integralelor la bare drepte cu secţiune constantă. Regula lui Veresceaghin. Efectuarea integralelor aplicînd *regula lui Veresceaghin* se bazează pe observaţia că diagrama virtuală este totdeauna liniară, în timp ce diagrama reală este reprezentată de o curbă oarecare.

În acest caz, integrarea se poate efectua grafo-analitic, deplasarea punctuală avînd următoarea expresie

$$\Delta_{jk} = \Sigma \frac{\Omega_N n_G}{EA} + \Sigma \frac{\Omega_M m_G}{EI} + $$
$$+ \Sigma \alpha t_0 \Omega_n + \Sigma \alpha \frac{\Delta t}{h} \Omega_m - \Sigma \bar{R}_r \Delta_r \quad \text{(IV.16)}$$

în care: Δ_{jk} este deplasarea punctului j pe direcţia k; Ω_N şi Ω_M — ariile diagramelor N şi M pe segmentele de bară pe care n şi m variază liniar şi continuu; Ω_n şi Ω_m — ariile diagramelor n şi m; m_G — valoarea momentului încovoietor din diagrama m în dreptul centrului de greutate al diagramei M; n_G — ordonata din diagrama n în dreptul centrului de greutate al diagramei N.

În fig. IV. 5 sînt date ariile şi poziţiile centrelor de greutate pentru cîteva diagrame folosite mai des.

Pentru diferite forme de diagrame M şi m rezultatul integrărilor de forma $\int mM\,dx$ este dat în tabelul IV.2.

1.6.3. Calculul integralelor la bare cu moment de inerţie variabil. La barele cu secţiune variabilă în trepte pe anumite lungimi, cum este cazul unor stîlpi la hale industriale sau al grinzilor metalice cu inimă plină, aria A şi momentul de inerţie I variind în trepte, integralele se fac pe segmente pe care A şi I sînt constante.

Pentru sistematizarea calculelor se alege un *moment de inerţie arbitrar* I_c de obicei $I_c = I_{min}$ al barei, se calculează pentru diferitele segmente s de bară rapoartele $\frac{I_c}{I_x} = n$, integrarea făcîndu-se apoi pe aceste segmente direct sau cu regula Vereşceaghin, sub forma

$$EI_c\Delta_{jk} = \Sigma \int_0^S \frac{I_c}{I_x} mM \, ds = \Sigma \frac{I_c}{I_x} \Omega_M m_G. \qquad \text{(IV.17)}$$

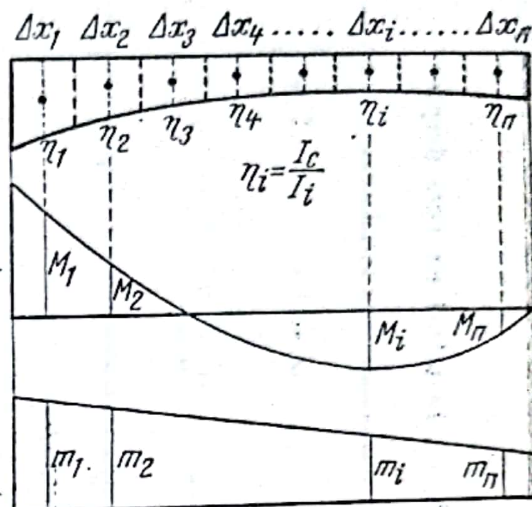


Fig. IV.6

Pentru bare avînd momentul de inerţie variabil în lungul lor sau pe anumite segmente, cum este cazul barelor cu vute sau barelor cu înălţime variabilă (fig. IV.6) pentru a ocoli greutăţile de integrare analitică, integralele se înlocuiesc cu sume algebrice, împărţind bara într-un număr de segmente, egale sau neegale, considerînd pentru fiecare segment valorile M, m şi $I_c/I_{xi} = \eta_i$ din mijlocul segmentului şi făcînd suma produselor lor, respectiv

$$EI_c\Delta_{jk} = \sum_1^n \eta_i M_i m_i \Delta x_i. \qquad \text{(IV.18)}$$

Calculul deplasărilor punctuale la grinzi avînd două vute simetrice se poate face utilizînd formulele din tabelul IV.3, iar pentru grinzi cu o singură vută tabelul IV.4.

1.7. Determinarea liniei elastice a structurilor

În unele cazuri este necesar să se cunoască nu numai deplasările unor puncte ale unei structuri pe o anumită direcţie, ci şi *linia elastică* — numită generic şi *deformată* — a acesteia, care este *locul geometric al centrelor de greutate al tuturor secţiunilor barelor structurii, după deformare.*

Trasarea deformatei unei structuri se poate face aplicînd metoda Maxwell-Mohr pentru un număr de puncte mai mult sau mai puţin apropiate, sau folosind metode speciale, cu precădere *metoda sarcinilor elastice şi sistemelor conjugate.*

1.7.1. Aplicarea metodei Maxwell-Mohr. Procedeul constă în a stabili deformata printr-o suită de puncte în care se calculează deplasările punctuale şi a uni aceste puncte între ele, obţinînd astfel un poligon. Pentru o curbă mai exactă, punctele obţinute se pot uni cu arce de parabolă tangente între ele.

Tabelul IV.3

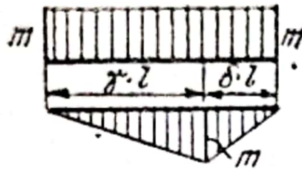
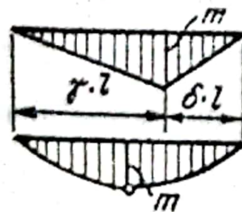
Relații pentru calculul integralelor de forma $\int \frac{I_h}{I_{(x)}} Mm\,dx$ la grinzi cu vute drepte

I_A, I_h, I_A; a, x, a, l

$$\eta = \frac{I_h}{I_A} \qquad \varkappa = 1 - \eta \qquad \xi = \frac{x}{l}$$

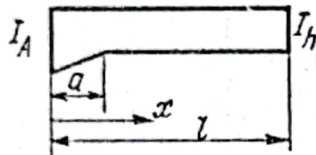
$$\frac{I_h}{I} = 1 - \varkappa\frac{a - x}{a} \qquad \alpha = \frac{a}{l} \qquad \beta = 1 - \alpha$$

	M
m m	$\frac{1}{2} mM(1 - \varkappa\,\alpha)\,l$
m	$\frac{1}{6} mM[2 - \varkappa\,\alpha(2 + \beta^2)]\,l$
m	$\frac{1}{6} mM[1 - \varkappa\,\alpha^2(2 - \alpha)]\,l$
$\gamma \cdot l$, $\delta \cdot l$, m	$\frac{1}{12} mM\left[2(1 + \delta) - m\frac{\alpha^2}{\gamma - \gamma^2}(\alpha + 2\beta\delta)\right]l; \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$
m	$\frac{1}{3} mM[1 - \varkappa\,\alpha^2(2 - \alpha)]\,l$
	M M

	$mM(1-\varkappa\,\alpha)l$ $\frac{1}{12}mM\left(6-\varkappa\frac{2\alpha^3}{\gamma-\gamma^2}\right)l;\quad \alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$
   	$\frac{1}{2}(M_1+M_2)m(1-\varkappa\,\alpha)l$ $\frac{1}{6}\{(m_1M_1+m_2M_2)[2-\varkappa\,\alpha(2+\beta^2)]+$ $+(m_1M_2+m_2M_1)[1-\varkappa\,\alpha^2(2-\alpha)]\}l$ $\frac{1}{3}(M_1+M_2)m[1-\varkappa\,\alpha^2(2-\alpha)]l$
	parabolă de gradul 2
	$\frac{1}{15}mM\left[5(1+\gamma-\gamma^2)-\varkappa\frac{\alpha^3}{\gamma-\gamma^2}(5-3\alpha)\right]l;\quad \alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$ $\frac{8}{15}mM[1-\varkappa\,\alpha^3(5-6\alpha+2\alpha^2)]l$

Tabelul IV.4

Relații pentru calculul integralelor de forma $\int \frac{I_h}{I_{(x)}} Mm\,dx$ la grinzi cu o singură vută dreaptă

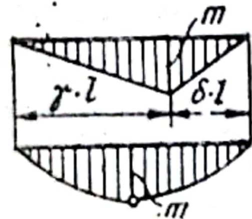


$\eta = \frac{I_h}{I_A}$ $\varkappa = 1 - \eta$ $\xi = \frac{x}{l}$

$\frac{I_h}{I} = 1 - \varkappa \frac{a - x}{a}$ $\alpha = \frac{a}{l}$ $\beta = 1 - \alpha$

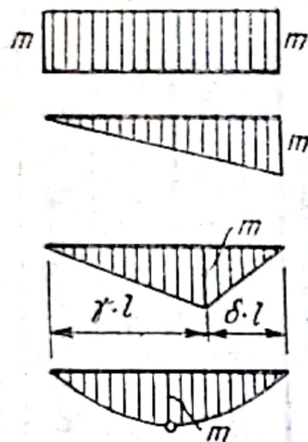
$\frac{1}{6} mM\,[3 - \varkappa\alpha(3 - \alpha)]l$

$\frac{1}{12} mM\,\{4 - \varkappa\alpha[2 + (2 - \alpha)^2]\}l$



$\frac{1}{12} mM \left[2(1 + \delta) - \varkappa \frac{\alpha^2}{\gamma}(2 - \alpha)\right] l; \quad \gamma \geqslant \alpha$

$\frac{1}{15} mM\,[5 - \varkappa\alpha^2(10\beta + 3\alpha^2)]l$



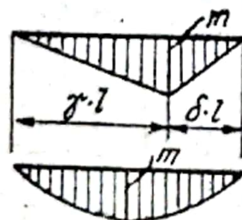
$$\frac{1}{6}\, mM\,(3 - \varkappa\alpha^2)\,l$$

$$\frac{1}{12}\, mM\,(4 - \varkappa\,\alpha^2)\,l$$

$$\frac{1}{12}\, mM \left[2(1+\gamma) - \varkappa\,\frac{\alpha^3}{\gamma}\right] l\,; \quad \gamma \geqslant \alpha$$

$$\frac{1}{15}\, mM\,[5 - \varkappa\,\alpha^3(5 - 3\alpha)]\,l$$

parabolă de gradul 2



$$\frac{1}{15}\, mM \left[5(1+\gamma-\gamma^2) - \varkappa\,\frac{\alpha^3}{\gamma}\,(5 - 3\alpha)\right] l\,; \quad \gamma \geqslant \alpha$$

$$\frac{4}{15}\, mM\,[2 - \varkappa(5 - 6\alpha + 2\alpha^2)\alpha^3]\,l$$

1.7.2. **Metoda sarcinilor elastice și a sistemelor conjugate.** Metoda permite trasarea directă a proiecției liniei elastice a unei structuri plane, pe o direcție dată. Conform acestei metode, *diagrama de momente încovoietoare produsă de sarcinile elastice pe sistemul conjugat reprezintă la o anumită scară variația deplasărilor liniare (săgeților), iar diagrama forțelor tăietoare reprezintă variația rotirilor.*

Pentru a aplica metoda la o structură dată, este necesar să se stabilească sarcinile elastice și forma sistemului conjugat.

Sarcinile elastice se stabilesc pe baza analogiei dintre ecuația diferențială a fibrei medii deformate și ecuația diferențială dintre momentul încovoietor și funcția de încărcare, respectiv,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI_x},$$

Notînd $W_x = \dfrac{M_x}{EI_x}$ denumită *sarcina elastică* se obține relația:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -W_x. \qquad \text{(IV.19)}$$

Din această relație se definesc analogiile:

$$W_x \text{ analog cu } p_x;$$
$$q_x \text{ analog cu } T_x;$$
$$y_x \text{ analog cu } M_x.$$

Sistemul conjugat se determină din sistemul real, căruia i se modifică legăturile, corespunzător semnificației sarcinilor elastice W_x și a eforturilor.

Trecerea de la legăturile sistemului real la cele ale sistemului conjugat se face pe baza *conjugării legăturilor.*

În sistemul conjugat legăturile apar pe direcția gradelor de libertate ale sistemului real, iar legăturile sistemului real sînt înlocuite la rîndul lor cu grade de libertate. Trecerea de la legăturile sistemului real la cele ale sistemului conjugat este arătată în tabelul IV. 5.

Tabelul IV.5

Corespondența dintre condițiile de rezemare ale grinzii reale și ale grinzii conjugate

Grinda reală		Grinda conjugată	
Modul de fixare	Simbolul	Modul de fixare	Simbolul
Reazem articulat		Reazem simplu	
Reazem încastrat		Capăt liber	
Capăt liber		Reazem încastrat	
Reazem intermediar		Articulație intermediară	
Articulație intermediară		Reazem intermediar	

1.8. Relații diferențiale între sarcini, eforturi și deplasări la un segment de bară dreaptă

Între cele cinci funcții, și anume între funcția încărcării, $p(x)$, a forței tăietoare $T(x)$, a momentului încovoietor $M(x)$, a rotirii $\varphi(x)$, și a săgeții $y(x)$, la o bară dreptă, există relațiile

$$EI\,\frac{d^4y(x)}{dx^4} = EI\,\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} = -\,\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -\,\frac{dT(x)}{dx} = p(x)$$

$$EI\,\frac{d^3y(x)}{dx^3} = EI\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\,\frac{dM(x)}{dx} = -\,T(x)$$

$$EI\,\frac{d^2y(x)}{dx^2} = EI\,\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\,M(x) = EIW(x) \qquad \text{(IV.20)}$$

$$EI\,\frac{dy(x)}{dx} = EI\,\varphi(x) = \tau(x)$$

$$EI\,y(x) = \mathfrak{M}(x).$$

În aceste formule $\tau(x)$ și $\mathfrak{M}(x)$ sînt forța tăietoare și momentul încovoietor produse de sarcinile elastice $W(x)$ pe sistemul conjugat.

1.9. Sarcini mobile. Linii de influență

Pentru dimensionarea elementelor construcțiilor supuse sarcinilor mobile este necesar să se cunoască valorile extreme, maxima și minima între care poate varia o mărime statică oarecare (reacțiuni, eforturi, eforturi unitare, deplasări) cînd sarcinile se deplasează pe linia de încărcare.

1.9.1. Conceptul de linie de influență. În general, problema calculului valorilor extreme ale unei mărimi statice într-o secțiune, produse de sarcinile mobile, se rezolvă folosind *linii de influență*.

Conceptul de linie de influență are la bază principiul suprapunerii liniare a efectelor conform căruia, o mărime statică oarecare, de exemplu un efort $E(N, T, M)$ într-o secțiune s produs de un sistem de sarcini oarecare, se poate exprima printr-o funcție liniară de forma

$$E_s = P_1\eta_{s1} + P_2\eta_{s2} + \ldots + P_i\eta_{si} + \ldots + P_n\eta_{sn} \qquad \text{(IV.21)}$$

în care: P_i este o sarcină concentrată a convoiului acționînd în secțiunea i; η_{si} sînt coeficienți de influență ai mărimii statice.

Un coeficient de influență de forma η_{si} reprezintă valoarea mărimii statice ce interesează în secțiunea s cînd o sarcină egală cu unitatea acționează în secțiunea i pe linia de încărcare.

1.9.2. **Construcția liniilor de influență.** Liniile de influență pentru eforturi și reacțiuni se pot construi pe cale analitică sau folosind metoda deplasărilor virtuale:

1) *Metoda analitică* sau *metoda funcției de influență* constă în exprimarea analitică a echilibrului, respectiv determinarea mărimii statice în secțiunea aleasă, funcție de poziția unei sarcini egală cu unitatea pe linia de încărcare. Expresiile acestor mărimi statice sînt funcțiile de influență, iar reprezentarea lor grafică constituie liniile de influență.

2) *Metoda deplasărilor virtuale*, constă în exprimarea echilibrului pe baza principiului lucrului mecanic virtual (varianta deplasărilor virtuale).

Linia de influență a unei mărimi statice este obținută (la o anumită scară și cu un anumit semn) din linia elastică a căii (pe direcția sarcinii unitate) considerînd ca încărcare pe structură mărimea statică.

Semnul și scara liniei de influență rezultă din ecuația de lucru mecanic virtual $dL = 0$, care, pentru o singură legătură suprimată, se explicitează sub forma

$$-E_s\delta_s \pm 1\cdot\eta_{si} = 0 \tag{IV.22}$$

sau

$$E_s = \frac{\pm\,\eta_{si}}{\delta_s}. \tag{IV.22a}$$

În formulă s-a convenit ca deplasarea δ_s să fie dată în sens invers sensului ales pentru mărimea statică E_s, deci semnul ordonatelor liniei de influență va fi același cu semnul lucrului mecanic al sarcini unitate. Scara liniei de influență este $\delta_s = 1$.

Pentru liniile de influență ale eforturilor într-o secțiune liberarea de legături se face introducînd în secțiune mecanismele arătate în tabelul IV. 1.

La sistemele static determinate, diagrama de deplasări reprezentînd deplasările unui lanț cinematic cu un grad de libertate, liniile de influență sînt funcții liniare.

La sistemele static nedeterminate, diagrama de deplasări rezultînd ca deformata elastică a structurii avînd gradul de nedeterminare $(n-1)$, liniile de influență sînt reprezentate de curbe oarecare.

Dacă linia de încărcare transmite sarcinile indirect la structură, între două puncte succesive de transmitere linia de influență este reprezentată de o dreaptă ce unește punctele de transmitere situate pe linia de influență generală a structurii.

În fig. IV. 7 — IV.10 sînt prezentate liniile de influență caracteristice pentru grinzi și sisteme de grinzi drepte static determinate.

Liniile de influență ale deplasărilor se construiesc direct pe baza teoremei reciprocității deplasărilor unitare (teorema lui Maxwell). Construcția liniilor de influență a deplasărilor într-o secțiune a unei structuri static determinate sau static nedeterminate, este dată de linia elastică a structurii produsă de o sarcină unitate — forță pentru săgeți, moment pentru rotiri — aplicată în secțiunea considerată.

1.9.3. Utilizarea liniilor de influență. Poziția cea mai defavorabilă a convoiului este determinată de forma liniei de influență, care indică unde trebuie așezate sarcinile cele mai grele, pentru ca să se obțină valorile cele mai mari sau mai mici ale mărimii statice căutate.

Pentru un convoi de forțe concentrate, poziția cea mai defavorabilă a convoiului se determină prin încercări. Practic, convoiul de sarcini mobile se desenează pe o hîrtie de calc la scara lungimilor utilizată pentru linia de influență și se deplasează în diferite poziții pe linia de influență construită dinainte, pînă ce se obține valoarea maximă a sumei $\sum P_i \eta_i$ pentru fiecare poziție.

Dacă sarcina este uniform repartizată și se poate întinde pe toată lungimea liniei de încărcare, putîndu-se și fracționa, valoarea maximă a mărimii statice se obține încărcînd numai zonele de același semn.

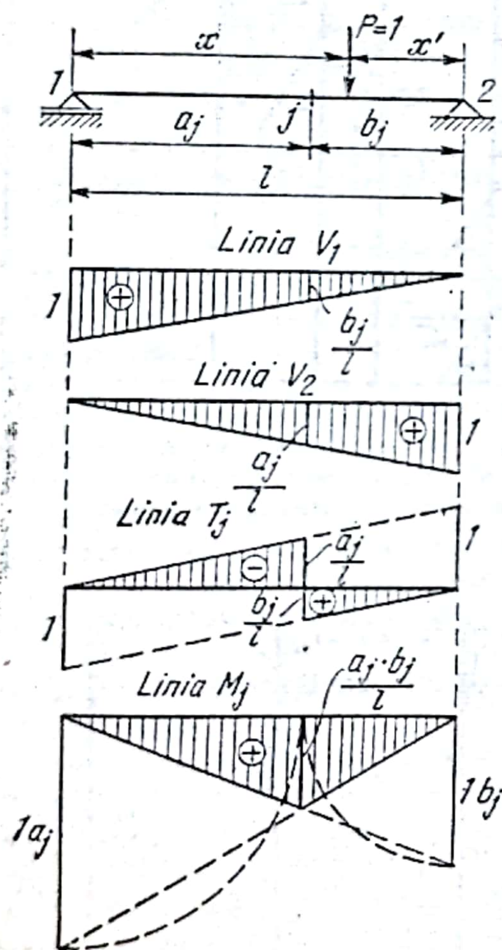


Fig. IV.7

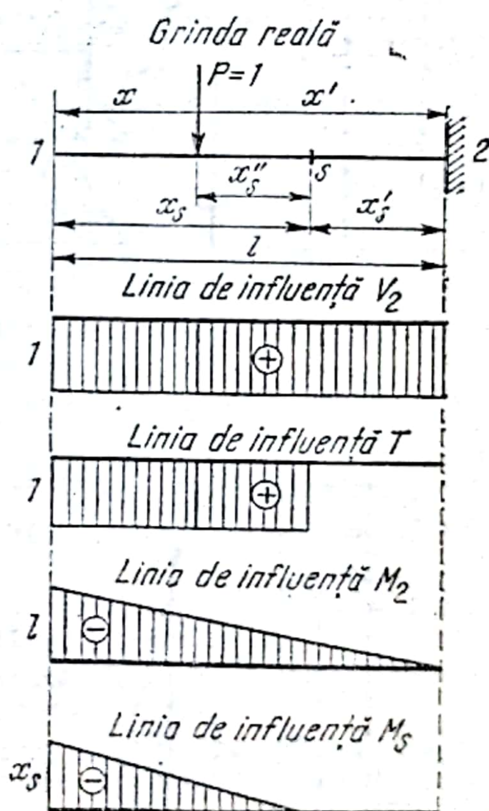


Fig. IV.8

Dacă sarcina are o lungime determinată, valoarea maximă se obține așezînd sarcina în așa fel încît ordonatele liniei de influență de la extremitățile zonei ocupate de sarcină să fie egale.

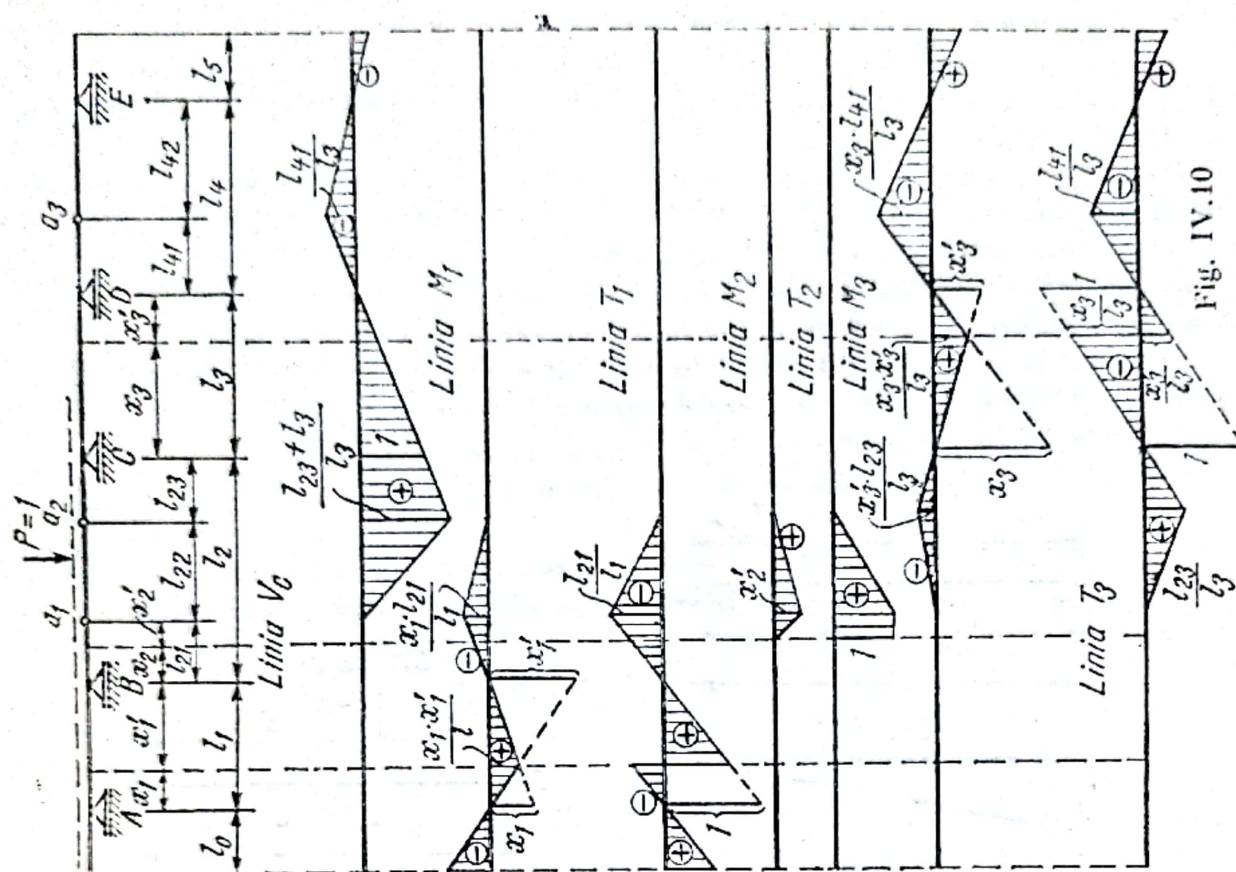


Fig. IV.10

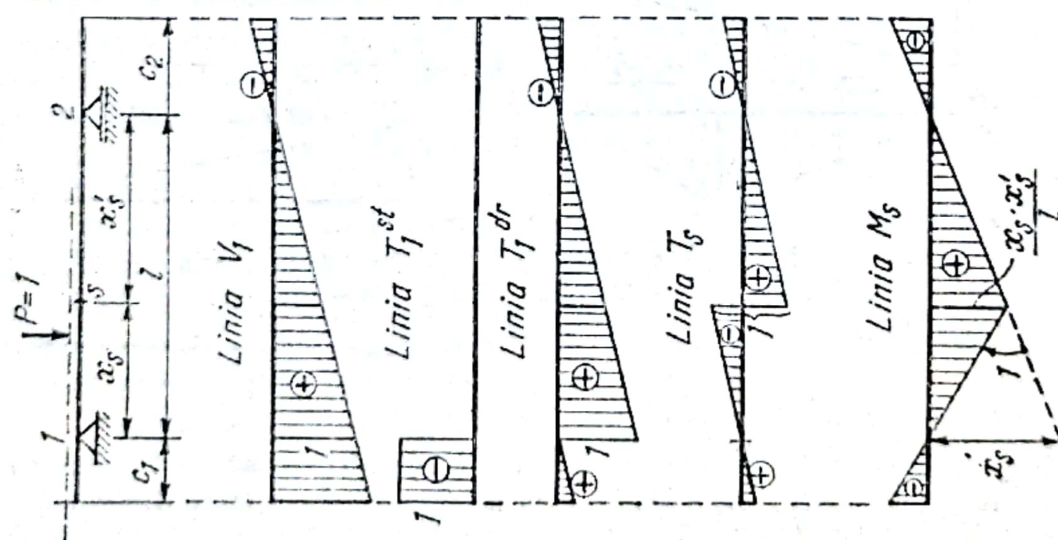


Fig. IV.9

2. STRUCTURI STATIC DETERMINATE

Structurile static determinate se clasifică în : grinzi drepte simple, care pot fi grinzi încastrate la un cap şi grinzi simplu rezemate ; sistem de grinzi drepte (grinzi cu console şi articulaţii) ; grinzi cotite şi cadre ; arce ; grinzi cu zăbrele ; sisteme mixte ; grinzi şi cadre plane încărcate normal pe planul lor ; structuri spaţiale articulate.

În acest capitol se prezintă structuri static determinate pentru care sînt întocmite tabele uzuale de calcul ale reacţiunilor, eforturilor şi deformaţiilor cît şi unele metode particulare specifice tipului de structură (grinzi cu zăbrele, arce static determinate).

2.1. Grinzi drepte static determinate

În tabelul IV. 6 sînt prezentate expresiile reacţiunilor, ale eforturilor şi deformaţiilor în secţiunile caracteristice ale grinzii simplu rezemate.

În tabelul IV. 7 sînt prezentate expresiile reacţiunilor, ale eforturilor şi deformaţiilor în secţiunile caracteristice pentru grinda în consolă.

2.2. Grinzi cu zăbrele plane static determinate

2.2.1. **Definiţii. Ipoteze. Clasificări. Condiţii de invariabilitate geometrică şi determinare statică.** Grinzile cu zăbrele sînt structuri alcătuite din bare drepte legate la noduri prin articulaţii perfecte. Încărcările se consideră că acţionează numai la noduri (transmitere indirectă pentru sarcini utile). În baza acestor ipoteze rezultă că în barele grinzilor cu zăbrele se produc numai eforturi axiale. Nerespectarea acestor ipoteze conduce la apariţia de eforturi suplimentare care în general se pot neglija sau cînd nu se pot neglija se determină ca efecte secundare (v. cap. 5, pct 5.3.2). Barele grinzii cu zăbrele de pe conturul superior şi inferior formează *talpa superioară* respectiv *inferioară*, barele înclinate se numesc *diagonale*, iar cele verticale se numesc *montanţi*.

După forma tălpilor, grinzile cu zăbrele se împart în ; grinzi cu tălpi paralele (fig. IV. 11, *a, c, e, g, i*) şi grinzi cu contur poligonal (fig. IV. 11, *b, d, f, h, j*). După modul de distribuire a zăbrelelor se deosebesc : sistem triunghiular (fig. IV. 11, *a, b*), sistem dreptunghiular (fig. IV. 11, *c, d*), sistem în K (fig. IV, 11, *e*) şi sistem multiplu (fig. IV. 11, *g*).

Din punctul de vedere al modului de alcătuire şi al metodelor de calcul grinzile cu zăbrele se împart în :

— grinzi simple la care plecînd de la trei bare legate în triunghiuri se poate urmări legarea fiecărui nod cu cîte două bare (fig. IV. 11, *a, b, c, d, e*) ;

— grinzi compuse care se obţin prin legarea între ele de grinzi simple sau prin înlocuirea unor bare tot cu grinzi simple (fig. IV. 11, *f, h*) ;

— grinzi complexe care cuprind grinzile care nu intră în primele două categorii (fig. IV. 11, *g, i, j*) ; o caracteristică a acestor grinzi este că zăbrelele se întretaie fără să aibă noduri la punctele de intersecţie.

Condiţia de invariabilitate geometrică şi determinare statică, pentru o grindă cu zăbrele plană alcătuită din b bare legate în n noduri şi avînd r legături simple exterioare este

$$b + r = 2n.$$

Tabelul IV.6

Reacţiuni, forţe tăietoare, momente încovoietoare şi deformaţii la grinzi simplu rezemate

Notaţii:

P — forţă concentrată;

p — sarcină uniform distribuită;

M — moment (cuplu) concentrat;

V — reacţiune verticală;

T_x — forţă tăietoare în secţiunea de abscisă x;

M_x — moment încovoietor în secţiunea de abscisă x;

M_{max} — moment încovoietor maxim;

I — moment de inerţie axial;

E — modulul de elasticitate longitudinală (modulul lui Young);

G — modulul de elasticitate transversală

h — înălţimea secţiunii grinzii;

y; f; y_P — săgeţi produse de momentele încovoietoare;

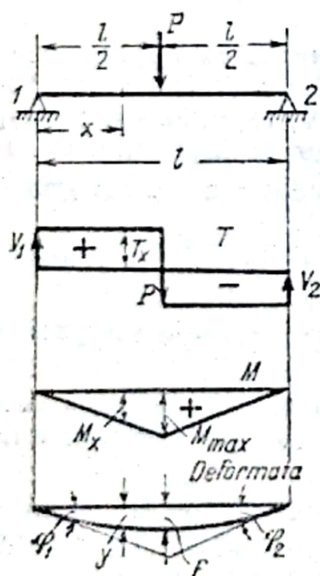
f_T — săgeţi produse de forţele tăietoare;

φ_i — rotirea secţiunii i (radiani);

y_{max} — distanţa de la axa neutră a unei secţiuni pînă la fibra cea mai îndepărtată;

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \xi' = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}.$$

1.



$$V_1 = V_2 = \frac{P}{2};$$

$$x < \frac{l}{2}: \quad T_x = +\frac{P}{2}; \quad M_x = \frac{P}{2}x; \quad M_{max} = \frac{Pl}{4};$$

$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{Pl^2}{16};$$

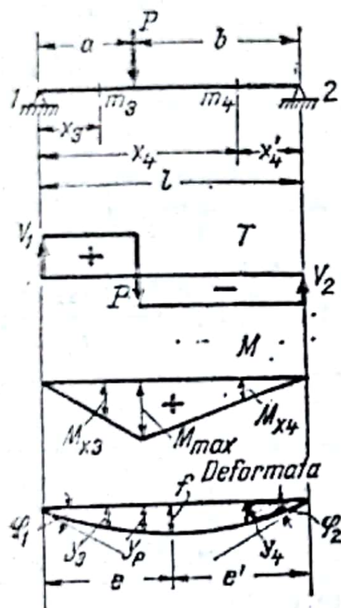
$$y = f(3\xi - 4\xi^3) \text{ pentru } \xi \leqslant 0,5 \text{ sau } x \leqslant \frac{l}{2}$$

$$x > \frac{l}{2}: \quad T_x = -\frac{P}{2}; \quad f = \frac{Pl^3}{48EI} =$$

$$= \frac{M_{max}l^2}{12EI} = \frac{\sigma_{max}}{EI} \cdot \frac{bh^3}{y_{max}} \cdot \frac{l^2}{144}; \quad f_T = k\frac{M_{max}}{GA}$$

Tabelul IV.6 (continuare)

2.



$$V_1 = P\frac{b}{l} = P\beta;\quad V_2 = P\frac{a}{l} = P\alpha;$$

$$M_{max} = P\frac{ab}{l} = Pl\alpha\beta;\quad M_{x_3} = V_1x_3;\quad M_{x_4} = V_2x'_4;$$

$$EI\varphi_1 = \frac{Pab}{6l}(l+b) = \frac{1}{6}Pl^2(\beta - \beta^3);$$

$$EI\varphi_2 = \frac{Pab}{6l}(l+a) = \frac{1}{6}Pl^2(\alpha - \alpha^3);$$

$$y_P = \frac{Pl^3}{3EI}(\alpha\beta)^2 = \frac{M_{max}\cdot l^2}{3\,EI}\alpha\beta;$$

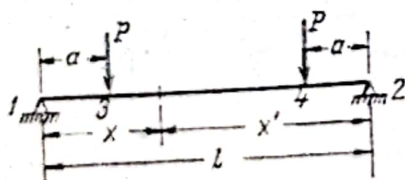
$$y_3 = \frac{Pl^3}{6EI}\beta\xi_3(1-\beta^2-\xi_3^2);\quad y_4 = \frac{Pl^3}{6EI}\alpha\xi'_4(1-\alpha^2-\xi'^2_4);$$

Săgeata maximă f se află cînd: $a < b$ la

$$e' = b\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}}\ \text{și cînd: } a > b \text{ la}$$

$$e = a\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{a}};\quad f_T = k\frac{M_{max}}{GA}$$

3.



$$V_1 = V_2 = P;$$

$x \leqslant a$: $T_x = P$; $M_x = Px$;

$a < x < l - a$:

$T = 0$; $M_x = M_3 = M_4 = M_{max} = Pa$

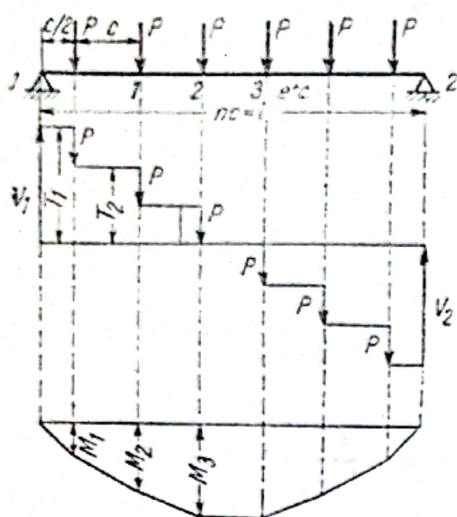
$x > l - a$: $T_x = -P$; $M_x = Px'$;

$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{Pa(l-a)}{2} = \frac{Pl^2}{2}(\alpha - \alpha^2);$$

$$EIf = \frac{Pa}{24}(3l^2 - 4a^2) = \frac{M_{max}\,l^2}{24}(3 - 4\alpha^2)$$

Tabelul IV.6 (continuare)

4.



$n-1$ forţe egale

$$V_1 = V_2 = \frac{P}{2}(n-1);\ T_1 = V_1;\ M_1 = \frac{Pl}{2}\cdot 1\cdot\frac{n-1}{n}$$

$$T_2 = V_1 - P;\ M_2 = \frac{Pl}{2}\cdot 2\cdot\frac{n-2}{n};\quad T_3 = V_1 - 2P;$$

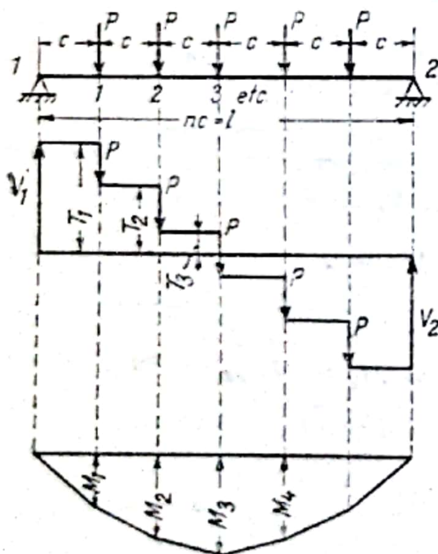
$$M_3 = \frac{Pl}{2}\cdot 3\cdot\frac{n-3}{n};\quad T_4 = V_1 - 3P;$$

$$M_4 = \frac{Pl}{2}\cdot 4\cdot\frac{n-4}{n}\text{etc};\ M_{max} = \frac{Pl}{\eta_M};$$

$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{Pl^2}{24}\cdot\frac{n^2-1}{n};\quad EI\,f = \frac{M_{max}\,l^3}{\eta_f};$$

$n =$	2	3	4	5	6	7
η_M	4	3	2	1,666...	1,333...	1,16...
η_f	12	9,39	10,11	9,25	9,81	9,56

5.



n forţe egale

$$V_1 = V_2 = \frac{P}{2}n;\ T_1 = V_1;\ M_1 = \frac{Pl}{4};\ T_2 = V_1 - P;$$

$$M_2 = \frac{Pl}{4}\cdot\frac{3n-4\cdot 1}{n};\quad T_3 = V_1 - 2P;$$

$$M_3 = \frac{Pl}{4}\cdot\frac{5n-4(1+2)}{n};\quad T_4 = V_1 - 3P$$

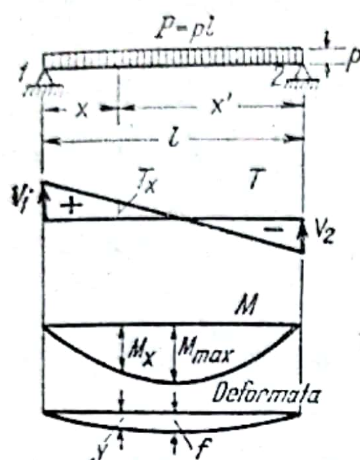
$$M_4 = \frac{Pl}{4}\cdot\frac{7n-4(1+2+3)}{n}\ \text{etc};\ M_{max} = \frac{Pl}{\eta_M};$$

$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{Pl^2}{48}\cdot\frac{2n^2+1}{n};\ EIf = \frac{M_{max}\,l^2}{\eta_f};$$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
η_M	4	4	2,4	2	1,538	1,333	1,12
η_f	12	8,72	10,19	9,52	9,82	9,49	9,72

Tabelul IV.6 (continuare)

6.



$$V_1 = V_2 = \frac{pl}{2};\ T_x = V_1 - px;$$

$$M_x = \frac{pxx'}{2} = M_{max} \cdot 4\xi\xi';\ M_{max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{Pl}{8};$$

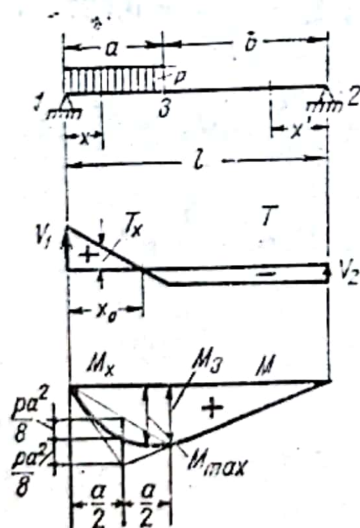
$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{pl^3}{24} = M_{max} \cdot \frac{l}{3};$$

$$f = \frac{5}{384}\,\frac{pl^4}{EI} = \frac{M_{max}\, l^2}{9{,}60\, EI} = \frac{\sigma_{max}}{E} \cdot \frac{l^2}{9{,}60\, y_{max}};$$

$$y = \frac{pl^4}{24\, EI}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = f \cdot \frac{16}{5}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$$

$$f_T = k\frac{M_{max}}{GA}$$

7.



$$V_1 = \frac{pa(2b + a)}{2l} = \frac{pl}{2}(2\alpha - \alpha^2);$$

$$V_2 = \frac{pa^2}{2l} = \frac{pl}{2} \cdot \alpha^2;$$

$$x < a:\ T_x = V_1 - px;\ M_x = M_3 \cdot \frac{x}{a} + \frac{px(a - x)}{2};$$

$$M_{max} = \frac{V_1^2}{2p}\ \text{la}\ x_0 = \frac{l\alpha}{2}(2 - \alpha);\ EI\varphi_1 = \frac{pl^3}{24} \cdot \alpha^2(2 - \alpha)^2;$$

$$x \geqslant a:\ T_2 = -V_2;\ M_x = V_2 x';$$

$$M_3 = \frac{p \cdot a^2}{2} \cdot \beta;\ EI\varphi_2 = \frac{pl^3}{24} \cdot \alpha^2(2 - \alpha)^2.$$

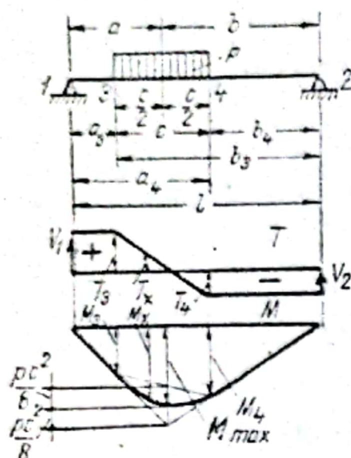
Pentru $a = b$: $V_1 = \frac{3}{8}pl;\ V_2 = \frac{1}{8}pl;\ M_3 = \frac{pl^2}{16};$

$$M_{max} = \frac{9}{128}pl^2 = \frac{pl^2}{14{,}22};\ EI\varphi_1 = \frac{3}{128}pl^3 = M_{max} \cdot \frac{l}{3};$$

$$EI\varphi_2 = \frac{7}{384}pl^3 = M_{max} \cdot \frac{7}{27}l.$$

Tabelul IV.6 (continuare)

8.



$$V_1 = pc\frac{b}{l} = pl\beta\gamma;\quad V_2 = pc\frac{a}{l} = pl\alpha\gamma;$$

$$T_3 = V_1;\ T_4 = -V_2;\ a_3 < x < a_4:\ T_x = V_1 - p(x - a_3);$$

$$M_3 = V_1 a_3;\ M_4 = V_2 b_4;\ x < a_3:\ M_x = V_1 x;\ x > a_4:$$

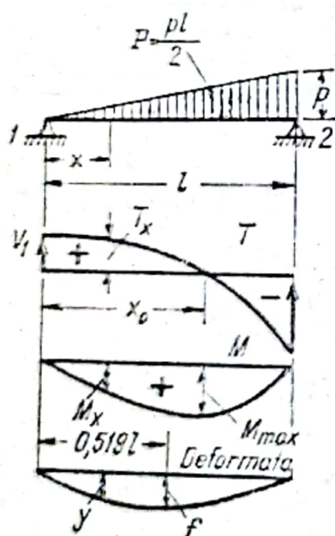
$$M_x = V_2 x';\ M_{max} = M_3 + \frac{V_1^2}{2p} = \frac{pl^2}{2}\alpha\beta\gamma(2-\gamma)$$

$$EI\varphi_1 = \frac{pbc}{24\,l}[4a(b+l) - c^2] = \frac{pl^3}{24}\gamma\beta(4 - 4\beta^2 - \gamma^2);$$

$$EI\varphi_2 = \frac{pac}{24\,l}[4b(a+l) - c^2] = \frac{pl^3}{24}\gamma\alpha(4 - 4\alpha^2 - \gamma^2);$$

pentru $a = b$: $M_{max} = \frac{pl^2}{8}\gamma(2-\gamma) = \frac{pc}{4}\left(l - \frac{c}{2}\right)$

9.



$$V_1 = \frac{pl}{6} = \frac{P}{3};\quad V_2 = \frac{pl}{3} = \frac{2}{3}P;\quad T_x = \frac{pl}{6}(1 - 3\xi^2);$$

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,l;\quad \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577;$$

$$M_{max} = \frac{pl^2}{9\sqrt{3}} = \frac{pl^2}{15{,}59} = \frac{Pl}{7{,}79};\quad M_x = \frac{pl^2}{6}(\xi - \xi^3):$$

$$EI\varphi_1 = \frac{7}{360}pl^3;\quad EI\varphi_2 = \frac{1}{45}pl^3;$$

$$y = \frac{pl^4}{360\,EI}(7\xi - 10\xi^3 + 3\xi^5);$$

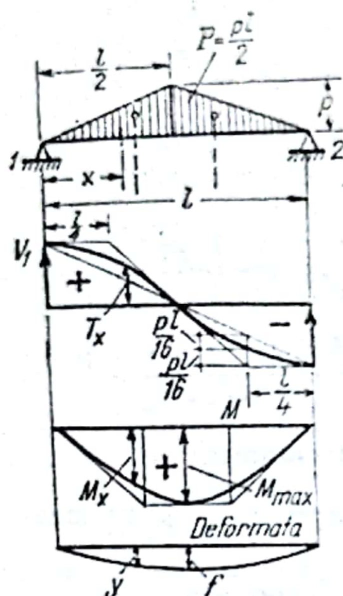
pentru: $\xi = 0{,}519$: $f = 0{,}00652\frac{pl^4}{EI} = \frac{|M_{max}|l^2}{9{,}84\,EI} =$

$$= 0{,}01304\frac{Pl^3}{EI};$$

pentru: $\xi = 0{,}577$: $f_T = k\frac{M_{max}}{GA}$

Tabelul IV.6 (continuare)

10.



$$V_1 = V_2 = \frac{pl}{4} = \frac{P}{2};$$

$$T_x = \frac{pl}{4}(1 - 4\xi^2); \ M_{max} = \frac{pl^2}{12} = \frac{Pl}{6};$$

$$M_x = \frac{pl^2}{12}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right) = M_{max}(3\xi - 4\xi^3);$$

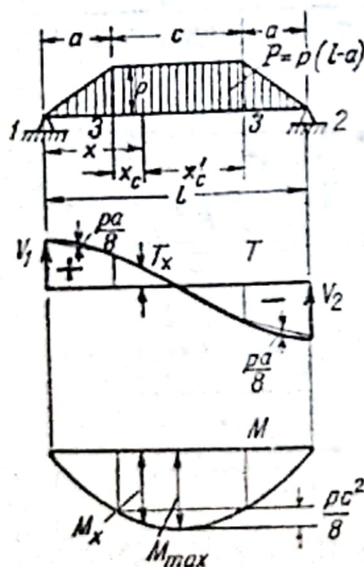
$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{5}{192}pl^3 = \frac{5}{16}M_{max}l;$$

$$f = \frac{pl^4}{120\,EI} = \frac{M_{max}\,l^2}{10\,EI} = \frac{\sigma_{max}}{E}\cdot\frac{l^2}{10\,y_{max}};$$

$$y = f\left(\frac{25}{8}\xi - 5\xi^3 + 2\xi^5\right);$$

$$f_T = k\frac{M_{max}}{GA}$$

11.



$$P = p(l-a); \ V_1 = V_2 = \frac{p(l-a)}{2} = \frac{pl}{2}(1-\alpha) = \frac{P}{2};$$

$$x < a: \ T_x = V_1 - \frac{px^2}{2a} \ \text{(parabolă gradul 2)}$$

$$M_x = V_1 x - \frac{px^3}{6a} \ \text{(parabolă gradul 3)}$$

$$x = a: \ T_3 = \frac{pc}{2} = \frac{pl}{2}\gamma; \ M_3 = \frac{pl^2}{6}(3\alpha - 4\alpha^2)$$

$$x > a: \ T_x = \frac{pc}{2} - p(x-a) \ \text{(dreaptă)};$$

$$M_x = M_3 + \frac{px_c x_c'}{2} \ \text{(parabolă gradul 2)}$$

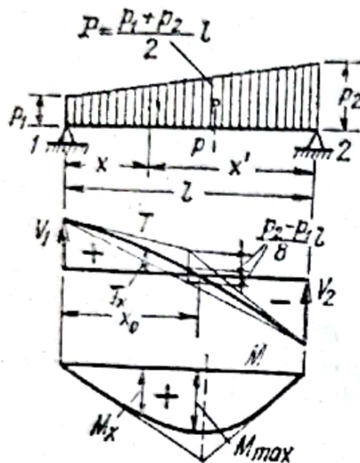
$$x = \frac{l}{2}: \ M_{max} = \frac{pl^2}{8} - \frac{pa^2}{8} = \frac{pl^2}{24}(3 - 4\alpha^2);$$

$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{p}{24}[l^3 - a^2(2l-a)] = \frac{pl^3}{24}[1 - \alpha^2(2-\alpha)];$$

$$EIf = \frac{pl^4}{1\,920}(25 - 40\alpha^2 + 16\alpha^4)$$

Tabelul IV.6 (continuare)

12.



$$V_1 = \frac{2p_1 + p_2}{6} l; \quad V_2 = \frac{p_1 + 2p_2}{6} l;$$

$$T_x = \frac{p_1 l}{6}(2 - 6\xi - 3\xi^2) + \frac{p_2 l}{6}(1 - 3\xi^2);$$

$$M_x = \frac{p_1 l^2}{6}(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) + \frac{p_2 l^2}{6}(\xi - \xi^3).$$

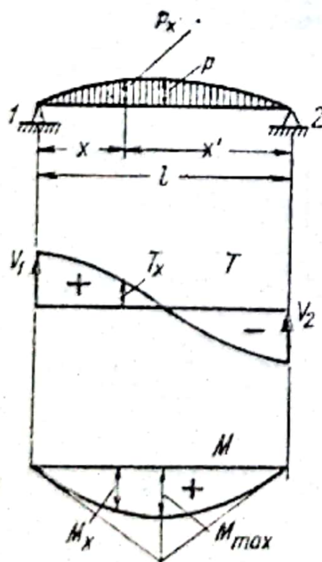
Pentru : $p_1 \triangleright p_2$: $x_0 = \frac{1-\nu}{1-\mu} l$; $\nu = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_1 \cdot p_2 + p_2^2}{3p_1^2}}$;

$$\mu = \frac{p_2}{p_1}; \quad M_{max} = \frac{p_1 l^2}{6} \cdot \frac{2\nu^3 - \mu(1+\mu)}{(1-\mu)^2}.$$

Pentru : $p_2 \triangleright p_1$, poziția de moment maxim $x_0 = \xi_0 l$ și valoarea acestuia $M_{max} = \frac{Pl}{n}$ se pot calcula cu ajutorul tabelului ;
$EIf = 0{,}01303\, Pl^3$ pentru $0{,}500 < \xi < 0{,}519$.

$\frac{p_1}{p_2}$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
ξ_0	0,577	0,566	0,555	0,545	0,536	0,528	0,520	0,514	0,508	0,504	0,500
n	7,79	7,82	7,85	7,89	7,91	7,93	7,94	7,96	7,98	7,99	8,00

13.



$$V_1 = V_2 = \frac{pl}{3}; \quad p_x = \frac{4pxx'}{l^2} = 4p\xi\xi';$$

$$T_x = \frac{pl}{3}(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3); \quad M_x = \frac{pl^2}{3}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$$

$$M_{max} = \frac{5}{48} pl^2 = 0{,}1042\, pl^2 \ \text{la}\ x_0 = \frac{l}{2}$$

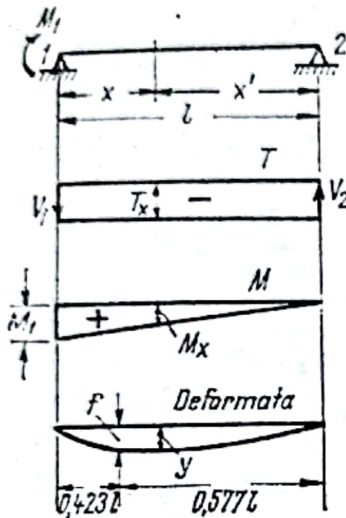
$$EI\varphi_1 = EI\varphi_2 = \frac{pl^3}{30};$$

$$y = \frac{pl^4}{90\, EI}(3\xi - 5\xi^3 + 3\xi^5 - \xi^6);$$

$$EIf = \frac{61}{5\,760} pl^4 = \frac{M_{max} l^2}{9{,}84}.$$

Tabelul IV.6 (continuare)

14.



$$V_1 = -V_2 = -\frac{M_1}{l};$$

$$T_x = V_1;$$

$$M_x = M_1\frac{x'}{l} = M_1\xi';$$

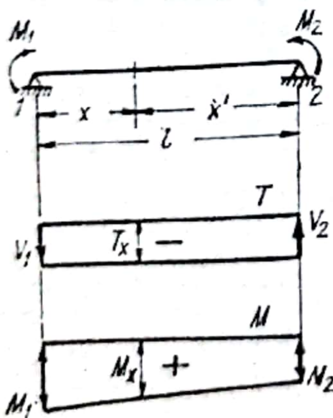
$$y = \frac{M_1 l^2}{6\,EI}\left(\frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3}\right) = 2{,}60\,f\,(\xi' - \xi'^3);$$

$$EIf = \frac{M_1 l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{M_1 l^2}{15{,}59} = 0{,}0642\,M_1 l^2$$

la $x = 0{,}423\ l$;

$$EI\varphi_1 = \frac{M_1 l}{3};\quad EI\varphi_2 = \frac{M_1 l}{6}$$

15.



$$V_1 = -V_2 = -\frac{M_1 - M_2}{l};$$

$$T_x = V_1;$$

$$M_x = M_1\xi' + M_2\xi;$$

$$y = \frac{M_1 l^2}{6\,EI}(\xi' - \xi'^3) + \frac{M_2 l^2}{6\,EI}(\xi - \xi^3);$$

$$EI\varphi_1 = \frac{M_1 l}{3} + \frac{M_2 l}{6} = \frac{l}{6}(2M_1 + M_2);$$

$$EI\varphi_2 = \frac{M_1 l}{6} + \frac{M_2 l}{3} = \frac{l}{6}(M_1 + 2M_2)$$

Tabelul IV.7

Reacțiuni, forțe tăietoare, momente încovoietoare și deformații la console

1.

$$V_2 = P;\quad T_1 = T_x = T_2 = -P$$

$$M_{max} = M_2 = -Pl$$

$$M_x = -Px = M_2\xi$$

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{|M_2|l^2}{3EI} = \frac{\sigma_{max}}{E}\cdot\frac{l^2}{3\cdot y_{max}};\quad f_T = k\frac{Pl}{GA}$$

$$y = \frac{P}{6EI}(2l^3 - 3xl^2 + x^3) = \frac{f}{2}(2 - 3\xi + \xi^3)$$

$$EI\varphi_1 = \frac{Pl^2}{2}$$

2.

$$V_2 = P$$

$$0 < x < a:\quad T_x = 0;\ M_x = 0$$

$$y = \frac{P}{6EI}(-b^3 + 3b^2l - 3b^2x)$$

$$a < x < l:\quad T_x = T_2 = -P;\ M_x = -P(x-a)$$

$$M_{max} = M_2 = -Pb$$

$$y = \frac{P}{6EI}[(x-a)^3 - 3b^2(x-a) + 2b^3]$$

$$f_1 = \frac{P}{6EI}(3b^2l - b^3);\quad f_a = \frac{Pb^3}{3EI}$$

$$EI\varphi_a = \frac{Pb^2}{2}$$

3.

$$V_2 = P = pl;\quad T_2 = -pl$$

$$T_x = -px = T_2\xi$$

$$M_{max} = M_2 = -\frac{pl^2}{2} = -\frac{Pl}{2}$$

$$M_x = -\frac{px^2}{2} = M_2\xi^2$$

$$f = \frac{pl^4}{8EI} = \frac{|M_2|\,l^2}{4EI} = \frac{\sigma}{E}\cdot\frac{l^2}{4\cdot y_{max}};\quad f_T = k\frac{pl^2}{2GA}$$

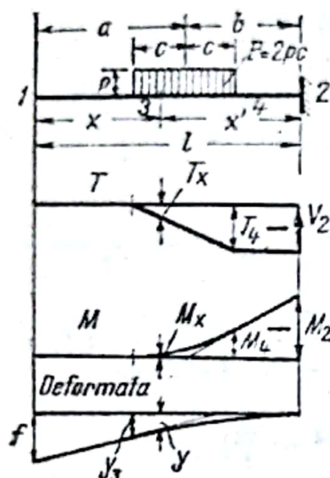
$$y = \frac{pl^4}{24EI}\left(3 - 4\frac{x}{l} + \frac{x^4}{l^4}\right) = \frac{f}{3}(3 - 4\xi + \xi^4) =$$

$$= \frac{f}{3}\xi'^2(6 - 4\xi' + \xi'^2)$$

$$EI\varphi_1 = \frac{Pl^2}{6} = \frac{pl^3}{6}$$

Tabelul IV.7 (continuare)

4.



$$P = 2pc \;;\; V_2 = +P$$

$$0 < x < a - c \;:\; T_x = 0;\; M_x = 0$$

$$y = \frac{1}{6}\frac{P}{EI}[(3b^2 + c^2)(l - x) - b(b^2 + c^2)]$$

$$\varphi_x = \frac{1}{6}\frac{P}{EI}(3b^2 + c^2)$$

$$a - c < x < a + c:\; T_x = -\frac{P}{2c}(x - a + c);$$

$$M_x = -\frac{1}{4}\cdot\frac{P}{c}(x - a + c)^2$$

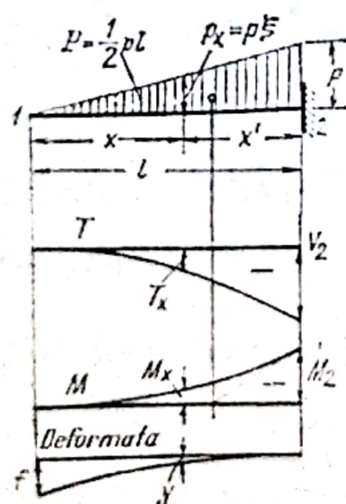
$$y = \frac{1}{24}\frac{P}{EI}\left[12b(l-x)^2 - 4(l-x)^3 + \frac{(a + c - x)^4}{2c}\right]$$

$$a + c < x \;:\; T_x = -P;\; M_x = -P(x - a);$$

$$M_{max} = M_2 = -Pb;\; y = \frac{1}{6}\frac{P}{EI}[3b(l-x)^2 - (l-x)^3]$$

$$f = \frac{1}{6}\frac{P}{EI}[(3b^2 + c^2)l - b(b^2 + c^2)]$$ în secţiunea 1

5.



$$p_x = p\xi;$$

$$P = \frac{pl}{2};\; V_2 = P = -T_2 = \frac{pl}{2}$$

$$T_x = -\frac{px^2}{2l} = -\frac{pl}{2}\xi^2 = -P\xi^2$$

$$M_x = -\frac{px^3}{6l} = M_2\xi^3$$

$$M_{max} = M_2 = -\frac{pl^2}{6} = \frac{Pl}{3}$$

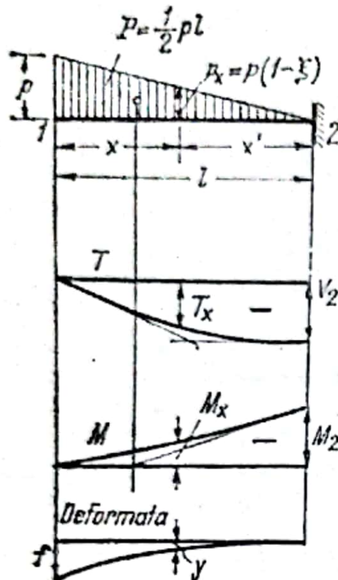
$$f = \frac{pl^4}{30\,EI} = \frac{|M_2|l^2}{5EI} = \frac{\sigma}{E}\cdot\frac{l^2}{5y_{max}};$$

$$f_T = k\frac{pl^2}{3GA};\; y = \frac{f}{4}(4 - 5\xi + \xi^5);$$

$$EI\varphi_1 = \frac{Pl^2}{12}$$

Tabelul IV. 7 (continuare).

6.



$$p_x = p\xi' ;$$

$$V_2 = P = -T_2 = \frac{pl}{2}$$

$$T_x = -\frac{pl}{2}\left(2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) = -P(2\xi - \xi^2)$$

$$M_x = -\frac{pl^2}{6}\left(3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right) = M_2 \frac{3\xi^2 - \xi^3}{2}$$

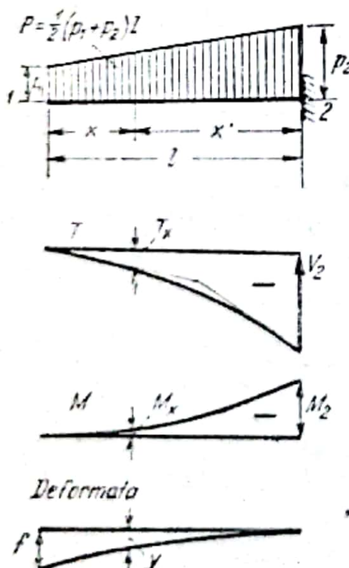
$$M_{max} = M_2 = -\frac{pl^2}{3} = -\frac{2}{3}Pl ;$$

$$f = \frac{11pl^4}{120EI} = \frac{|M_2|l^2}{3{,}636EI} = \frac{\sigma}{E}\cdot\frac{l^2}{3{,}636y_{max}} ; \; f_T = k\frac{pl^2}{3GA}$$

$$y = \frac{f}{11}(11 - 15\xi + 5\xi^4 - \xi^5)$$

$$EI\varphi_1 = \frac{Pl^2}{4} = \frac{pl^3}{8}$$

7.



$$V_2 = P$$

$$T_x = \frac{1}{2}p_1 l(\xi^2 - 2\xi) - \frac{1}{2}p_2 l\xi^2 = -\frac{l}{2}[2p_1\xi + (p_2 - p_1)\xi^2]$$

$$M_x = -\frac{1}{6}p_1 l^2(3\xi^2 - \xi^3) - \frac{1}{6}p_2 l^2\xi^3 = -\frac{l^2}{6}[3p_1\xi + + (p_2 - p_1)\xi^3]$$

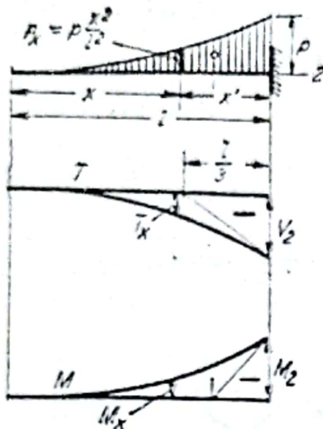
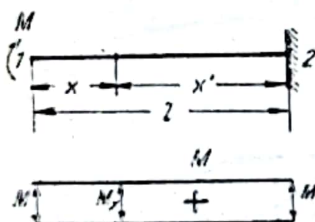
$$M_{max} = M_2 = -\frac{1}{6}p_2 l^2 - \frac{1}{3}p_1 l^2 = -(2p_1 - p_2)\frac{l}{6}$$

$$y = \frac{1}{120}\frac{p_2 l^4}{EI}[10(1-\xi)^2 - 10(1-\xi)^3 + 5(1-\xi)^4 - (1-\xi)^5] + \frac{1}{120}\frac{p_1 l^4}{EI}[(1-\xi)^5 - 10(1-\xi)^3 + 20(1-\xi)^2] ;$$

$$f = \frac{1}{30}\frac{p_2 l^4}{EI} + \frac{11}{120}\cdot\frac{p_1 l^4}{EI} ;$$

$$EI\varphi_1 = \frac{1}{24}p_2 l^3 + \frac{1}{8}p_1 l^3 = \frac{l^3}{24}(p_2 + 3p_1)$$

Tabelul IV.7 (continuare)

8. 	$p_x = p\dfrac{x^2}{l^2}$ (parabolă gradul 2) $V_2 = \dfrac{pl}{3}$; $M_2 = -\dfrac{pl^2}{12} = M_{max}$ $T_x = -\dfrac{pl}{3}\xi^3$; $M_x = -\dfrac{pl^2}{12}\xi^4$
9. 	$V_2 = 0$; $T_x = 0$ $M_x = M$ $M_{max} = M$ de la secţiunea *1* la secţiunea *2* $y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{M}{EI}(l^2 - 2lx + x^2)$ $f = -\dfrac{1}{2}\dfrac{Ml^2}{EI}$ în secţiunea *1* ; $EI\varphi_1 = -Ml$

Pentru $r = 3$ se obţine condiţia de invariabilitate proprie (grinzi simplu rezemate):

$$b = 2n - 3.$$

Această condiţie cantitativă nu este suficientă, urmînd să se verifice dacă barele şi legăturile exterioare sînt corect distribuite astfel ca sistemul să nu fie critic. Pentru grinzi cu zăbrele simple şi compuse se poate stabili acest lucru fie plecînd de la o bară şi verificînd legarea fiecărui nod cu două bare, fie verificînd legarea a două părţi cu trei legături simple (trei bare sau o bară şi o articulaţie) neconcurente în acelaşi punct.

O metodă generală pentru verificarea invariabilităţii geometrice ce se poate aplica şi la sisteme complexe este *metoda încărcării zero.*

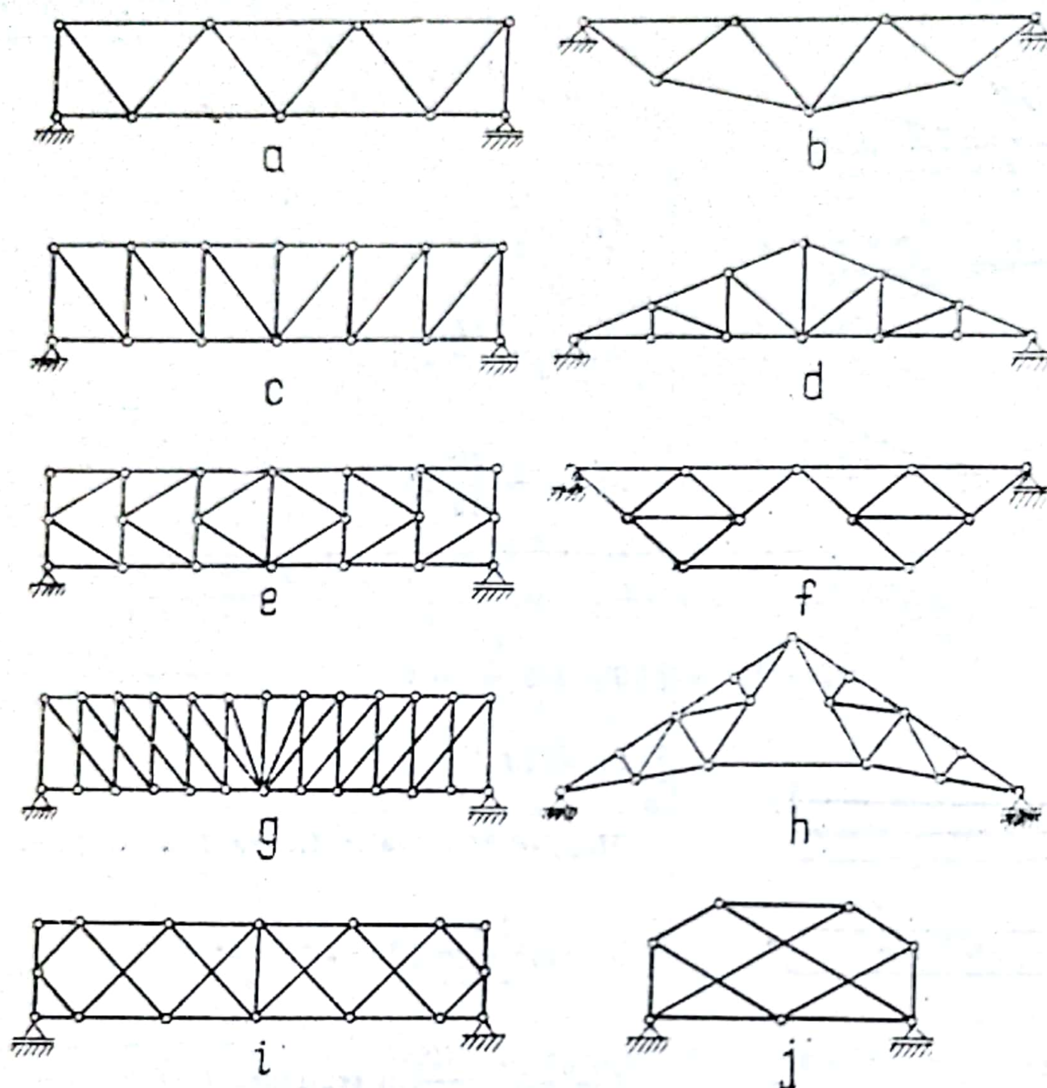


Fig. IV.11

2.2.2. **Calculul eforturilor la încărcări fixe.** Determinarea eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele se face pe baza condiţiilor de echilibru al unei părţi de grindă izolată printr-o secţionare din ansamblu.

2.2.2.1. **Metoda secţiunilor oarecare.** În această metodă se secţionează grinda tăind numai trei bare cu eforturi necunoscute. Pentru oricare parte izolată se pot scrie trei ecuaţii de echilibru static din care rezultă mărimea şi sensul eforturilor în cele trei bare. Este indicat, atunci cînd este posibil, ca ecuaţiile de echilibru să fie scrise ca ecuaţii de momente faţă de punctele în care se intersectează direcţiile a cîte două eforturi. Aplicînd metoda secţiunilor pentru grinda de formă oarecare din fig. IV.12, se obţin următoarele expresii pentru eforturi

$$S_{n-1,\,n+1} = -\frac{M_n}{r_n}\ ;\quad I_{n-2,\,n} = \frac{M_{n-1}}{r_{n-1}}\ ;\quad D_{n-1,\,n} = -\frac{M_i}{r_i} \qquad \text{(IV.23)}$$

în care : M_n, M_{n-1} și M_i sînt momentele tuturor forțelor care acționează pe tronsonul din stînga față de nodurile n, $n-1$ și respectiv punctul i (considerate pozitive cînd au sens orar) ; r_n, r_{n-1} și r_i sînt distanțele de la punctele respective la bara considerată.

Efortul în diagonală se poate obține și din ecuații de proiecții, cînd punctul i rezultă la distanță mare. Astfel, din ecuația de proiecții pe verticală, rezultă

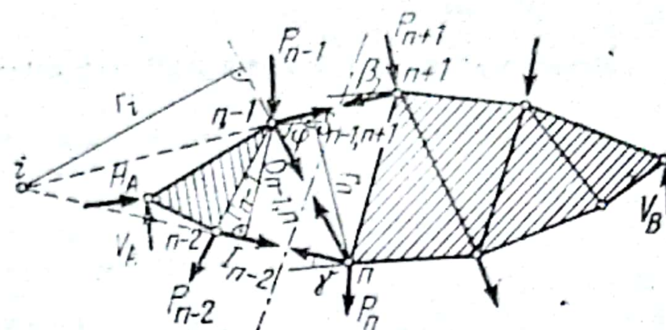


Fig. IV.12

$$D_{n-1,n} = \frac{1}{\sin \varphi_{n-1,n}} \left[-\frac{M_n}{r_n} \sin \beta_{n-1,n+1} - \frac{M_{n-1}}{r_{n-1}} \sin \gamma_{n-2,n} + T_{n-1,n} \right] \quad \text{(IV. 24)}$$

în care $T_{n-1,n}$ este proiecția pe verticală a tuturor forțelor de pe tronsonul din stînga secțiunii.

Pentru grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele încărcate cu sarcini verticale formulele anterioare devin

$$S_{n-1,n+1} = \frac{M_n^0}{h} \; ; \; I_{n-2,n} = \frac{M_{n-1}^0}{h} \; ; \; D_{n-1,n} = \frac{T_{n-1,n}^0}{\sin \varphi} \; ; \; D_{n,n+1} = -\frac{T_{n,n+1}^0}{\sin \varphi} \quad \text{(IV. 23a)}$$

în care : M^0 este momentul încovoietor în dreptul nodului respectiv pe grinda dreaptă simplu rezemată încărcată cu aceleași sarcini ca grinda cu zăbrele ; T^0 este forța tăietoare pe grinda dreaptă în dreptul panoului secționat ; h este înălțimea grinzii cu zăbrele iar φ unghiul diagonalei cu orizontala.

Aceste formule au fost folosite pentru stabilirea expresiilor eforturilor în barele unor grinzi cu zăbrele curente din tabelul IV. 8.

2.2.2.2. **Metoda izolării nodurilor.** În această metodă se fac secțiuni particulare în jurul nodurilor, obținînd în fiecare nod i un sistem de forțe concurente formate din forța exterioară P_i și eforturile necunoscute N_{ij} (fig. IV. 13). Pentru fiecare nod izolat se scriu în plan două condiții de echilibru sub forma de ecuații de proiecție pe două direcții (de exemplu pe orizontală și verticală)

$$\left.\begin{aligned} \sum_i N_{ij}\cos\alpha_{ij} + P_i\cos\alpha_i = 0 \\ \sum_i N_{ij}\sin\alpha_{ij} + P_i\sin\varphi_i = 0 \end{aligned}\right\} i = 1 \ldots n. \quad \text{(IV. 25)}$$

Pentru cele n noduri se obțin $2n$ astfel de ecuații din care se determină eforturile N în cele b bare ale grinzii cu zăbrele. Ecuațiile în plus ($r = 2n - b$) servesc pentru verificare.

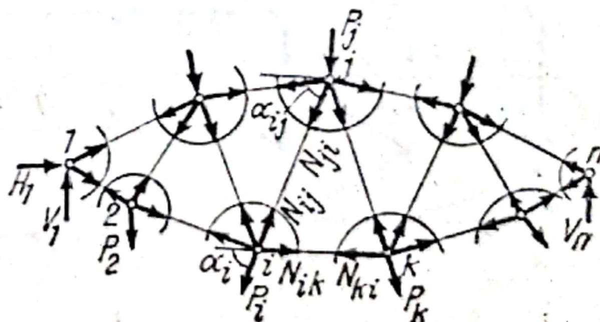


Fig. IV.13

Tabelul IV.8

Calculul eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele cu tălpi paralele și forțe verticale

1. Sistem dreptunghiular

$$S_n = -\frac{M_n}{h}\,; \quad I_n = +\frac{M_{n-1}}{h}$$

a) Diagonale coborîtoare spre dreapta

$$D_n = +T_n \sec \alpha_n$$

$$V_n = -T_n + P_n^i$$

b) Diagonale suitoare spre dreapta

$$D_n = -T_n \sec \alpha_n$$

$$V_n = T_n - P_n^s$$

M_n = momentul forțelor de la stînga față de nodul n

T_n = forța tăietoare în panoul $n-1$, n = suma tuturor forțelor de la stînga nodului n

2. Sistem triunghiular

$$S_n = -\frac{M_n}{h}\,; \quad I_n = +\frac{M_{n-1}}{h}$$

$$D_n = +T_n \sec \alpha_n$$

$$D_{n+1} = -T_{n+1} \sec \alpha_{n+1}$$

$$V_{n-1} = +P_{n-1}^i$$

$$V_n = -P_n^s$$

M_n = momentul forțelor de la stînga, față de nodul n

T_n = forța tăietoare în panoul $n-1$, n=suma tuturor forțelor de la stînga nodului n

3. Sistem K

$$S_n = -\frac{M_{n-1}}{h}\,; \quad I_n = +\frac{M_{n-1}}{h}$$

$$D_n^s = -\frac{d_n^s}{h} T_n\,; \quad D_n^i = +\frac{d_n^i}{h} T_n$$

$$V_n^s = +\frac{h_{n-1}^s}{h} T_n - P_n^s$$

$$V_n^i = -\frac{h_{n-1}^i}{h} T_n + P_n^i$$

În aceste ecuații, proiecțiile forțelor se introduc cu sensul lor considerînd eforturile necunoscute pozitive (de întindere), din calcule urmînd să rezulte semnul real. Pentru o rezolvare simplă a ecuațiilor, nodurile se izolează într-o anumită ordine, astfel ca la fiecare nod izolat să nu existe decît două bare cu efort necunoscut. În acest fel, sistemul general de $2n$ ecuații se scindează în n sisteme de două ecuații cu cîte două necunoscute. Deoarece în această metodă eventuale erori făcute la un nod se transmit la nodurile următoare, ea se utilizează mai rar și de obicei pentru bare la care eforturile rezultă direct dintr-o ecuație de proiecție.

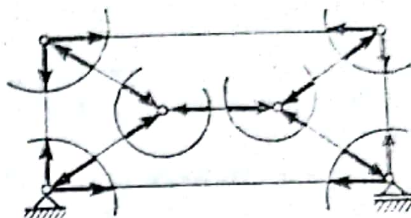


Fig. IV.14

Condiția analitică pentru ca o grindă cu zăbrele să nu fie un sistem critic este ca la o anumită încărcare să existe o stare unică de eforturi determinate, adică determinantul coeficienților necunoscutelor din sistemul anterior să nu fie nul ($\Delta \neq 0$). În verificarea invariabilității geometrice prin metoda încărcării zero se consideră grinda cu zăbrele neîncărcată și se admite într-o bară oarecare un efort. Pornind de la acest efort, se determină calitativ prin izolarea nodurilor eforturile în celelalte bare. Dacă în toate nodurile eforturile sînt în echilibru, sistemul este critic deoarece ar însemna că eforturile nu sînt unice și nule (grinda fiind neîncărcată). Această verificare se poate urmări pentru sistemul critic din fig. IV.14.

Determinarea grafică a eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele în metoda izolării nodurilor se face pe baza condiției de echilibru grafic, și anume forțele și eforturile de la fiecare nod să formeze un poligon de forțe închis. Pentru grinzi cu zăbrele formate din triunghiuri juxtapuse, sistematizarea acestor operații grafice conduce la o singură figură numită *epura Cremona*.

Construcția epurei Cremona se poate urmări pe exemplul din fig. IV.15. Se notează spațiul dintre două forțe sau două eforturi cu o literă (notația Bow), fiecare forță sau

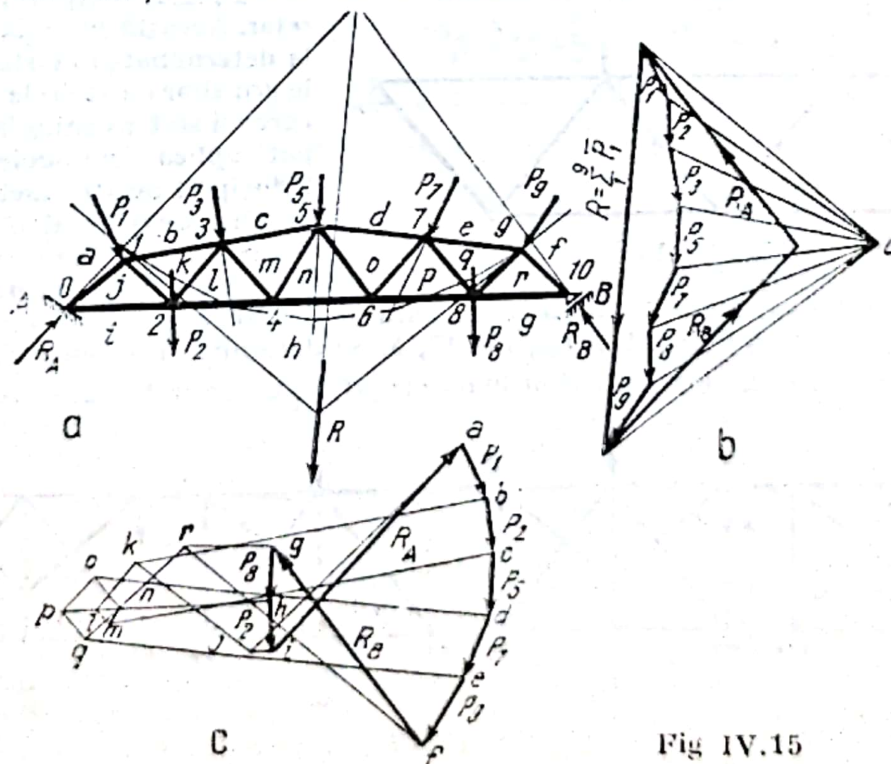


Fig IV.15

efort fiind definit de cele două cîmpuri adiacente. Se construiește întîi poligonul închis al forțelor exterioare (reacțiunile fiind determinate) luate într-o anumită ordine de parcurgere a conturului grinzii (de obicei în sens orar). Se construiesc apoi poligoanele închise pentru forțele și eforturile de la fiecare nod izolat folosind același sens de parcurgere și pornind de la o forță sau efort cunoscut. Nodurile se iau în aceeași ordine ca la rezolvarea analitică. Mărimea unui efort va fi segmentul din epura Cremona cuprins între punctele corespunzătoare celor două cîmpuri adiacente efortului. Semnul eforturilor rezultă din observația că în poligonul de forțe corespunzător unui nod eforturile reprezintă acțiunea barelor asupra nodurilor.

2.2.2.3. **Metoda descompunerii sistemelor compuse în sisteme simple.** Sistemele compuse obținute prin suprapunerea peste barele unei grinzi cu zăbrele simple a unor grinzi cu zăbrele simple se rezolvă ușor prin descompunerea lor în sisteme principale și secundare. O astfel de descompunere se poate urmări pe exemplul din fig. IV.16. Se determină mai întîi eforturile în barele sistemului secundar din încărcările în nodurile lui. Se determină apoi eforturile în barele sistemului principal încărcat la noduri cu sarcinile date și reacțiunile sistemului secundar. Eforturile în barele sistemului compus se obțin prin suprapunerea eforturilor în sistemul secundar și principal după tipul barei respective (bare care aparțin numai sistemului secundar, bare care aparțin numai sistemului principal, bare care aparțin ambelor sisteme).

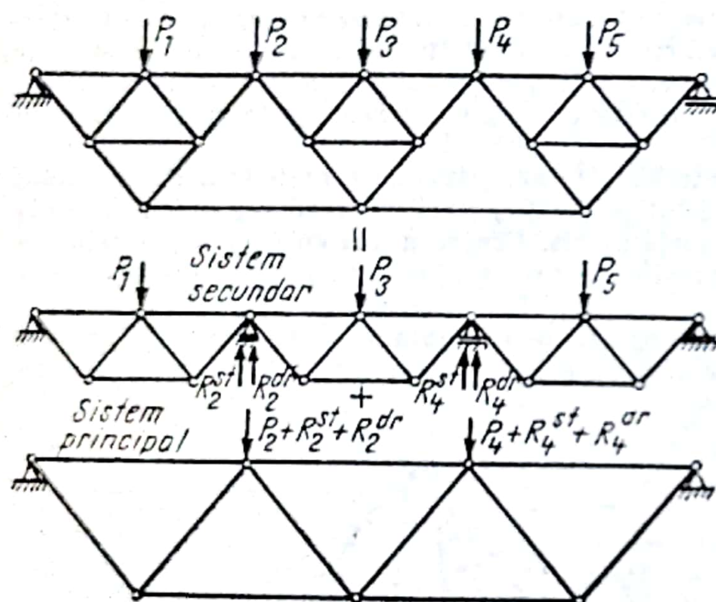


Fig. IV.16

2.2.2.4. **Metoda înlocuirii barelor.** Această metodă se utilizează la determinarea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele complexe la care nu sînt avantajoase sau nu se pot aplica metodele anterioare. Principiul acestei metode se poate urmări pe exemplul din fig. IV.17, *a*. Se scoate o bară (*1—2*) care se înlocuiește cu efortul ei necunoscut X. Pentru asigurarea invariabilității geometrice bara scoasă se înlocuiește cu o altă bară (*3—4*) (fictivă), desenată punctat în fig. IV. 17, *b*. Se determină prin metoda izolării nodurilor sau metoda secțiunilor eforturilor în barele grinzii cu zăbrele transformate, N_{ij}^0 din

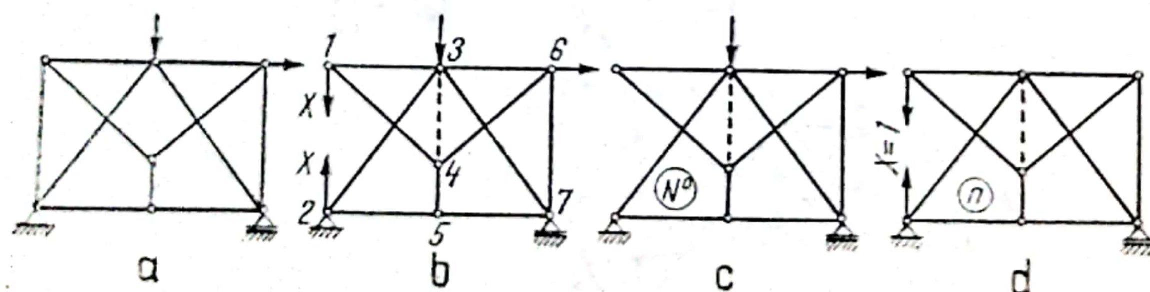


Fig. IV.17

încărcările date (fig. IV. 17, *c*) și n_{ij} din încărcarea cu $X = 1$ (fig. IV.17, *d*). Efortul într-o bară oarecare se obține prin suprapunerea efectelor din cele două încărcări

$$N_{ij} = N_{ij}^{0} + n_{ij}X.$$

Valoarea efortului X în bara înlocuită se determină din condiția ca efortul în bara înlocuitoare (fictivă) să fie nul deoarece aceasta nu există în sistemul real

$$N_{34} = N_{34}^{0} + n_{34}X = 0\,; \quad X = -\,N_{34}^{0}/n_{34}.$$

2.2.3. **Linii de influență.** Sarcinile mobile, deplasîndu-se pe o linie de încărcare sau cale, formată din lonjeroni și antretoaze, se transmit numai la nodurile grinzii cu zăbrele. Este cazul tipic de transmitere indirectă și deci liniile de influență vor avea variații liniare între nodurile încărcate. Determinarea liniilor de influență ale eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele se poate face prin funcții de influență sau cinematic.

În tabelul IV. 9 se dau liniile de influență pentru eforturile în barele grinzilor cu zăbrele simple.

2.2.3.1. **Metoda funcțiilor de influență.** Această metodă folosește ecuațiile analitice de echilibru static. Ea se aplică avantajos la sisteme cu alcătuire simplă sau la sisteme la care eforturile în bare se pot determina pe baza unor formule generale în funcție de eforturile pe grinda dreaptă simplu rezemată de aceeași deschidere (se folosesc expresiile date la încărcarea cu sarcini fixe). Stabilirea funcțiilor de influență și determinarea liniilor de influență prin metoda funcțiilor de influență se exemplifică pentru grinda poligonală cu diagonale sistem triunghiular din fig. IV.18.

Linia de influență a eforturilor în talpa superioară ($S_{n-1,\,n+1}$) se obține, conform relației $S_{n-1,\,n+1} = -M_n/r_n$, împărțind ordonatele liniei de influență a momentului pe grinda dreaptă corespunzătoare în secțiunea din dreptul nodului opus barei, la distanța de la acest nod la bara respectivă (fig. IV. 18, *a*). La fel se procedează pentru linia de influență a efortului în talpa inferioară folosind expresia $I_{n-2,\,n} = M_{n-1}/r_{n-1}$ (fig. IV.18, *b*).

Linia de influență a efortului în diagonală ($D_{n-1,\,n}$) se obține reprezentînd funcția de influență a efortului respectiv rezultată din relația $D_{n-1,\,n} = -\,M_i/r_i$ și anume, cînd forța $P = 1$ se găsește în nodurile din

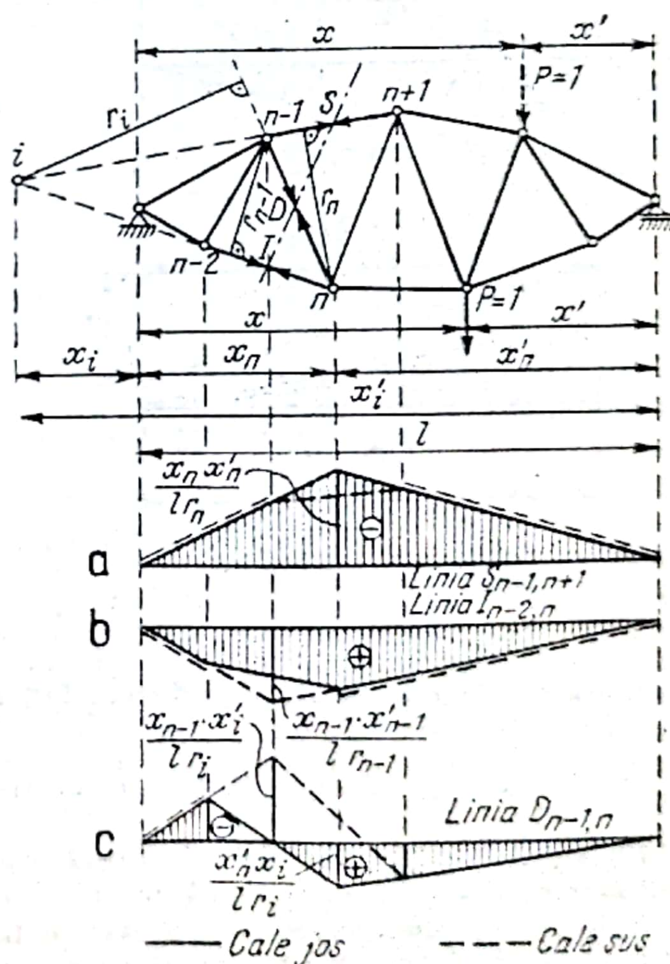


Fig. IV.18

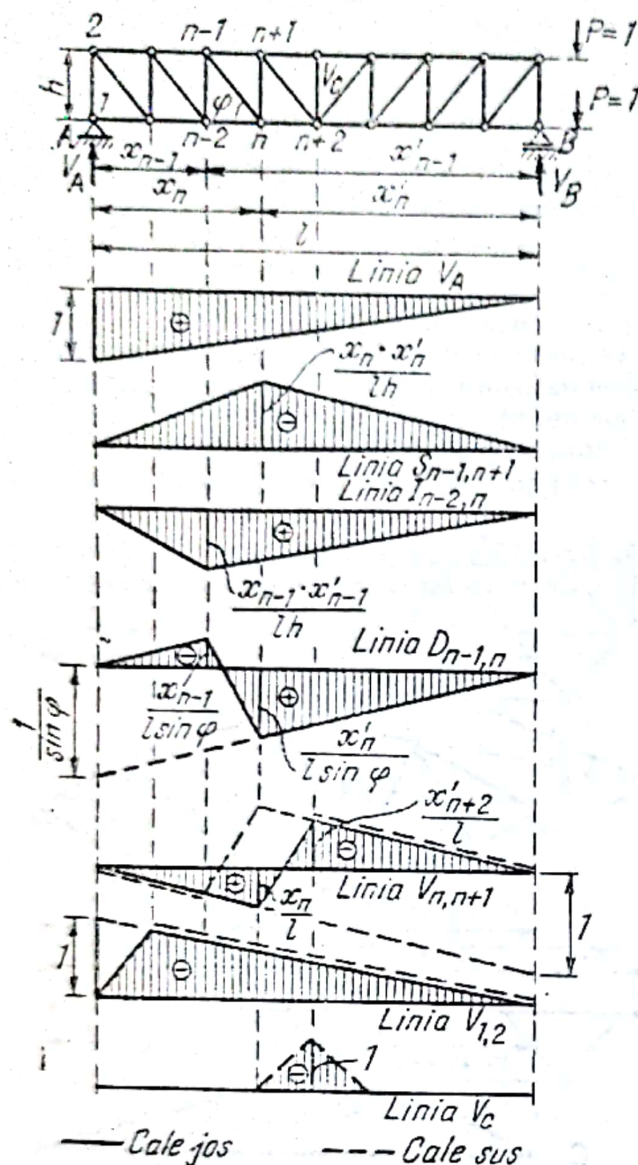


Fig. IV.19

stînga secţiunii $D_{n-1,n} = -\frac{x'x_i}{lr_i}$, iar cînd forţa $P=1$ se găseşte în nodurile din dreapta secţiunii $D_{n-1,n} = \frac{x'x_i}{lr_i}$. Cu aceste funcţii de influenţă s-a reprezentat linia de influenţă în fig. IV. 18, c. Între ordonatele din dreptul nodurilor care mărginesc panoul secţionat de la talpa pe care se află calea, linia de influenţă variază liniar (transmitere indirectă).

În fig. IV.19 sînt reprezentate liniile de influenţă ale eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele şi diagonale în sistem dreptunghiular obţinute din liniile de influenţă ale eforturilor pe grinda dreaptă corespunzătoare, conform relaţiilor (IV.23 a).

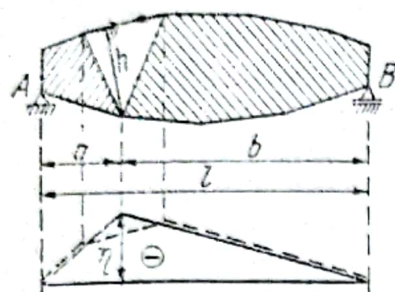
2.2.3.2. Metoda cinematică. Această metodă foloseşte exprimarea echilibrului cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual. Pentru aplicarea acestui principiu şi determinarea efortului într-o bară se suprimă bara respectivă şi se înlocuieşte cu efortul corespunzător considerat pozitiv. Se obţine astfel un mecanism cu un grad de libertate încărcat cu un sistem de forţe în echilibru. Pentru linii de influenţă, sistemul de forţe în echilibru este format din sarcina mobilă $P=1$ şi efortul a cărui linie de influenţă se determină. Se dă o deplasare infinit mică (deplasare virtuală) acestui mecanism şi ca o consecinţă se obţine deplasarea Δ_N pe direcţia efortului şi deplasarea η a liniei de încărcare pe direcţia forţei $P = 1$. Din ecuaţia de lucru mecanic virtual, rezultă

$$N \cdot \Delta_N + P \cdot \eta = 0;\; N = \eta \quad \text{pentru} \quad \Delta_N = -1 \text{ şi } P = 1.$$

Linia de influenţă a efortului într-o bară se obţine ca diagramă de deplasări a liniei de încărcare pe direcţia forţei $P = 1$ (de obicei verticală) cînd mecanismului obţinut prin suprimarea barei respective i se dă o deplasare unitară pe direcţia şi în sens invers efortului. Semnul liniei de influenţă este acelaşi cu semnul lucrului mecanic ($P\eta$) efectuat de forţa unitară mobilă (pentru deplasare dată în sens invers efortului ordonatele

Tabelul IV.9

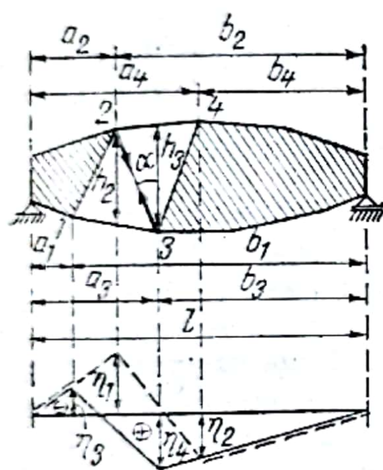
Linii de influență pentru eforturi în barele grinzilor cu zăbrele simple



——— Cale jos

– – – – Cale sus

$$\eta = \frac{ab}{lh}$$



Tălpi poligonale:

$$\eta_1 = \frac{a_1}{l \sin\alpha}\left(\frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)$$

$$\eta_2 = \frac{b_3}{l \sin\alpha}\left(\frac{a_3}{h_3} - \frac{a_2}{h_2}\right)$$

$$\eta_3 = \frac{a_2}{l \sin\alpha}\left(\frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)$$

$$\eta_4 = \frac{b_4}{l \sin\alpha}\left(\frac{a_3}{h_3} - \frac{a_2}{h_2}\right)$$

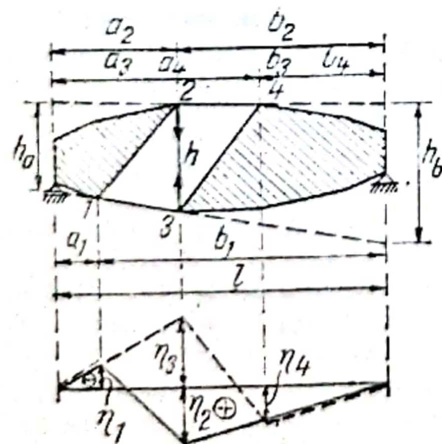
Tălpi paralele:

$$\eta_1 = \frac{a_1}{l \cos\alpha}$$

$$\eta_2 = \frac{b_3}{l \cos\alpha}$$

$$\eta_3 = \frac{a_2}{l \cos\alpha}$$

$$\eta_4 = \frac{b_4}{l \cos\alpha}$$



Tălpi poligonale:

$$\eta_1 = \frac{a_2 h_b}{lh}$$

$$\eta_2 = \frac{b_4 h_a}{lh}$$

$$\eta_3 = \frac{a_1 h_b}{lh}$$

$$\eta_4 = \frac{b_2 h_a}{lh}$$

Tălpi paralele:

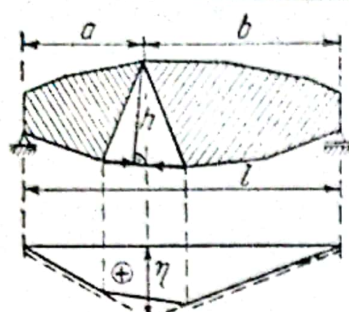
$$\eta_1 = \frac{a_2}{l}$$

$$\eta_2 = \frac{b_4}{l}$$

$$\eta_3 = \frac{a_1}{l}$$

$$\eta_4 = \frac{b_2}{l}$$

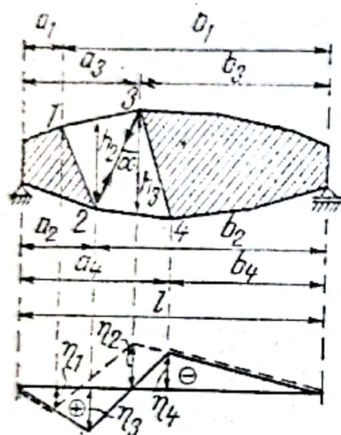
Tabelul IV.9 (continuare)



——— Cale jos

– – – – Cale sus

$$\eta = \frac{ab}{lh}$$



Tălpi poligonale:

$$\eta_1 = \frac{a_2}{l \sin \alpha}\left(\frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)$$

$$\eta_2 = \frac{b_4}{l \sin \alpha}\left(\frac{a_3}{h_3} - \frac{a_2}{h_2}\right)$$

$$\eta_3 = \frac{a_1}{l \sin \alpha}\left(\frac{b_2}{h_2} - \frac{b_3}{h_3}\right)$$

$$\eta_4 = \frac{b_3}{l \sin \alpha}\left(\frac{a_3}{h_3} - \frac{a_2}{h_2}\right)$$

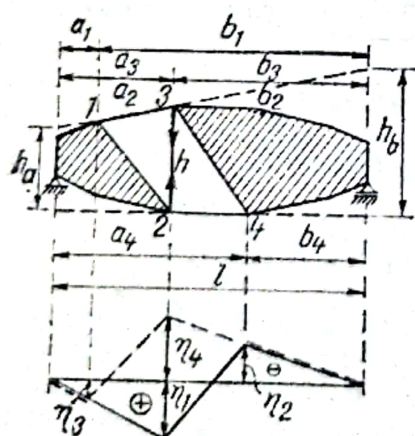
Tălpi paralele:

$$\eta_1 = \frac{a_2}{l \cos \alpha};$$

$$\eta_2 = \frac{b_4}{l \cos \alpha}$$

$$\eta_3 = \frac{a_1}{l \cos \alpha};$$

$$\eta_4 = \frac{b_3}{l \cos \alpha}$$



Tălpi poligonale:

$$\eta_1 = \frac{a_1 h_b}{lh}$$

$$\eta_2 = \frac{b_2 h_a}{lh}$$

$$\eta_3 = \frac{a_2 h_b}{lh}$$

$$\eta_4 = \frac{b_4 h_a}{lh}$$

Tălpi paralele:

$$\eta_1 = \frac{a_1}{l};$$

$$\eta_2 = \frac{b_2}{l}$$

$$\eta_3 = \frac{a_2}{l};$$

$$\eta_4 = \frac{b_4}{l}$$

de sub linia de referință sînt pozitive). Scara liniei de influență este deplasarea unitară dată pe direcția necunoscutei (suma proiecției deplasărilor celor două noduri ale barei suprimate pe direcția efortului este egală cu unitatea). Această deplasare unitară produce o rotire relativă a două șaibe i și j în jurul centrului lor relativ de rotație egală cu $\theta_{ij} = 1/r_{ij}$, în care r_{ij} este distanța de la centrul relativ al celor două șaibe la suportul efortului. Deoarece rotirile apar în mărime reală în diagrama de deplasări, relația anterioară se folosește ca scară a liniei de influență la grinzi cu zăbrele. Pentru studiul cinematic (centre instantanee, diagramă de deplasări), vezi cap. I.

Aplicarea metodei deplasărilor virtuale se poate urmări pentru grinda cu zăbrele (sistem compus în formă de cadru cu trei articulații) din fig. IV. 20.

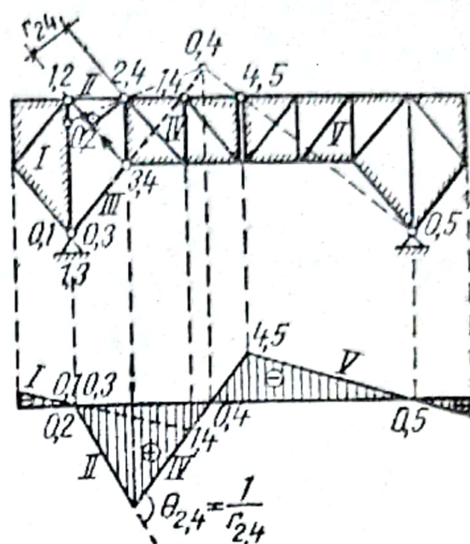


Fig. IV.20

2.3. Arce static determinate

2.3.1. **Generalități.** Arcele sînt bare curbe încărcate în planul lor, forțele fiind în general dirijate în sens invers convexității. La arce static determinate numărul de legături este cel strict necesar asigurării invariabilității geometrice. Ca arce static determinate, în construcții se utilizează două tipuri : arcul cu trei articulații și arcul cu tirant. Caracteristic arcelor este faptul că, datorită formei lor și a componentelor orizontale ale reacțiunilor (împingeri), sub încărcări se dezvoltă eforturi axiale de compresiune importante. Ca sisteme de bază pentru calculul arcelor static nedeterminate se folosesc și arce static determinate care nu lucrează cu împingeri ; arcul simplu rezemat și arcul în consolă. Din punct de vedere al calculului, cele patru tipuri diferă prin modul de determinare a reacțiunilor după care determinarea eforturilor se face la fel.

La arce se folosesc următoarele denumiri (fig. IV. 21) : secțiunile de la reazeme, A și B, se numesc *nașteri* iar dreapta AB, *linia nașterilor* ; punctul cel mai depărtat de linia nașterilor, C, se numește *cheia* arcului ; distanța verticală de la cheie la linia nașterilor, f- se numește *săgeată* iar distanța orizontală dintre nașteri, l, *deschiderea* arcului ; fața exterioară a arcului se numește *extrados* iar cea interioară *intrados* ; raportul f/l se numește *pleoștirea* arcului ; α este înclinarea liniei nașterilor față de orizontală.

Forma arcului este definită prin ecuația axei față de un sistem de axe de referință. O secțiune a arcului este definită prin coordonatele centrului ei de greutate (x și y pentru arce cu nașterile la același nivel, x' și y' pentru arce cu nașterile denivelate) și prin înclinarea tangentei la axa arcului în secțiune, φ, față de orizontală (v. fig. IV. 21).

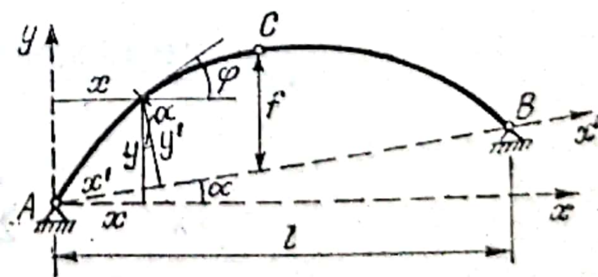


Fig. IV.21

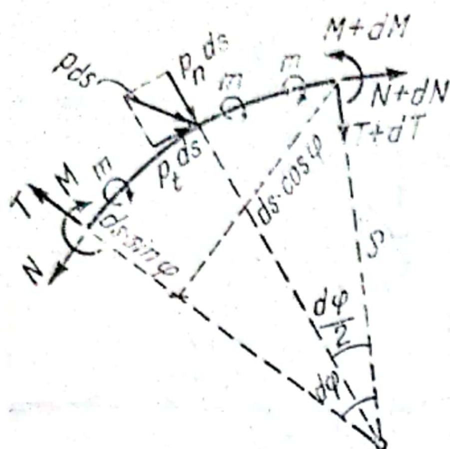


Fig. IV.22

2.3.2. Relaţii diferenţiale între eforturi şi încărcări. Aceste relaţii se obţin din ecuaţiile de echilibru pentru un element de arc ds (fig. IV. 22), în care se neglijează termenii infinit mici de ordin superior şi se aproximează cos $d\varphi = 1$ şi sin $d\varphi = d\varphi$, sub forma

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho}; \qquad \frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho};$$

$$\frac{dM}{ds} = T + m. \qquad \text{(IV.26)}$$

Pentru $\rho = \infty$ se regăsesc relaţiile diferenţiale de la grinzi drepte. Pentru cazul în care $m = 0$ ultima relaţie arată că momentul este maxim sau minim unde $T = 0$. În dreptul forţelor concentrate, în diagrama N şi T apar salturi iar în M schimbare de pantă.

Deoarece aceste relaţii nu dau indicaţii clare ca la bara dreaptă pentru variaţia eforturilor pe diferite zone de încărcare, la arce, trasarea diagramelor de eforturi se face prin puncte calculînd eforturile într-un număr suficient de secţiuni.

2.3.3. Expresiile generale ale eforturilor din încărcări fixe. Pentru calculul sistematizat al reacţiunilor şi eforturilor la încărcarea cu forţe oarecare, acestea se descompun în componente verticale şi orizontale. Reacţiunile se determină pe baza ecuaţiilor de echilibru static ca la sisteme de corpuri. Pentru arcul cu trei articulaţii, reacţiunile se calculează mai simplu, considerînd componentele verticale ş cele dirijate pe linia naşterilor (fig. IV.23), cu expresiile

$$V'_A = \frac{\sum P_{iv}(l - x_i) - \sum P_{ih}(y_i - l \operatorname{tg} \alpha)}{l};$$

$$H'_A = \frac{V'_A x_C - \sum_A^C P_{iv}(x_C - x_i) - \sum_A^C P_{ih}(f + x_C \operatorname{tg} \alpha - y_i)}{f \cos \alpha}.$$

$$\text{(IV. 27)}$$

$$V'_B = \frac{\sum P_{iv} x_i + \sum P_{ih} y_i}{l};$$

$$H'_B = \frac{V'_B(l - x_C) - \sum_C^B P_{iv}(x_i - x_C) - \sum_C^B P_{ih}(f + x_C \operatorname{tg} \alpha - y_i)}{f \cos \alpha}$$

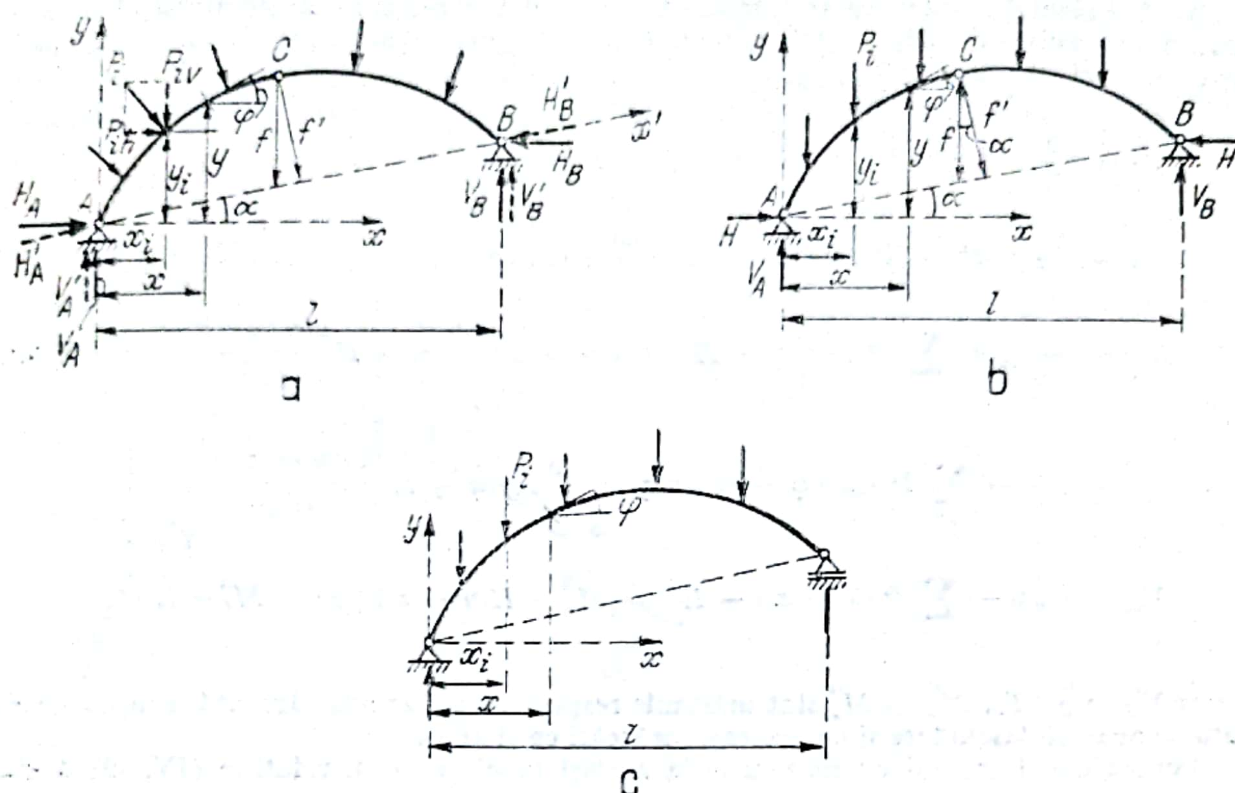


Fig. IV.23

Componentele orizontale şi verticale ale reacţiunilor se obţin cu relaţiile

$$H_A = H_A' \cos\alpha; \quad V_A = V_A' + H_A' \sin\alpha = V_A' + H_A \operatorname{tg}\alpha$$
$$H_B = H_B' \cos\alpha; \quad V_B = V_B' - H_B' \sin\alpha = V_B' - H_B \operatorname{tg}\alpha. \tag{IV.28}$$

Indiferent de tipul arcului (arc cu trei articulaţii, cu tirant sau simplu rezemat), după determinarea reacţiunilor, eforturile într-o secţiune oarecare se determină prin reducerea forţelor din stînga secţiunii, cu următoarele expresii (v. fig. IV. 23):

$$N_x = (-V_A + \sum_{st} P_{iv}) \sin\varphi - (H_A + \sum_{st} P_{ih}) \cos\varphi$$
$$T_x = (V_A - \sum_{st} P_{iv}) \cos\varphi - (H_A + \sum_{st} P_{ih}) \sin\varphi \tag{IV.29}$$
$$M_x = V_A \cdot x - \sum_{st} P_{iv}(x - x_i) - H_A \cdot y - \sum_{st} P_{ih}(y - y_i)$$

în care suma se referă la forţele din stînga secţiunii.

2.3.4. **Calculul arcelor cu trei articulaţii supuse la încărcări fixe verticale.** Particularizînd expresiile (IV. 29) pentru acest caz, se obţin următoarele relaţii pentru calculul reacţiunilor şi eforturilor

$$V'_A = V_A^0; \quad V'_B = V_B^0; \quad H'_A = H'_B = H' = \frac{M_C^0}{f \cos \alpha}$$

$$H_A = H_B = H = H' \cos \alpha; \quad V_A = V_A^0 + H \operatorname{tg} \alpha; \quad V_B = V_B^0 - H \operatorname{tg} \alpha$$

$$N_x = (-V_A + \sum_{st} P_i) \sin \varphi - H \cos \varphi = - T_x^0 \sin \varphi - H \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} \qquad \text{(IV.30)}$$

$$T_x = (V_A - \sum_{st} P_i) \cos \varphi - H \sin \varphi = T_x^0 \cos \varphi - H \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$M_x = V_A x - \sum_{st} P_i(x - x_i) - Hy = M_x^0 - H(y - x \operatorname{tg} \alpha) = M_x^0 - H'y'$$

în care V_A^0, V_B^0, T_x^0, M_C^0 şi M_x^0 sînt mărimile respective pe grinda dreaptă simplu rezemată de aceeaşi deschidere şi cu aceleaşi încărcări ca şi arcul.

Pentru cazul arcului cu reazemele la acelaşi nivel ($\alpha = 0$), relaţiile (IV. 30) devin

$$V_A = V_A^0; \quad V_B = V_B^0; \quad H_A = H_B = H = \frac{M_C^0}{f}$$

$$N_x = - T_x^0 \sin \varphi - H \cos \varphi \qquad \text{(IV.30a)}$$

$$T_x = T_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y.$$

2.3.5. **Calculul arcelor simplu rezemate supuse la încărcări fixe verticale.** În acest caz particular apar numai reacţiuni verticale egale cu cele de la grinda dreaptă simplu rezemată corespunzătoare

$$V_A = V_A^0; \quad V_B = V_B^0. \qquad \text{(IV.31)}$$

Expresiile eforturilor într-o secţiune oarecare se obţin din expresiile generale

$$N_x = - T_x^0 \sin \varphi; \quad T_x = T_x^0 \cos \varphi; \quad M_x = M_x^0 \qquad \text{(IV.31a)}$$

în care T_x^0 şi M_x^0 sînt eforturile în secţiunea respectivă pe grinda dreaptă corespunzătoare.

2.3.6. **Calculul grafic al arcelor cu trei articulaţii la încărcări fixe.** Determinarea grafică a reacţiunilor şi eforturilor se face pe baza condiţiilor grafice de echilibru cu ajutorul poligonului de forţe şi a poligonului funicular care trece prin cele trei articulaţii. Se va

prezenta separat calculul grafic pentru sarcini verticale şi orizontale (asemănător se poate proceda pentru sarcini oarecare).

Calculul grafic al arcului cu trei articulaţii supus la sarcini verticale se prezintă în fig. IV. 24. Se construieşte la scară poligonul forţelor active ($P_1 \dots P_4$) care, pentru echili-

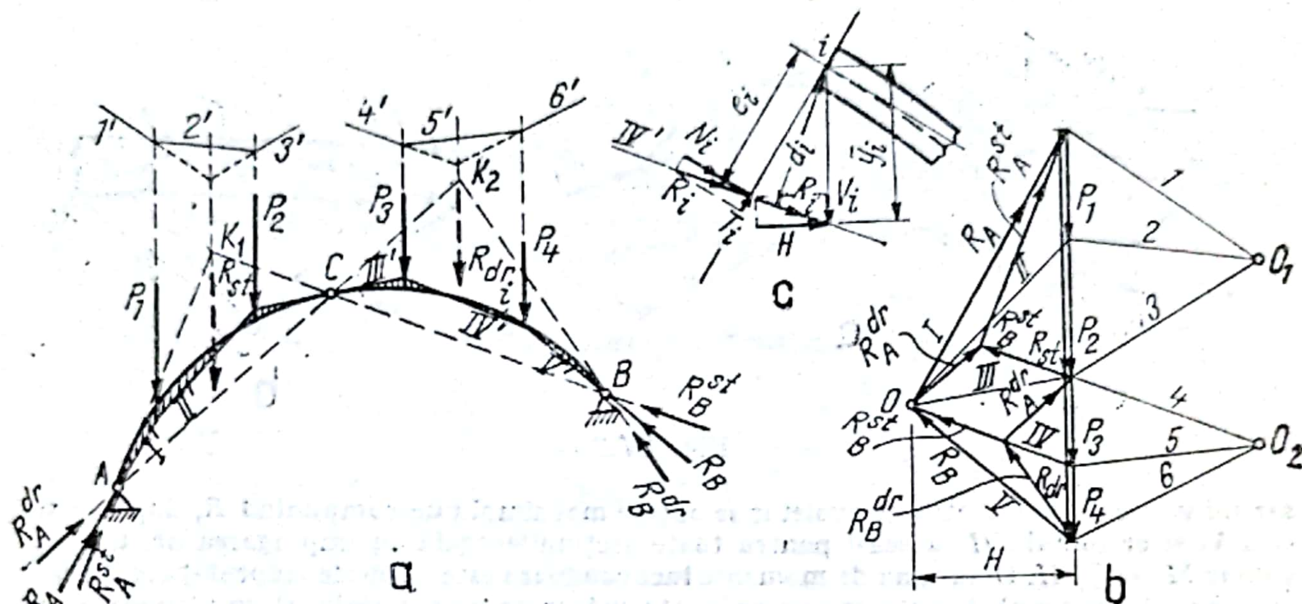


Fig. IV.24

bru, se va închide cu reacţiunile R_A şi R_B. Pentru determinarea reacţiunilor se aplică principiul suprapunerii efectelor considerînd arcul încărcat numai pe zona $A - C$ şi apoi numai pe zona $C - B$. Rezultanta forţelor de pe porţiunea din stînga R_{st} (determinată cu un poligon funicular auxiliar construit cu un pol arbitrar O_1) se va echilibra cu reacţiunile R_B^{st} (a cărui direcţie este BC) şi R_A^{st} (de direcţie AK_1). La fel se obţin reacţiunile R_A^{dr} şi R_B^{dr} din rezultanta forţelor R_{dr} pe porţiunea $C - B$ a arcului. Aceste reacţiuni parţiale se obţin ca mărime şi sens în poligonul forţelor (fig. IV. 24, *b*). Mărimea, direcţia şi sensul reacţiunilor totale R_A şi R_B se obţin în poligonul de forţe prin compunerea reacţiunilor parţiale din reazemele respective ($\bar{R}_A = \bar{R}_A^{st} + \bar{R}_A^{dr}$; $\bar{R}_B = \bar{R}_B^{st} + \bar{R}_B^{dr}$).

Pentru determinarea eforturilor se construieşte poligonul funicular prin cele trei articulaţii (fig. IV. 24, *a*) folosind ca pol punctul O determinat de intersecţia reacţiunilor R_A şi R_B în poligonul forţelor. O rază polară dusă din polul O reprezintă ca mărime şi direcţie rezultanta forţelor exterioare de la stînga (inclusiv reacţiunea R_A), iar latura corespunzătoare din poligonul funicular dă suportul acestei rezultante. Deci, cu ajutorul lor se cunoaşte pentru orice secţiune mărimea şi poziţia rezultantei forţelor din stînga secţiunii care determină eforturile în secţiune. Poligonul funicular particular ale cărui laturi reprezintă suportul rezultantei forţelor exterioare din stînga unei secţiuni se numeşte *poligon de presiune* (componenta principală a rezultanei respective este forţa normală de compresiune). Pentru sarcini distribuite poligonul devine o curbă, numită *curbă de presiune*. Determinarea eforturilor într-o secţiune oarecare i se prezintă în fig. IV. 24 *c*. Rezultanta forţelor din stînga secţiunii (raza de la O la extremitatea forţei P_3) ce acţio-

nează pe latura de funicular dintre P_3 și P_4 se descompune după normala la secțiune și tangenta la axa arcului în secțiune în T_i și respectiv N_i. Momentul încovoietor se obține sub forma $M_i = R_i d_i = N_i e_i$ în care d_i se măsoară pe normala din i la latura de funicular, iar e_i (excentricitatea forței normale) pe normala la tangenta la axa arcului în i. Pentru

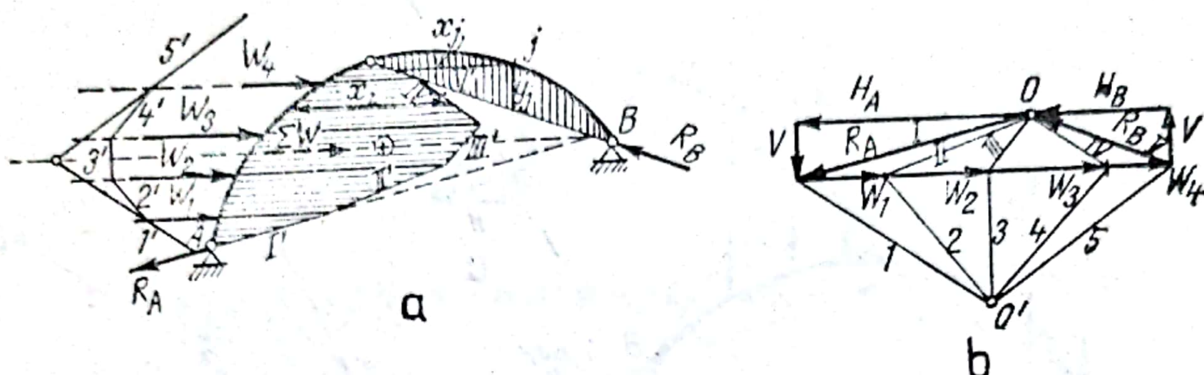


Fig. IV.25

sarcini verticale, momentul încovoietor se obține mai simplu descompunînd R_i după verticala V_i și orizontala H (aceeași pentru toate secțiunile egală cu împingerea arcului), și anume $M_i = \bar{y}_i \cdot H$. Diagrama de momente încovoietoare este dată de suprafața cuprinsă între arc și poligonul de presiune cu ordonate măsurate pe verticală și multiplicate cu împingerea H.

Analog se face calculul grafic al arcului cu trei articulații supus la sarcini orizontale (fig. IV. 25). În acest caz, razele polare care reprezintă rezultantele forțelor de la stînga secțiunilor respective (fig. IV. 25, *b*) au aceeași componentă verticală ($V_A = V_B = V$). Diagrama de momente este dată de suprafața cuprinsă între axa arcului și poligonul funicular prin cele trei articulații cu ordonate măsurate pe orizontală și multiplicate cu V, ($M_i = \bar{x}_i \cdot V$). Pentru ramura $C-B$ neîncărcată se pot măsura ordonatele verticale și multiplica cu împingerea H, ($M_j = \bar{y}_j \cdot H$).

2.3.7. **Axa rațională pentru arce cu trei articulații.** Pentru arce cu rază mare de curbură utilizate în construcții, eforturile unitare normale pe secțiune se obțin cu formula de la compresiune excentrică

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y. \tag{IV.32}$$

Din această formulă rezultă că axa arcului este rațional aleasă cînd pe secțiune apar numai eforturi unitare de compresiune, adică atunci cînd momentele încovoietoare sînt foarte mici sau nule. De la pct. 2.3.6. rezultă că momentele încovoietoare sînt cu atît mai mici cu cît axa arcului este mai aproape de curba de presiune. Arcele cu formă optimă sînt *arcele de coincidență* la care axa arcului coincide cu curba de presiune a încărcărilor fixe (momentele încovoietoare sînt nule). Cum curba de presiune nu depinde de forma arcului ci numai de încărcări și poziția celor trei articulații, axa arcului se poate lua între articulații să coincidă cu curba de presiune. Forma de coincidență se determină din condiția de anulare a momentelor încovoietoare, grafic sau analitic.

Grafic, se urmăreşte ca axa arcului să fie cît mai apropiată de curba de presiune a încărcărilor permanente. Pentru aceasta, plecînd de la o axă iniţială a arcului, se împarte arcul în bolţari şi se determină greutăţile proprii ale bolţarilor şi sarcinile permanente ce le revin. Se trasează poligonul funicular pentru aceste încărcări şi dacă acesta diferă mult de axa arcului, se repetă operaţia luînd funicularul determinat anterior ca axă a arcului.

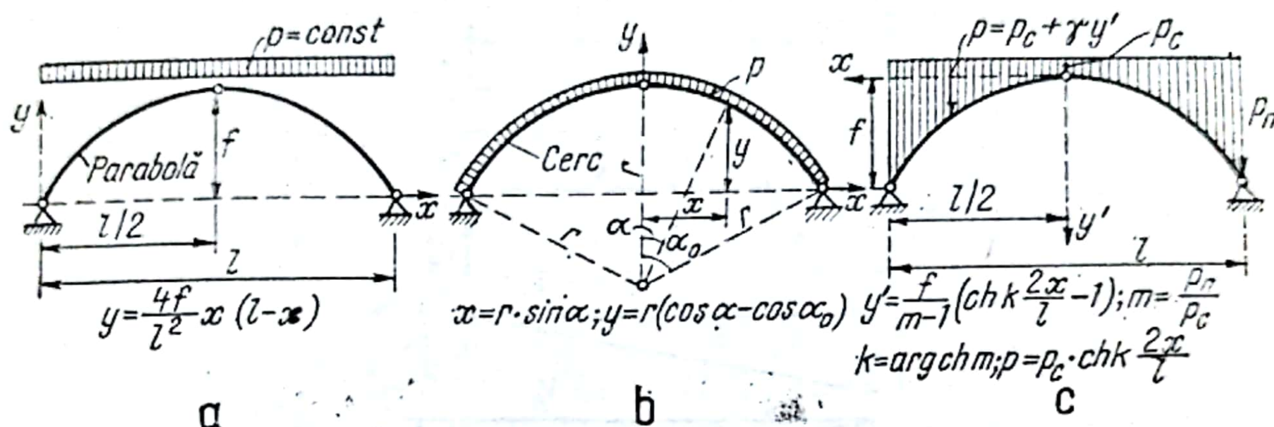


Fig. IV.26

Analitic, ecuaţia arcului de coincidenţă este

$$M_x = 0 \tag{IV.33}$$

care, pentru sarcini verticale, devine

$$M_x = M_x^0 - H\cdot y = 0 \text{ sau } y = M_x^0/H \tag{IV.33a}$$

adică, ordonatele axei arcului se obţin prin împărţirea momentelor pe grinda dreaptă simplu rezemată M_x^0 la împingerea H. Ecuaţia diferenţială a axei arcului în acest caz, pentru o sarcină distribuită p, este

$$y'' = -\,p/H. \tag{IV.33b}$$

Pentru încărcări permanente care nu depind de forma arcului, forma de coincidenţă rezultă direct din relaţiile anterioare. În fig. IV, 26 se dau cîteva exemple de arce de coincidenţă pentru încărcări simple.

Pentru sarcini permanente care depind de forma arcului (umplutura şi timpanele la podeţe boltite, pereţii pentru susţinerea tablierului, greutatea proprie a arcului), forma optimă a axei arcului se determină prin încercări succesive. Plecînd de la o formă iniţială (de exemplu parabolă) se determină sarcinile permanente concentrate pe bolţari pentru care se determină ordonatele y ale poligonului de presiune. Cu acest poligon ca axă se reia operaţia şi aşa mai departe.

2.3.8. **Linii de influenţă la arce cu trei articulaţii.** Liniile de influenţă la arcul cu trei articulaţii se pot obţine prin funcţii de influenţă sau cinematic, ca la sisteme din bare.

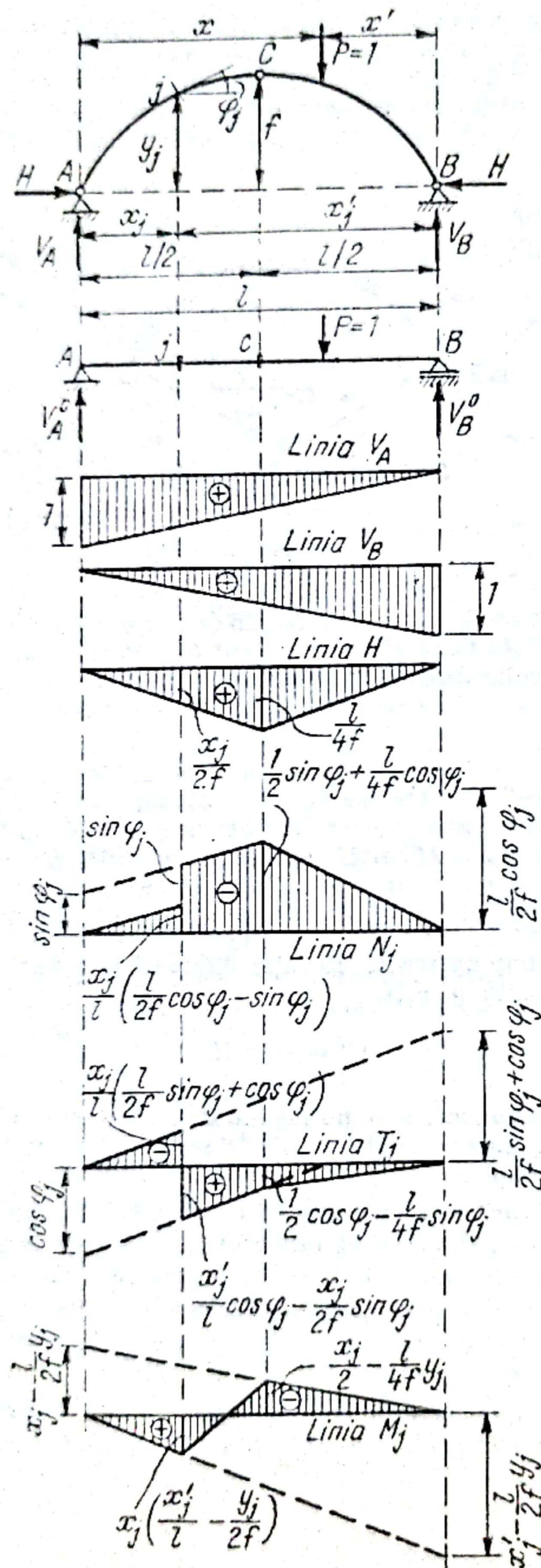


Fig. IV.27

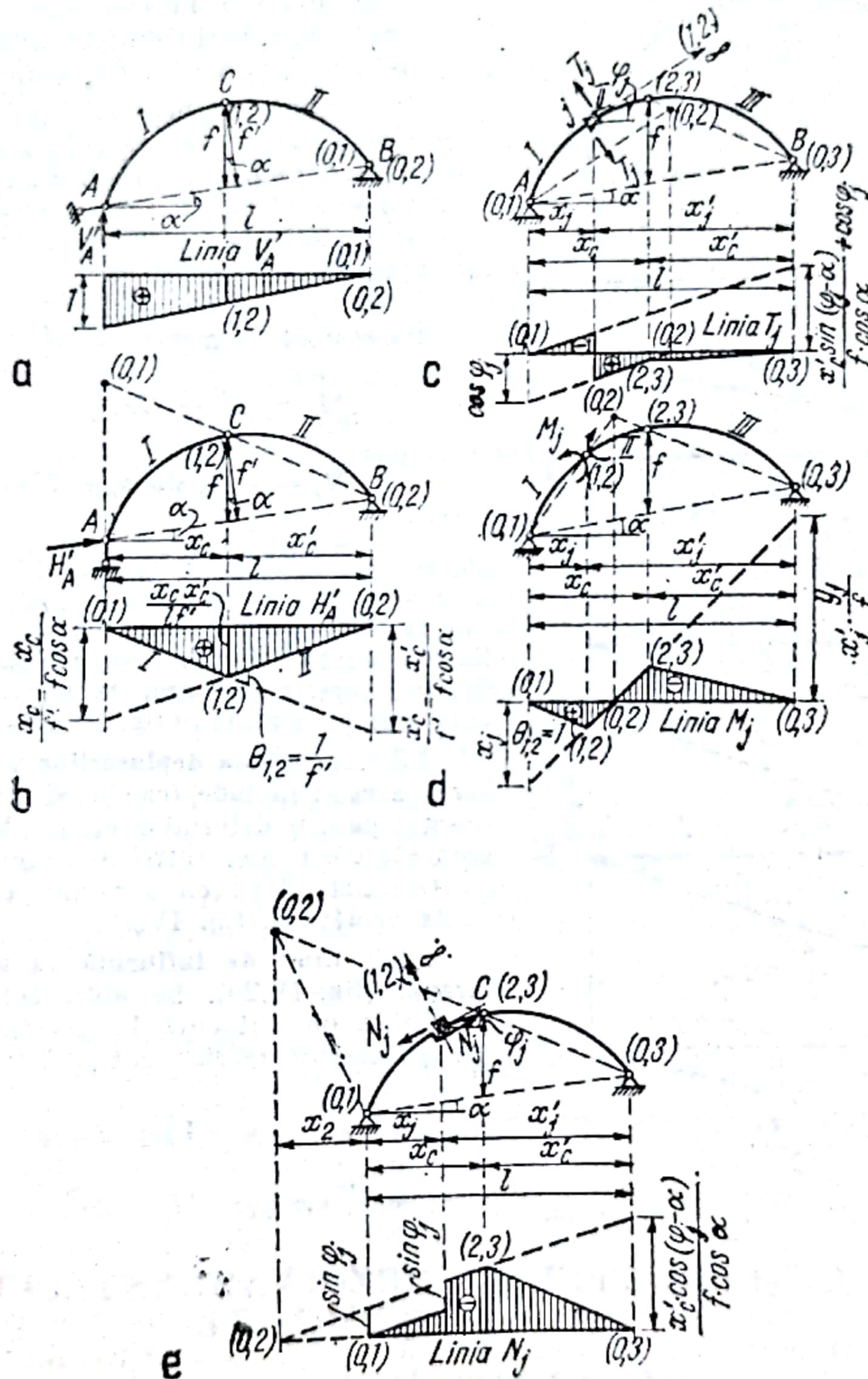

Linia V'_A
Linia H'_A
Linia T_j
Linia M_j
Linia N_j
$\theta_{1,2}=\frac{1}{f'}$
a
b
c
d
e

Fig. IV.28

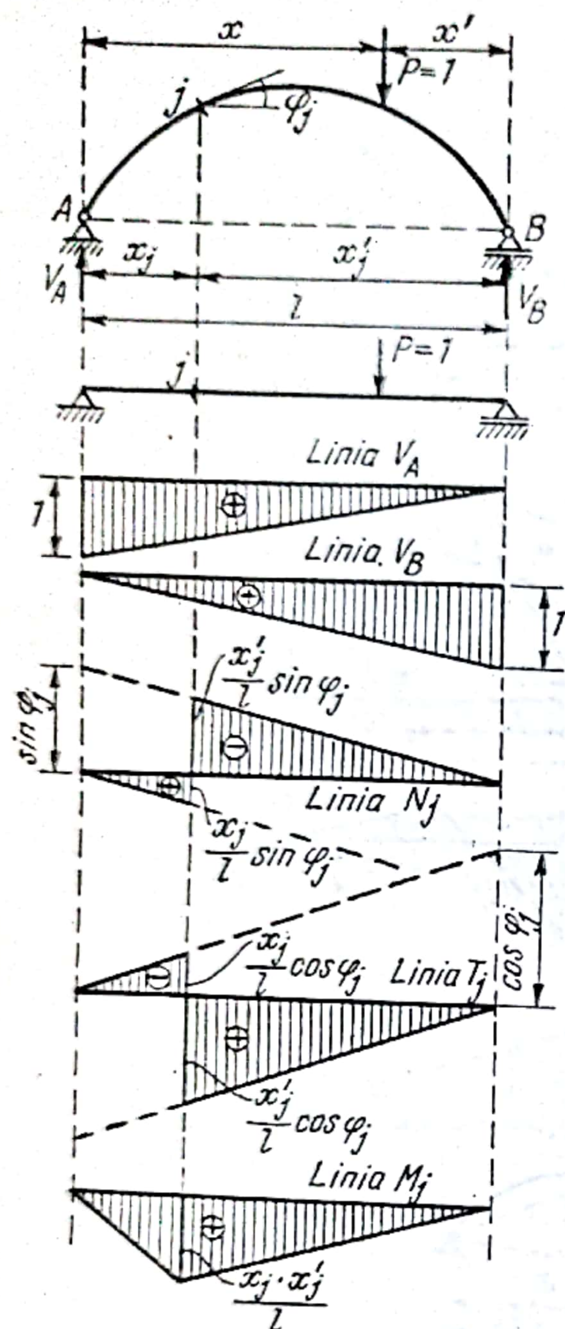


Fig. IV.29

2.3.8.1. **Metoda funcțiilor de influență.** Funcțiile de influență pentru reacțiuni și eforturi se obțin din expresiile acestora stabilite la încărcări fixe, particularizîndu-le pentru sarcina $P = 1$ mobilă. Astfel, pentru arcul cu nașterile la același nivel liniile de influență pentru reacțiuni și eforturile în secțiunea j se obțin prin suprapunerea liniilor de influență ale reacțiunilor și eforturilor pe grinda dreaptă de aceeași deschidere cu arcul, pe baza următoarelor expresii:

$$V_A = V_A^0; \quad V_B = V_B^0; \quad H = M_C^0/f;$$
$$M_j = M_j^0 - H \cdot y_j;$$
$$N_j = -T_j^0 \sin\varphi_j - H\cos\varphi_j; \qquad \text{(IV.34)}$$
$$T_j = T_j^0 \cos\varphi_j - H \sin\varphi_j$$

în care V_A^0, V_B^0, M_C^0 T_j^0 și M_j^0 sînt liniile de influență ale mărimilor respective pe grinda dreaptă corespunzătoare. Aceste linii de influență sînt prezentate în fig. IV. 27.

2.3.8.2. **Metoda deplasărilor virtuale.** Aplicarea acestei metode (ca la sisteme din bare drepte) pentru determinarea liniilor de influență ale eforturilor într-o secțiune j pe arcul cu trei articulații cu reazeme denivelate se poate urmări pe fig. IV.28.

2.3.9. **Linii de influență la arcul simplu rezemat** (fig. IV.29). Se obțin cel mai simplu din liniile de influență la grinda dreaptă de aceeași deschidere cu arcul pe baza expresiilor

$$V_A = V_A^0; \quad V_B = V_B^0; \quad N_j = -T_j^0 \sin\varphi_j;$$
$$T_j = T_j^0 \cos\varphi_j; \quad M_j = M_j^0. \qquad \text{(IV.35)}$$

3. METODE GENERALE PENTRU REZOLVAREA STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE

3.1. Metoda generală a eforturilor

3.1.1. **Caracterizarea statică a structurilor. Grad de nedeterminare statică.** Structurile static nedeterminate sînt acelea care posedă un număr de legături, interioare sau exterioare, mai mare decît numărul minim necesar asigurării invariabilității

geometrice. Din această cauză, ele nu pot fi rezolvate numai pe baza ecuaţiilor de echilibru static (furnizate de mecanica corpului rigid) fiind necesare ecuaţii suplimentare.

Gradul de nedeterminare statică al unei structuri reprezintă diferenţa dintre numărul necunoscutelor forţe de legătură (interioare şi exterioare) şi numărul ecuaţiilor de echilibru ce pot fi scrise şi corespunde, prin urmare, numărului de legături suplimentare pe care le are structura.

Stabilirea gradului de nedeterminare statică se face prin:

1) Procedeul izolării corpurilor care alcătuiesc structura, în vederea identificării numărului necunoscutelor suplimentare.

Se notează:

G_{ns} — gradul de nedeterminare statică;

c — numărul corpurilor care intră în alcătuirea structurii;

i — numărul reazemelor încastrate;

a_s — numărul articulaţiilor simple;

r_s — numărul reazemelor simple.

Gradul de nedeterminare statică al unei structuri plane rezultă din relaţia:

$$G_{ns} = 3i + 2a_s + r_s - 3c. \qquad \text{(IV.36)}$$

Se face menţiunea că o articulaţie simplă se consideră a fi o articulaţie dintre două corpuri sau dintre un corp şi baza de rezemare. În cazul în care într-un nod sînt articulate m corpuri, această articulaţie echivalează cu $(m-1)$ articulaţii simple.

Un exemplu de aplicare a relaţiei (IV. 36) se prezintă în legătură cu structura din fig. IV. 30, al cărei grad de nedeterminare statică este

$$G_{ns} = 3\cdot 2 + 2\cdot 6 + 2 - 3\cdot 5 = 5. \qquad \text{(VI.36a)}$$

2) Procedeul contururilor închise, care are la bază constatarea că un contur închis şi continuu este de trei ori static nedeterminat. Lipsa unei legături simple reduce gradul de nedeterminare al conturului cu o unitate. Deoarece o articulaţie simplă presupune lipsa unei singure legături, iar reazemul simplu implică două legături lipsă, gradul de nedeterminare al unei structuri, la care pot fi indentificate k asemenea contururi închise, este

$$G_{ns} = 3k - (a_s + 2r_s). \qquad \text{(IV.37)}$$

La numărarea contururilor trebuie avut în vedere ca fiecare contur să conţină cel puţin o bară nouă, care nu a mai fost considerată în cadrul altui contur.

În cazul structurilor relativ simple, cu un grad de nedeterminare redus, acesta se stabileşte în mod direct şi anume, prin suprimarea unor legături astfel încît structura să devină static determinată; numărul legăturilor suprimate constituie gradul de nedeterminare al structurii.

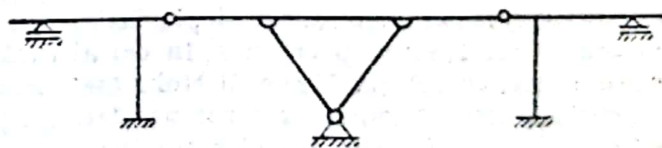


Fig. IV.30

3.1.2. **Principiul metodei.** *Sistem de bază. Ecuaţii de condiţie.* Rezolvarea structurilor static nedeterminate se bazează pe considerarea situaţiei de echilibru elastic, prin utilizarea concomitentă a condiţiei de echilibru static şi a condiţiei de compatibilitate.

În metoda eforturilor necunoscutele problemei sînt forţele de legătură din diverse secţiuni ale structurii. Aceste necunoscute corespund legăturilor suplimentare pe care le prezintă structura, astfel că numărul lor este egal cu gradul de nedeterminare.

Metoda constă în suprimarea unor legături (interioare sau/şi exterioare) pînă ce structura devine static determinată; pe direcţia fiecărei legături suprimate se introduce forţa de legătură corespunzătoare, avînd o mărime necunoscută şi un sens ales arbitrar. Necunoscutele introduse înlocuiesc efectul mecanic al legăturilor suprimate şi pot fi considerate drept încărcări ale structurii static determinate.

Structura astfel obţinută se numeşte *sistem de bază* şi se caracterizează prin faptul că are o rezolvare cunoscută. Suprimarea unor legături constituie însă o abatere de la condiţia de compatibilitate a deformatei structurii reale; de aceea, pentru determinarea necunoscutelor introduse, se impune condiţia ca deformata sistemului de bază, sub acţiunea încărcărilor exterioare şi a necunoscutelor forţe de legătură, să fie identică cu deformata structurii considerate. Aceasta implică ca deplasările totale, pe direcţiile legăturilor suprimate, să fie aceleaşi cu cele ale structurii date, de regulă nule. Numărul condiţiilor impuse sistemului de bază este egal cu cel al legăturilor suprimate, adică al surplusului de legături pe care le prezintă structura; exprimarea matematică a acestor condiţii furnizează un set de ecuaţii din a căror rezolvare se obţin necunoscutele problemei.

Notîndu-se cu $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i \ldots, \Delta_n$, deplasările pe direcţiile legăturilor suprimate şi cu $X_1, X_2, \ldots, X_i \ldots, X_n$, forţele de legătură introduse pe direcţiile acestor deplasări, condiţiile de compatibilitate sînt:

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \ldots \Delta_i = 0; \ldots \Delta_n = 0. \qquad \text{(IV.38)}$$

Pe baza principiului suprapunerii liniare a efectelor, deplasarea Δ_i se poate scrie sub forma

$$\Delta_i = \Delta_i^0 + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ij}X_j + \ldots \delta_{in}X_n = 0 \qquad \text{(IV.39)}$$

unde: Δ_i^0 este deplasarea pe direcţia necunoscutei X_i produsă pe sistemul de bază de încărcările date, iar δ_{ij} constituie deplasarea pe aceeaşi direcţie, ca urmare a încărcării sistemului de bază cu $X_j = 1$.

În metoda eforturilor, o ecuaţie i are deci următoarea formă generală:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}X_j + \Delta_i^0 = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad \text{(IV.40)}$$

3.1.3. **Expresiile coeficienţilor şi termenilor liberi.** Avînd în vedere semnificaţia fizică a coeficienţilor şi termenilor liberi din ecuaţiile de condiţie, aceştia se calculează pe baza expresiei generale a deplasărilor. În cazul încărcărilor constituite din forţe şi momente exterioare, precum şi în cel al încărcării-unitate aplicate pe direcţia fiecărei necunoscute, în relaţia Maxwell-Mohr trebuie să fie reţinuţi, pentru fiecare categorie de structură, numai termenii a căror pondere nu poate fi neglijată. Aşa cum se cunoaşte, la cadrele plane, influenţa forţelor tăietoare şi a forţelor axiale este foarte mică, fapt ce justifică luarea în considerare la calculul deplasărilor numai a efectului momentelor încovoietoare, astfel că rezultă:

— coeficienţii de forma δ_{ii}, numiţi coeficienţi principali, care sînt situaţi pe diagonala principală a sistemului de ecuaţii şi au forma

$$\delta_{ii} = \int \frac{m_i^2}{EI} \, dx. \qquad \text{(IV.41)}$$

Coeficienţii principali sînt întotdeauna pozitivi şi diferiţi de zero, proprietate rezultată atît din relaţia (IV. 41), cît şi din semnificaţia lor fizică ;

— coeficienţii de forma $\delta_{ij} (i \neq j)$, numiţi coeficienţi secundari, care au expresia

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} \, dx. \quad \text{(IV.42)}$$

În baza teoremei reciprocităţii deplasărilor unitare $\delta_{ij} = \delta_{ji}$;

— termenii liberi Δ_i^0 se datoresc acţiunilor care produc eforturi în structurile static nedeterminate, şi anume : încărcările cu forţe exterioare (Δ_{ip}), variaţia de temperatură (Δ_{it}) şi cedările de reazeme (Δ_{ic}). Rezultă expresiile

$$\Delta_i^0 = \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} \quad \text{(IV.43)}$$

$$\Delta_{ip} = \int \frac{m_i M_p^0}{EI} \, dx ; \quad \text{(IV.43a)}$$

$$\Delta_{it} = \sum \alpha_t t_0 \, \Omega(n) + \sum \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \, \Omega(m) ; \quad \text{(IV.43b)}$$

$$\Delta_{ic} = - \sum r_k \Delta r_k . \quad \text{(IV.43c)}$$

În expresiile (IV. 41) — (IV. 43c) s-au utilizat notaţiile :

m_i, m_j — momentele încovoietoare produse de încărcarea sistemului de bază cu $X_i = 1$, respectiv cu $X_j = 1$;

M_p^0 — momentul încovoietor pe sistemul de bază din încărcarea acestuia cu forţele şi momentele exterioare ;

I — momentul de inerţie al secţiunii transversale în raport cu axa de încovoiere ;

α_t — coeficientul de dilatare termică liniară ;

t_0 — variaţia de temperatură în axa barei ;

Δt — diferenţa de temperatură dintre fibrele inferioară şi superioară ale secţiunii transversale ;

$\Omega(n)$, $\Omega(m)$ — aria diagramei de forţe axiale, respectiv aria diagramei momentului încovoietor, produse de încărcarea $X_i = 1$ care acţionează pe sistemul de bază ;

h — înălţimea secţiunii transversale ;

r_k — reacţiunea pe direcţia legăturii simple k a sistemului de bază, din încărcarea $X_i = 1$;

Δr_k — cedarea de reazem pe direcţia legăturii k.

În expresia (IV.43b) sumele se extind la toate barele sistemului de bază, iar în expresia (IV.43c) suma se referă la toate legăturile sistemului de bază care suferă deplasări de mărimi cunoscute.

La calculul unei structuri este indicat a se evalua termenii liberi pentru fiecare încărcare în parte, aşa fel încît să se determine necunoscutele şi să se traseze diagramele de eforturi separat pentru fiecare din ele, fapt care permite apoi determinarea eforturilor pentru orice grupare de încărcări.

Calculul integralelor se efectuează după regulile cunoscute. În cazul barelor drepte cu secţiune constantă, se poate aplica regula de integrare Vereşceaghin. La cadrele avînd bare cu secţiune variabilă, determinarea valorilor integralelor se face pe baza coeficienţilor

de secţiune variabilă utilizîndu-se tabelele de valori ale acestor coeficienţi pentru cazurile curente (V. tabelele IV. 3, IV. 4 şi IV.17), sau calculîndu-se aceştia prin metode numerice de integrare (v.pct. 1.6.3.).

3.1.4. **Trasarea diagramelor de eforturi.** Diagrama finală de momente se trasează pe baza suprapunerii liniare a efectelor, pe baza relaţiei

$$M = M_p^0 + \sum_{i=1}^{n} m_i X_i. \tag{IV.44}$$

Forţa tăietoare dintr-o secţiune a unei bare drepte de lungime l_{ij} pentru care se cunosc momentele M_i şi M_j de la extremităţile sale, are expresia

$$T = T^0 + (M_j - M_i)/l_{ij} \tag{IV.45}$$

unde T^0 reprezintă forţa tăietoare pe bara dublu articulată. Dacă bara este neîncărcată, forţa tăietoare este constantă şi are valoarea

$$T = (M_j - M_i)/l_{ij}. \tag{IV.46}$$

Diagrama N se determină prin calcularea ordonatelor ei la capetele barelor, exprimîndu-se echilibrul nodurilor.

În cazul în care o structură conţine bare cu nedeterminări la forţa axială, este necesar ca, pe lîngă ecuaţiile de echilibru al nodurilor, să se scrie şi ecuaţia de deformaţie longitudinală a fiecărei bare cu astfel de nedeterminări.

3.1.5. **Calculul deplasărilor la structuri static nedeterminate. Verificarea diagramelor finale de eforturi.** Calculul deplasărilor la structurile static nedeterminate încărcate cu forţe se face cu formula Maxwell-Mohr. Simplificări importante decurg din faptul că este posibil ca, una din cele două diagrame să fie trasate pe orice sistem static determinat obţinut prin suprimare de legături în structura dată. Reţinîndu-se de exemplu, numai termenul corespunzător momentului încovoietor, rezultă pentru o deplasare Δ_{ij} expresia

$$\Delta_{ij} = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int \frac{m^0 M}{EI}\,dx = \int \frac{m M_p^0}{EI}\,dx \tag{IV.47}$$

în care m, M constituie diagramele pe structura static nedeterminată iar m^0, M_p^0 sînt trasate pe un sistem static determinat.

În mod obişnuit, deoarece diagrama M este necesară pentru celelalte verificări ale construcţiei, forma utilizată pentru calculul deplasării este

$$\Delta_{ij} = \int \frac{m^0 M}{EI}\,dx. \tag{IV.48}$$

Pentru categoriile de structuri la care trebuie considerat efectul forţei axiale sau cel al forţei tăietoare, expresia (IV. 48) se completează cu termenii corespunzători.

În cazul variației de temperatură și cedărilor de reazeme, deplasarea totală este compusă din două părți și anume, prima se datorește cauzei care acționează structura iar cea de a doua provine de la necunoscutele statice suplimentare. Formulele de calcul sînt:

— pentru variația de temperatură

$$\Delta_{ij} = \Sigma \alpha_t t_0 \Omega(n^0) + \Sigma \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \Omega(m^0) + \int \frac{m^0 M}{EI} \mathrm{d}x; \qquad \text{(IV.49)}$$

— pentru cedările de reazeme

$$\Delta_{ij} = - \Sigma r_k \Delta r_k + \int \frac{m^0 M}{EI} \mathrm{d}x. \qquad \text{(IV.50)}$$

Verificarea rezolvării corecte a unei structuri static nedeterminate se face folosindu-se condiția de compatibilitate, și anume calculîndu-se o serie de deplasări care în structura dată sînt nule sau au o valoare cunoscută.

3.1.6. Posibilități de simplificare a ecuațiilor de condiție. La sistemele cu un grad de nedeterminare relativ mare, scrierea și rezolvarea ecuațiilor de condiție conduc la calcule laborioase. De aceea, la aplicarea practică a metodei eforturilor este indicat să se urmărească, pentru fiecare categorie de structură, simplificarea ecuațiilor de condiție. Căile de simplificare prezentate în continuare, urmăresc anularea a cît mai mulți coeficienți secundari; la limită dacă toți coeficienții secundari sînt nuli, sistemul celor n ecuații cu n necunoscute este alcătuit din n ecuații independente, fiecare ecuație conținînd o singură necunoscută.

3.1.6.1. Alegerea judicioasă a sistemului de bază. La stabilirea sistemului de bază trebuie avute în vedere următoarele:

— diagramele unitare și diagrama M_p^0 să se extindă pe un număr cît mai mic de bare, fapt care reduce simțitor volumul calculelor; dacă diagramele m_i și m_j nu au nici o bară comună, coeficientul δ_{ij} este nul. Un exemplu este arătat în legătură cu structura din fig. IV. 31, *a*. Sistemul de bază din fig. IV.31, *b* nu este recomandabil deoarece fiecare

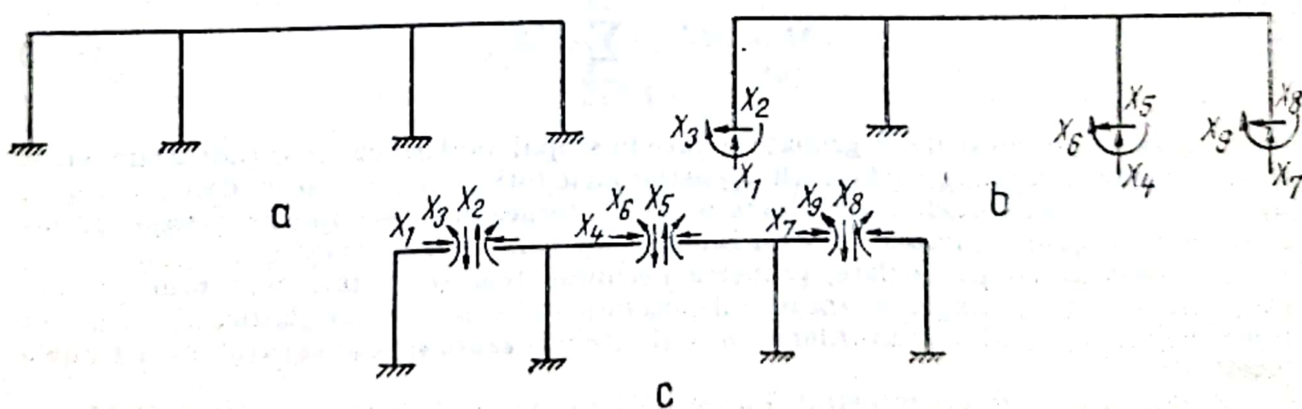


Fig. IV.31

pereche de diagrame conține cel puțin o bară comună și drept urmare toți coeficienții secundari sînt diferiți de zero. Mai avantajos este sistemul din fig. IV. 31, *c*, obținut prin secționarea completă a riglelor din fiecare deschidere. În acest caz, diagramele m_1, m_2,

m_3 nu au nici o porţiune comună cu diagramele m_7, m_8, m_9 şi deci coeficienţii secundari respectivi sînt nuli ($\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \delta_{27} = \delta_{28} = \delta_{29} = \delta_{37} = \delta_{38} = \delta_{39} = 0$);

— rezolvarea sistemului de bază pentru încărcările unitare şi pentru forţele exterioare să fie cît mai simplă, în sensul ca diagramele m_i şi M_p^0 să fie cît mai uşor de trasat;

— în condiţiile calculului manual trebuie evitate sistemele de bază pentru care diagrama M_p^0 rezultă cu ordonate mult mai mari decît diagrama finală M, aceasta pentru ca rezultatele să nu fie influenţate sensibil de erorile calculului numeric.

3.1.6.2. **Utilizarea necunoscutelor grupate. Transferarea necunoscutelor în centrul elastic.** La o structură static nedeterminată, pentru care s-a ales un sistem de bază şi s-au trasat diagramele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ corespunzătoare necunoscutelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$, este posibil ca, în locul utilizării directe a acestor diagrame, să se considere alte n diagrame, obţinute prin combinări liniare ale diagramelor unitare iniţiale. Relaţia matriceală dintre cele două serii de diagrame este de forma

$$\begin{bmatrix} m_1' \\ \vdots \\ m_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \tag{IV.51}$$

în care coeficienţii α_{ij} sînt aleşi arbitrar.

Determinantul matricei α din relaţia (IV.51), trebuie să îndeplinească condiţia $|D| \neq 0$, astfel ca noile diagrame m' să fie liniar independente. Diagrama m_i' poate fi considerată ca fiind diagrama unitară a unei noi necunoscute X_i'. Pentru trasarea diagramei de momente pe structura static nedeterminată, este posibil să se utilizeze necunoscutele grupate $X_1' \ldots X_n'$ şi diagramele $m_1' \ldots m_n'$. Modul de aplicare în acest caz al metodei eforturilor rămîne acelaşi ca şi pentru necunoscutele iniţiale. Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi se calculează cu expresiile (IV.41) — (IV.43 c) în care se înlocuiesc diagramele $m_1 \ldots m_n$ prin diagramele $m_1' \ldots m_n'$.

Diagrama finală de momente are expresia

$$M = M_p^0 + \sum_{i=1}^{n} m_i' X_i'. \tag{IV.52}$$

Utilizarea necunoscutelor grupate se face în scopul anulării coeficienţilor secundari şi anume, se pot determina coeficienţii α_{ij} astfel încît toţi coeficienţii secundari să fie nuli. Din punct de vedere practic, acest lucru nu este întotdeauna avantajos deoarece determinarea coeficienţilor α_{ij} implică deseori calcule suplimentare importante.

În unele cazuri particulare, gruparea necunoscutelor se poate realiza prin procedee simple, cum este de exemplu transferul necunoscutelor în centrul elastic. Un astfel de procedeu este aplicabil contururilor închise şi este utilizat în special în cazul arcelor dublu încastrate.

Astfel, la arcul dublu încastrat din fig. IV.32, *a*, în locul necunoscutelor H, V, M care reprezintă componentele reacţiunii din încastrarea corespunzătoare, se consideră necunoscutele grupate X_1, X_2, X_3, ca fiind componentele aceleiaşi reacţiuni, dar aplicată într-un alt punct O din planul structurii, legat de secţiunea de încastrare printr-o bară fictivă de rigiditate infinită (fig. IV.32, *b*). Poziţia punctului O, în care se reduc necunoscutele statice, precum şi direcţiile acestor necunoscute, rezultă din condiţiile de anulare a coeficienţilor

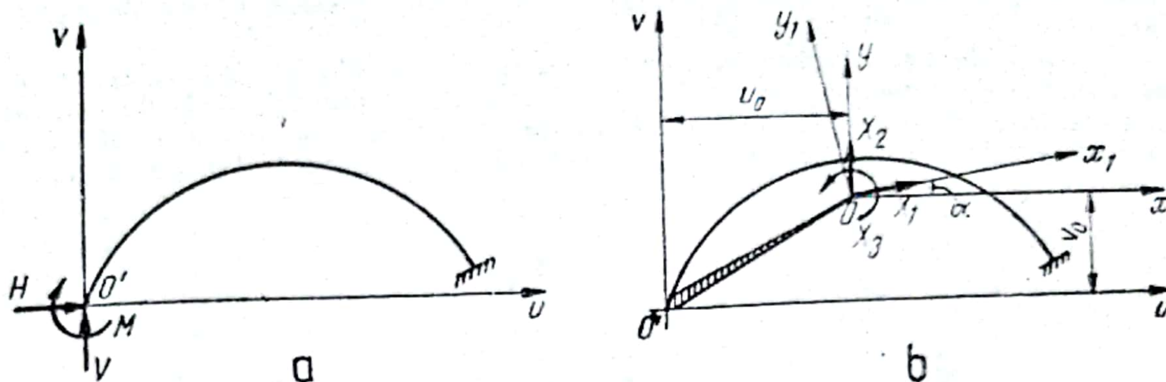


Fig. IV.32

secundari ai ecuaţiilor de condiţie. Astfel, din condiţiile $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ şi $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ se obţin coordonatele punctului de reducere O, şi anume

$$v_0 = \frac{\int v \frac{I_c}{I} \, ds}{\int \frac{I_c}{I} \, ds}; \qquad u_0 = \frac{\int u \frac{I_c}{I} \, ds}{\int \frac{I_c}{I} \, ds}. \tag{IV.53}$$

Notîndu-se $dw = I_c ds/I$, relaţiile (IV. 53) furnizează coordonatele centrului de greutate al elementelor convenţionale de arie dw, considerate distribuite în lungul arcului. Punctul O, poartă denumirea de *centru elastic* şi reprezintă centrul de greutate al sarcinilor elastice dw.

Direcţia necunoscutei X_1 rezultă din condiţia $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ şi are forma

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\int xy \, dw}{\int x^2 \, dw} = \frac{I_{xy}}{I_y} \tag{IV.54}$$

în care I_{xy}, I_y constituie momentul de inerţie centrifugal, respectiv momentul de inerţie axial al sarcinilor elastice în sistemul de axe xOy. Aceasta înseamnă că axele x_1Oy_1 trebuie să fie axe conjugate în raport cu elipsa centrală de inerţie a elementelor elastice distribuite dw.

Considerarea necunoscutelor în centrul elastic al structurii conduce deci la obţinerea a trei ecuaţii independente de forma

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \tag{IV.55}$$

în care semnificaţia coeficienţilor şi termenilor liberi este cea cunoscută.

Determinarea practică a poziţiei centrului elastic şi a direcţiilor axelor conjugate se face astfel :

— În cazul arcelor, calculul integralelor din expresiile (IV.53) şi (IV.54) se efectuează prin metode numerice. Dacă se împarte arcul într-un număr q de bolţari a căror lungime este Δs, un bolţar i fiind caracterizat prin momentul de inerţie I_i al secţiunii transversale şi prin coordonatele u_i şi v_i, respectiv x_i şi y_i, ale centrului său de greutate, rezultă

$$W_i = \frac{I_c}{I_i} \Delta s_i \tag{IV.56}$$

$$v_0 = \frac{\sum_{i=1}^{q} v_i W_i}{\sum_{i=0}^{q} W_i}; \qquad u_0 = \frac{\sum_{i=1}^{q} u_i W_i}{\sum_{i=1}^{q} W_i}; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{q} x_i y_i W_i}{\sum_{i=1}^{q} x_i^2 W_i}. \tag{IV.57}$$

— Pentru cadre alcătuite din bare cu secţiune constantă, sarcina elastică a unei bare i se consideră concentrată la mijlocul lungimii barei şi are expresia $W_i = l_i I_c / I_i$, astfel că rezultă

$$v_0 = \frac{\sum_{i=1}^{b} v_i W_i}{\sum_{i=1}^{b} W_i}; \qquad u_0 = \frac{\sum_{i=1}^{b} u_i W_i}{\sum_{i=1}^{b} W_i} \tag{IV.58}$$

în care b reprezintă numărul de bare iar u_i şi v_i sînt coordonatele mijlocului lungimii barei, i.

Momentele de inerţie axiale şi momentul de inerţie centrifugal ale unei bare de secţiune constantă se calculează cu expresiile

$$I_x = \left(\frac{l^3}{12} + lb^2\right) \frac{I_c}{I}; \qquad I_y = la^2 \frac{I_c}{I} \text{ (fig. IV.33, } a)$$

$$I_x = \frac{1}{3} l (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \frac{I_c}{I} \text{ (fig. IV.33, } b) \tag{IV.59}$$

$$I_{xy} = \left(lab + \frac{l^3}{12} \sin\alpha \cos\alpha\right) \frac{I_c}{I}. \text{ (fig. IV.33, } c)$$

— La structuri simetrice, centrul elastic se găseşte pe axa de simetrie. Deoarece această axă constituie una din axele principale ale sarcinilor elastice, direcţia necunoscutei X_1 rezultă perpendiculară pe axa de simetrie a structurii iar poziţia centrului elastic se determină printr-un singur parametru, şi anume ordonata v_0 (fig. IV.34, a, b).

Expresiile momentelor produse de încărcările unitare se stabilesc în sistemul de axe xOy, astfel că, pentru sistemele de bază din fig. IV. 34, *a*, *b*, rezultă :

$$m_1 = -y; \quad m_2 = x; \quad m_3 = 1.$$

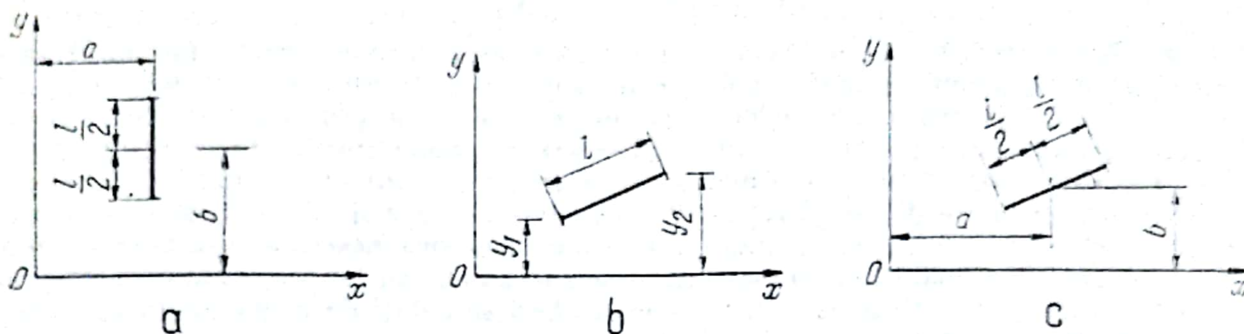


Fig. IV.33

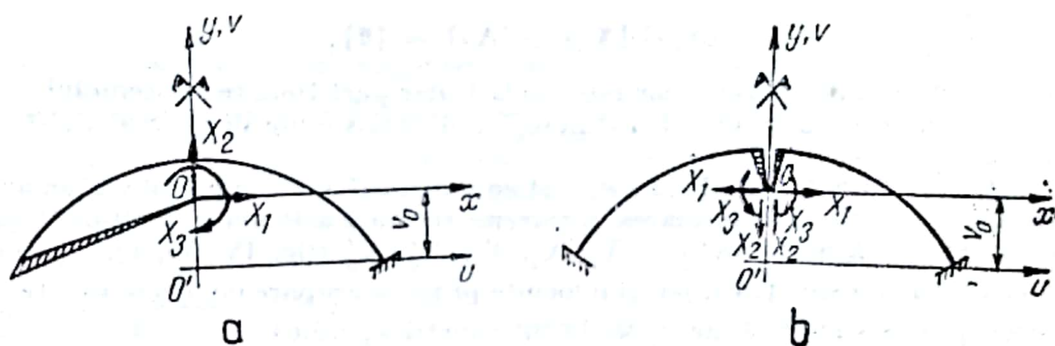


Fig. IV.34

În general, utilizarea transferării necunoscutelor în centrul elastic este convenabilă numai în cazul structurilor simetrice. Pentru structurile oarecare, supuse la încărcări fixe, calculele efectuate în vederea stabilirii parametrilor centrului elastic precum și dificultățile cauzate de direcția înclinată a necunoscutei X_1, nu sînt compensate de simplificările rezultate din anularea coeficienților secundari ai ecuațiilor de condiție.

3.1.6.3. **Necunoscute simetrice și antisimetrice. Utilizarea semistructurilor.** Structurile simetrice din punct de vedere static sînt cele care prezintă simetrie geometrică (formă și distanțe), mecanică (rezemări) și elastică (aria, momentul de inerție al secțiunilor transversale și modulul de elasticitate al materialului). La aceste structuri se obțin simplificări importante dacă se consideră perechi de necunoscute simetrice și antisimetrice iar încărcarea se descompune într-o componentă simetrică și una antisimetrică. În acest caz, alegîndu-se un sistem de bază care să respecte situația de simetrie, diagramele unitare rezultă simetrice sau antisimetrice, conform caracterului fiecărei necunoscute. La calculul coeficienților secundari și termenilor liberi, rezultatul integrării produsului ordonatelor unei diagrame simetrice cu cele ale unei diagrame antisimetrice este nul. Aceasta înseamnă că, în sistemul ecuațiilor de condiție, coeficienții δ_{ij}, la care indicii i și j se referă la necunoscute din categorii diferite, sînt nuli. Avînd în vedere descompunerea încărcărilor într-o

componentă simetrică și una antisimetrică, sistemul ecuațiilor de condiție se poate scrie, prin partiționare matriceală, sub forma

$$\begin{bmatrix} \delta_{SS} & \delta_{SA} \\ \delta_{AS} & \delta_{AA} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_S \\ X_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_S \\ \Delta_A \end{bmatrix} = [0] \qquad \text{(IV.60)}$$

în care: δ_{SS} reprezintă submatricea coeficienților secundari ce provin din integrarea perechilor de diagrame simetrice; δ_{AA} constituie submatricea coeficienților secundari rezultați din integrarea diagramelor antisimetrice; δ_{SA}, δ_{AS} sînt submatricele coeficienților secundari corespunzători integrării unei diagrame simetrice cu una antisimetrică; X_S, X_A sînt necunoscutele simetrice, respectiv cele antisimetrice.

Deoarece $[\delta_{SA}] = [0]$ și $[\delta_{AS}] = [0]$, sistemul de ecuații (IV.60) se desparte în două sisteme independente, și anume, unul care conține necunoscutele simetrice iar termenii liberi provin numai de la componenta simetrică a încărcărilor și altul în care intervin numai necunoscutele antisimetrice iar termenii liberi sînt dați de componenta antisimetrică a încărcărilor, adică

$$\begin{aligned} [\delta_{SS}]\,[X_S] + [\Delta_S] &= [0] \\ [\delta_{AA}]\,[X_A] + [\Delta_A] &= [0]. \end{aligned} \qquad \text{(IV.61)}$$

Numărul total al necunoscutelor este același, dar partiționarea sistemului sub forma (IV. 61) conduce la două rezolvări distincte, mult mai simple decît cea a sistemului în ansamblu.

Astfel, la structura din fig. IV.35, *a*, sistemul de bază se obține prin secționarea riglei în axa de simetrie și prin transformarea în reazeme simple a articulațiilor stîlpilor marginali, fiind puse în evidență necunoscutele X_1, X_2, X_3, X'_4, X'_5 (fig. IV. 35, *b*). Necunoscutele X'_4 și X'_5 avînd poziția simetrică, pot fi înlocuite printr-o grupare de necunoscute X_4 și X_5 așa fel încît X_4 să fie simetrică iar X_5 să fie antisimetrică, adică

$$X'_4 = X_4 + X_5; \qquad X'_5 = X_4 - X_5.$$

În acest mod, diagramele unitare m_1, m_3, m_4 sînt simetrice, iar diagramele m_2, m^5 rezultă antisimetrice.

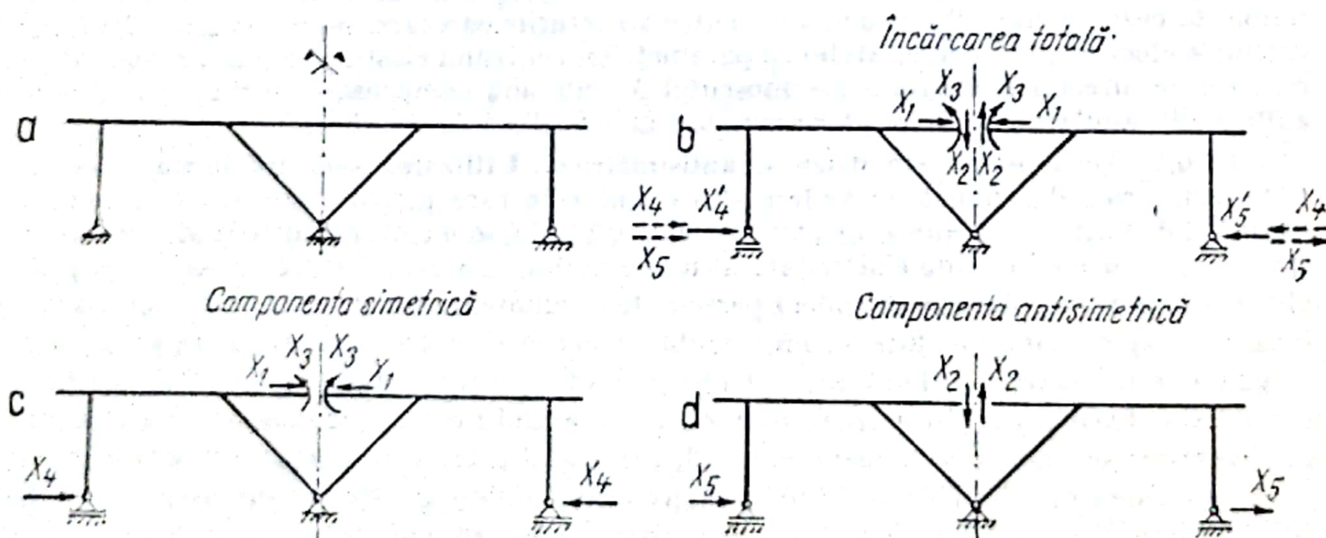


Fig. IV.35

Pentru componenta simetrică a încărcării necunoscutele cu caracter antisimetric sînt nule, astfel că primul sistem de ecuaţii conţine numai necunoscutele X_1, X_3, X_4 (fig. IV.35, *c*); în cazul componentei antisimetrice a încărcării sînt nule necunoscutele cu caracter simetric şi deci al doilea sistem de ecuaţii cuprinde necunoscutele X_2 şi X_5 (fig. IV.35, *d*).

Diagramele care intervin la calculul coeficienţilor şi termenilor liberi sînt fie simetrice, fie antisimetrice, iar integrarea se referă numai la perechi de diagrame din aceeaşi categorie; devine deci posibilă operarea numai pe o jumătate de structură, deoarece pe cealaltă jumătate se obţine acelaşi rezultat.

Posibilitatea conducerii calcului numai pe o jumătate din structură este pusă în evidenţă şi de modul în care se deformează structura, avînd în vedere că deformata păstrează caracterul componentei încărcării. Pentru calcule, se consideră structuri convenţionale („semistructuri''), obţinute din structura dată prin secţionare în dreptul axei de simetrie şi prin introducerea în acest loc a unor legături care să asigure, pentru încărcarea respectivă, aceeaşi deformare cu cea a structurii reale. Stabilirea legăturilor care trebuie considerate în axa de simetrie se face deci pe baza deplasărilor efective ale acestei secţiuni. Cazurile caracteristice sînt prezentate în tabelul IV.10.

Tabelul IV.10

Semistructuri. Legături şi deplasări în axa de simetrie

Structura	Încărcarea simetrică		Încărcarea antisimetrică	
	Deplasări	Semistructura	Deplasări	Semistructura
	$u = 0$ $v \neq 0$ $\varphi = 0$		$u \neq 0$ $v = 0$ $\varphi \neq 0$	
	$u = 0$ $v \neq 0$ $\varphi = 0$		$u \neq 0$ $v = 0$ $\varphi \neq 0$	
I	$u = 0$ $v = 0$ $\varphi = 0$		$u \neq 0$ $v = 0$ $\varphi \neq 0$	$\frac{I}{2}$

Fiecare semistructură este rezolvată ca o structură independentă, după care diagrama pe structura reală se obţine prin transpunerea simetrică sau antisimetrică a diagramei de pe semistructură.

Exemplul de calcul IV.1. Se cer diagramele de eforturi la cadrul din fig. IV. 36 pentru:
- încărcarea cu forțe;
- variaţia de temperatură $t_0 = 30°C$;
- cedările de reazem $v = 0,8$ cm, $u = 0,4$ cm.

Cadrul are barele cu secţiune constantă iar momentul de inerţie pentru fiecare bară este exprimat în funcţie de un moment de inerţie de comparaţie $I_0 (EI_0 = 400\,000\ kNm^2)$.

Pentru simplificarea rezolvării se vor utiliza proprietăţile de simetrie ale structurii, fapt ce conduce la considerarea semistructurilor conform celor arătate în tabelul IV. 10.

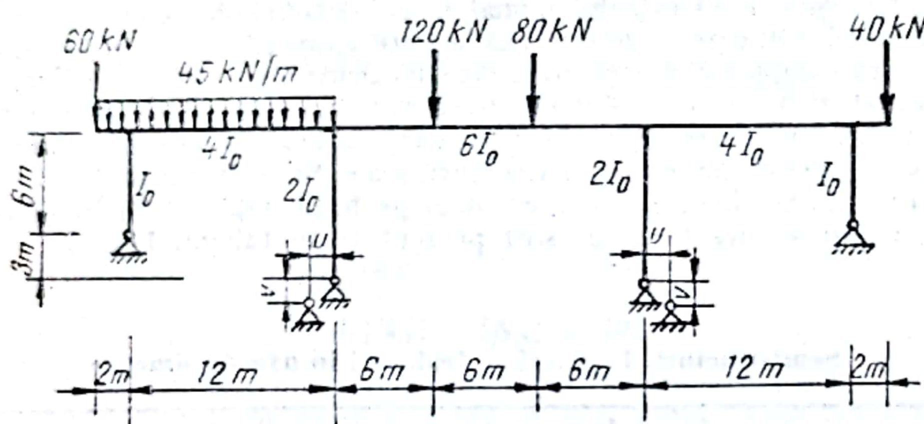


Fig. IV.36

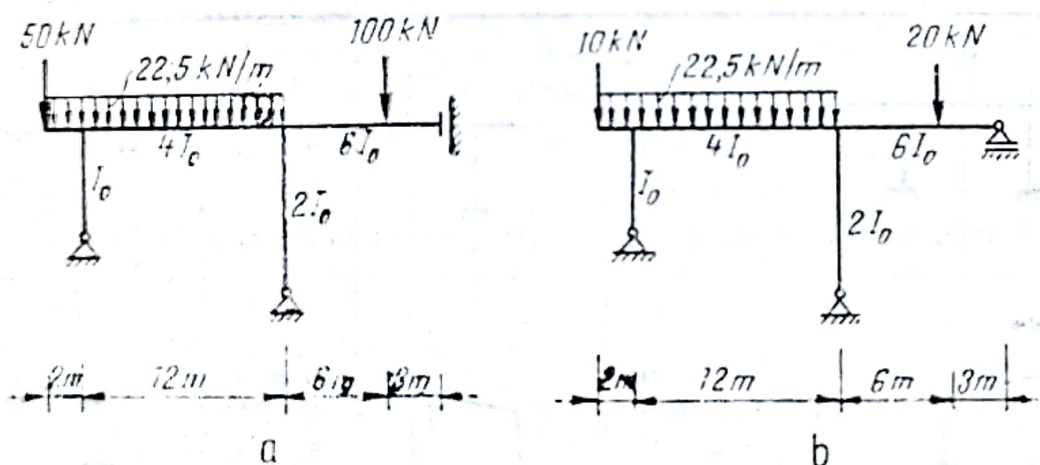


Fig. IV.37

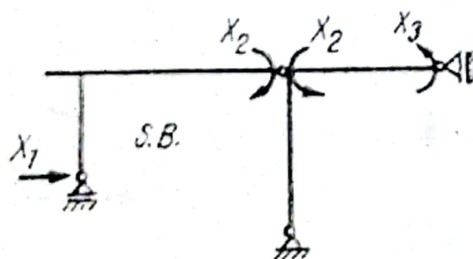


Fig. IV.38

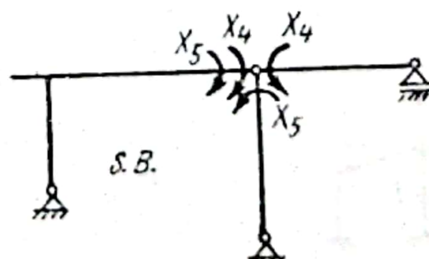


Fig. IV.39

1) **Încărcarea cu forțe.** Încărcarea dată se descompune într-o componentă simetrică (fig. IV.37, *a*) și una antisimetrică (fig. IV.37, *b*). Semistructura corespunzătoare încărcării simetrice este de trei ori static nedeterminată iar sistemul de bază este arătat în fig. IV. 38. Pentru componenta antisimetrică, semistructura este de două ori static nedeterminată, alegîndu-se sistemul de bază din fig. IV. 39. Diagramele unitare sînt reprezentate în fig. IV. 40, *a*–*c* și respectiv IV. 41, *a*, *b* iar diagramele de momente M_p^0 sînt arătate în fig. IV.42 și IV.43.

Utilizîndu-se diagramele trasate, rezultă următoarele valori pentru coeficienții și termenii liberi din ecuațiile de condiție

$$EI_0\delta_{11} = \frac{1}{3}\cdot 6^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 12 = 108{,}0$$

$$EI_0\delta_{22} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,9\cdot 1^2 = 2{,}5$$

$$EI_0\delta_{33} = \frac{1}{6}\cdot 1^2\cdot 9 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 9 = 3{,}0$$

$$EI_0\delta_{12} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\right)\left(-\frac{1}{3}\cdot 1\right) = 3{,}0$$

$$EI_0\delta_{13} = 0,$$

$$EI_0\delta_{23} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 9 = 1{,}5$$

$$EI_0\delta_{44} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 12 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 9 = 1{,}5$$

$$EI_0\delta_{45} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = 1{,}333$$

$$EI_0\delta_{55} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 12\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 9 = 4{,}50$$

$$EI_0\Delta_{1p} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 145{,}0\cdot 12\cdot 6 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 405{,}0\cdot 12\cdot 3 = -1\,560{,}0$$

$$EI_0\Delta_{2p} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot 145{,}0\cdot 12\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 405{,}0\cdot 12\cdot 0{,}5 -$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 600\cdot 9\cdot 1 = -1\,232{,}5$$

$$EI_0\Delta_{3p} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 600\cdot 6\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 600\cdot 9\cdot 1 = -1\,200{,}0$$

$$EI_0\Delta_{4p} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot 65{,}0\cdot 12\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 405\cdot 12\cdot 0{,}5 -$$
$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 6\cdot\frac{5}{9} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 3\cdot\frac{2}{9} = -385{,}83$$

$$EI_0\Delta_{5p} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 65\cdot 12\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot 405{,}0\cdot 12\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + 1\right) = -599{,}17.$$

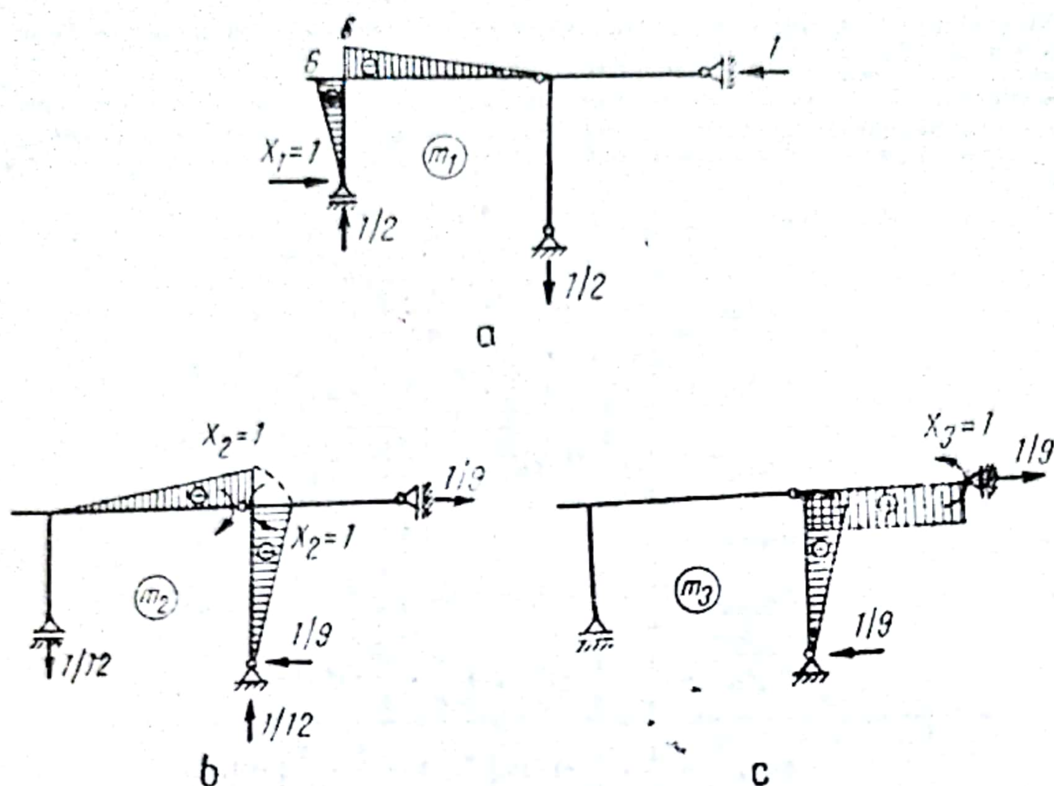


Fig. IV.40

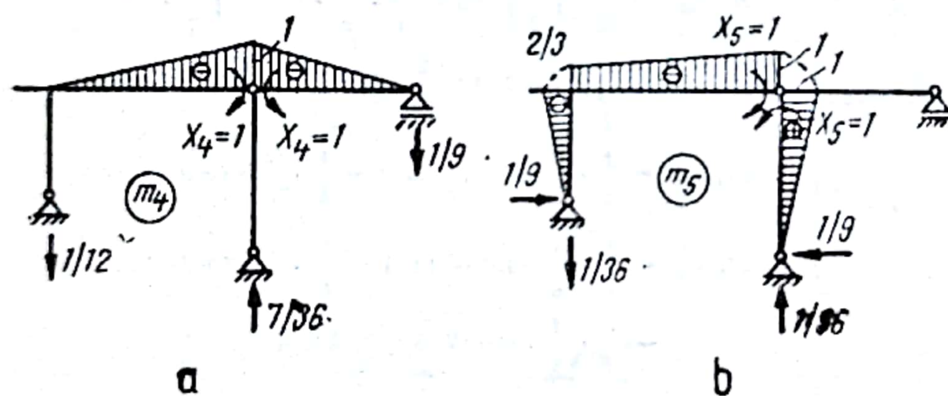


Fig. IV.41

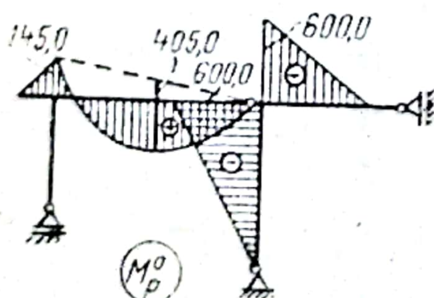


Fig. IV.42

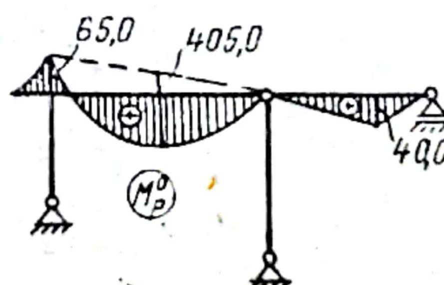


Fig. IV.43

Cele două sisteme de ecuații au forma ;

$$\begin{cases} 108X_1 + 3X_2 - 1\,560{,}0 = 0 \\ 3X_1 + 2{,}5X_2 + 1{,}5X_3 - 1\,232{,}5 = 0 \\ 1{,}5X_2 + 3X_3 - 1\,200{,}0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1{,}5X_4 + 1{,}333X_5 - 385{,}83 = 0 \\ 1{,}333X_4 + 4{,}5X_5 - 599{,}17 = 0 \end{cases}$$

din care se obțin valorile necunoscutelor, și anume ;

$$X_1 = 4{,}6\ \text{kN},\quad X_2 = 353{,}6\ \text{kNm},\quad X_3 = 223{,}2\ \text{kNm},\quad X_4 = 188{,}5\ \text{kNm},\quad X_5 = 77{,}3\ \text{kNm}.$$

Cu aceste valori, pe baza relației (IV.44), se trasează diagramele de momente pentru componenta simetrică a încărcării (fig. IV.44, *a*), pentru cea antisimetrică (fig. IV. 44, *b*) iar prin suprapunerea celor două diagrame rezultînd diagrama finală de momente (fig. IV.44,*c*).

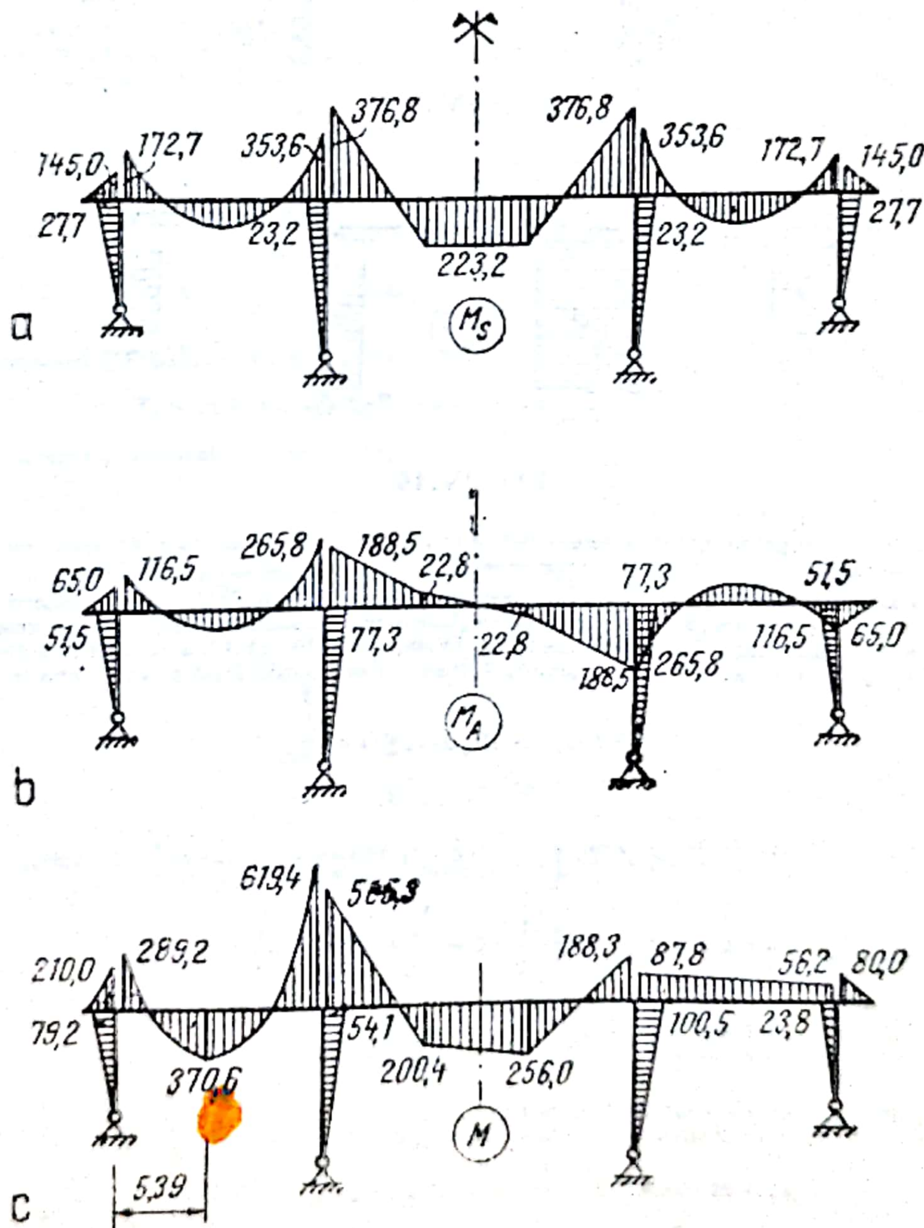


Fig. IV.44

Diagrama de forţe tăietoare, reprezentată în fig. IV.45, se trasează pe baza diagramei de momente finale, utilizîndu-se relaţiile (IV.45) şi (IV.46).

Forţele axiale din bare se obţin prin izolarea nodurilor şi exprimarea echilibrului acestora, rezultînd diagrama din fig.IV.46.

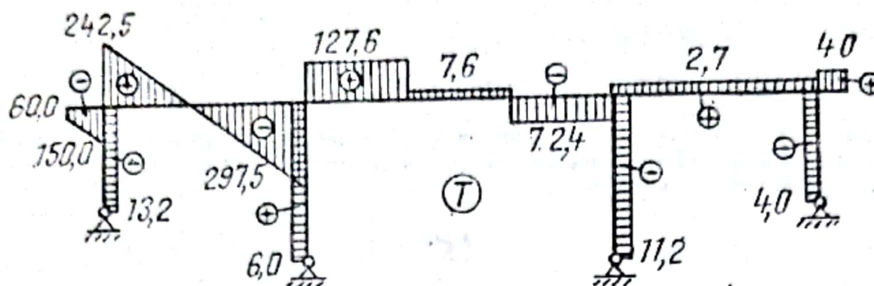


Fig. IV.45

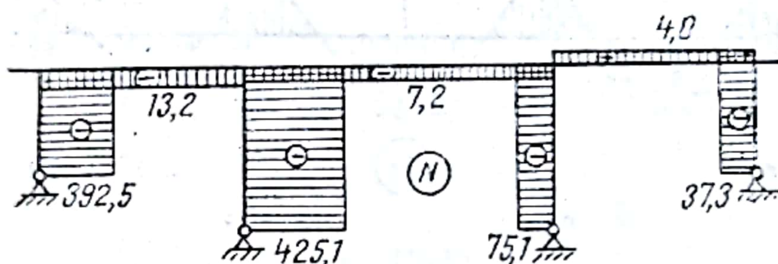


Fig. IV.46

Diagramele T şi N se pot stabili şi pe semistructuri pentru fiecare componentă a încărcării, pornindu-se de la diagramele M corespunzătoare.

2) **Variaţia de temperatură.** Variaţia de temperatură t_0 are, în cazul de faţă, caracter simetric fapt care face ca necunoscutele X_4 şi X_5 să fie nule, iar calculele să fie conduse numai pe semistructura încărcării simetrice. Sistemul de bază şi diagramele unitare sînt cele reprezentate în fig. IV.38, respectiv IV.40, $a-c$. Matricea coeficienţilor este cea stabilită mai înainte pentru această semistructură. Termenii liberi se calculează pe baza relaţiei (IV.43b) şi au expresia

$$EI_0 \Delta_{it} = EI_0 \alpha_t t_0 \Sigma\Omega(n_i)$$

rezultînd

$$EI_0 \Delta_{1t} = 400\,000 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 - 1 \cdot 12 - 1 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9\right) = -2\,340,0$$

$$EI_0 \Delta_{2t} = 400\,000 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \left(\frac{1}{12} \cdot 6 - \frac{1}{12} \cdot 9 + \frac{1}{9} \cdot 9\right) = 90,0$$

$$EI_0 \Delta_{3t} = 400\,000 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} \cdot 9 = 120,0.$$

a evaluarea termenilor liberi s-a considerat $\alpha_t = 10^{-5}$.

Cu aceste valori, după rezolvarea sistemului de ecuaţii, rezultă

$$X_1 = 23,30 \text{ kN}, \quad X_2 = -57,0 \text{ kNm}, \quad X_3 = -11,5 \text{ kNm},$$

iar diagrama de momente este reprezentată în fig. IV.47.

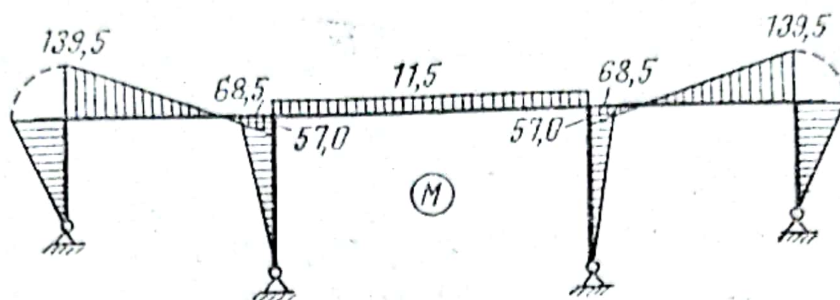


Fig. IV.47

3) **Cedările de reazem.** Deplasările reazemelor fiind simetrice se utilizează la rezolvare semistructura corespunzătoare unei încărcări simetrice.
Termenii liberi au expresia (IV.43c) și rezultă

$$EI_0\Delta_{1c} = -400\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-2} = -1\,600{,}0$$

$$EI_0\Delta_{2c} = 400\,000 \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}8 - \frac{1}{9} \cdot 0{,}4\right) 10^{-2} = 88{,}89$$

$$EI_0\Delta_{3c} = -400\,000 \cdot \frac{1}{9} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-2} = -177{,}78.$$

Se obțin următoarele valori ale necunoscutelor

$$X_1 = 18{,}5 \text{ kN}, \qquad X_2 = -133{,}3 \text{ kNm}, \qquad X_3 = 125{,}9 \text{ kNm}.$$

care conduc la diagrama de momente din fig. IV. 48.

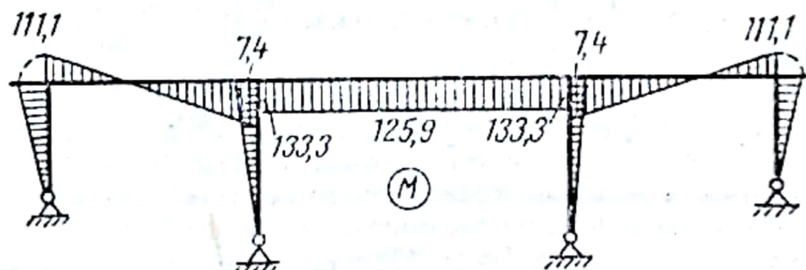


Fig. IV.48

Exemplul de calcul IV.2. Se determină parametrii centrului elastic ai cadrului din fig. IV. 49. Elementele necesare calculului sînt stabilite în tabelul următor, utilizîndu-se sistemul de axe din fig. IV. 50.

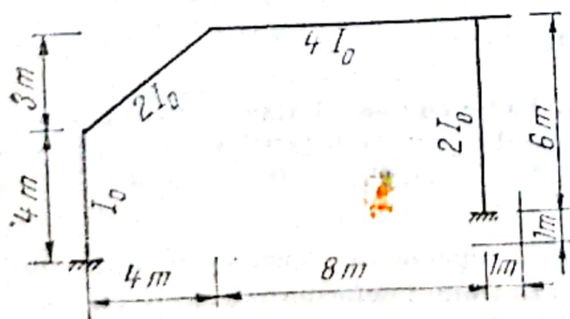


Fig. IV.49

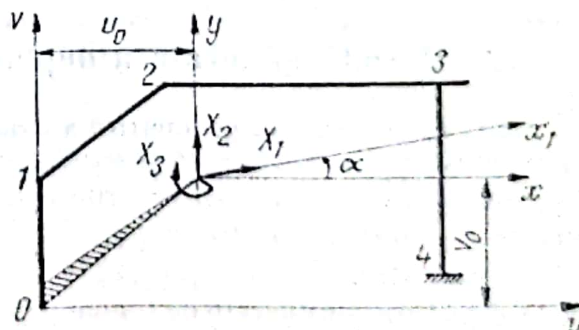


Fig. IV.50

Bara	$W_i = l_i \frac{I_c}{I_i}$	x_i	y_i	$x_i W_i$	$y_i W_i$	$b = x_i - x_0$	$a_i = y_i - y_0$
1	4,0	2,0	0	8,0	0	−2,15	−4,96
2	2,5	5,5	2,0	13,75	5,0	1,35	−2,96
3	2,0	7,0	8,0	14,00	16,0	2,85	3,04
4	3,0	4,0	12,0	12,0	36,0	−0,15	7,04
	11,5			47,75	57,0		

Coordonatele centrului elastic se obţin cu expresiile (IV.58), pe baza datelor din tabel, obţinîndu-se

$$x_0 = \frac{47,75}{11,5} = 4,15 \text{ m}, \qquad y_0 = \frac{57,0}{11,5} = 4,96 \text{ m}.$$

Cu aceste valori se calculează elementele coloanelor 6 şi 7 din tabelul de mai sus, necesare stabilirii momentelor de inerţie I_{xy} şi I_y care rezultă ;

$$I_{xy} = 4(-2,15)(-4,96) + \frac{1}{2}\left[\frac{5^3}{12} + 0,6 \cdot 0,8 + 5(1,35)(-2,96)\right]$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot 8(2,85)(3,04) + \frac{1}{2} \cdot 6(-0,15)(7,04) = 49,326 \text{ m}^4$$

$$I_y = 4 \cdot 4,96^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5(4,96^2 + 0,96 \cdot 4,96 + 0,96^2) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 8^3 + \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 3,04^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7,04^2 = 301,479 \text{ m}^4.$$

Direcţia axei x_1, respectiv a necunoscutei X_1, este dată de relaţia (IV. 54), şi anume

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{I_{xy}}{I_y} = \frac{49,326}{301,479} = 0,1636.$$

Utilizîndu-se deci sistemul de bază din fig. IV. 50 şi necunoscutele X_1, X_2, X_3, coeficienţii secundari sînt nuli, obţinîndu-se trei ecuaţii independente.

3.2. Metoda generală a deplasărilor

3.2.1. Caracterizarea geometrică a structurilor. Cadre cu noduri fixe, cadre cu noduri deplasabile. Poziţia deformată a structurii este definită prin deplasările nodurilor, rotiri şi translaţii (fig. IV. 51, *a*). Rotirile nodurilor sînt independente, fiecare nod avînd o rotire în planul structurii (φ_2, φ_3, φ_4).

Translaţiile nodurilor (u_1, u_2, u_3, v_3, u_4) nu sînt independente deoarece nodurile sînt legate prin bare considerate de lungime invariabilă în timpul deformării. Aceste translaţii (echivalente cu rotiri de bare) depind de un număr de parametri independenţi egal cu

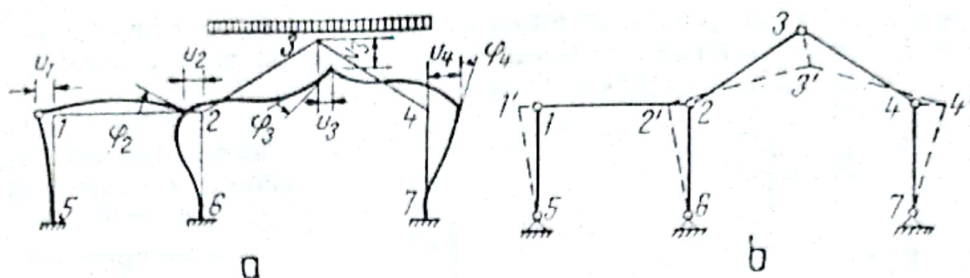
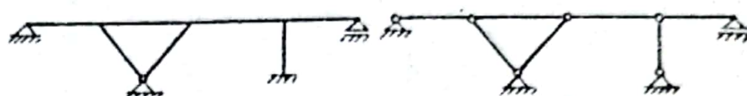


Fig. IV.51



numărul gradelor de libertate al sistemului auxiliar articulat în toate nodurile și încastrările (fig. IV. 51, *b*). Parametrii independenți care definesc translațiile nodurilor reprezintă gradele de libertate elastice ale structurii.

Stabilirea tipului structurii se face cu ajutorul expresiei numărului de grade de libertate pentru sisteme din bare articulate :

$$G_l = 2n - (b + s)$$

$$G_l \begin{cases} \leqslant 0, \text{ cadre cu noduri fixe (fig. IV. 52, } a\text{);} \\ > 0, \text{ cadre cu noduri deplasabile (fig. IV. 52, } b\text{).} \end{cases} \quad \text{(IV.62)}$$

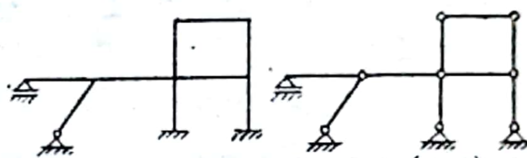


Fig. IV.52

în care : n reprezintă numărul de noduri inclusiv cele la teren, b — numărul de bare și s — numărul echivalent de legături simple la teren.

Din acest număr de grade de libertate trebuie excluse acelea care ar da rotiri de bare fără translații de noduri. În stabilirea tipului structurii, reazemele elastice și tiranții, care prin deformarea lor permit translații de noduri, nu se iau în considerare.

La cadrele cu bare curbe, deoarece prin deformarea acestora distanța dintre noduri nu rămîne invariabilă, fiecare bară curbă aduce în plus un grad de libertate elastică.

3.2.2. Convenție de semne. Deformata structurii fiind caracterizată de rotirile nodurilor și rotirile barelor (translații de noduri), cărora le corespund anumite momente încovoietoare în secțiunile de la capetele barelor, se alege o convenție unitară de semne, și anume : rotirile și momentele de capăt sînt pozitive cînd au sens orar (fig. IV. 53).

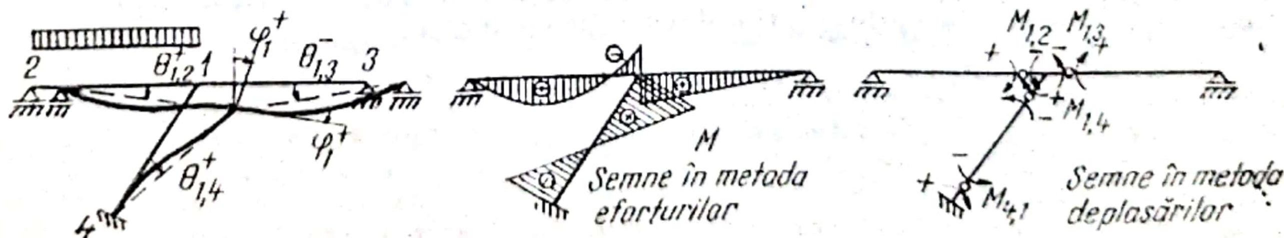


Fig. IV.53

Se observă că pentru momentele încovoietoare egale și de sens contrar pe cele două fețe ale unei secțiuni, semnele diferă în noua convenție. Din acest motiv, în cele ce urmează se va lucra cu momentele de capăt care acționează pe bară.

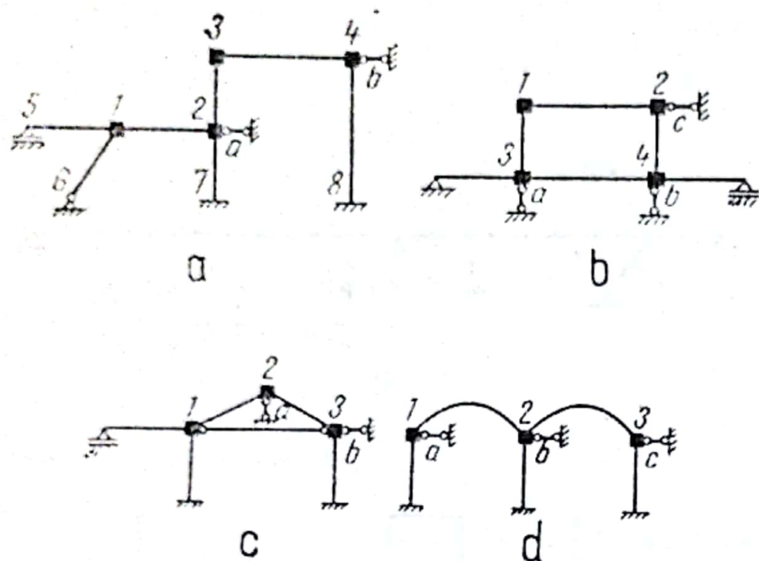


Fig. IV.54

3.2.3. Necunoscute. Sistem de bază. În metoda deplasărilor necunoscutele sînt deci deplasările distincte ale nodurilor:

— necunoscute rotiri de noduri notate cu $Z_1, Z_2, \ldots,$ egale ca număr cu numărul nodurilor rigide;

— necunoscute grade de libertate elastice ale structurii, care caracterizează translațiile nodurilor, notate cu $Z_a, Z_b, \ldots,$ egale ca număr cu numărul gradelor de libertate cinematică ale sistemului auxiliar articulat (formula (IV. 62)].

Sistemul de bază în metoda deplasărilor, sistem la care necunoscutele sînt nule, se obține prin adăugare de legături care să blocheze deplasările distincte ale nodurilor. În fig. IV. 54, $a-d$ sînt date cîteva exemple de sisteme de bază în metoda deplasărilor. Sistemul de bază prezintă două tipuri de bare, bare dublu încastrate și bare încastrate la un capăt și articulate sau simplu rezemate la celălalt capăt.

În cazul rezolvării prin semistructuri a structurilor simetrice încărcate simetric, poate apărea și bara care în axa de simetrie a structurii are încastrare cu translație (ghidaj).

3.2.4. Ecuațiile de condiție în metoda deplasărilor. Ecuațiile de condiție în metoda deplasărilor sînt ecuații de echilibru static și vor fi stabilite pe baza comportării identice dintre structura reală și sistemul de bază încărcat cu deplasările reale ale nodurilor (rotiri și translații sau grade de libertate elastice) și încărcările date (sarcini, variații de temperatură sau cedări de reazeme). Reacțiunile în blocaje din toate aceste încărcări trebuie să fie nule deoarece în structura reală nodurile se pot deplasa (nu există blocaje).

Stabilirea formei acestor ecuații se poate urmări mai clar pe exemplul din fig. IV.55, *a*, care are cinci necunoscute, trei necunoscute rotiri de noduri (Z_1, Z_2, Z_3) și două necunoscute grade de libertate (Z_a, Z_b).

Din încărcarea sistemului de bază din fig. IV.55, *b* cu deplasările nodurilor, în legăturile suplimentare se obțin reacțiuni proporționale cu aceste deplasări arătate în fig. IV,55, *c, d, e, f, g*, iar din încărcarea cu sarcinile date se obțin reacțiunile arătate în fig. IV.55, *h*. Suprapunînd efectele, se obțin ecuațiile de condiție sub forma:

$$\begin{aligned}
R_1 &= r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + 0 + 0 + r_{1b}Z_b + R_{1p} = 0\\
R_2 &= r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + 0 + r_{2a}Z_a + r_{2b}Z_b + R_{2p} = 0\\
R_3 &= 0 + 0 + r_{33}Z_3 + r_{3a}Z_a + r_{3b}Z_b + R_{3p} = 0\\
R_a &= 0 + r_{a2}Z_2 + r_{a3}Z_3 + r_{aa}Z_a + r_{ab}Z_b + R_{ap} = 0\\
R_b &= r_{b1}Z_1 + r_{b2}Z_2 + r_{b3}Z_3 + r_{ba}Z_a + r_{bb}Z_b + R_{bp} = 0.
\end{aligned}$$

Fig. IV.55

Generalizînd, pentru o structură oarecare, ecuaţiile de condiţie în metoda deplasărilor sînt de forma:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1i}Z_i + \ldots + r_{1a}Z_a + r_{1b}Z_b + \ldots + R_{10} = 0 \\
(2) & r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{2i}Z_i + \ldots + r_{2a}Z_a + r_{2b}Z_b + \ldots + R_{20} = 0 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(i) & r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \ldots + r_{ii}Z_i + \ldots + r_{ia}Z_a + r_{ib}Z_b + \ldots + R_{i0} = 0 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a) & r_{a1}Z_1 + r_{a2}Z_2 + \ldots + r_{ai}Z_i + \ldots + r_{aa}Z_a + r_{ab}Z_b + \ldots + R_{a0} = 0 \\
(b) & r_{b1}Z_1 + r_{b2}Z_2 + \ldots + r_{bi}Z_i + \ldots + r_{ba}Z_a + r_{bb}Z_b + \ldots + R_{b0} = 0. \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\qquad (IV.63)
$$

Pentru cadre cu noduri fixe ecuaţiile se vor reduce corespunzător, conţinînd numai necunoscute rotiri de noduri.

3.2.5. **Relaţii fundamentale între momentele de capăt, deplasările secţiunilor de capăt şi încărcările date.** Deoarece în metoda deplasărilor se determină mai întîi deplasările distincte ale nodurilor care definesc deformata structurii, pentru determinarea diagramelor de momente sînt necesare relaţii care să exprime momentele de la capetele barelor în funcţie de deplasările secţiunilor de la capetele barelor (deplasările nodurilor) şi încărcări. Se prezintă aceste relaţii în cazul cel mai general al barei cu încastrări parţiale la capete şi secţiune variabilă, şi apoi se particularizează pentru bare cu alte tipuri de legături la capete ce se pot întîlni în sistemul de bază al metodei deplasărilor.

Se consideră o bară $i-j$ cu secţiune variabilă, lungime l, încastrată elastic la capete. O încastrare elastică este caracterizată prin gradul de încastrare ν definit prin raportul dintre momentul care apare în încastrarea elastică şi momentul care ar apărea dacă încastrarea ar fi perfectă. Rezolvînd această bară prin metoda eforturilor la încărcări cu rotirile secţiunilor de capăt φ_i şi φ_j, rotirea barei θ_{ij} şi sarcinile date, se obţin momentele de la capetele barelor specificate în fig. IV. 56, $a - e$.

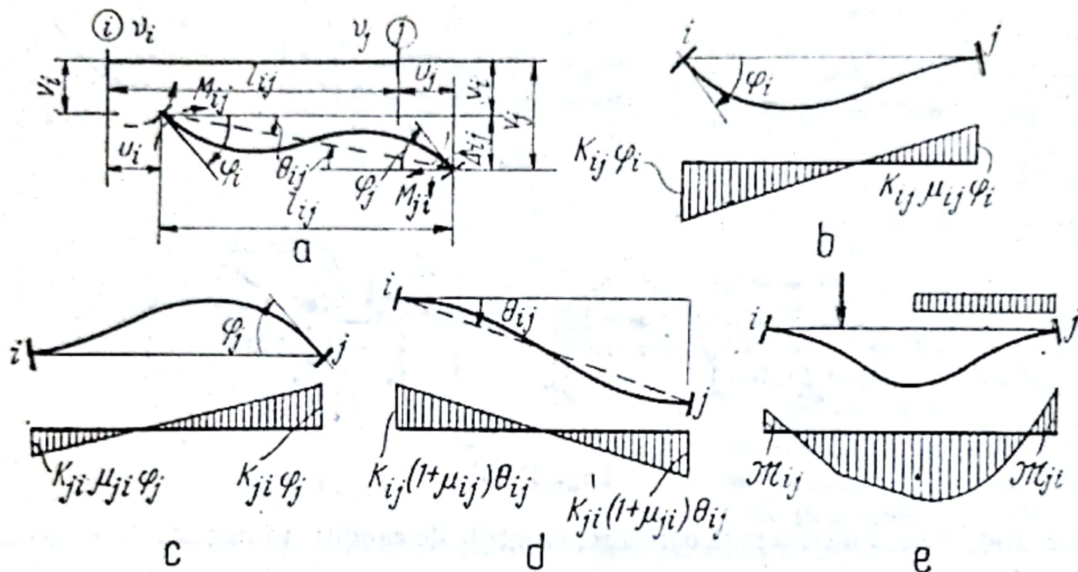


Fig. IV.56

Suprapunînd efectele din toate aceste încărcări se obţin pentru acest caz următoarele expresii pentru momentele de la capetele barei în funcţie de deplasările secţiunilor de capăt şi încărcările date:

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \frac{4EI_0}{l}\,\frac{3c''\nu_i}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\varphi_i + \frac{2EI_0}{l}\,\frac{3c\,\nu_i\nu_j}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\varphi_j - \frac{6EI_0}{l}\,\frac{(2c'' + c\,\nu_j)\nu_i}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\theta_{ij};$$

(IV. 64)

$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \frac{4EI_0}{l}\,\frac{3c'\nu_j}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\varphi_j + \frac{2EI_0}{l}\,\frac{3c\,\nu_i\nu_j}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\varphi_i - \frac{6EI_0}{l}\,\frac{(2c' + c\nu_i)\nu_j}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\theta_{ij}$$

în care: $\mathfrak{M}_{ij}$ şi $\mathfrak{M}_{ji}$ sînt momentele care apar la capete din încărcarea cu sarcinile date avînd expresiile:

$$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{2c''s'm_{ij} - c\nu_j s''m_{ji}}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\nu_i; \quad \mathfrak{M}_{ji} = \frac{2c's''m_{ji} - c\nu_i s'm_{ij}}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\,\nu_j;$$

c, c', c'', s' şi s'' sînt coeficienţi pentru calculul deplasărilor elastice la bare cu secţiune variabilă (v. tabelele IV.17 — IV.21); $m_{ij} = 6\,R_{ij}\,\frac{EI_0}{l_{ij}}$ şi $m_{ji} = 6R_{ji}\,\frac{EI_0}{l_{ij}}$ sînt termeni de încărcare depinzînd de sarcinile date prin reacţiunile pe grinda simplu rezemată R_{ij} şi R_{ji} din încărcarea cu sarcinile elastice $\bar{p} = \frac{M^0}{EI_0}$, M^0 fiind diagrama de momente din sarcinile date pe grinda simplu rezemată (v. tabelele IV.16 şi IV.17); I_0 este momentul de inerţie minim al secţiunilor barei; ν_i şi ν_j sînt gradele de încastrare pentru extremităţile barei.

Relaţiile (IV.64) se pot scrie sub următoarea formă generală:

— pentru bara $i-j$ dublu încastrată:

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + K_{ij}\,\varphi_i + K_{ij}\,\mu_{ij}\,\varphi_j - K_{ij}\,(1 + \mu_{ij})\theta_{ij}$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + K_{ji}\,\varphi_j + K_{ji}\,\mu_{ji}\,\varphi_i - K_{ji}\,(1 + \mu_{ji})\theta_{ij}; \qquad \text{(IV.64a)}$$

— pentru bara $i-j$ încastrată în i şi articulată sau simplu rezemată în j:

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + K_{ij}\,\varphi_i - K_{ij}\,\theta_{ij} \qquad \text{(IV.64b)}$$

în care:

$$K_{ij} = \frac{4\,EI_0}{l}\;\frac{3c''\,\nu_i}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j} \quad \text{sau} \quad K_{ji} = \frac{4\,EI_0}{l}\;\frac{3c'\nu_j}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j} \qquad \text{(IV.65)}$$

se numeşte *rigiditatea barei la încovoiere din rotire de nod* şi reprezintă momentul care apare într-un capăt al barei din rotirea unitară a acestuia;

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{c}{c''}\,\nu_j \quad \text{şi} \quad \mu_{ji} = \frac{1}{2}\,\frac{c}{c'}\,\nu_i \qquad \text{(IV.65a)}$$

se numesc *coeficienţi de transmitere ai momentelor* şi arată că momentul care apare într-un capăt, din rotirea acestuia transmite în celălalt capăt un moment $M_{ji} = M_{ij}\,\mu_{ij}$;

$$K(1 + \mu) = \overline{K} \qquad \text{(IV.65b)}$$

se numeşte *rigiditatea la încovoiere a barei din rotire de bară* şi reprezintă momentul care apare într-un capăt al barei cînd bara este supusă la o rotire unitară.

În practică se lucrează cu rigidităţi convenţionale numite *coeficienţi de rigiditate* ρ care se determină dînd o valoare arbitrară convenabilă pentru rigiditatea secţională EI_0 a barei reper. Relaţiile între momentele de capăt, încărcări şi deplasările secţiunilor de la capetele barei vor avea forma

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\,\varphi_i + \rho_{ij}\,\mu_{ij}\,\varphi_j - \rho_{ij}(1 + \mu_{ij})\,\theta_{ij}$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \rho_{ji}\,\varphi_j + \rho_{ji}\,\mu_{ji}\,\varphi_i - \rho_{ji}(1 + \mu_{ji})\,\theta_{ij}. \qquad \text{(IV.66)}$$

Termenii care intervin în aceste relaţii, $\rho\,\varphi$ şi $\rho\theta$, au însă valori reale deoarece valorile φ şi θ vor rezulta multiplicate cu raportul $(EI)_{real}/(EI)_{conv}$ cînd în sistemul de ecuaţii coeficienţii necunoscutelor se determină pe baza coeficienţilor de rigiditate.

Tabelul IV.11

Expresii pentru rigidități și coeficienți de transmitere

Tipul barei (după legăturile la capete)	Bare cu secțiune variabilă: ρ	Bare cu secțiune variabilă: μ	Bare cu secțiune constantă: ρ	Bare cu secțiune constantă: μ
$\nu_i=1$, $\nu_j<1$; i — j; l	$\rho_{ij} = \frac{4EI_0}{l} \cdot \frac{3c''}{4c'c'' - c^2\nu_j}$	$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \frac{c}{c''} \nu_j$	$\rho_{ij} = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{3}{4-\nu_j}$	$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \nu_j$
	$\rho_{ji} = \frac{4EI_0}{l} \cdot \frac{3c'\nu_j}{4c'c'' - c^2\nu_j}$	$\mu_{ji} = \frac{1}{2} \frac{c}{c'}$	$\rho_{ji} = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{3\nu_j}{4-\nu_j}$	$\mu_{ji} = \frac{1}{2} \nu_i$
$\nu_i=1$, $\nu_j=1$; i — j	$\rho_{ij} = \frac{4EI_0}{l} \cdot \frac{3c''}{4c'c'' - c^2}$	$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \frac{c}{c''}$	$\rho_{ij} = \rho_{ji} = \frac{4EI}{l}$	$\mu_{ij} = \mu_{ji} = \frac{1}{2}$
	$\rho_{ji} = \frac{4EI_0}{l} \cdot \frac{3c'}{4c'c'' - c^2}$	$\mu_{ji} = \frac{1}{2} \frac{c}{c'}$		
$\nu_i=1$, $\nu_j=0$; i — j	$\rho_{ij} = \frac{3EI_0}{l} \cdot \frac{1}{c'}$	$\mu_{ij} = 0$	$\rho_{ij} = \frac{3EI}{l}$	$\mu_{ij} = 0$
$\nu_i=1$, $\nu_{i'}=1$; i — s — i'	$\rho_{is} = \rho_{ii'}(1 - \mu_{ii'})$	$\mu_{is} = -1$	$\rho_{is} = \frac{1}{2} \rho_{ii'}$	$\mu_{is} = -1$

I_0 este momentul de inerție minim pe bară.

Relațiile generale (IV.65), (IV.65a) și (IV.65b) sînt valabile pentru orice tip de bară întîlnit în sistemul de bază al metodei deplasărilor indiferent de legăturile de la capete, coeficienții de rigiditate și coeficienții de transmitere urmînd să se determine pentru fiecare caz particular conform tabelului IV. 11.

Pentru bara încastrată în capătul i și articulată sau simplu rezemată în j, momentul în capătul i va avea expresia :

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\varphi_i - \rho_{ij}\,\theta_{ij}. \tag{IV.66a}$$

La cadre cu noduri fixe la care rotirile barelor $\theta = 0$, expresiile momentelor de capăt vor fi :

– pentru bare dublu încastrate

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\varphi_i + \rho_{ij}\mu_{ij}\varphi_j \\ M_{ji} &= \mathfrak{M}_{ji} + \rho_{ji}\varphi_j + \rho_{ji}\mu_{ji}\varphi_i ; \end{aligned} \tag{IV.66b}$$

– pentru bara încastrată și articulată

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\,\varphi_i. \tag{IV.66c}$$

Pe baza acestor relații rezultă și momentele de capăt din deplasări unitare necesare în calculul coeficienților necunoscutelor, pentru tipurile de bare întîlnite în sistemul de bază (tabelul IV.12)

Tabelul IV.12

Momente de capăt din deplasări unitare

Tipul de bară. Încărcarea	Momente	Tipul de bară. Încărcarea	Momente
i, $\varphi_i = 1$, j	ρ_{ij}, $\rho_{ij}\mu_{ij}$	$\varphi_i = 1$, i, s	ρ_{is}
i, $\varphi_j = 1$, j	$\rho_{ji}\mu_{ji}$, ρ_{ji}	$\varphi_i = 1$, i, j	ρ_{ij}
i, $\theta_{ij} = 1$, j	$-\rho_{ji}(1+\mu_{ji})$, $-\rho_{ij}(1+\mu_{ij})$	i, j, $\theta_{ij} = 1$	$-\rho_{ij}$

$\rho_{ij}\,\mu_{ij} = \rho_{ji}\,\mu_{ji}$ pe baza reciprocității forțelor din deplasări unitare.

3.2.6. **Momente de încastrare perfectă.** Momentele care se obțin la capetele barelor sistemului de bază (și în cazul încastrării parțiale la teren) din încărcarea cu sarcini date, variații de temperatură sau cedări de reazeme, se numesc *momente de încastrare perfectă* $\mathfrak{M}$.

3.2.6.1. **Încărcare cu sarcini.** Expresiile momentelor de încastrare perfectă pentru fiecare tip de bară ce se poate întîlni în sistemul de bază se obțin prin particularizări în expresiile date în paragraful anterior pentru bara cu secțiune variabilă și încastrări parțiale la capete. Aceste expresii sînt date în tabelul IV.13.

Valorile termenilor de încărcare și ale momentelor de încastrare perfectă la bare cu secțiune constantă și legături perfecte la capete pentru cîteva cazuri uzuale de încărcare cu sarcini se dau mai departe în tabelul IV.16.

3.2.6.2. **Încărcare cu variații de temperatură.** Variațiile de temperatură față de temperatura de realizare a structurii intervin sub două forme:

1) *Diferența de temperatură între fețe* ($\Delta t^0 = t_i^0 - t_s^0$). Expresiile momentelor de încastrare perfectă pentru diferite cazuri de bare întîlnite în sistemul de bază sînt date în tabelul IV.14, în care, față de celelalte tabele, s-a mai notat cu h înălțimea secțiunilor barelor și cu α coeficientul de dilatare termică liniară a materialului.

2) *Variația temperaturii în axele barelor* $\left(t^0 = \dfrac{t_i^0 + t_s^0}{2}\right)$. Momentele de încastrare provin din rotirile barelor sistemului de bază și se calculează cu termenii corespunzători din relațiile:

— pentru o bară dublu încastrată $i-j$

$$\mathfrak{M}_{ij} = -K_{ij}(1 + \mu_{ij})\psi_{ij}^{t^0}; \quad \mathfrak{M}_{ji} = -K_{ji}(1 + \mu_{ji})\psi_{ij}^{t^0}; \qquad \text{(IV.67a)}$$

— pentru o bară încastrată în i și articulată în j

$$\mathfrak{M}_{ij} = -K_{ij}\cdot\psi_{ij}^{t^0}. \qquad \text{(IV.67b)}$$

În aceste expresii rigiditățile K se calculează cu formulele pentru ρ din tabelul IV.11 în care se introduc valori reale pentru EI_0.

La bare cu secțiune constantă cu legături perfecte momentele de încastrare perfectă din variația temperaturii în axele barelor vor fi:

— pentru bara dublu încastrată $i-j$:

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = -\frac{6EI}{l}\psi_{ij}^{t^0}$$

— pentru bara încastrată și articulată;

$$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{3EI}{l}\psi_{ij}^{t^0}.$$

Rotirile barelor în sistemul de bază din încărcarea cu variația temperaturii în axa barelor se determină pe sistemul auxiliar articulat în toate nodurile și încastrările sistemului de bază (cu gradele de libertate elastice blocate), deci pe un sistem invariabil format numai din bare articulate (gen grindă cu zăbrele). Aceste rotiri se pot determina fie pe baza

Tabelul IV.13

Expresiile momentelor de incastrare perfectă din incărcare cu sarcini oarecare

Tipul barei	Bare cu secțiune variabilă	Bare cu secțiune constantă
$\nu_i=1$, $\nu_j<1$; i, j; l	$\mathfrak{M}_{ij} = -\dfrac{2c''s'm_{ij} - c\nu_j s''m_{ji}}{4c'c'' - c^2\nu_j}$ $\mathfrak{M}_{ji} = \dfrac{2c's''m_{ji} - cs'm_{ij}}{4c'c'' - c^2\nu_j}\,\nu_j$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\dfrac{2m_{ij} - \nu_j m_{ji}}{4 - \nu_j}$ $\mathfrak{M}_{ji} = \dfrac{2m_{ji} - m_{ij}}{4 - \nu_j}\,\nu_j$
$\nu_i=1$, $\nu_j=1$; i, j; I_x; x, x'	$\mathfrak{M}_{ij} = -\dfrac{2c''s'm_{ij} - cs''m_{ji}}{4c'c'' - c^2}$ $\mathfrak{M}_{ji} = \dfrac{2c's''m_{ji} - cs'm_{ij}}{4c'c'' - c^2}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\dfrac{2m_{ij} - m_{ji}}{3}$ $\mathfrak{M}_{ji} = \dfrac{2m_{ji} - m_{ij}}{3}$
$\nu_i=1$, $\nu_j=0$; i, j	$\mathfrak{M}_{ij} = -\dfrac{s'm_{ij}}{2c'}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\dfrac{m_{ij}}{2}$
$\nu_i=1$, $\nu_{i'}=1$; i, s, i'; $l/2$, $l/2$	$\mathfrak{M}_{is} = \mathfrak{M}_{ii'}$	$\mathfrak{M}_{is} = \mathfrak{M}_{ii'}$

Notă.

$$c' = \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x} x'^2\,dx; \qquad c'' = \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x} x^2\,dx; \qquad c = \frac{6}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x} xx'\,dx;$$

$$s' = \frac{\int_0^l \frac{I_0}{I_x} M^0 x'\,dx}{\int_0^l M^0 x'\,dx}; \qquad s'' = \frac{\int_0^l \frac{I_0}{I_x} M^0 x\,dx}{\int_0^l M^0 x\,dx};$$

I_0 – moment de inerție minim al barei;
M^0 – momente încovoietoare pe bara simplu rezemată;

$$m_{ij} = \frac{6}{l^2}\int_0^l M^0 x'\,dx; \qquad m_{ji} = \frac{6}{l^2}\int_0^l M^0 x\,dx;$$

$$s'm_{ij} = \frac{6}{l^2}\int_0^l \frac{I_0}{I_x} M^0 x'\,dx; \qquad s''m_{ji} = \frac{6}{l^2}\int_0^l \frac{I_0}{I_x} M^0 x\,dx$$

Tabelul IV.14

Expresiile momentelor de încastrare perfectă din $\Delta t^0 = t_i^0 - t_s^0 > 0$

Tipul barei	Bare cu secțiune variabilă	Bare cu secțiune constantă
$\nu_i<1$, $\nu_j<1$, t_s^0, t_i^0, i, j, x, x', l	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{2c''\int_0^l x'/h\,dx - c\nu_j\int_0^l x/h\,dx}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\nu_i$ $\mathfrak{M}_{ji} = +\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{2c'\int_0^l x/h\,dx - c\nu_i\int_0^l x'/h\,dx}{4c'c'' - c^2\nu_i\nu_j}\nu_j$	$\mathfrak{M}_{ij} = -3EI\cdot\frac{\alpha\Delta t}{h}\times$ $\times\frac{2-\nu_j}{4-\nu_i\nu_j}\nu_i$ $\mathfrak{M}_{ji} = +3EI\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{h}\times$ $\times\frac{2-\nu_i}{4-\nu_i\nu_j}\nu_j$
$\nu_i=1$, $\nu_j<1$, t_s^0, t_i^0, i, j	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{2c''\int_0^l x'/h\,dx - c\nu_j\int_0^l x/h\,dx}{4c'c'' - c^2\nu_j}$ $\mathfrak{M}_{ji} = +\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{2c'\int_0^l x/h\,dx - c\int_0^l x'/h\,dx}{4c'c'' - c^2\nu_j}\nu_j$	$\mathfrak{M}_{ij} = -3EI\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{h}\times$ $\times\frac{2-\nu_j}{4-\nu_j}$ $\mathfrak{M}_{ji} = +3EI\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{h}\times$ $\times\frac{1}{4-\nu_j}\nu_j$

Tabelul IV.14 (continuare)

Tipul barei	Bare cu secțiune variabilă	Bare cu secțiune constantă
$\nu_i=1$ t_s^o $\nu_j=1$ i t_i^o j	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{2c''\int_0^l x'/h\,dx - c\int_0^l x/h\,dx}{4c'c''-c^2}$ $\mathfrak{M}_{ji} = +\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{2c'\int_0^l x/h\,dx - c\int_0^l x'/h\,dx}{4c'c''-c^2}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -EI\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{h}$ $\mathfrak{M}_{ji} = +EI\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{h}$
$\nu_i=1$ t_s^o $\nu_j=0$ i t_i^o j	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{3EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{\int_0^l x'/h\,dx}{c'}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{3}{2}EI\frac{\alpha\Delta t^0}{h}$
$\nu_i=1$ t_s^o s $\nu_{i'}=1$ i t_i^o i' $l/2$ $l/2$	$\mathfrak{M}_{is} = \mathfrak{M}_{ii'} = -\frac{6EI_0}{l}\cdot\frac{\alpha\Delta t^0}{l}\times$ $\times\frac{\int_0^l x/h\,dx}{2c''+c}$	$\mathfrak{M}_{is} = \mathfrak{M}_{ii'} = EI\frac{\alpha\Delta t^0}{h}$

Observație. Semnele se pot stabili și pe baza faptului că momentele întind fibra mai rece.

configuraţiei pe care o ia sistemul articulat cînd barele se alungesc cu $\Delta l = \alpha l t^\circ$ (se poate folosi şi epura Williot), fie cu formula Maxwell - Mohr pentru sisteme articulate

$$\theta_{ij} = \sum \alpha t^0 \int n\,dx = \sum_k \alpha t_k^0 n_k l_k \qquad \text{(IV.68)}$$

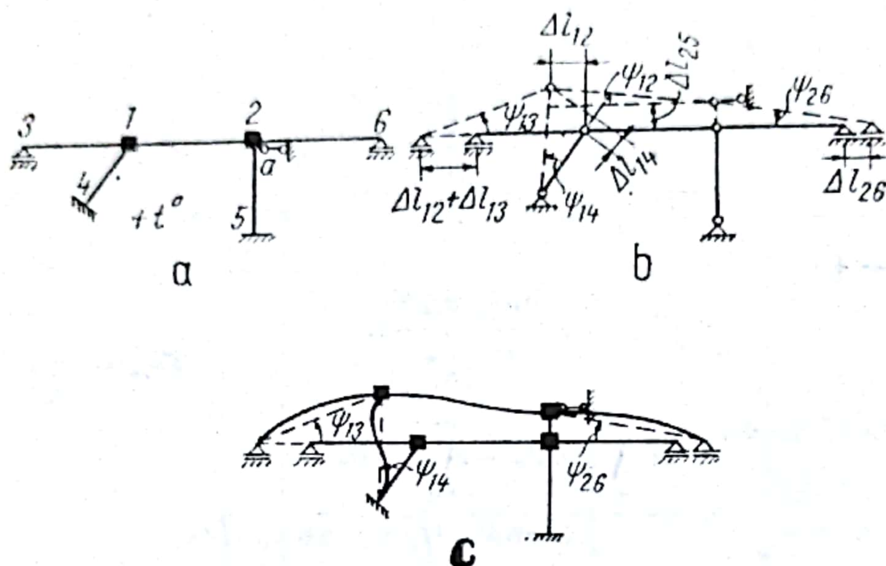


Fig. IV.57

în care k este o bară oarecare a sistemului iar n_k este efortul axial în barele sistemului articulat din încărcarea virtuală pentru rotirea barei (un cuplu unitar format din forţe $1/l_{ij}$ la capetele barei $i-j$ şi normale pe bară).

În fig. IV. 57, *a*—c, se exemplifică efectul variaţiei temperaturii în axele barelor asupra sistemului de bază, prezentîndu-se configuraţia sistemului auxiliar articulat al sistemului de bază (din alungirea barelor) pe care se determină rotirile barelor (fig. IV. 57, *b*) şi deformarea barelor sistemului de bază (fig. IV. 57, *c*) corespunzător acestor rotiri.

3.2.6.3. **Încărcare cu cedări de reazeme date.** Momentele de încastrare perfectă rezultate din acţiunea cedărilor de reazeme date se determină corespunzător efectului diferit al celor două tipuri de cedări asupra sistemului de bază :

1) Cedările de reazeme rotiri sînt echivalente cu rotiri ale capetelor de bară unde are loc cedarea. Dacă cedează un capăt i al barei $i-j$ printr-o rotire φ_i, se deformează numai această bară, momentele de încastrare obţinîndu-se cu termenii respectivi din relaţiile fundamentale :

— pentru bare dublu încastrate :

$$\mathfrak{M}_{ij} = K_{ij}\varphi_i\,;\ \mathfrak{M}_{ji} = K_{ji}\mu_{ji}\varphi_i\,; \qquad \text{(IV.69a)}$$

— pentru bare încastrate şi articulate :

$$\mathfrak{M}_{ij} = K_{ij}\varphi_i. \qquad \text{(IV.69b)}$$

2) Cedările de reazeme translaţii au ca efect asupra sistemului de bază translaţii de noduri care sînt echivalente cu rotiri de bare (θ_{ij}). Momentele de încastrare perfectă se calculează cu termenii corespunzători de la rotiri de bare din relaţiile fundamentale stabilite anterior :

— pentru bare dublu încastrate :

$$\mathfrak{M}_{ij} = - K_{ij}(1 + \mu_{ij})\theta_{ij} ;$$
$$\mathfrak{M}_{ji} = - K_{ji}(1 + \mu_{ji})\theta_{ij} ; \qquad (IV.70a)$$

— pentru bare încastrate şi articulate :

$$\mathfrak{M}_{ij} = - K_{ij}\theta_{ij}. \qquad (IV.70b)$$

Determinarea rotirilor de bare θ_{ij} se face pe baza configuraţiei sistemului articulat al sistemului de bază la care se impun cedările de reazeme date.

În expresiile date pentru momente de încastrare perfectă rotirile φ_i şi θ_{ij} se introduc cu semnul lor, rigidităţile K se determină pe baza expresiilor din tabelul IV.11 în care pentru EI_0 se ia valoarea reală, coeficienţii de transmitere μ se determină cu acelaşi tabel.

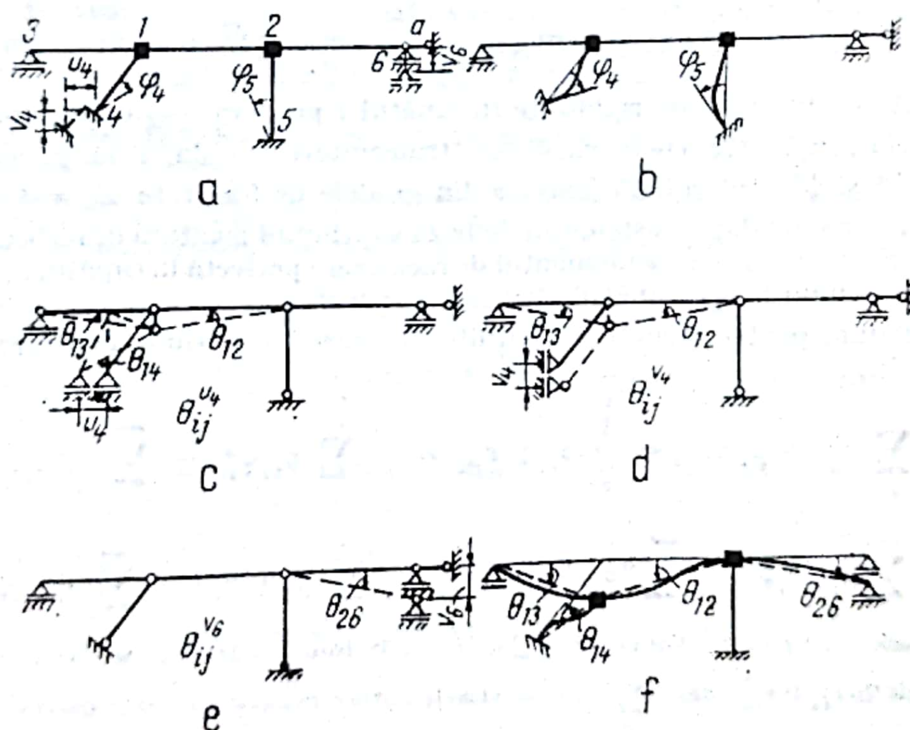


Fig. IV.58

În fig. IV.58, *a* — *f* se exemplifică efectul cedărilor de reazeme asupra sistemului de bază, cedări tip rotiri în fig. IV. 58, *b* şi cedări translaţii în fig. IV. 58, *f*. În fig. IV. 58 *c*, *d* şi *e* se arată determinarea rotirilor de bare din fiecare cedare translaţie.

3.2.7. Expresiile coeficienților și termenilor liberi din ecuațiile de condiție. Pentru o structură oarecare, expresiile tip ale coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi din ecuațiile de condiție au forma următoare:

$$r_{ii} = \sum_j \rho_{ij} = \rho_i$$

$$r_{ij} = r_{ji} = \rho_{ij}\mu_{ij} = \rho_{ji}\mu_{ji}$$

(numai dacă cele două noduri sînt legate printr-o bară încastrată în noduri, în rest, sînt nuli).

$$r_{ia} = r_{ai} = -\overset{\vdash\circ}{\sum_j} \rho_{ij}\psi_{ij}^a - \overset{\vdash\dashv}{\sum_j} \rho_{ij}(1 + \mu_{ij})\psi_{ij}^a$$

$$r_{ab} = r_{ba} = \overset{\vdash\circ}{\sum} \rho_{ij}\psi_{ij}^a\psi_{ij}^b + \overset{\vdash\dashv}{\sum} [\rho_{ij}(1 + \mu_{ij}) + \rho_{ji}(1 + \mu_{ji})]\psi_{ij}^a\psi_{ij}^b$$

$$r_{aa} = \overset{\vdash\circ}{\sum} \rho_{ij}(\psi_{ij}^a)^2 + \overset{\vdash\dashv}{\sum} [\rho_{ij}(1 + \mu_{ij}) + \rho_{ji}(1 + \mu_{ji})](\psi_{ij}^a)^2$$

$$R_{ip} = \sum_j \mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i$$

$$R_{ap} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi_{ij}^a - \sum p\delta_p^a - \sum M\psi^a \qquad \text{(IV.71)}$$

în care: ρ_{ij} este coeficientul de rigiditate în capătul i pe bara $i-j$ determinat conform tabelului IV.11; μ_{ij} este coeficientul de transmitere de la i la j conform tabelului IV.11; ψ_{ij}^a și ψ_{ij}^b sînt rotirile barelor din gradele de libertate $Z_a = 1$ și respectiv $Z_b = 1$ pe sistemul articulat al sistemului de bază suprimînd legătura a, respectiv b; ele se introduc cu semnul lor; $\mathfrak{M}_{ij}$ este momentul de încastrare perfectă în capătul i pe bara $i-j$; se introduce cu semnul lui pe capăt de bară (nu pe nod).

Particularizînd, pentru structuri alcătuite din bare cu secțiune constantă expresiile coeficienților sînt:

$$r_{ii} = \sum_j \rho_{ij} = \rho_i;\; r_{ij} = \frac{1}{2}\rho_{ij};\; r_{ia} = -\overset{\vdash\circ}{\sum_j} \rho_{ij}\psi_{ij}^a - \overset{\vdash\dashv}{\sum_j} \frac{3}{2}\rho_{ij}\psi_{ij}^a;$$

$$r_{ab} = \overset{\vdash\circ}{\sum} \rho_{ij}\psi_{ij}^a\psi_{ij}^b + \overset{\vdash\dashv}{\sum} 3\rho_{ij}\psi_{ij}^a\psi_{ij}^b;\; r_{aa} = \overset{\vdash\circ}{\sum} \rho_{ij}(\psi_{ij}^a)^2 + \overset{\vdash\dashv}{\sum} 3\rho_{ij}(\psi_{ij}^a)^2. \qquad \text{(IV.71a)}$$

Observații. 1) Semnele ($\vdash\circ$) și ($\vdash\dashv$) indică faptul că $\sum$ se referă la bare încastrate și articulate, respectiv dublu încastrate.

2) La coeficienții de tip r_{ii} și r_{ia} sumele $\sum_j$ se referă numai la barele care sînt încastrate în nodul i.

3) Indicii coeficienților și termenilor liberi corespund nodurilor (i sau $j = 1, 2, 3, \ldots$) și gradelor de libertate ($a, b, c, \ldots$).

4) La încărcarea cu variații de temperatură și cedări de reazeme, termenii liberi R_{a_0} vor conține numai lucrul mecanic al momentelor de încastrare perfectă corespunzătoare

$$R_{at} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij}^t + \mathfrak{M}_{ji}^t)\psi_{ij}^a \quad \text{respectiv} \quad R_{a\Delta_r} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij}^{\Delta r} + \mathfrak{M}_{ji}^{\Delta r})\psi_{ij}^a.$$

– Efectul tiranţilor la cadre cu tiranţi apare numai în coeficienţii corespunzători gradelor de libertate pentru care se produc deplasări relative ale articulaţiilor de capăt, deoarece numai din aceste încărcări pe sistemul de bază apar eforturi în tiranţi. La coeficienţii respectivi se mai adaugă corecţia din tirant care are forma: $r^t_{ab} = -\frac{E_t A_t}{l_t}\Delta l^a_t \Delta l^b_t \frac{(EI)^c}{(EI)^r}$ în care E_t, A_t, l_t sînt caracteristicile geometrice ale tirantului, Δl^a_t şi Δl^b_t sînt alungirile tirantului din $Z_a = 1$ şi respectiv $Z_b = 1$.

3.2.8. Obţinerea diagramei finale de momente încovoietoare. După calculul coeficienţilor şi termenilor liberi cu expresiile anterioare se poate rezolva sistemul ecuaţiilor de condiţie şi afla necunoscutele. Avînd valorile necunoscutelor, Z_i, Z_a, se cunosc rotirile nodurilor $\varphi_i = Z_i$ şi se pot determina rotirile reale ale barelor prin suprapunerea rotirilor corespunzătoare gradelor de libertate:

$$\theta_{ij} = \psi^a_{ij} Z_a + \psi^b_{ij} Z_b + \ldots \quad \text{(IV.72)}$$

Valorile totale ale momentelor de la capetele barelor se obţin cu ajutorul relaţiilor fundamentale stabilite la pct. 3.2.5.

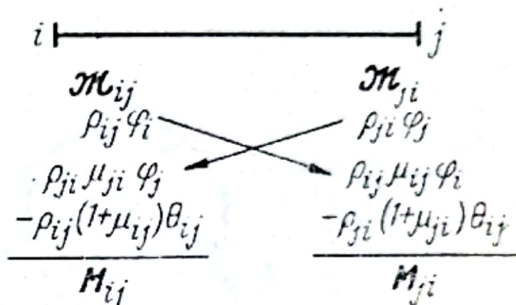


Fig. IV.59

Calculul cu aceste relaţii se poate conduce şi direct pe schema cadrului efectuînd la capetele fiecărei bare operaţiile indicate în fig. IV.59. Între momentele de capăt, diagrama de momente încovoietoare pe fiecare bară variază corespunzător încărcării date.

În metoda deplasărilor, verificarea diagramei de momente se face pe baza echilibrului static, verificînd echilibrul nodurilor sau a părţii de structură.

Exemplul de calcul IV.3. Pentru cadrul din fig. IV. 60, *a* se determină diagrama de momente încovoietoare folosind metoda generală a deplasărilor.

1) *Necunoscute.* Cadrul din fig. IV. 60, *a* este cadru cu noduri deplasabile cu două grade de libertate elastice [pe structura auxiliară articulată $G_l = 2n - (b + s) = 2 \times 8 - (7 + 7) = 2$]. În metoda deplasărilor, structura prezintă cinci necunoscute, trei necunoscute rotiri de noduri Z_1, Z_2, Z_3 şi două necunoscute grade de libertate elastice Z_a şi Z_b.

2) *Momentele de încastrare perfectă* (fig. IV. 60, *b*):

$$\mathfrak{M}_{15} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right)60\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)60\cdot 12 = 240\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{24} = -\frac{3}{16}\cdot 60\cdot 8 = -90\ \text{kNm}; \qquad \mathfrak{M}_{34} = +\frac{20\cdot 8^2}{8} = +160\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{38} = -\frac{20\cdot 2^2}{2} = -40\ \text{kNm}.$$

3) *Coeficienţii de rigiditate* (fig. IV. 60, *c*) (pentru $EI = 1{,}5$):

$$\rho_{15} = \frac{3E\cdot 4I}{12} = \frac{3\cdot 4\cdot 1{,}5}{12} = 1{,}5; \qquad \rho_{12} = \frac{4E\cdot 4I}{12} = \frac{4\cdot 4\cdot 1{,}5}{12} = 2;$$

$$\rho_{24} = \frac{3E\cdot 3{,}2I}{10} = \frac{3\cdot 3{,}2\cdot 1{,}5}{10} = 1{,}44 = \rho_{34}$$

$$\rho_{16} = \rho_{27} = \rho_{38} = \frac{4EI}{6} = \frac{4\cdot 1{,}5}{6} = 1.$$

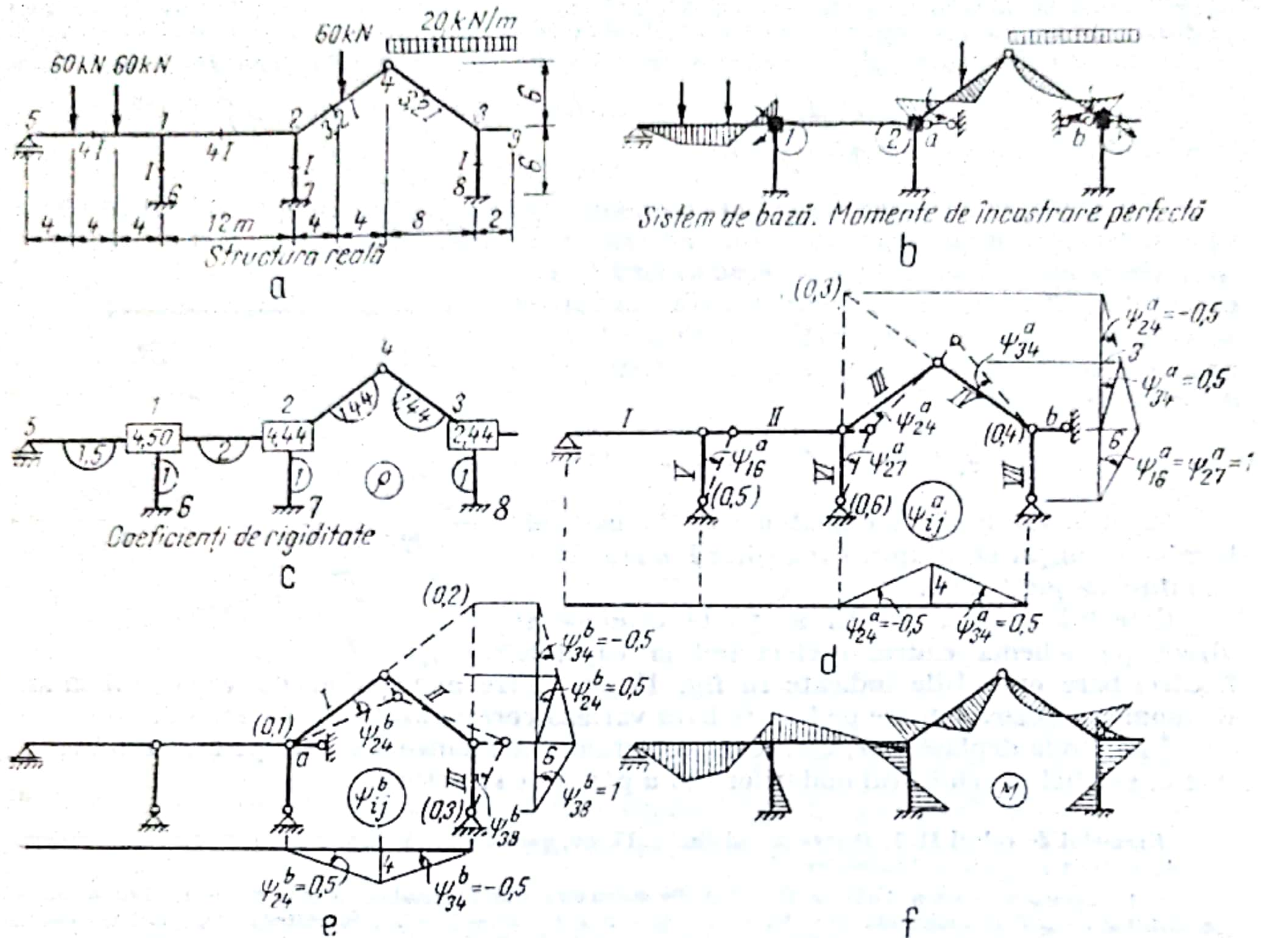


Fig. IV.60

4) Studiile cinematice pentru determinarea rotirilor barelor din deplasări unitare corespunzătoare gradelor de libertate Z_a ($\psi_{16}^{a} = 1$) și Z_b($\psi_{38}^{b} = 1$) sînt date în fig. IV.60, *d* și *e*.

5) Calculul coeficienților și termenilor liberi din ecuațiile de condiție

$$r_{11} = \sum_{1} \rho = 4{,}50; \quad r_{22} = \sum_{2} \rho = 4{,}44; \quad r_{33} = \sum_{3} \rho = 2{,}44; \quad r_{12} = \frac{1}{2}\rho_{12} = 1; \quad r_{13} = 0; \quad r_{31} = 0;$$

$$r_{1a} = -\frac{3}{2}\overset{I}{\sum_{1}} \rho\psi^{a} - \overset{\vdash\circ}{\sum_{1}} \rho\psi^{a} = -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 = -1{,}5; \quad r_{1b} = -\frac{3}{2}\overset{I}{\sum_{1}} \rho\psi^{b} - \overset{\vdash\circ}{\sum_{1}} \rho\psi^{b} = 0;$$

$$r_{2a} = -\frac{3}{2}\overset{I}{\sum_{2}} \rho\psi^{a} - \overset{\vdash\circ}{\sum_{2}} \rho\psi^{a} = -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 - 1{,}44(-0{,}5) = -0{,}78;$$

$$r_{2b} = -\frac{3}{2}\overset{I}{\sum_{2}} \rho\psi^{b} - \overset{\vdash\circ}{\sum_{2}} \rho\psi^{b} = -1{,}44\cdot 0{,}5 = -0{,}72;$$

$$r_{3a} = -\frac{3}{2}\overset{I}{\sum_{3}} \rho\psi^{a} - \overset{\vdash\circ}{\sum_{3}} \rho\psi^{a} = -1{,}44\cdot 0{,}5 = -0{,}72; \quad r_{3b} = -\frac{3}{2}\overset{I}{\sum_{3}} \rho\psi^{b} = -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 - 1{,}44(-0{,}5) = -0{,}78;$$

$$r_{aa} = 3\overset{I}{\sum} \rho(\psi^{a})^2 + \overset{\vdash\circ}{\sum} \rho(\psi^{a})^2 = 3(1\cdot 1^2 + 1\cdot 1^2) + [1{,}44(-0{,}5)^2 + 1{,}44\cdot 0{,}5^2] = 6{,}72;$$

$$r_{bb} = 3\sum^{-}\rho(\psi^b)^2 + \sum^{\text{I–O}}\rho(\psi^b)^2 = 3\cdot1\cdot1^2 + 1{,}44\cdot0{,}5^2 + 1{,}44(-0{,}5)^2 = 3{,}72;$$

$$r_{ab} = 3\sum^{-}\rho(\psi^a)(\psi^b) + \sum^{\text{I–O}}\rho\psi^a\psi^b = 1{,}44(-0{,}5)\cdot0{,}5 + 1{,}44\cdot0{,}5(-0{,}5) = -0{,}72;$$

$$R_{1p} = \sum_1 \mathfrak{M} = 240; \quad R_{2p} = \sum_2 \mathfrak{M} = -90; \quad R_{3p} = \sum_3 \mathfrak{M} = 160 - 40 = 120;$$

$$R_{ap} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi^a - \sum P\delta_p^a = -(-90+0)(-0{,}5) - (160+0)(0{,}5) - \left(-60\cdot2 - 20\cdot\frac{4\cdot8}{2}\right) = +315$$

$$R_{bp} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi^b - \sum P\delta_p^b = -(-90+0)(0{,}5) - (0+160)(-0{,}5) - \left(60\cdot2 + 20\cdot\frac{4\cdot8}{2}\right) = -315.$$

Observație. **Indicii afectați semnului $\sum$ reprezintă numărul nodului.**

6) Determinarea necunoscutelor din sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} 4{,}50\,Z_1 + Z_2 - 1{,}5\,Z_a + 240 = 0 \\ Z_1 + 4{,}444\,Z_2 - 0{,}78\,Z_a - 0{,}72\,Z_b - 90 = 0 \\ 2{,}44\,Z_3 - 0{,}72\,Z_a - 0{,}78\,Z_b + 120 = 0 \\ -1{,}5\,Z_1 - 0{,}78\,Z_2 - 0{,}72\,Z_3 + 6{,}72\,Z_a - 0{,}72\,Z_b + 315 = 0 \\ -0{,}72\,Z_2 - 0{,}78\,Z_3 - 0{,}72\,Z_a + 3{,}72\,Z_b - 315 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} Z_1 &= -81{,}35 \\ Z_2 &= 40{,}29 \\ Z_3 &= -42{,}91 \\ Z_a &= -57{,}20 \\ Z_b &= 72{,}41. \end{aligned}$$

7) Rotirile reale ale barelor ($\theta_{ij} = \psi_{ij}^a Z_a + \psi_{ij}^b Z_b$) vor fi

$$\theta_{15} = \theta_{12} = 0; \quad \theta_{16} = 1\cdot(-57{,}20) = -57{,}20; \quad \theta_{27} = 1\cdot(-57{,}20) = -57{,}20;$$

$$\theta_{38} = 1\cdot72{,}41 = 72{,}41; \quad \theta_{24} = (-0{,}5)(-57{,}20) + 0{,}5\cdot72{,}41 = 64{,}8;$$

$$\theta_{34} = 0{,}5(-57{,}20) - 0{,}5\cdot72{,}41 = -64{,}8;$$

8) Calculul momentelor încovoietoare la capetele barelor [după formulele (IV. 66)]

$$M_{15} = 240 + 1{,}5(-81{,}35) - 1{,}5\cdot0 = 117{,}96 \text{ kNm}$$

$$M_{16} = 1\cdot(-81{,}35) - \frac{3}{2}\cdot1\cdot(-57{,}20) = +4{,}45 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 2\cdot(-81{,}35) + \frac{1}{2}\cdot2\cdot40{,}29 = -122{,}41 \text{ kNm}$$

$$M_{27} = 1\cdot40{,}29 - \frac{3}{2}\cdot1\cdot(-57{,}20) = +126{,}08 \text{ kNm}$$

$$M_{24} = -90 + 1{,}44\cdot40{,}29 - 1{,}44\cdot64{,}8 = -125{,}30 \text{ kNm}$$

$$M_{38} = 1\cdot(-42{,}91) - \frac{3}{2}\cdot1\cdot72{,}41 = -151{,}52 \text{ kNm}$$

$$M_{61} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot(-81{,}35) - \frac{3}{2}\cdot1\cdot(-57{,}20) = +45{,}1 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 2\cdot40{,}29 + \frac{1}{2}\cdot(-81{,}35) = -0{,}78 \text{ kNm}$$

$$M_{72} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot40{,}29 - \frac{3}{2}\cdot1\cdot(-57{,}20) = 105{,}95 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 160 + 1{,}44\cdot(-42{,}91) - 1{,}44\cdot(-64{,}8) = 191{,}52 \text{ kNm}$$

$$M_{83} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot(-49{,}21) - \frac{3}{2}\cdot1\cdot72{,}41 = -130{,}06 \text{ kNm}.$$

9) Verificări

$$\sum_{1} M = +117{,}96 + 4{,}45 - 124{,}41 = 0$$

$$\sum_{2} M = -0{,}78 + 126{,}08 - 125{,}30 = 0$$

$$\sum_{3} M = -40 + 191{,}52 - 151{,}52 = 0$$

Diagrama M este dată în fig. IV. 60,*f*.

Exemplul de calcul IV.4. Pentru cadrul din fig. IV.61, *a* se determină diagrama de momente din încărcarea cu variațiile de temperatură date, prin metoda generală a deplasărilor. Barele au secțiuni dreptunghiulare cu dimensiunile din figură ($EI = 40\,000$ kNm^2; $\alpha = 10^{-5}$).

Structura este cadru cu noduri deplasabile cu un grad de libertate ($G_l = 2 \cdot 6 - (5 + 6) = 1$). Necunoscutele: rotirile de noduri Z_1 și Z_2 și gradul de libertate (fig. IV.61, *b*) Z_a.

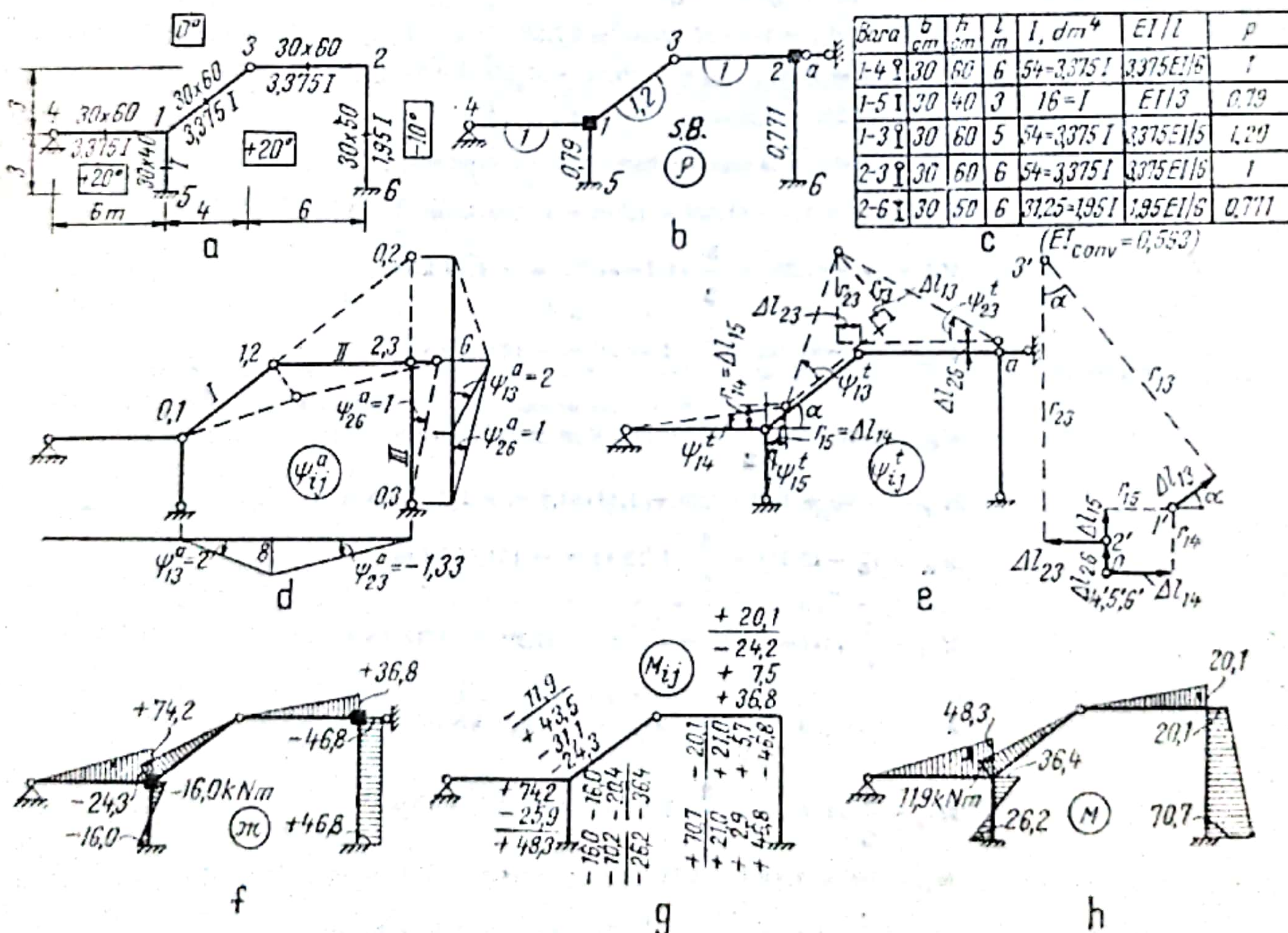
Coeficienții de rigiditate sînt calculați în tabelul din fig. IV.61 *c*.

Studiul cinematic pentru determinarea rotirilor de bare corespunzătoare deplasării $Z_a = 1$ se prezintă în fig. IV.61, *d*.

Rotirile barelor din variația temperaturii ($t°$) în axele barelor se determină pe configurația geometrică a sistemului articulat obținut din sistemul de bază, din alungirile (scurtările) barelor (fig. IV.61, *e*). Alungirile barelor sînt:

$$\Delta l_{14} = 10^{-5}\cdot 10\cdot 6 = 60\cdot 10^{-5}, \quad \Delta l_{15} = 10^{-5}\cdot 20\cdot 3 = 60\cdot 10^{-5}, \quad \Delta l_{13} = 10^{-5}\cdot 10\cdot 5 = 50\cdot 10^{-5},$$

$$\Delta l_{23} = 10^{-5}\cdot 10\cdot 6 = 60\cdot 10^{-5} \text{ și } \Delta l_{26} = 10^{-5}\cdot 5\cdot 6 = 30\cdot 10^{-5}.$$



Bara	b cm	h cm	l m	I, dm⁴	EI/l	ρ
1-4	30	60	6	54=3,375 I	3,375EI/6	1
1-5	30	40	3	16=I	EI/3	0,79
1-3	30	60	5	54=3,375 I	3,375EI/5	1,29
2-3	30	60	6	54=3,375 I	3,375EI/6	1
2-6	30	50	6	31,25=1,95 I	1,95EI/6	0,771

Fig. IV.61

In fig. IV.61 *e* în partea dreaptă este reprezentată epura Williot cu ajutorul căreia se pot determina componentele deplasărilor nodurilor perpendiculare pe bare, *r*, necesare calculului rotirilor de bare ($\psi = r/l$). Din această epură rezultă:

$$r_{14} = \Delta l_{15} = 60 \cdot 10^{-5};\ r_{15} = \Delta l_{14} = 60 \cdot 10^{-5}$$

$$r_{26} = 0;\ r_{13} \cdot \sin\alpha = \Delta l_{13} \cos\alpha + \Delta l_{14} + \Delta l_{23}$$

$$r_{13} = (50 \cdot 0{,}8 + 60 + 60) \cdot 10^{-5}/0{,}6 = 266{,}7 \cdot 10^{-5}$$

$$r_{23} = r_{13} \cos\alpha + \Delta l_{13} \sin\alpha + \Delta l_{15} - \Delta l_{26} = 273{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Rotirile de bare vor fi

$$\psi_{14}^{t} = -\frac{60 \cdot 10^{-5}}{6} = -10 \cdot 10^{-5};\ \psi_{15}^{t} = +\frac{60 \cdot 10^{-5}}{3} = +20 \cdot 10^{-5}$$

$$\psi_{13}^{t} = -\frac{266{,}7 \cdot 10^{-5}}{5} = -53{,}33 \cdot 10^{-5};\quad \psi_{23}^{t} = +\frac{273{,}3 \cdot 10^{-5}}{6} = +45{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

$$\psi_{26}^{t} = 0.$$

Momentele de încastrare perfectă din variația temperaturii în axele barelor vor fi:

$$\mathfrak{M}_{14}^{t} = -\frac{3E \cdot 3{,}375\,I}{6}\,\psi_{14}^{t} = \frac{10{,}125 \cdot 40\,000}{6}\,10^{-4} = 6{,}75\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{15}^{t} = \mathfrak{M}_{51}^{t} = -\frac{6\,EI}{3}\,\psi_{15}^{t} = -\frac{6 \cdot 40\,000}{3}\,20 \cdot 10^{-5} = -16{,}0\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{13}^{t} = -\frac{3E \cdot 3{,}375\,I}{5}\,\psi_{13}^{t} = \frac{10{,}125 \cdot 40\,000}{5}\,53{,}33 \cdot 10^{-5} = +43{,}2\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{23}^{t} = -\frac{3E \cdot 3{,}375\,I}{6}\,\psi_{23}^{t} = -\frac{10{,}125 \cdot 40\,000}{6}\,45{,}5 \cdot 10^{-5} = -30{,}7\ \text{kNm}.$$

Momentele de încastrare perfectă din diferența de temperatură între fețele barelor (conform tabelului IV.14) sînt:

$$\mathfrak{M}_{14}^{\Delta t} = +\frac{3}{2}\,\frac{20}{0{,}6}\,3{,}375 \cdot 40\,000 \cdot 10^{-5} = 67{,}5\ \text{kNm};\ \mathfrak{M}_{51}^{\Delta t} = \mathfrak{M}_{15}^{\Delta t} = 0$$

$$\mathfrak{M}_{13}^{\Delta t} = -\frac{3}{2}\,\frac{20}{0{,}6}\,3{,}375 \cdot 40\,000 \cdot 10^{-5} = -67{,}5\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{23}^{\Delta t} = -\frac{3}{2}\,\frac{20}{0{,}6}\,3{,}375 \cdot 40\,000 \cdot 10^{-5} = +67{,}5\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{62}^{\Delta t} = -\mathfrak{M}_{26}^{\Delta t} = +\frac{30}{0{,}5}\,1{,}95 \cdot 40\,000 \cdot 10^{-5} = +46{,}8\ \text{kNm}.$$

Momentele de încastrare perfectă totale sînt trecute pe fig. IV.61, *f* ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{t} + \mathfrak{M}^{\Delta t}$).

Coeficienții necunoscutelor

$$r_{11} = 1 + 1{,}2 + 0{,}79 = 2{,}99;\quad r_{22} = 1 + 0{,}771 = 1{,}771;\ r_{12} = 0$$

$$r_{1a} = -1{,}2 \cdot 2 = -2{,}4;\quad r_{2a} = -\frac{3}{2}\,0{,}771 \cdot 1 - 1(-1{,}33) = +0{,}177$$

$$r_{aa} = 3 \cdot 0{,}771 \cdot 1^{2} + 1(-1{,}33)^{2} + 1{,}2 \cdot 2^{2} = 8{,}89.$$

Termenii liberi din ecuaţiile de condiţie

$$R_{1t} = 74{,}2 - 16{,}0 - 24{,}3 = +33{,}9; \quad R_{2t} = +36{,}8 - 46{,}8 = -10{,}0$$

$$R_{at} = -(-24{,}3)\cdot 2 - 36{,}8(-1{,}33) = +97{,}6.$$

Ecuaţiile de condiţie şi valorile necunoscutelor sînt

$$\begin{cases} 2{,}99\ Z_1 - 2{,}40\ Z_a + 33{,}9 = 0 & Z_1 = -25{,}92 \\ 1{,}771\ Z_2 + 0{,}177\ Z_a - 10{,}0 = 0 & Z_2 = +7{,}46 \\ -2{,}40\ Z_1 + 0{,}177\ Z_2 + 8{,}89\ Z_a + 97{,}6 = 0 & Z_a = -18{,}12. \end{cases}$$

Determinarea momentelor la capetele barelor se prezintă pe schema din fig. IV.61, *g* iar diagrama de momente în fig. IV.61, *h*.

În afara echilibrului nodurilor diagrama finală se poate verifica şi pe baza principiului lucrului mecanic virtual

$$(M_{ij} + M_{ji})\psi^a_{ij} = (-11{,}9)\cdot 2 + 20{,}1(-1{,}33) + (70{,}7 - 20{,}1)\cdot 1 = -50{,}6 + 50{,}6 = 0.$$

Exemplul de calcul IV.5. Pentru cadrul din exemplul precedent se determină diagrama de momente încovoietoare din încărcarea cu cedări de reazeme ($v_4 = 2$ cm, $u_5 = 0{,}75$ cm, $v_5 = 1$ cm, $u_6 = 2$ cm, $\varphi_6 = (1/6)°$ din fig. IV.62, *a*). $EI = 40\,000$ kNm².

Coeficienţii necunoscutelor au fost calculaţi în exemplul precedent. Pentru calculul termenilor liberi sînt necesare momentele de încastrare perfectă din cedările de reazeme.

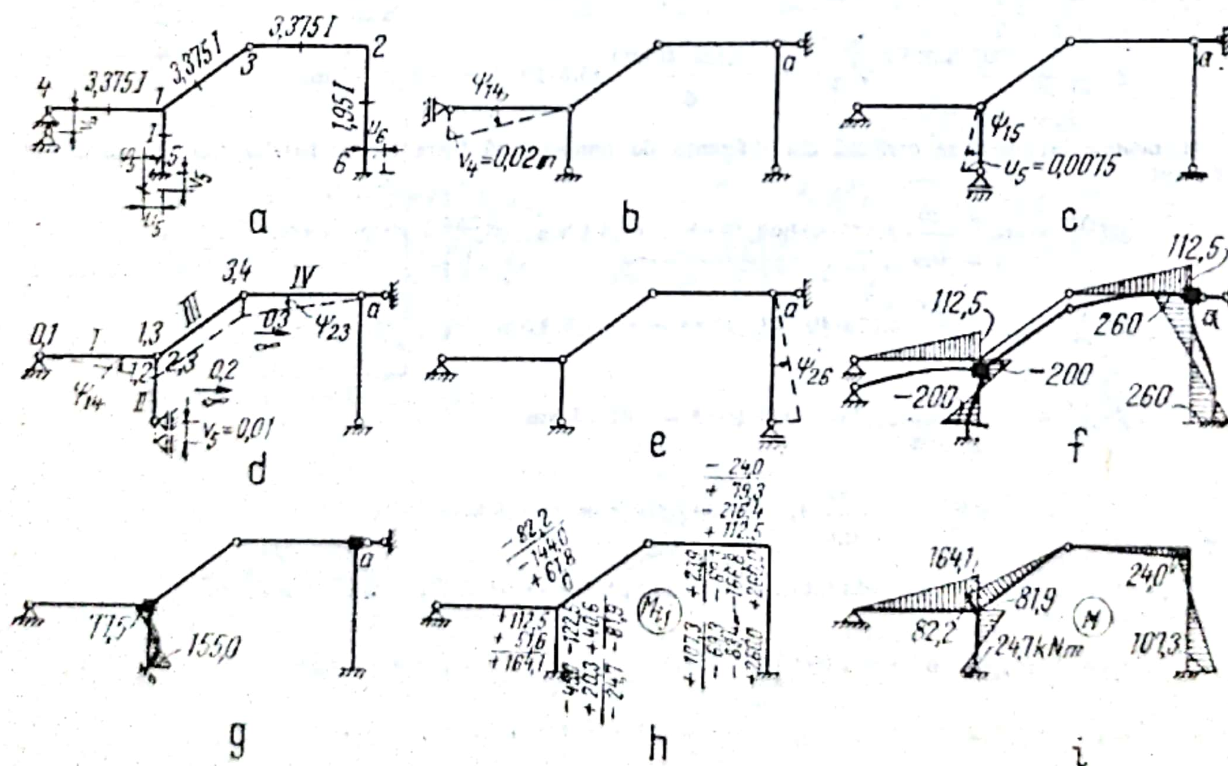


Fig. IV.62

Cedările de reazeme translații au ca efect asupra sistemului de bază rotiri de bare care se determină pe sistemul articulat al sistemului de bază la care se suprimă legătura pe direcția cedării respective (fig. IV. 62, *b, c, d, e*). Rezultă următoarele rotiri de bare;

$$\psi_{14} = -\frac{0{,}02}{6} + \frac{0{,}01}{6} = -1{,}67\cdot10^{-3};\quad \psi_{15} = +\frac{0{,}0075}{3} = +2{,}5\cdot10^{-3}$$

$$\psi_{23} = -\frac{0{,}01}{6} = -1{,}67\cdot10^{-3};\quad \psi_{13} = 0;\quad \psi_{26} = -\frac{0{,}02}{6} = -3{,}33\cdot10^{-3}.$$

Momentele de încastrare perfectă din aceste rotiri produse de cedările translații (fig. IV. 62, *f*) sînt

$$\mathfrak{M}_{14} = -\frac{3E\cdot3{,}375\,I}{6}\psi_{14} = -\frac{10{,}125\cdot40\,000}{6}(-1{,}67\cdot10^{-3}) = +112{,}5\text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{15} = \mathfrak{M}_{51} = -\frac{6EI}{3}\psi_{15} = -\frac{6\cdot40\,000}{3}2{,}5\cdot10^{-3} = -200{,}0\text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{23} = -\frac{3\,E\cdot3{,}375\,I}{6}\psi_{23} = -\frac{10{,}125\cdot40\,000}{6}(-1{,}67\cdot10^{-3}) = +112{,}5\text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{26} = \mathfrak{M}_{62} = -\frac{6E\cdot1{,}95\,I}{6}\psi_{26} = -1{,}95\cdot40\,000(-3{,}33\cdot10^{-3}) = +260{,}0\text{ kNm}.$$

Din cedări rotiri, momentele de încastrare perfectă (fig. IV. 62, *g*) sînt

$$\mathfrak{M}_{51} = \frac{4EI}{3}\varphi_5 = \frac{4\cdot40\,000}{3}\left(\frac{1}{6}\,\frac{\pi}{180}\right) = 155\text{ kNm};\quad \mathfrak{M}_{15} = \frac{2\,EI}{3}\varphi_5 = \frac{2\cdot40\,000}{3}\left(\frac{1}{6}\,\frac{\pi}{180}\right) = 77{,}5\text{ kNm}.$$

Momente de încastrare perfectă totale

$$\mathfrak{M}_{14} = +112{,}5\text{ kNm};\quad \mathfrak{M}_{15} = -200{,}0+77{,}5 = -122{,}5\text{ kNm};\quad \mathfrak{M}_{51} = -200{,}0+155{,}0 = -45{,}0\text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{23} = +112{,}5\text{ kNm};\quad \mathfrak{M}_{26} = +260{,}0\text{ kNm};\quad \mathfrak{M}_{62} = +260{,}0\text{ kNm}.$$

Termenii liberi din ecuațiile de condiție

$$R_{1\Delta r} = 112{,}5 - 122{,}5 = -10{,}0;\quad R_{2\Delta r} = 112{,}5 + 260 = 372{,}5$$

$$R_{a\Delta r} = -(112{,}5)(-13{,}3) - (260+260)(1) = -370{,}0.$$

Ecuațiile de condiție și valorile necunoscutelor

$$\begin{cases} 2{,}99\,Z_1 - 2{,}40\,Z_a - 10{,}0 = 0 & Z_1 = +51{,}6\\ 1{,}771\,Z_2 + 0{,}177\,Z_a + 372{,}5 = 0 & Z_2 = -216{,}5\\ -2{,}40\,Z_1 + 0{,}177\,Z_2 + 8{,}89\,Z_a - 370{,}0 = 0 & Z_a = +59{,}9.\end{cases}$$

Momentele la capetele barelor sînt determinate în fig. IV. 62, *h*, iar diagrama de momente este prezentată în fig. IV. 62, *i*.

Verificare; $(M_{ij} + M_{ji})\psi_{ij}^{a} = (-82{,}2)\cdot2 + (-24{,}0)(-1{,}33) + (24{,}0+107{,}3)\cdot1 = -164{,}4 + 164{,}3 \approx 0.$

3.3. Procedee iterative

Pornind de la rezolvarea prin aproximaţii succesive a sistemului de ecuaţii din metoda deplasărilor au apărut următoarele procedee iterative utilizate curent la rezolvarea cadrelor cu noduri fixe: procedeul transmiterii rotirilor, procedeul distribuţiei şi transmiterii momentelor (metoda Cross), procedeul transmiterii momentelor neechilibrate (Dašek-Kani). La cadre oarecare cu noduri deplasabile se utilizează curent procedeul rezolvării în două etape. La cadre etajate s-au dezvoltat procedee iterative de calcul într-o singură etapă: procedeul Grinter, procedeul Haller-Kranl, procedeul Csonka (utilizarea distorsiunilor) etc.

3.3.1. Procedeul transmiterii rotirilor. Acest procedeu reprezintă rezolvarea prin iteraţie continuă (procedeul Seidel) a ecuaţiilor metodei deplasărilor la cadre cu noduri fixe. Din ecuaţia de condiţie pentru un nod oarecare i

$$r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \ldots + r_{ii}Z_i + r_{ij}Z_j + \ldots + r_{in}Z_n + R_{i0} = 0$$

rezultă necunoscuta principală sub forma

$$Z_i = -\frac{R_{i0}}{r_{ii}} - \frac{r_{i1}}{r_{ii}}Z_1 - \frac{r_{i2}}{r_{ii}}Z_2 - \ldots - \frac{r_{ij}}{r_{ii}}Z_j - \ldots - \frac{r_{in}}{r_{ii}}Z_n \quad \text{sau}$$

$$Z_i = Z_i^0 + t_{1i}Z_1 + t_{2i}Z_2 + \ldots + t_{ji}Z_j + \ldots + t_{ni}Z_n = Z_i^0 + \sum_{j=1}^{n} t_{ji}Z_j$$

în care, ţinînd seama de expresiile coeficienţilor şi termenilor liberi de la pct. 3.2.7, se obţin următoarele expresii pentru:

— valoarea iniţială a necunoscutei

$$Z_i^0 = -\frac{R_{i0}}{r_{ii}} = -\frac{\sum_j \mathfrak{M}_{ij}}{\sum_j \rho_{ij}} = -\frac{\mathfrak{M}_i}{\rho_i}; \qquad \text{(IV.73)}$$

— coeficientul de transmitere a rotirilor de nod (de la nodul j la i)

$$t_{ji} = -\frac{r_{ij}}{r_{ii}} = -\frac{\rho_{ji}}{\rho_i}\mu_{ji} = -\frac{\rho_{ij}}{\rho_i}\mu_{ij} \qquad \text{(IV. 74)}$$

care pentru bare cu secţiune constantă devine

$$t_{ji} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_{ij}}{\rho_i}. \qquad \text{(IV.74a)}$$

Transmiterea rotirilor se face numai între nodurile vecine, adică legate printr-o bară încastrată în noduri.

Valoarea finală a unei necunoscute, rotire de nod, se obţine adăugînd la valoarea iniţială valorile transmise în cele s cicluri:

$$\varphi_i = Z_i = \sum_{k=1}^{s} Z_i^{(k)} = Z_i^0 + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji}Z_j^{(k-1)} + \sum_{j=i+1}^{n} t_{ji}Z_j^{(k)}\right). \qquad \text{(IV.75)}$$

După determinarea rotirilor de noduri prin iterație, calculul momentelor de la capetele barelor se face ca la metoda deplasărilor.

Exemplul de calcul IV.6. Pentru cadrul simetric, încărcat simetric din fig. IV.63, *a* se determină diagrama de momente încovoietoare prin procedeul transmiterii rotirilor.

La încărcarea simetrică cadrul se comportă ca un cadru cu noduri fixe. Calculul se efectuează pentru semistructura corespunzătoare încărcării simetrice din fig. IV.63, *b*.

1) Necunoscute sînt rotirile nodurilor Z_1, Z_2 și Z_3.

2) Coeficienții de rigiditate (pentru $EI = 1$)

$$\rho_{15} = \rho_{26} = \rho_{23} = \frac{4\,EI}{4} = EI = 1;\quad \rho_{14} = \frac{3\,E \cdot 3\,I}{6} = 1{,}5;\quad \rho_{12} = \rho_{27} = \frac{4\,E \cdot 3\,I}{6} = 2$$

$$\rho_{38} = \frac{1}{2}\,\frac{4E \cdot 4\,I}{12} = 0{,}667;\quad \rho_1 = 1{,}5 + 2 + 1 = 4{,}5;\quad \rho_2 = 1 + 1 + 2 + 2 = 6;$$

$$\rho_3 = 1 + 0{,}667 = 1{,}667.$$

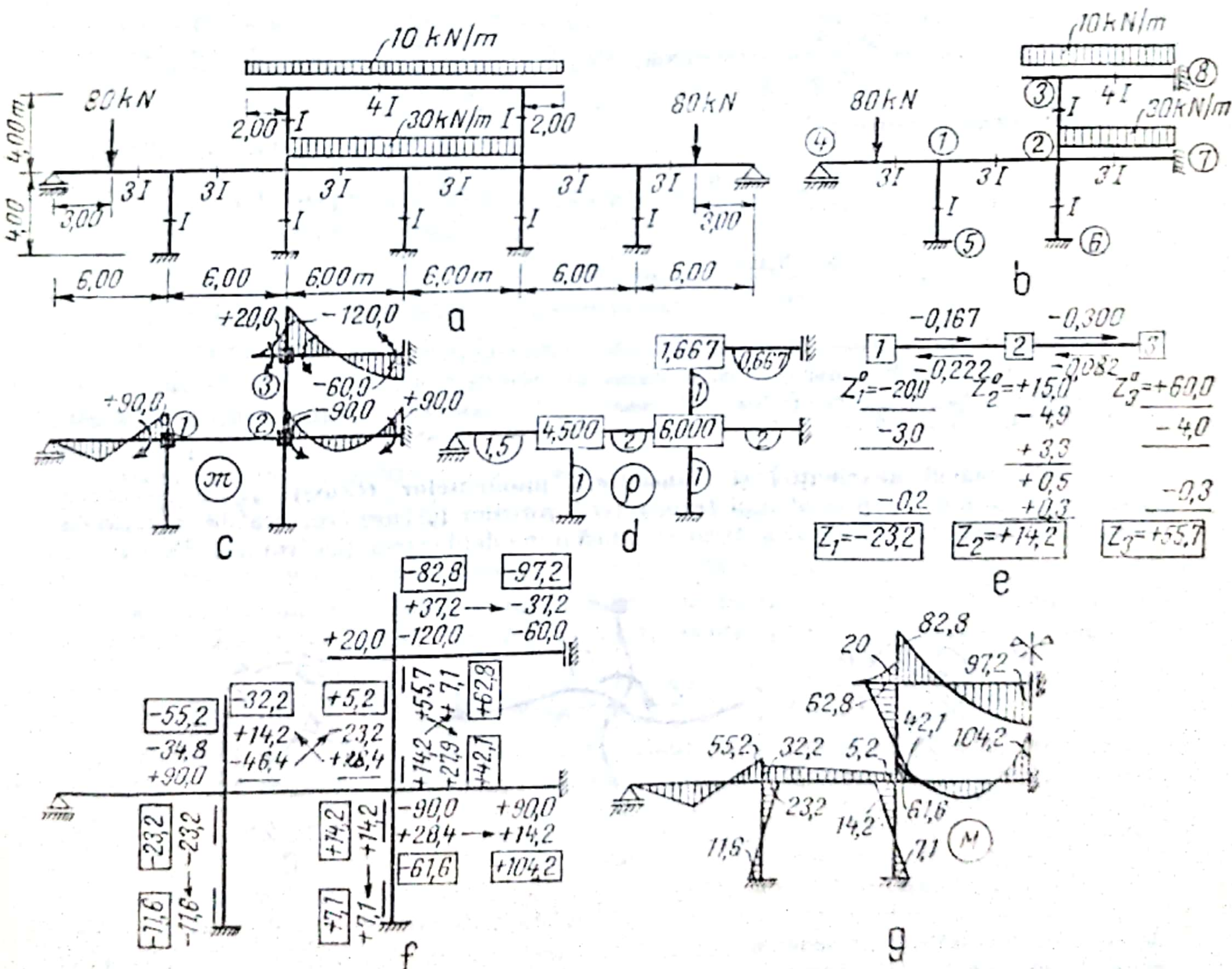


Fig. IV.63

3) Coeficienţii de transmitere a rotirilor

$$t_{12} = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{6} = -0{,}167; \quad t_{21} = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{4{,}5} = -0{,}222;$$

$$t_{23} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1{,}667} = -0{,}3; \quad t_{32} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{6} = -0{,}083.$$

4) Momente de încastrare perfectă

$$\mathfrak{M}_{14} = \frac{3}{16}\,80 \times 6 = +90{,}0\ \text{kNm}; \qquad \mathfrak{M}_{27} = -\frac{30 \times 6^2}{12} = -90{,}0\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{72} = +\frac{30 \cdot 6^2}{12} = +90{,}0\ \text{kNm}; \qquad \mathfrak{M}_{32} = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20{,}0\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{38} = -\frac{10 \cdot 12^2}{12} = -120{,}0\ \text{kNm}; \quad \mathfrak{M}_{83} = -\left(\frac{10 \cdot 12^2}{8} - 120\right) = -60{,}0\ \text{kNm}.$$

5) Valorile iniţiale ale rotirilor ;

$$Z_1^0 = -\frac{\mathfrak{M}_1}{\rho_1} = -\frac{90{,}0}{4{,}50} = -20{,}0; \quad Z_2^0 = -\frac{-90{,}0}{6{,}00} = +15{,}0;$$

$$Z_3^0 = -\frac{20 - 120{,}0}{1{,}667} = +60{,}0.$$

6) Efectuarea iteraţiei cu rotiri este dată în schema de calcul din fig. IV.63, e.

7) Trecerea de la rotiri la momente s-a făcut pe schema cadrului în fig. IV.63, f.

8) Verificarea diagramei se face pe baza echilibrului nodurilor ; nodul *1* $(55{,}2 - 32{,}2 - 23{,}2) = -0{,}4 \approx 0$; nodul *2* $(5{,}2 + 14{,}2 + 42{,}1 - 61{,}6) = -0{,}1 \approx 0$; nodul *3* $(+20 + 62{,}8 - 82{,}8) = 0$.

3.3.2. **Procedeul distribuţiei şi transmiterii momentelor (Cross).** Acest procedeu reprezintă o variantă a procedeului transmiterii rotirilor în care trecerea de la rotiri la momente se face în fiecare etapă a iteraţiei, adică după deblocarea fiecărui nod. Pe schema

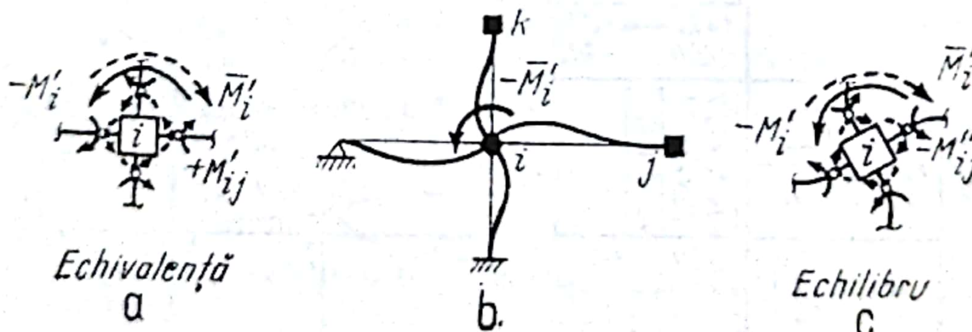


Fig. IV.64

de calcul, care este chiar schema cadrului, se înregistrează corecţiile momentelor de la capetele barelor din deblocarea succesivă a nodurilor. Aceste corecţii din rotirea unui nod se pot stabili considerînd din sistemul de bază un nod *i* şi nodurile vecine (fig. IV.64).

Într-o etapă oarecare a iterației pe capetele de bară de la nodul i blocat au apărut din deblocarea nodurilor vecine momentele M'_{ij}. Deblocînd nodul i, celelalte noduri fiind blocate (fig. IV.64, *b*), acesta se va roti cu :

$$Z_i = -\frac{R_{i0}}{r_{ii}} = -\frac{\sum M'_{ij}}{\rho_i} = \frac{M'_i}{\rho_i} \qquad \text{(IV.76)}$$

unde $M'_i = -\sum_j M'_{ij}$ este momentul neechilibrat pe nodul i (fig. IV.64, *a*).

Conform relațiilor fundamentale, din această rotire de nod pe capetele de bare din nod apar momentele M''_{ij} care echilibrează momentul neechilibrat (fig. IV.64, *c*) egale cu :

$$M''_{ij} = \rho_{ij} Z_i = \frac{\rho_{ij}}{\rho_i} M'_i = d_{ij} M'_i \qquad \text{(IV.77)}$$

în care s-a notat $d_{ij} = \rho_{ij}/\rho_i$ *coeficientul de distribuție* al momentului neechilibrat în capătul i pe bara $(i-j)$. Momentul neechilibrat *se distribuie* pe capetele de bare de la nod proporțional cu rigiditățile barelor prin coeficienții de distribuție, nodul fiind în echilibru

$$M'_i = \sum_j M''_{ij} = \sum_j d_{ij} M'_i = M'_i \sum_j d_{ij} \qquad \text{(IV.77a)}$$

de unde, pe nodul i, $\sum_j d_{ij} = 1$.

Prin rotirea nodului i, barele deformîndu-se apar momente și în celelalte capete ale barelor provenite din *transmiterea* momentelor distribuite în capetele de la nodul i

$$M''_{ji} = \mu_{ij} M''_{ij} = d_{ij} \mu_{ij} M'_i \qquad \text{(IV.78)}$$

($\mu_{ij} = 1/2$ pentru bare cu secțiune constantă)

în care μ_{ij} este *coeficientul de transmitere* a momentului de la i la j a cărui expresie este dată în tabelul IV.11.

La deblocarea unui nod apar deci două faze : faza distribuirii momentelor și faza transmiterii momentelor.

Dacă în locul momentului neechilibrat M'_i se lucrează cu momentul reacțiune pe blocaj $\overline{M'_i} = \sum_j M'_{ij} = -M'_i$, atunci suma momentelor pe capete de bară se distribuie pentru echilibrarea nodului cu semn schimbat $d_{ij} = -\rho_{ij}/\rho_i$.

La prima deblocare a unui nod, momentul de distribuit va fi dat de suma momentelor de încastrare perfectă și a momentelor transmise prin deblocarea nodurilor anterioare

$$\sum_j M'_{ij} = \sum_j \mathfrak{M}_{ij} + \sum_j \mu_{ji} M''_{ij} \qquad \text{(IV.79)}$$

iar la redeblocarea unui nod momentul de distribuit va fi dat numai de suma momentelor transmise în ciclul respectiv, celelalte momente fiind în echilibru prin deblocarea anterioară a nodului

$$\sum_j M'_{ij} = \sum_j \mu_{ji} M''_{ji}. \qquad \text{(IV.79a)}$$

Deci, în acest procedeu în care se operează cu momente la capetele barelor, se pleacă de la valorile inițiale ale acestora (momentele de încastrare perfectă) și se deblochează succesiv nodurile, la fiecare deblocare înscriind pe schema de calcul momentele distribuite și transmise, pînă cînd valorile momentelor de transmis sînt foarte mici ($\approx 1\%$ din $\mathfrak{M}$). Iterația se încheie totdeauna cu distribuție pe toate nodurile pentru ca acestea să fie în echilibru.

Momentele finale se obțin prin însumarea momentelor de încastrare perfectă cu momentele distribuite și transmise, pe fiecare capăt de bară.

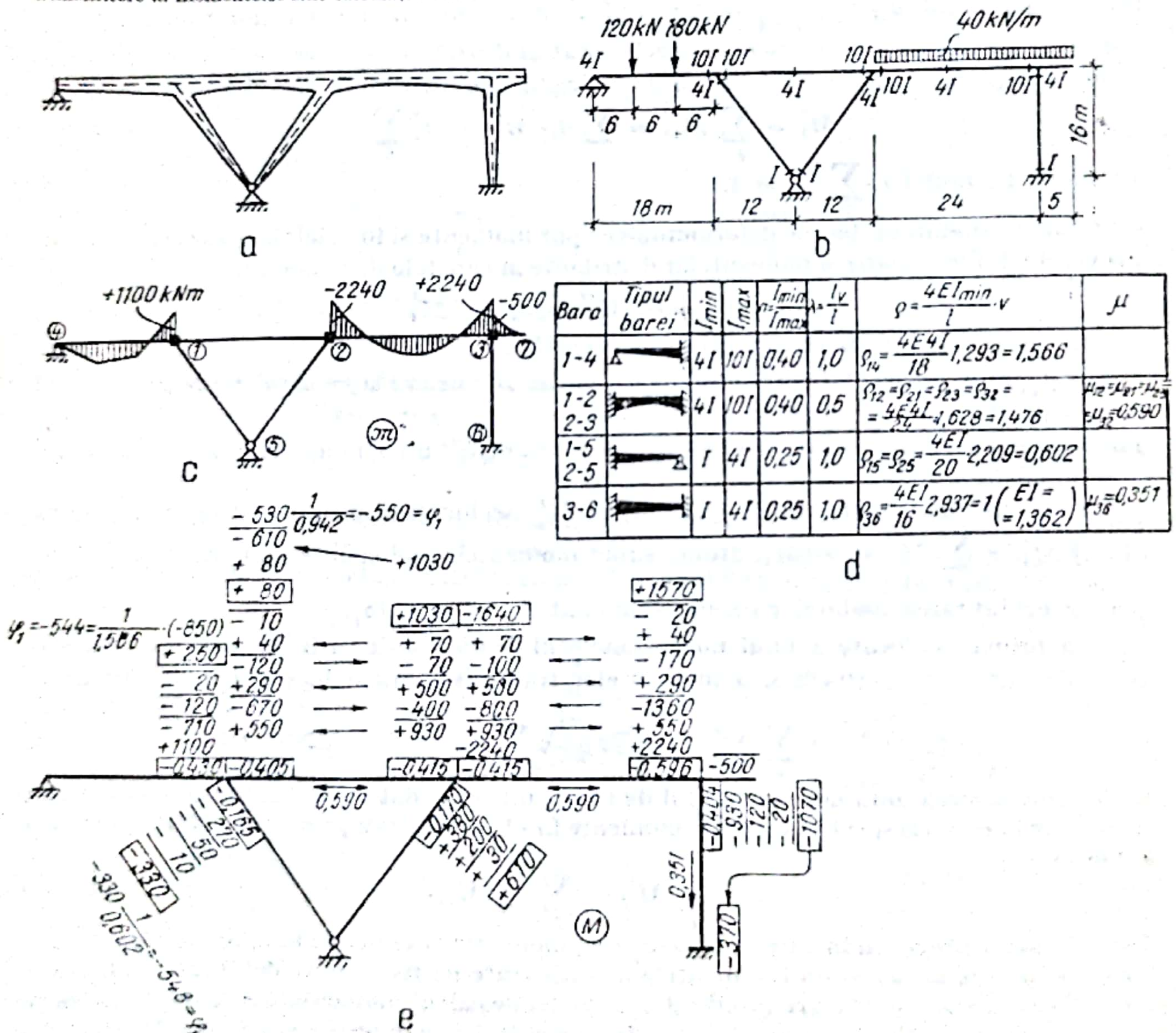
Verificarea diagramei de momente finală nu se mai face pe baza echilibrului nodurilor care este o operație în fiecare etapă a iterației, ci pe baza condiției de compatibilitate, și anume toate capetele de bară de la un nod să aibă aceeași rotire

$$\varphi_i = \frac{(M_{ij} - \mathfrak{M}_{ij}) - \mu_{ji}(M_{ji} - \mathfrak{M}_{ji})}{\rho_{ij}(1 - \mu_{ij}\mu_{ji})}; \quad \varphi_i = \frac{M_{ij} - \mathfrak{M}_{ij}}{\rho_{ij}}, \tag{IV.80}$$

prima relație referindu-se la bare care au nod în j, iar a doua la bare care sînt rezemate în j.

Exemplul de calcul IV.7. Pentru cadrul cu secțiuni variabile din fig. IV. 65, *a* se determină diagrama M prin procedeul Cross. Schema de calcul este prezentată în fig. IV.65, *b*.

Barele avînd secțiuni variabile, înălțimea secțiunilor variind parabolic sau liniar, se pot folosi coeficienții pentru bare cu secțiuni variabile din lucrarea [4]. Coeficienții de rigiditate pentru fiecare capăt și bară și coeficienții de transmitere ai momentelor sînt calculați în tabelul din fig. IV.65.



Bara	Tipul barei	I_{min}	I_{max}	$n=\frac{I_{min}}{I_{max}}$	$\lambda=\frac{l_v}{l}$	$\rho=\frac{4EI_{min}}{l}\cdot v$	μ
1-4		4I	10I	0,40	1,0	$\rho_{14}=\frac{4E4I}{18}1,293=1,566$	
1-2 2-3		4I	10I	0,40	0,5	$\rho_{12}=\rho_{21}=\rho_{23}=\rho_{32}=\frac{4E4I}{24}1,628=1,476$	$\mu_{12}=\mu_{21}=\mu_{23}=\mu_{32}=0,590$
1-5 2-5		I	4I	0,25	1,0	$\rho_{15}=\rho_{25}=\frac{4EI}{20}2,209=0,602$	
3-6		I	4I	0,25	1,0	$\rho_{36}=\frac{4EI}{16}2,937=1\left(EI=1,362\right)$	$\mu_{36}=0,351$

Fig. IV.65

Momentele de încastrare perfectă

$$\mathcal{M}_{14} = 0{,}212 \cdot 180 \cdot 18 + 0{,}189 \cdot 120 \cdot 18 = 1\,100 \text{ kNm};$$

$$\mathcal{M}_{32} = -\mathcal{M}_{23} = 0{,}093 \cdot 40 \cdot 24^2 = 2\,240 \text{ kNm}; \quad \mathcal{M}_{37} = -40 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = -500 \text{ kNm}.$$

Coeficienții de distribuție pentru momente

$$(1)\begin{cases} d_{14} = -\dfrac{1{,}566}{1{,}566 + 0{,}602 + 1{,}476} = -\dfrac{1{,}566}{3{,}644} = -0{,}430 \\ d_{12} = -\dfrac{1{,}476}{3{,}644} = -0{,}405 \qquad \sum_{1} d = -1 \\ d_{15} = -\dfrac{0{,}602}{3{,}644} = -0{,}165 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} d_{21} = -\dfrac{1{,}476}{1{,}476 + 1{,}476 + 0{,}602} = -\dfrac{1{,}476}{3{,}554} = -0{,}415 = d_{23} \\ d_{25} = -\dfrac{0{,}602}{3{,}554} = -0{,}170 \qquad \sum_{2} d = -1 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} d_{32} = -\dfrac{1{,}476}{1{,}476 + 1} = -0{,}596 \qquad \sum_{3} d = -1 \\ d_{36} = -\dfrac{1}{2{,}476} = -0{,}404. \end{cases}$$

Verificarea diagramei de momente finală prin condiția ca la un nod capetele de bară să aibă aceeași rotire este arătată pe schema de calcul pentru nodul *1* (v. fig. IV.65).

3.3.3. **Procedeul rezolvării în două etape a cadrelor cu noduri deplasabile.** În acest procedeu se folosește un sistem de bază geometric nedeterminat, și anume cadrul cu noduri fixe (fig. IV.66, *b*) obținut prin adăugarea la sistemul real (fig. IV.66, *a*) al unui număr de penduli care să-i blocheze gradele de libertate elastice.

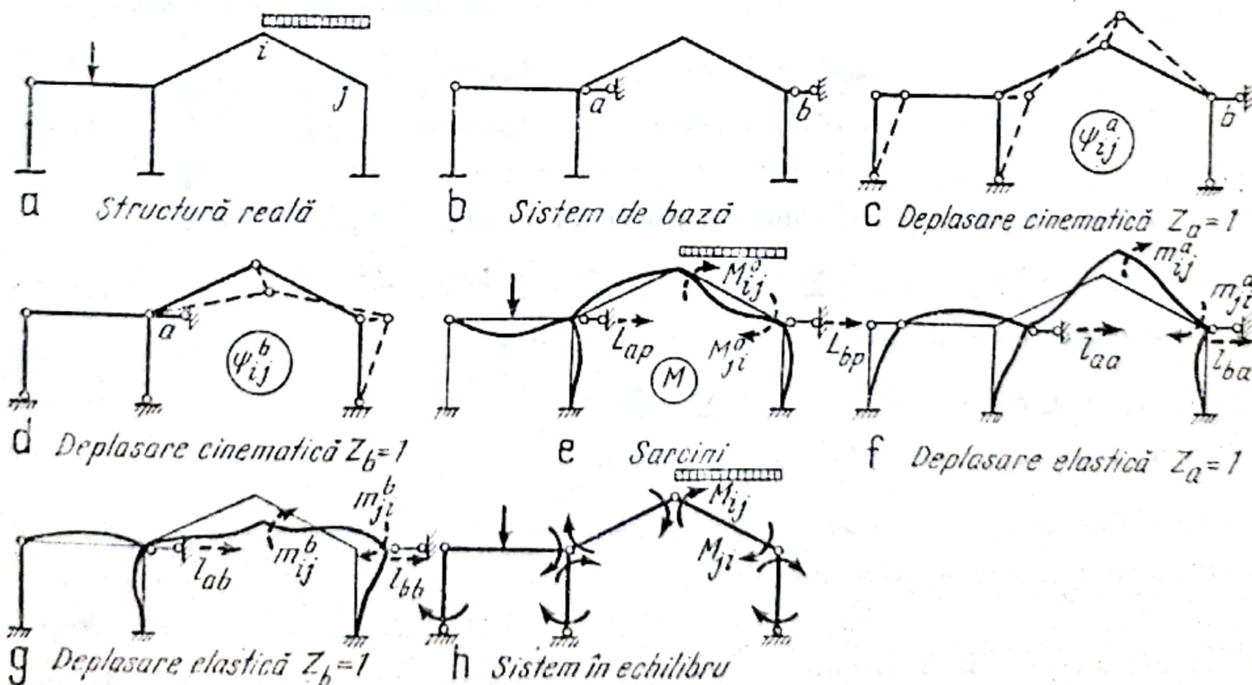


Fig. IV.66

În prima etapă se rezolvă cadrul cu noduri fixe printr-un procedeu iterativ la încărcările date, obţinîndu-se momentele de capăt M_{ij}^0 (din sarcini $M_{ij,p}^0$, din variaţii de temperatură $M_{ij,t}^0$ din cedări de reazeme $M_{ij,\Delta r}^0$) şi la încărcări cu parametrii unitari care caracterizează gradele de libertate ($Z_a = 1, Z_b = 1 \ldots$), obţinîndu-se momentele de capăt m_{ij}^a, m_{ij}^b ... (fig. IV.65).

În etapa a doua se trece de la cadrul cu noduri fixe la cadrul real cu noduri deplasabile punînd condiţiile ca în pendulii suplimentari reacţiunile totale să fie nule. Aceste condiţii se pot pune sub formă generală pe baza interpretării ca lucru mecanic virtual. Momentele de capăt finale pe cadru cu noduri deplasabile se obţin prin suprapunerea celor obţinute pe sistemul de bază din încărcările date şi din gradele de libertate reale

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + m_{ij}^a Z_a + m_{ij}^b Z_b + \ldots \qquad \text{(IV.81)}$$

Ecuaţiile de condiţie pentru determinarea parametrilor reali ce definesc gradele de libertate elastice exprimă echilibrul sistemului articulat obţinut din sistemul real încărcat cu momentele totale de capăt şi sarcinile date (fig. IV.66, h). Aceste condiţii de echilibru se exprimă mai general pe baza principiului lucrului mecanic virtual luînd ca deplasări virtuale, deplasările cinematice ψ_{ij}^a, ψ_{ij}^b, ..., corespunzătoare deplasărilor elastice $Z_a = 1$, $Z_b = 1$, ... Astfel, punînd condiţia de echilibru pentru momentele de capăt finale şi arcinile date prin deplasările ψ_{ij}^a, se obţine ecuaţia de condiţie corespunzătoare gradului de libertate elastic a sub forma

$$L_a = \sum(M_{ij} + M_{ji})\,\psi_{ij}^a + P\,\delta_p^a = [\sum(m_{ij}^a + m_{ji}^a)\psi_{ij}^a]\,Z_a + [\sum(m_{ij}^b + m_{ji}^b)\,\psi_{ij}^a]\,Z_b +$$
$$+ \ldots + [\sum(M_{ij}^0 + M_{ji}^0)\,\psi_{ij}^a + P\delta_p^a] = 0.$$

Procedînd analog şi pentru celelalte grade de libertate, ecuaţiile de condiţie se obţin sub forma generală

$$\begin{aligned} l_{aa}Z_a + l_{ab}Z_b + \ldots + L_{ao} &= 0 \\ l_{ba}Z_a + l_{bb}Z_b + \ldots + L_{bo} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \text{(IV.82)}$$

Expresiile coeficienţilor şi termenilor liberi au forma:

$$l_{aa} = \sum(m_{ij}^a + m_{ji}^a)\,\psi_{ij}^a;\ l_{ab} = \sum(m_{ij}^b + m_{ji}^b)\,\psi_{ij}^a = \sum(m_{ij}^a + m_{ji}^a)\,\psi_{ij}^b = l_{ba} \qquad \text{(IV.83)}$$

pentru încărcare cu sarcini:

$$L_{ao} = L_{ap} = \sum(M_{ij,p}^0 + M_{ji,p}^0)\,\psi_{ij}^a + \sum P\delta_p^a \qquad \text{(IV.84)}$$

pentru încărcarea cu variaţii de temperatură:

$$L_{ao} = L_{at} = \sum(M_{ij,t}^0 + M_{ji,t}^0)\,\psi_{ij}^a \qquad \text{(IV.84a)}$$

pentru încărcarea cu cedări de reazeme:

$$L_{ao} = L_{a\Delta r} = \sum(M_{ij,\Delta r}^0 + M_{ji,\Delta r}^0)\,\psi_{ij}^a. \qquad \text{(IV.84b)}$$

La cadre cu console, rezultanta forţelor de pe consolă intervine în $\sum P \cdot \delta_p$ prin deplasarea nodului δ_p în cadrul gradului de libertate respectiv.

La cadre cu tiranți (sau bare dublu articulate), care sînt mai deformabili decît celelalte bare, coeficienții trebuie corectați cu efectul lor. De obicei, gradele de libertate se aleg astfel ca un tirant să aibă alungiri numai în cadrul deplasărilor dintr-un grad de libertate (Z_a) și deci va corecta numai coeficientul respectiv

$$r_{aa} = \Sigma(m_{ij}^a + m_{ji}^a)\,\psi_{ij}^a - \frac{E_t A_t}{l_t}\,(\Delta l_t^a)^2\,\frac{(EI)^c}{(EI)_0^r} \qquad \text{(IV.85)}$$

în care: E_t, A_t, l_t sînt caracteristicile geometrice și elastice ale tirantului, Δl_t^a este alungirea tirantului prin deplasarea cinematică $Z_a = 1$, $(EI)^c/(EI)^r$ este raportul dintre valoarea convențională dată pentru EI în calculul coeficienților de rigiditate și valoarea reală care ține cont de faptul că și în calculul momentelor m_{ij}^a se lucrează cu valori convenționale prin ρ. Semnul minus se explică mai simplu prin faptul că existența tirantului micșorează reacțiunea în pendulul suplimentar.

Exemplul de calcul IV.8. Se determină diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul cu noduri deplasabile din fig. IV.67, *a* folosind procedeul rezolvării în două etape.

Cadrul este cu noduri deplasabile avînd două grade de libertate. În prima etapă se rezolvă cadrul cu noduri fixe din fig. IV.67, *b* la încărcarea cu sarcinile date și grade de libertate unitare, $Z_a = 1$, $Z_b = 1$, folosind unul din procedeele iterative pentru cadre cu noduri fixe, de exemplu procedeul Cross.

Coeficienții de rigiditate (fig. IV.67, *c*) pentru $EI = 1,5$ sînt:

$$\rho_{15} = \rho_{34} = \frac{4EI}{6} = 1; \qquad \rho_{67} = \frac{3\,EI}{6} = 0,75; \quad \rho_{17} = \frac{3\,E\cdot 4\,I}{12} = 1,5;$$

$$\rho_{12} = \rho_{23} = \frac{4E\cdot 4\,I}{8,94} = 2,683.$$

Coeficienții de distribuție pentru momente neechilibrate

$$(1)\begin{cases} d_{17} = -\dfrac{1,5}{5,183} = -0,289 \\ d_{12} = -\dfrac{2,683}{5,183} = -0,518 \\ d_{15} = -\dfrac{1}{5,183} = -0,193 \end{cases} \qquad \sum d = -1,000$$

$$(2)\begin{cases} d_{21} = -\dfrac{2,683}{5,366} = -0,500 \\ d_{23} = -\dfrac{2,683}{5,366} = -0,500 \end{cases} \qquad \sum d = -1,000$$

$$(3)\begin{cases} d_{32} = -\dfrac{2,683}{3,683} = -0,728 \\ d_{34} = -\dfrac{1}{8,683} = -0,272 \end{cases} \qquad \sum d = -1,000.$$

E t a p a I. Folosind sistemul de bază geometric determinat (fig. IV.67, *d*) se calculează diagramele de momente pe cadrul cu noduri fixe din:

– *Încărcare cu sarcinile date.* Momentele de încastrare perfectă din sarcini sînt: $-\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21} = -\mathfrak{M}_{23} = \mathfrak{M}_{32} = 20\cdot 8^2/12 = 106,7$ kNm; $\mathfrak{M}_{3c} = -40$ kNm. Cu acestea ca valori inițiale, folosind procedeul Cross, se obțin momentele M^0 pe cadru cu noduri fixe (fig. IV.67, *e*).

– *Încărcarea cu gradul de libertate elastic* $Z_a = 1$. Se determină rotirile de bare ψ_{ij}^a (fig. IV.67, *f*), pe sistemul articulat al sistemului de bază la care se suprimă pendulul *a*, dînd la o bară o rotire unitară ($\psi_{15}^a = 1$). Se calculează

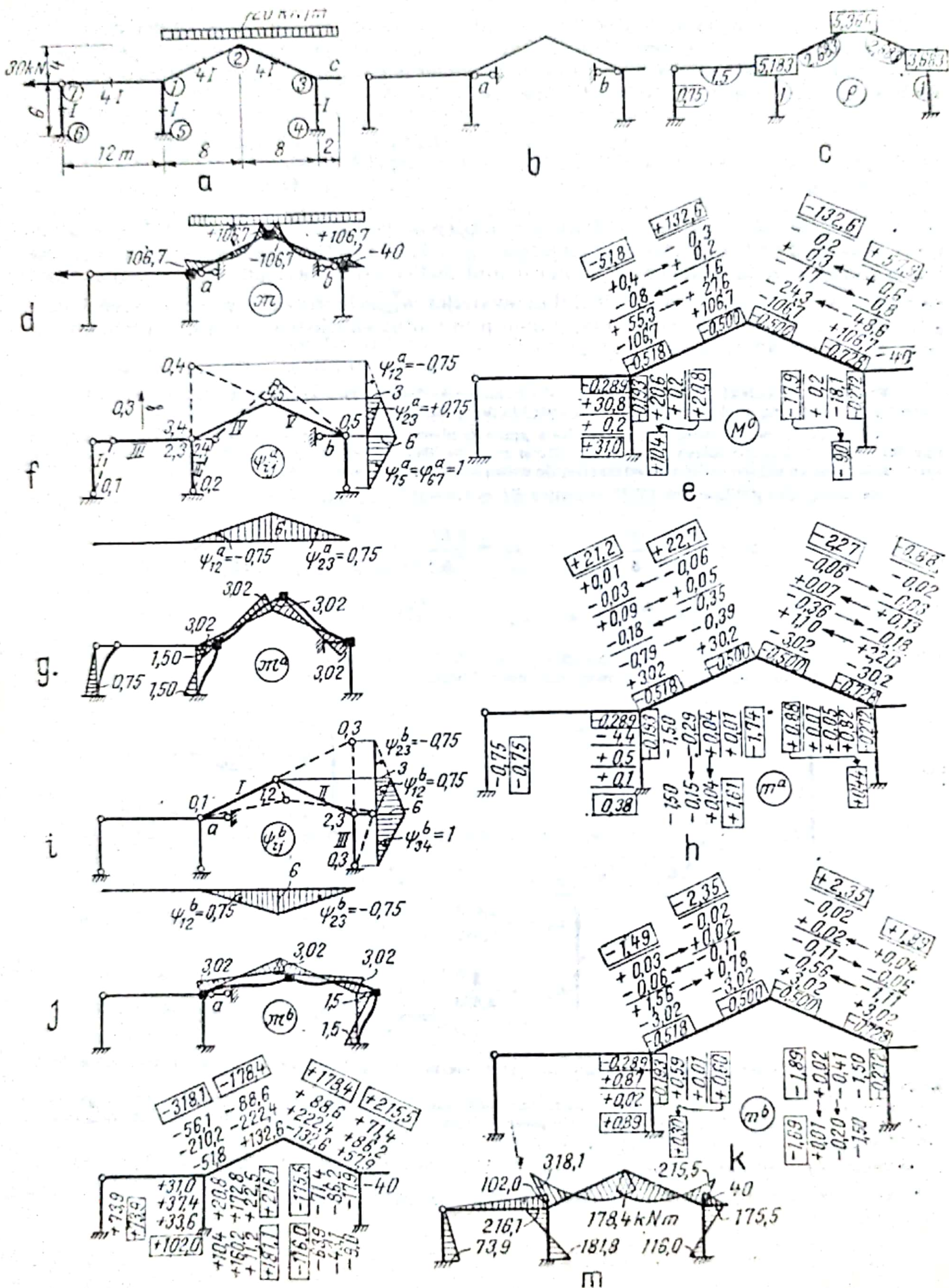

20 kN/m
30kN
4I
4I
4I
I
I
I
12 m
8
8
2
6
4
a
b
c
5,366
5,183
2,683
3,663
0,75
1,5
d
+106,7
-106,7
106,7
-40
e
-132,6
+132,6
-51,8
M°
f
$\varphi_{12}^a=-0,75$
$\varphi_{23}^a=+0,75$
$\varphi_{15}^a=\varphi_{67}^a=1$
g
3,02
1,50
0,75
h
+21,2
+22,7
-22,7
-2,88
i
$\varphi_{23}^b=-0,75$
$\varphi_{12}^b=0,75$
$\varphi_{34}^b=1$
J
k
-1,49
-2,35
+2,35
+1,29
m
318,1
215,5
102,0
178,4 kNm
175,5
216,1
73,9
181,8
116,0
40

Fig. IV.67

momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}^a$ din rotirile de bare corespunzătoare gradului de libertate elastic $Z_a = 1$ (fig. IV.67, g).

$$\mathfrak{M}^a_{67} = -0,75 \cdot 1 = -0,75; \quad \mathfrak{M}^a_{15} = \mathfrak{M}^a_{51} = -1,5 \cdot 1 \cdot 1 = -1,50;$$

$$\mathfrak{M}^a_{12} = \mathfrak{M}^a_{21} = -1,5 \cdot 2,683\,(-0,75) = +3,02; \quad \mathfrak{M}^a_{23} = \mathfrak{M}^a_{32} = -1,5 \cdot 2,683\,(0,75) = -3,02 \text{ kNm}.$$

Cu aceste momente ca valori inițiale folosind procedeul Cross se obțin momentele m^a din încărcarea cadrului cu noduri fixe cu deplasarea elastică $Z_a = 1$ (fig. IV. 67, h).

— *Încărcare cu gradul de libertate elastic* $Z_b = 1$. Studiul cinematic din $Z_b = 1$ este prezentat în fig. IV.67, i Momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}^b$ din $Z_b = 1$ (fig. IV. 67, j) sînt:

$$\mathfrak{M}^b_{34} = \mathfrak{M}^b_{43} = -1,5 \cdot 1 \cdot 1 = -1,50; \quad \mathfrak{M}^b_{12} = \mathfrak{M}^b_{21} = -1,5 \cdot 2,683 \cdot 0,75 = -3,02 = -\mathfrak{M}^b_{23} = -\mathfrak{M}^b_{32}.$$

Determinarea momentelor m^b din $Z_b = 1$ prin Cross se prezintă în fig. IV.67, k.

E t a p a II. Se determină parametrii care definesc gradele de libertate Z_a și Z_b din condițiile de anulare a reacțiunilor în pendulii a și b:

$$\begin{cases} l_{aa}Z_a + l_{ab}Z_b + L_{a0} = 0 \\ l_{ba}Z_a + l_{bb}Z_b + L_{b0} = 0. \end{cases}$$

Coeficienții și termenii liberi vor fi:

$$l_{aa} = \sum(m^a_{ij} + m^a_{ji})\,\psi^a_{ij} = (-0,75) \cdot 1 + (-1,61 - 1,74) \cdot 1 + (2,12 + 2,27)(-0,75) +$$
$$+ (-2,27 - 0,88)(0,75) = -9,78.$$

$$l_{bb} = \sum(m^b_{ij} + m^b_{ji})\,\psi^b_{ij} = (-1,69 - 1,89) \cdot 1 + (-1,49 - 2,35)(0,75) + (2,35 + 1,89)(-0,75) = -9,66.$$

$$l_{ab} = l_{ba} = \sum(m^a_{ij} + m^a_{ji})\,\psi^b_{ij} = (2,12 + 2,27)(0,75) + (-2,27 - 0,88)(-0,75) + (0,44 + 0,88) \cdot 1 = 6,96$$

$$L_{a0} = \sum(M^0_{ij} + M^0_{ji})\,\psi^a_{ij} + \sum P \cdot \delta^a_p = (10,4 + 20,8) \cdot 1 + (-51,8 + 132,6)(-0,75) +$$
$$+ (-132,6 + 57,9)(0,75) + (-20 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 - 30 \cdot 6) = -1\,225,4$$

$$L_{b0} = \sum(M^0_{ij} + M^0_{ji})\,\psi^b_{ij} + \sum P \cdot \delta^b_p = (-51,8 + 132,6)(0,75) + (-132,6 + 57,9)(-0,75) +$$
$$+ (9,0 - 17,9) \cdot 1 + (20 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2) = +1\,050.$$

Soluția sistemului de ecuații; $Z_a = -98,5$; $Z_b = +37,7$.

Momentele finale la capetele barelor se obțin prin suprapunerea $M_{ij} = M^0_{ij} + m^a_{ij}Z_a + m^b_{ij}Z_b$ pe schema din fig. IV.67, l. Diagrama finală se prezintă în fig. IV.67, m.

Verificarea diagramei de momente pe baza principiului lucrului mecanic virtual luînd ca deplasare virtuală deplasările din $Z_b = 1$

$$\sum(M_{ij} + M_{ji})\,\psi^b_{ij} + \sum P \cdot \delta^b_p = (-318,1 - 178,4)(0,75) + (178,4 + 215,5)(-0,75) +$$
$$+ (-116,0 - 175,5) \cdot 1 + (20 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2) = -959,2 + 960 \approx 0.$$

3.3.4. Procedeul Grinter (Varianta Haller-Kranl) pentru calculul cadrelor etajate cu stîlpi verticali. Este un procedeu de rezolvare prin iterație într-o singură etapă a cadrelor

ortogonale cu stilpi verticali. În acest procedeu trecerea de la sistemul de bază al metodei deplasărilor (fig. IV.68, *a*) la sistemul real se face treptat deblocînd alternativ blocajele rotirilor de noduri şi blocajele translaţiilor de noduri.

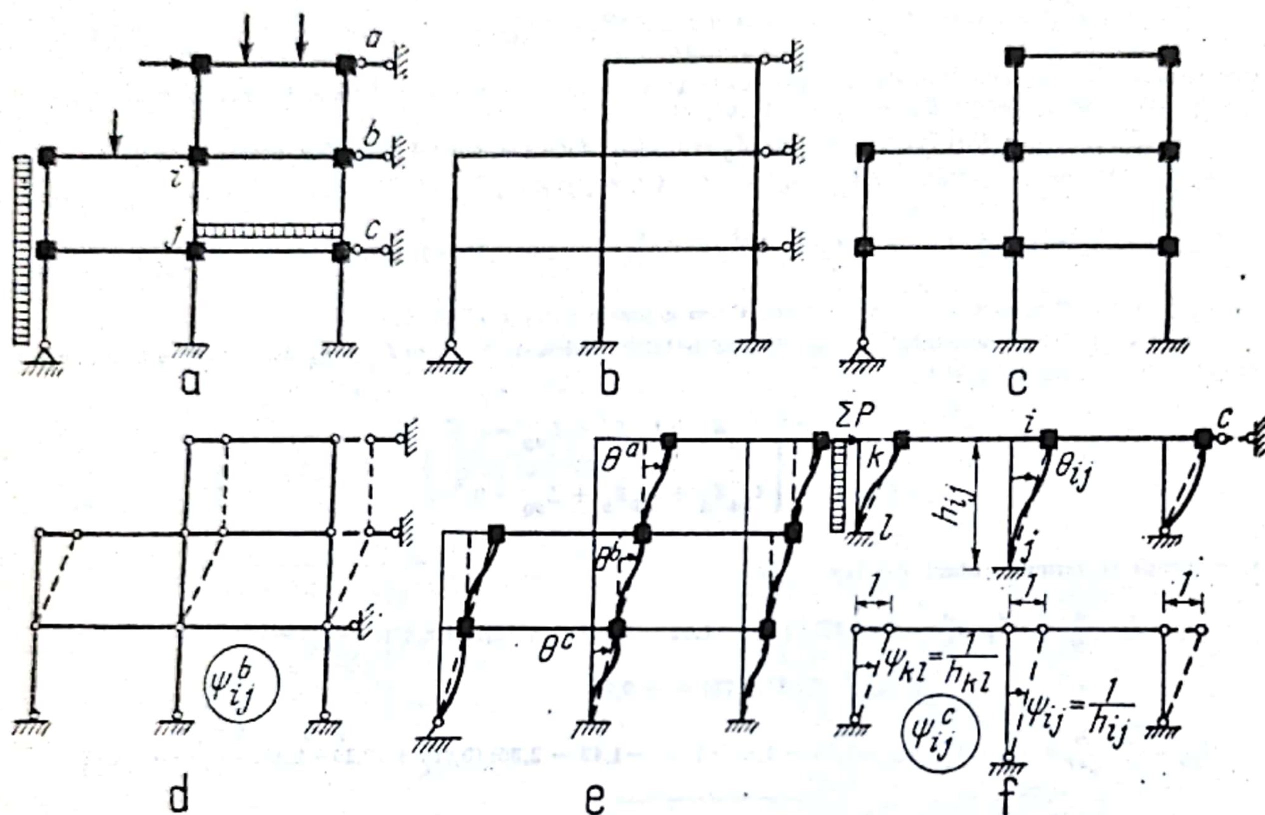


Fig. IV.68

Aceasta revine la folosirea alternantă a două sisteme de bază geometric nedeterminate, sistemul de bază cu rotirile nodurilor blocate (fig. IV. 68), *c*) şi sistemul de bază cu gradele de libertate blocate (cadru cu noduri fixe, fig. IV.68, *b*). La anularea alternantă a forţelor de fixare din cele două tipuri de legături suplimentare, fiecărui ciclu de calcul îi corespunde două faze de operare :

1) Prima fază conţine efectul deplasărilor elastice corespunzătoare gradelor de libertate asupra sistemului de bază cu rotirile nodurilor blocate (fig. IV.68, *e*), ceea ce corespunde rezolvării ecuaţiilor de grade de libertate sau de etaj. Cadrele etajate au pentru fiecare etaj cite o necunoscută grad de libertate elastic.

Luînd ca necunoscute grade de libertate grupate (fig. IV. 68, *d*), la încărcarea sistemului de bază cu rotirile nodurilor blocate cu cite o astfel de necunoscută se deformează numai stilpii etajului respectiv (fig. IV.68, *e*). Aceasta conduce la anularea coeficienţilor secundari din ecuaţiile de etaj care vor conţine o singură necunoscută, parametrul care defineşte gradul de libertate corespunzător etajului respectiv. Considerind un etaj oarecare *c*, la care pentru generalitate s-au considerat stilpi de lungimi diferite (fig. IV.68 *f*),

pentru poziția de echilibru după deblocarea gradului de libertate respectiv trebuie îndeplinită următoarea ecuație:

$r_{cc}Z_c + R_{c0} = 0$ unde, conform pct. 3.2.7.

$$r_{cc} = \sum_{et}^{\vdash\!\dashv} [\rho_{ij}(1 + \mu_{ij}) + \rho_{ji}(1 + \mu_{ji})](\psi_{ij}^c)^2 + \sum_{et}^{\vdash\circ} \rho_{ij}(\psi_{ij}^c)^2 =$$

$$= \sum_{et}^{\vdash\!\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \left(\frac{1}{h_{ij}}\right)^2 + \sum_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \left(\frac{1}{h_{ij}}\right)^2$$

$$R_{c0} = - \sum_{et} (\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\, \psi_{ij}^c - (\Sigma P)\, \delta_p^c = - \sum_{et} (\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji}) \frac{1}{h_{ij}} - (\Sigma P) \cdot 1 =$$

$$= - T_{et} = - \frac{1}{h_0} M_{et},$$

în care: $\bar{\rho}_{ij} = \rho_{ij}(1 + \mu_{ij})$ pentru bare dublu încastrate și $\bar{\rho}_{ij} = \rho_{ij}$ pentru bare încastrate și articulate, reprezintă coeficientul de rigiditate la rotire de bară; T_{et} reprezintă forța tăietoare de etaj în care $\sum P$ se referă la forțele de deasupra etajului respectiv. Considerînd o înălțime medie convențională h_0 pentru etaj, se definește momentul de etaj prin expresia

$$M_{et} = T_{et} \cdot h_0 = \sum_{et} (\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji}) \frac{h_0}{h_{ij}} + (\Sigma P) \cdot h_0. \qquad \text{(IV.86)}$$

Parametrul care definește gradul de libertate este:

$$Z_c = - \frac{R_{c0}}{r_{cc}} = \frac{M_{et}}{h_0 \left[\sum\limits_{et}^{\vdash\!\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \frac{1}{h^2} + \sum\limits_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \cdot \frac{1}{h^2} \right]}. \qquad \text{(IV.87)}$$

Expresiile momentelor care apar la capetele stîlpilor acestui etaj sînt:

$$M_{ij} = - \bar{\rho}_{ij}\theta_{ij} = - \bar{\rho}_{ij}\psi_{ij}^c Z_c = - \bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h_{ij}} Z_c = \bar{d}_{ij} M_{et},$$

$$M_{ji} = - \bar{\rho}_{ji}\theta_{ij} = - \bar{\rho}_{ji}\psi_{ij}^c Z_c = - \bar{\rho}_{ji} \frac{1}{h_{ij}} Z_c = \bar{d}_{ji} M_{et}. \qquad \text{(IV.88)}$$

Momentul de etaj se distribuie cu semn schimbat pe capetele stîlpilor etajului respectiv prin coeficienții de distribuție ai momentului de etaj $\bar{d}$ și deci:

$$M_{et} = - \sum_{et}^{\vdash\!\dashv} (M_{ij} + M_{ji}) - \sum_{et}^{\vdash\circ} M_{ij} = \left[\sum_{et}^{\vdash\!\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \frac{1}{h} + \sum_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h} \right] Z_c \qquad \text{(IV.89)}$$

în care, înlocuind pe Z_c, se obține înălțimea medie convențională a etajului :

$$h_0 = \frac{\sum\limits_{et}^{\vdash\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \frac{1}{h} + \sum\limits_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h}}{\sum\limits_{et}^{\vdash\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \frac{1}{h^2} + \sum\limits_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h^2}} \qquad \text{(IV.90)}$$

care, introdusă în Z_c din expresiile momentelor de capăt, conduce la următoarele expresii pentru coeficienții de distribuție ai momentului de etaj

$$\bar{d}_{ij} = - \frac{\bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h_{ij}}}{\sum\limits_{et}^{\vdash\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \frac{1}{h} + \sum\limits_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h}}$$

$$\bar{d}_{ji} = - \frac{\bar{\rho}_{ji} \frac{1}{h_{ji}}}{\sum\limits_{et}^{\vdash\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) \frac{1}{h} + \sum\limits_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij} \frac{1}{h}} . \qquad \text{(IV.91)}$$

Rezultă că, în prima fază, deblocînd gradele de libertate, nodurile blocate la rotiri suferă translații prin deformarea stîlpilor (v. fig. IV.68, *c*), momentul de etaj distribuindu-se la capetele stîlpilor prin coeficienții $\bar{d}$ a căror sumă pe etaj este $\sum\limits_{et} \bar{d} = -1$.

Pentru stîlpi de înălțime constantă ($h_0 = h$) rezultă următoarele expresii :

$$M_{et} = \sum_{et} (\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji}) + (\sum P) \cdot h \quad \text{și} \quad \bar{d}_{ij} = - \frac{\rho_{ij}}{\sum\limits_{et}^{\vdash\dashv} (\bar{\rho}_{ij} + \bar{\rho}_{ji}) + \sum\limits_{et}^{\vdash\circ} \bar{\rho}_{ij}} . \qquad \text{(IV.92)}$$

2) Faza a doua conține efectul rotirilor de noduri asupra sistemului de bază cu gradele de libertate blocate (v. fig. IV.68, *b*). Această fază corespunde rezolvării prin iterație a cadrelor cu noduri fixe prin procedeele care lucrează cu momente de capăt (Cross). Se deblochează succesiv nodurile distribuind momentele neechilibrate pe capetele de bare de la nodul respectiv și transmițînd momentele distribuite la celelalte capete de bare. Deblocarea nodurilor se face o singură dată, deci iterația nu se efectuează complet deoarece în ciclul următor nodurile se dezechilibrează.

În fiecare ciclu următor, prima fază va avea ca momente de etaj suma momentelor distribuite și transmise pe capetele stîlpilor în faza a doua din ciclul anterior.

În acest procedeu convergența este lentă, ea fiind cu atît mai bună cu cît riglele sînt mai rigide în raport cu stîlpii.

Exemplul de calcul IV.9. Se calculează cadrul etajat din fig. IV. 69, *a* prin procedeul Haller-Kranl.
Coeficienţii de rigiditate ai barelor sînt (pentru $EI = 1$):

$$\rho_{13} = \rho_{24} = \frac{4EI}{4} = 1;\ \rho_{36} = \rho_{47} = \frac{4\,E\cdot 1{,}5I}{6} = 1;\ \rho_{58} = \frac{3EI}{4} = 0{,}75;$$

$$\rho_{12} = \frac{4E\cdot 3I}{6} = 2;\ \rho_{34} = \rho_{45} = \frac{4E\cdot 6I}{6} = 4.$$

Coeficienţii de transmitere pentru momente $\mu = 0{,}5$, barele avînd secţiune constantă.
Coeficienţii de rigiditate ai stîlpilor la rotire de bară sînt:

$$\bar{\rho}_{13} = \bar{\rho}_{24} = 1(1 + 0{,}5) = 1{,}5;\ \bar{\rho}_{36} = \bar{\rho}_{47} = 1(1 + 0{,}5) = 1{,}5;\ \bar{\rho}_{58} = 0{,}75.$$

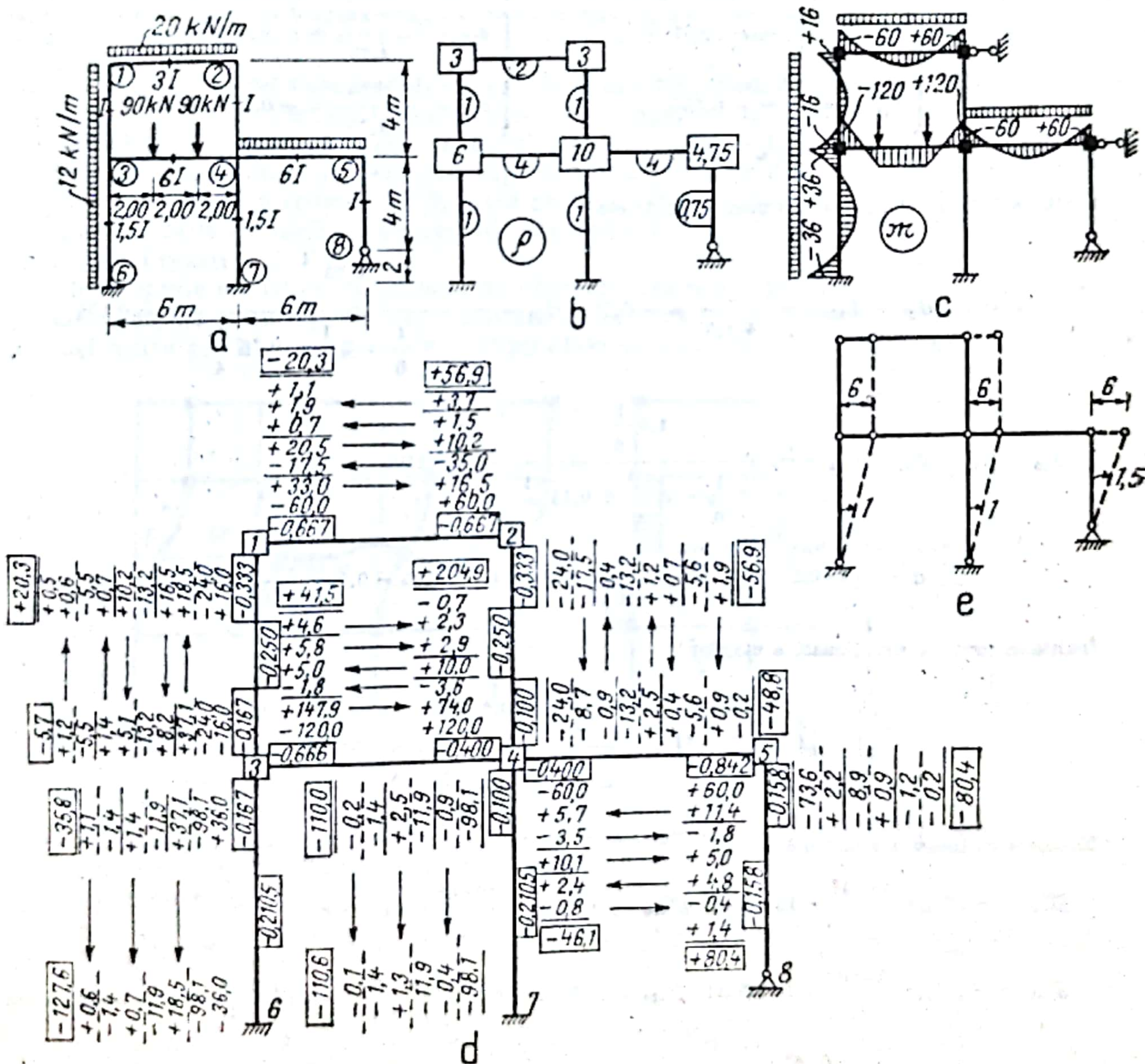


Fig. IV.69

Coeficienții de distribuție pentru momente la noduri sînt:

$$(1)\begin{cases} d_{12} = -\dfrac{2}{3} = -0{,}667 \\ d_{13} = -\dfrac{1}{3} = -0{,}333 \end{cases} \quad \sum d = -1{,}000$$

$$(4)\begin{cases} d_{42} = -\dfrac{1}{10} = -0{,}100 \\ d_{45} = -\dfrac{4}{10} = -0{,}400 \\ d_{47} = -\dfrac{1}{10} = -0{,}100 \\ d_{43} = -\dfrac{4}{10} = -0{,}400 \end{cases} \quad \sum d = -1{,}000$$

$$(3)\begin{cases} d_{31} = -\dfrac{1}{6} = -0{,}167 \\ d_{34} = -\dfrac{4}{6} = -0{,}666 \\ d_{36} = -\dfrac{1}{6} = -0{,}167 \end{cases} \quad \sum d = -1{,}000$$

$$(2)\begin{cases} d_{21} = -\dfrac{2}{3} = -0{,}667 \\ d_{24} = -\dfrac{1}{3} = -0{,}333 \end{cases} \quad \sum d = -1{,}000$$

$$(5)\begin{cases} d_{54} = -\dfrac{4}{4{,}75} = -0{,}842 \\ d_{58} = -\dfrac{0{,}75}{4{,}75} = -0{,}158 \end{cases} \quad \sum d = -1{,}000$$

Coeficienții de distribuție pentru momentele de etaj

$$\overline{d}_{13} = \overline{d}_{31} = \overline{d}_{24} = \overline{d}_{42} = -\frac{1{,}5}{4\cdot 1{,}5} = -0{,}25; \quad \overline{d}_{58} = -\frac{0{,}75\,\frac{1}{4}}{3\,\frac{1}{6} + 3\,\frac{1}{6} + 0{,}75\,\frac{1}{4}} = -0{,}158$$

$$\overline{d}_{36} = \overline{d}_{63} = \overline{d}_{47} = \overline{d}_{74} = -\frac{1{,}5\,\frac{1}{6}}{3\,\frac{1}{6} + 3\,\frac{1}{6} + 0{,}75\,\frac{1}{4}} = -0{,}2105$$

$$\sum_{\text{et.I}} \overline{d} = -4\cdot 0{,}25 = -1{,}00; \quad \sum_{\text{et.II}} \overline{d} = -4\cdot 0{,}2105 - 0{,}158 = -1{,}000.$$

Înălțimea medie convențională a etajelor

$$h_0^{\mathrm{I}} = h^{\mathrm{I}} = 4; \quad h_0^{\mathrm{II}} = \frac{3\,\frac{1}{6}\,2 + 0{,}75\,\frac{1}{4}}{3\,\frac{1}{6^2}\,2 + 0{,}75\,\frac{1}{4^2}} = 5{,}55 \text{ m}.$$

Momente de încastrare perfectă

$$\mathfrak{M}_{13} = -\mathfrak{M}_{31} = \frac{12\cdot 4^2}{12} = 16 \text{ kNm}; \quad \mathfrak{M}_{36} = -\mathfrak{M}_{63} = \frac{12\cdot 6^2}{12} = 36 \text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{21} = -\mathfrak{M}_{12} = \frac{20\cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}; \quad \mathfrak{M}_{43} = -\mathfrak{M}_{34} = 90\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\,6 + 90\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot 6 = 120 \text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{54} = -\mathfrak{M}_{45} = -\frac{20\cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}.$$

Forțele tăietoare de etaj sînt ; $T_I = \sum_I P = 12 \cdot 2 = 24$ kN

$$T_{II} = \sum_{II} P = 24 + 12 \cdot 5 = 84 \text{ kN}.$$

Se începe cu prima fază. Momentele de etaj sînt ;
$M_I = (-16{,}0+16{,}0) + 24{,}0 \times 4 = 96{,}0$ kNm. $M_{II} = (-36{,}0 + 36{,}0)5{,}55/6 + 84 \cdot 5{,}55 = 466{,}0$ kNm care se distribuie pe capetele stîlpilor astfel ; $M_{13} = M_{31} = M_{24} = M_{42} = -96{,}0 \cdot 0{,}25 = -24{,}0$ kNm, $M_{36} = M_{63} = M_{47} = M_{74} = -466{,}0 \cdot 0{,}2105 = -98{,}1$, $M_{58} = -466{,}0 \cdot 0{,}158 = -73{,}6$ kNm.
Se trece la faza a doua efectuînd pentru fiecare nod distribuția momentelor neechilibrate și transmiterea momentelor distribuite.
Se începe cu nodul mai neechilibrat, $\overline{M}_3 = -120{,}0 - 98{,}1 - 24{,}0 - 16{,}0 + 36{,}0 = -222{,}1$ etc.
Se revine la prima fază $M_I = +8{,}2 + 37{,}1 + 18{,}5 + 16{,}5 - 17{,}5 - 0{,}4 - 8{,}7 - 0{,}9 = +52{,}8$ și $M_{II} = +37{,}1 + 18{,}5 - 0{,}9 - 0{,}4 + 2{,}2 = +56{,}5$ care se distribuie pe capetele stîlpilor. Se continuă iterația pînă la aproximația dorită. Verificarea diagramei finale se poate face folosind principiul lucrului mecanic virtual luînd ca deplasare virtuală (fig. IV. 69, *e*) deplasarea cinematică corespunzătoare unui grad de libertate :
$(-127{,}6 - 35{,}8 - 110{,}6 - 110{,}0) \cdot 1 + (-80{,}4) \cdot 1{,}5 + 48{,}0 \cdot 6 + 12{,}0 \cdot 6 \cdot 3 = -504{,}6 + 504{,}0 \approx 0.$

3.3.5. **Procedeul Csonka (utilizarea distorsiunilor) pentru rezolvarea cadrelor etajate cu stîlpi verticali.** Pentru îmbunătățirea convergenței în procedeul anterior, în cazul structurilor cu stîlpi mai rigizi ca riglele, se introduce o fază intermediară propusă de Csonka, care permite o trecere mai rapidă a cadrului spre deformata reală. Această fază constă în încărcarea sistemului de bază cu translațiile nodurilor libere cu grupări de necunoscute rotiri de noduri. Procedeul este valabil pentru cadre la care stîlpii unui etaj au aceleași rezemări.

Se impune cadrului cu gradele de libertate deblocate pentru fiecare riglă cîte o deplasare elastică ca în fig. IV. 70, *a* numită *distorsiune* în care toate nodurile unei rigle au aceeași rotire φ. Rigla respectivă și stîlpii etajelor adiacente ei se deformează, stîlpii unui

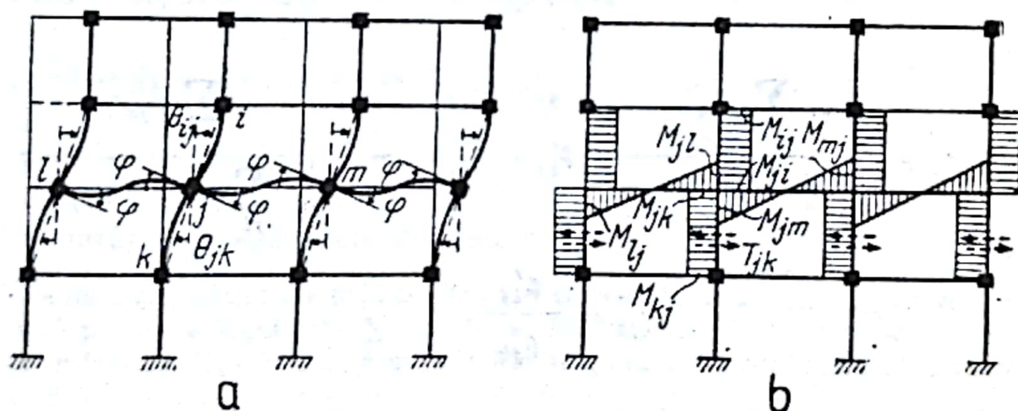


Fig. IV.70

etaj avînd aceeași rotire θ. Momentele care apar la capetele barelor deformate (fig. IV.70, *b*) se determină cu ajutorul relațiilor fundamentale :

— pentru rigla $j-m$

$$M_{jm} = \rho_{jm}\varphi + \rho_{mj}\mu_{mj}\varphi = \rho_{jm}(1 + \mu_{jm})\varphi = \bar{\rho}_{jm}\varphi \text{ și } M_{mj} = \bar{\rho}_{mj}\varphi; \tag{IV.93}$$

— pentru stîlpul $j-k$

$$M_{jk} = \rho_{jk}\varphi - \rho_{jk}(1 + \mu_{jk})\theta_{jk} = \rho_{jk}\varphi - \bar{\rho}_{jk}\theta_{jk}$$
$$M_{kj} = \rho_{jk}\mu_{jk}\varphi - \rho_{kj}(1 + \mu_{kj})\theta_{jk} = \rho_{jk}\mu_{jk}\varphi - \bar{\rho}_{kj}\theta_{jk}. \tag{IV.94}$$

Mărimea rotirii stîlpilor unui etaj, θ_{jk}, din rotirea nodurilor riglei cu φ, rezultă din condiţia de echilibru pentru poziţia deformată din distorsiune:

$$\sum_{et} T_{jk} = 0 \quad \text{sau} \quad \sum_{et} (M_{jk} + M_{kj}) = 0 \text{ (stîlpi de aceeaşi înălţime)}$$

în care, înlocuind cu expresiile respective, se obţine:

$$\theta_{jk} = \frac{\sum_{et} \bar{\rho}_{jk}}{\sum_{et} (\bar{\rho}_{jk} + \bar{\rho}_{kj})} \varphi \quad \text{şi} \quad \theta_{jk} = \frac{1}{2} \rho \text{ (pentru stîlpi cu secţiuni constante).} \qquad \text{(IV.95)}$$

Rezultă, pentru momentele la capetele stîlpilor $j-k$, expresiile

$$M_{jk} = \left[\rho_{jk} - \bar{\rho}_{jk} \frac{\sum_{et} \bar{\rho}_{jk}}{\sum_{et} (\bar{\rho}_{jk} + \bar{\rho}_{kj})} \right] \varphi = \rho'_{jk}\varphi$$

(IV.96)

$$M_{kj} = \left[\rho_{jk}\,\mu_{jk} - \bar{\rho}_{kj} \frac{\sum_{et} \bar{\rho}_{jk}}{\sum_{et} (\bar{\rho}_{jk} + \bar{\rho}_{kj})} \right] \varphi = \rho'_{kj}\, \varphi = \gamma_{jk} M_{jk}$$

în care:

$$\rho'_{jk} = \rho_{jk} - \bar{\rho}_{jk} \frac{\sum_{et} \bar{\rho}_{jk}}{\sum_{et} (\bar{\rho}_{jk} + \bar{\rho}_{kj})}; \quad \rho'_{kj} = \rho_{jk}\mu_{jk} - \bar{\rho}_{kj} \frac{\sum_{et} \bar{\rho}_{jk}}{\sum_{et} (\bar{\rho}_{jk} + \bar{\rho}_{kj})};$$

(IV.97)

$$\gamma_{jk} = \frac{\rho'_{kj}}{\rho'_{jk}}.$$

ρ' pot fi numiţi coeficienţi de rigiditate convenţionali ai stîlpilor $j-k$ la distorsiune, iar γ_{jk} este coeficient de transmitere a momentului pe stîlp la distorsiune. Pentru stîlpi cu secţiune constantă ($\mu = 0{,}5$)

$$\rho'_{jk} = \frac{1}{4} \rho_{jk}; \quad \rho'_{kj} = -\frac{1}{4} \rho_{jk} \quad \text{şi} \quad \gamma_{jk} = -1 \qquad \text{(IV.97a)}$$

şi deci, pentru stîlpi cu secţiune constantă, momentele încovoietoare din distorsiune sînt constante pe stîlpi (fig. IV.70,*b*).

După efectuarea primei faze din procedeul anterior, se intercalează faza intermediară impunînd nodurilor de pe fiecare riglă o rotire medie φ însoţită de deplasarea laterală θ.

Rotirea medie φ este dată de condiţia ca momentele produse de distorsiune să echilibreze suma momentelor neechilibrate $\sum \overline{M}_j$ de pe capetele de bare (riglă şi stîlpi) de la nodurile riglei respective provenite din fazele anterioare, suma extinzîndu-se la toate nodurile riglei

$$\sum_j (M_{jm} + M_{jl} + M_{jk} + M_{ji}) + \sum_j \overline{M}_j = 0 \qquad \text{(IV.98)}$$

în care, înlocuind momentele cu expresiile lor, se obţine

$$\sum_j (\overline{\rho}_{jm} + \overline{\rho}_{jl} + \rho'_{jk} + \rho'_{ji})\,\varphi + \sum_j \overline{M}_j = 0 \quad \text{de unde} \qquad \text{(IV.99)}$$

$$\varphi = -\frac{\sum_j \overline{M}_j}{\sum_j (\overline{\rho}_{jm} + \overline{\rho}_{jl} + \rho'_{jk} + \rho'_{ji})}. \qquad \text{(IV.100)}$$

Momentele la capetele barelor de la nodurile riglei respective se obţin sub forma:
– pentru un capăt de riglă

$$M^r = d'^r \cdot \sum \overline{M}_j;\ (M_{jm} = d'_{jm} \cdot \sum \overline{M}_j) \text{ cu } d'_{jm} = -\frac{\overline{\rho}_{jm}}{\sum_j (\overline{\rho}_{jm} + \overline{\rho}_{jl} + \rho'_{jk} + \rho'_{ji})} \qquad \text{(IV.101)}$$

– pentru un capăt de stîlp de la rigla respectivă

$$M^{st} = d'^{st} \sum \overline{M}_j;\ (M_{jk} = d'_{jk} \sum \overline{M}_j) \text{ cu } d'_{jk} = -\frac{\rho'_{jk}}{\sum_j (\overline{\rho}_{jm} + \overline{\rho}_{jl} + \rho'_{jk} + \rho'_{ji})} \qquad \text{(IV.102)}$$

Deci momentele neechilibrate din fazele anterioare $\sum_j \overline{M}_j$ se distribuie pe capetele de bare de la nodurile unei rigle prin *coeficienţii de distribuţie ai momentelor la distorsiune d'*, a căror sumă pentru o riglă este $\sum d' = -1$. Momentele distribuite pe capetele stîlpilor de la riglă se transmit la celelalte capete ale stîlpilor prin coeficienţii de transmitere la distorsiune γ_{jk}.

Pentru cadre etajate alcătuite din bare cu secţiune constantă ($\mu = 0{,}5$, $\overline{\rho} = 1{,}5\,\rho$, $\rho' = 0{,}25\,\rho$) se obţin următoarele expresii:

$$d'^r_{jm} = -\frac{6\rho_{jm}}{\sum_j (6\rho_{jm} + 6\rho_{jl} + \rho_{jk} + \rho_{ji})};$$

$$d'^{st}_{jk} = -\frac{6\rho^{st}_{jk}}{\sum_j (6\rho_{jm} + 6\rho_{jl} + \rho_{jk} + \rho_{ji})}; \qquad \gamma_{jk} = -1 \qquad \text{(IV.103)}$$

(pentru rigle articulate la un capăt $\overline{\rho} = \rho$, termenul 6ρ se înlocuieşte cu 4ρ).

Pentru stîlpii inferiori articulați la bază ($\overline{\rho}_{kj} = \rho_{kj} = 0$) se obțin expresiile:

$$\rho'_{jk} = 0, \quad d'^{st}_{jk} = 0; \quad d'^{r}_{jk} = -\frac{6\rho_{jm}}{\sum_j (6\rho_{jm} + 6\rho_{jl} + \rho_{ji})}. \qquad \text{(IV.104)}$$

Introducerea acestei faze intermediare nu este obligatorie în toate ciclurile procedeului Haller-Kranl, ci se poate introduce numai în primele cicluri.

Exemplul de calcul IV.10. Se determină diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul etajat din fig. IV.71, *a* prin procedeul Csonka.

Structura fiind simetrică, pentru încărcările la noduri date trebuie rezolvată numai semistructura corespunzătoare încărcării antisimetrice (fig. IV.71, *b*).

Coeficienții de rigiditate ρ și $\overline{\rho}$ (pentru $EI = 1$) sînt calculați în tabelul din fig. IV.71, *d*. Coeficienții de distribuție pentru momente neechilibrate sînt calculați și trecuți direct pe schema de calcul (primele valori încadrate pe capetele de bare).

Coeficienții de distribuție pentru momentele de etaj (valorile trecute pe schema de calcul la mijlocul stîlpilor) sînt:

$$\overline{d}_{13} = \overline{d}_{31} = \overline{d}_{24} = \overline{d}_{42} = -\frac{1,5}{4\cdot 1,5} = -0,25; \quad \overline{d}_{35} = \overline{d}_{53} = \overline{d}_{46} = \overline{d}_{64} = -\frac{2,25}{4\cdot 2,25} = -0,25;$$

$$\overline{d}_{57} = \overline{d}_{75} = \overline{d}_{68} = \overline{d}_{86} = -\frac{3}{4\cdot 3} = -0,25.$$

Coeficienții de distribuție pentru momente de distorsiune (valorile încadrate trecute pe capetele barelor) sînt:

– pentru prima riglă

$$d'_{12} = -\frac{6\cdot 1,2}{(6\cdot 1,2 + 6\cdot 1,2 + 4\cdot 1,8 + 1 + 1)} = -\frac{7,2}{23,6} = -0,305 = d'_{21};$$

$$d'_{29} = -\frac{4\cdot 1,8}{23,6} = -0,305$$

$$d'_{13} = -\frac{1}{23,6} = -0,0425; \quad d'_{24} = -\frac{1}{23,6} = -0,0425; \quad \Sigma d' = -0,305\cdot 3 - 0,0425\cdot 2 = -1;$$

– pentru rigla a doua

$$d'_{34} = d'_{43} = -\frac{6,16}{(6\cdot 1,6 + 6\cdot 1,6 + 4\cdot 2,4 + 1 + 1 + 1,5 + 1,5)} = -\frac{9,6}{33,8} = -0,284;$$

$$d'_{4,10} = -\frac{4\cdot 2,4}{33,8} = -0,284$$

$$d'_{31} = d'_{42} = -\frac{1}{33,8} = -0,0296; \quad d'_{35} = d'_{46} = -\frac{1,5}{33,8} = -0,0444;$$

$$\Sigma d' = -0,284\cdot 3 - 0,0296\cdot 2 - 0,0444\cdot 2 = -1;$$

– pentru rigla a treia

$$d'_{56} = d'_{65} = -\frac{6\cdot 2}{(6\cdot 2 + 6\cdot 2 + 4\cdot 3 + 1,5 + 1,5 + 2 + 2)} = -\frac{12}{43} = -0,279;$$

$$d'_{53} = d'_{64} = -\frac{1,5}{43} = -0,035; \quad d'_{57} = d'_{68} = -\frac{2}{43} = -0,0465; \quad d'_{6,11} = -\frac{4.3}{43} = -0,279;$$

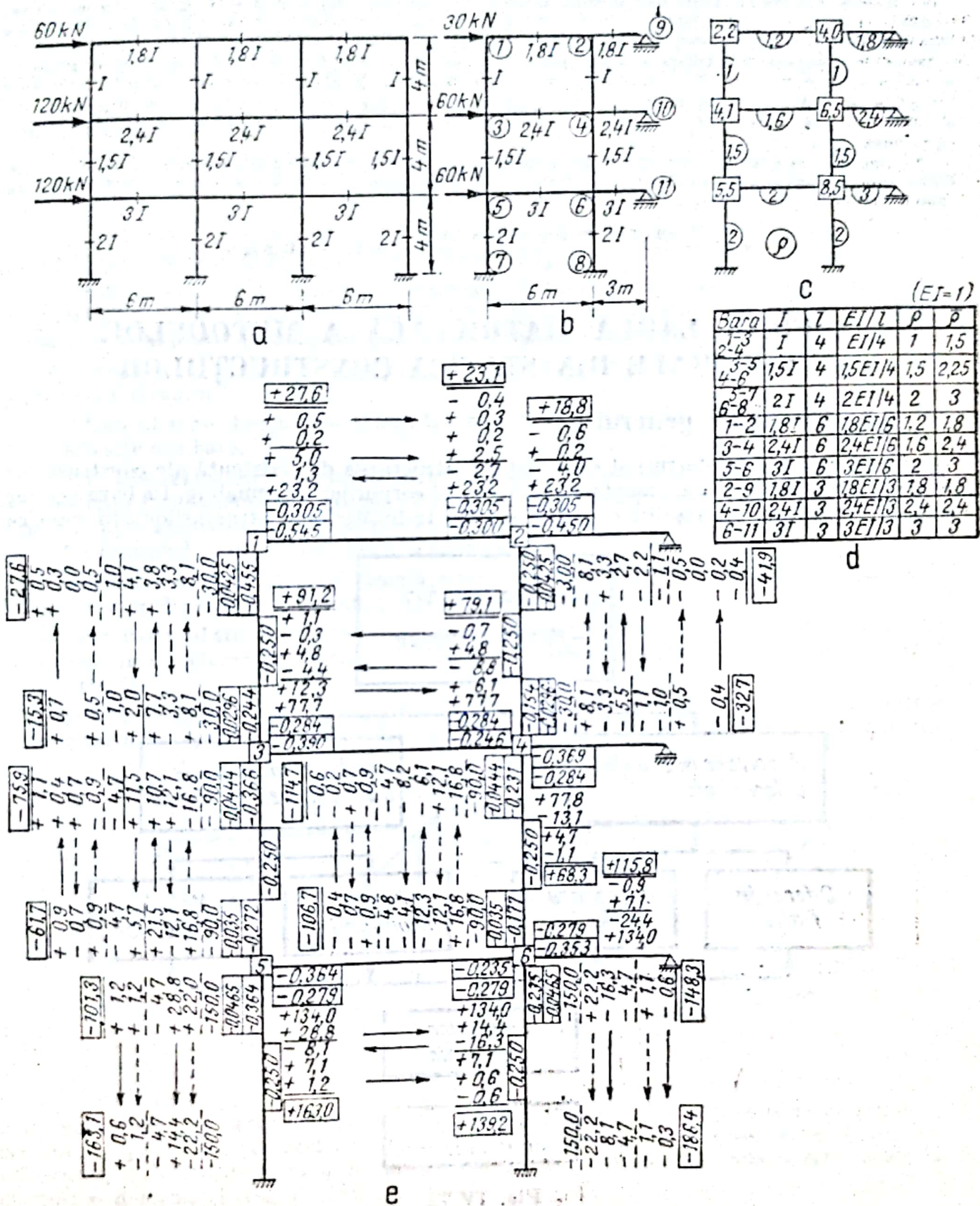
$$\Sigma d' = -0,279\cdot 3 - 0,035\cdot 2 - 0,0465\cdot 2 = -1.$$

Coeficienții de transmitere a momentelor distribuite la distorsiune pe stîlpi cu secțiune constantă $\gamma' = -1$.

Încărcarea fiind la noduri, momentele de încastrare perfectă sînt nule.

Forțele tăietoare de etaj sînt: $T_I = \sum_I P = 30$ kN; $T_{II} = \sum_{II} P = 30 + 60 = 90$ kN;

$T_{III} = \sum_{III} P = 90 + 60 = 150$ kN.



Bara	I	l	EI/l	ρ	ρ̄
1-3, 2-4	I	4	EI/4	1	1,5
3-5, 4-6	1,5I	4	1,5EI/4	1,5	2,25
5-7, 6-8	2I	4	2EI/4	2	3
1-2	1,8I	6	1,8EI/6	1,2	1,8
3-4	2,4I	6	2,4EI/6	1,6	2,4
5-6	3I	6	3EI/6	2	3
2-9	1,8I	3	1,8EI/3	1,8	1,8
4-10	2,4I	3	2,4EI/3	2,4	2,4
6-11	3I	3	3EI/3	3	3

Fig. IV.71

Iterația se începe cu prima fază, distribuția momentelor de etaj; $M_I = 30 \cdot 4 = 120$ kNm; $M_{II} = 90 \cdot 4 = 360$ kNm; $M_{III} = 150 \cdot 4 = 600$ kNm (momentele distribuite sint cele marcate cu o linie punctată). Se trece la faza intermediară, distribuția momentelor neechilibrate la distorsiune; pentru rigla a treia: $\sum M_j = -90 - 150 - 150 - 90 = -480$ care se distribuie $+ 480 \cdot 0{,}0465 = 22{,}2$; $480 \cdot 0{,}035 = 16{,}8$; $480 \cdot 0{,}279 = 134{,}0$ și se transmit pe stilpi cu $\gamma = -1$ (săgeată punctată); pentru rigla a doua: $\sum \overline{M}_j = -30 - 90 - 30 - 90 - 16{,}8 - 16{,}8 = -273{,}6$ care se distribuie $273{,}6 \cdot 0{,}0444 = 12{,}1$; $273{,}6 \cdot 0{,}0296 = 8{,}1$; $273{,}6 \cdot 0{,}284 = 77{,}7$; și pentru prima riglă $\sum \overline{M}_j = -30 - 8{,}1 - 30 - 8{,}1 = -76{,}2$ care se distribuie $76{,}2 \cdot 0{,}305 = 23{,}2$; $76{,}2 \cdot 0{,}0425 = 3{,}3$.

Urmează faza a treia, operații Cross pentru fiecare nod. Se reiau alternativ cele trei faze pină la aproximația dorită. Faza intermediară nu este obligatorie în toate ciclurile. Prin însumarea coloanelor se obțin momentele finale pe capete de bare. Verificarea se face pe baza echilibrului pe orizontală:

$$+150 - \frac{163{,}1 + 101{,}3 + 186{,}4 + 148{,}3}{4} = +150 - 149{,}8 \approx 0.$$

4. FORMULAREA MATRICEALĂ A METODELOR GENERALE DIN STATICA CONSTRUCȚIILOR

4.1. Elemente generale

Analiza stării de eforturi și deformații în structurile de rezistență ale construcțiilor are la bază principiile fundamentale ale mecanicii corpurilor deformabile. Pe baza acestor principii se elaborează teoriile de calcul cunoscute în Mecanica structurilor. În ceea ce

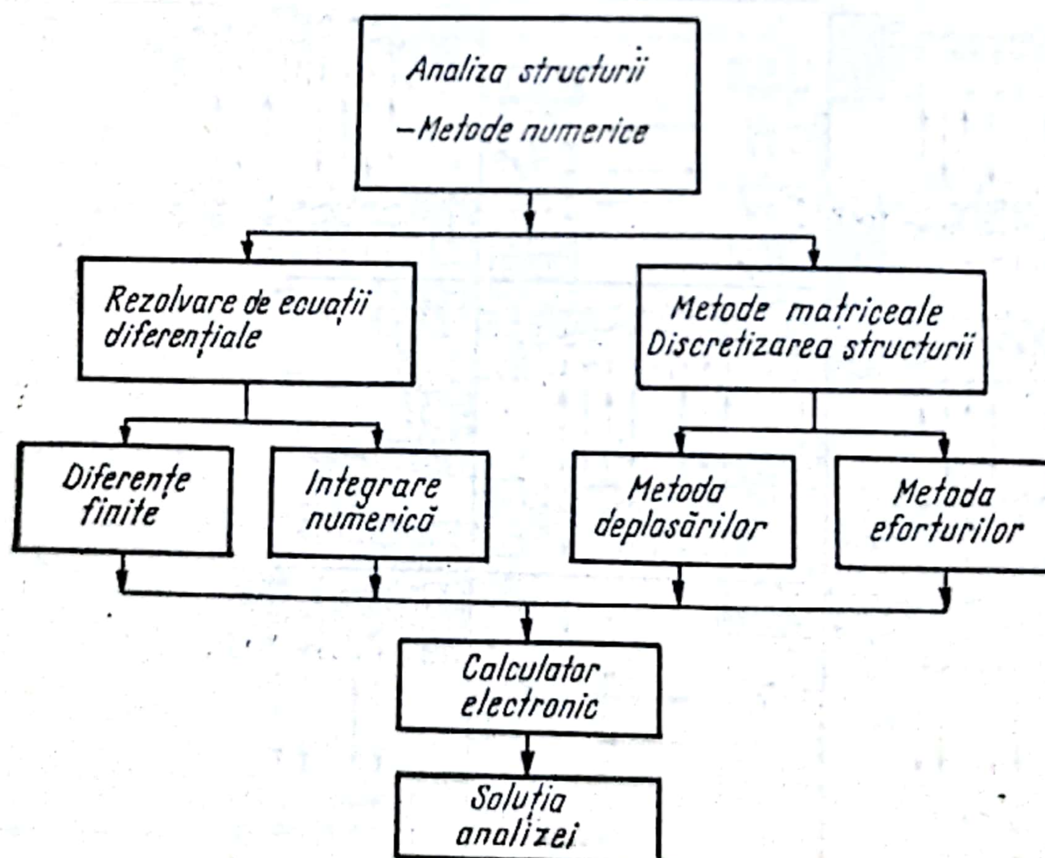


Fig. IV.72

privește rezolvarea din punct de vedere matematic a diferitelor aspecte de calcul ale structurilor, se dispune de două căi distincte : metode analitice și metode numerice. Utilizarea calculatoarelor electronice a condus la dezvoltarea celei de a doua metode, în general privind tehnica de calcul matematic și în particular privind calculul structurilor (fig. IV.72).

Etapele semnificative în rezolvarea cu ajutorul calculatorului electronic a analizei structurilor pot fi sintetizate astfel :

1) *Discretizarea* structurii în elemente componente. Adoptarea ipotezelor privind starea de eforturi sau de deformații a elementului component, deci precizarea tipului de *element finit* ales.

2) Caracterizarea elementului finit din punct de vedere al rigidității sau deformabilității sale (*matrice de rigiditate sau flexibilitate*).

3) Soluția analizei pentru întreaga structură. Conectarea distribuțiilor de deplasări sau eforturi ale elementelor individuale prin satisfacerea ecuațiilor de echilibru (*metoda deplasărilor*), respectiv pe baza compatibilității deplasărilor (*metoda eforturilor*).

4) Determinarea stării de eforturi și deformații finale pentru toate elementele componente ale structurii.

Conținutul acestui capitol se referă la formulările matriceale privind calculul structurilor alcătuite din bare.

4.1.1. **Discretizarea structurii.** Structura de rezistență a unei construcții poate fi subîmpărțită în elemente mai simple: o structură în cadru poate fi subîmpărțită în substructuri ușor rezolvabile, care la rîndul lor pot fi divizate în bare ; o grindă cu zăbrele poate fi subîmpărțită în panouri sau mai elementar în bare dublu articulate etc.

Elementele obținute prin divizarea structurii rămîn corpuri deformabile, dar alcătuirea lor simplă permite a fi studiate prin metode clasice.

Pentru calculul structurilor în exprimare matriceală, o structură va fi considerată ca o colecție de elemente elastice de lungime finită conectate prin intermediul unor noduri rigide.

Maniera de discretizare a structurii este teoretic arbitrară. Practic ea depinde de o serie de factori : tipul structurii (cadru, grindă cu zăbrele etc.), încărcări (sarcinile distri-

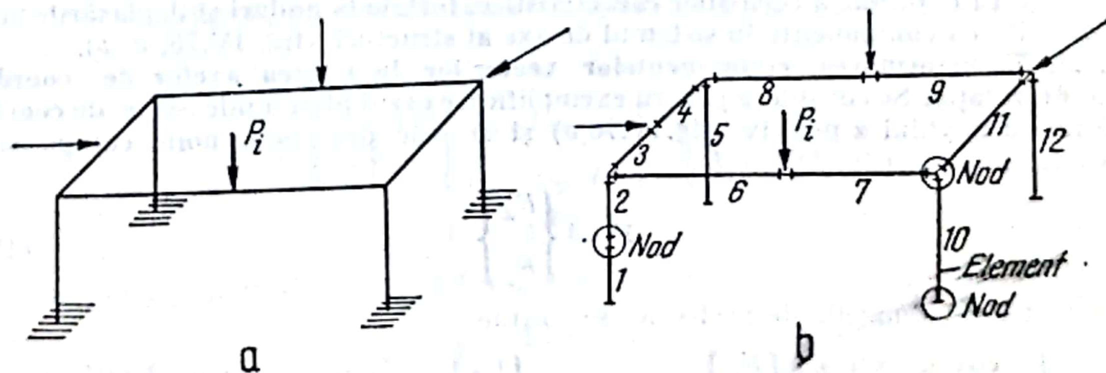


Fig. IV.73

buite vor fi înlocuite cu un set echivalent acționînd la noduri, iar în dreptul sarcinilor concentrate se pot introduce noduri suplimentare), rezemări (pot fi considerate noduri ale structurii), numărul de puncte în care se dorește să se obțină informații referitoare la eforturi și deformații (fig. IV.73).

4.1.2. Sisteme de coordonate. Un grup de direcţii orientate, ataşate unei structuri sau elementelor componente ale structurii, formează un *sistem de coordonate*. În acest sistem se definesc forţele şi deplasările într-un număr finit de puncte în conformitate cu maniera de discretizare preconizată.

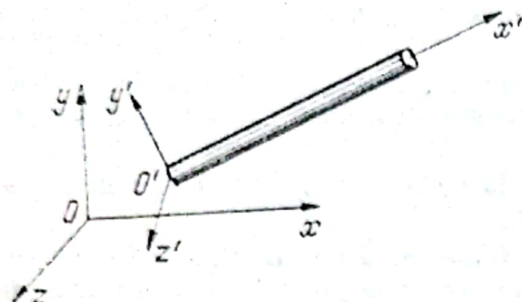


Fig. IV.74

Corelaţia element finit-structură în ansamblu, impune alegerea a două sisteme de coordonate:

— sistemul de axe elementar sau propriu (ataşat elementului finit) în raport cu care sînt exprimate caracteristicile de încărcare-deformare ale elementului;

— sistemul de axe al structurii, în raport cu care sînt exprimate ecuaţiile de echilibru sau de compatibilitate.

În fig. IV.74 sînt prezentate sistemele de axe elementar $(O'x'y'z')$ şi structural $(Oxyz)$, pentru un element de bară dreaptă în spaţiu.

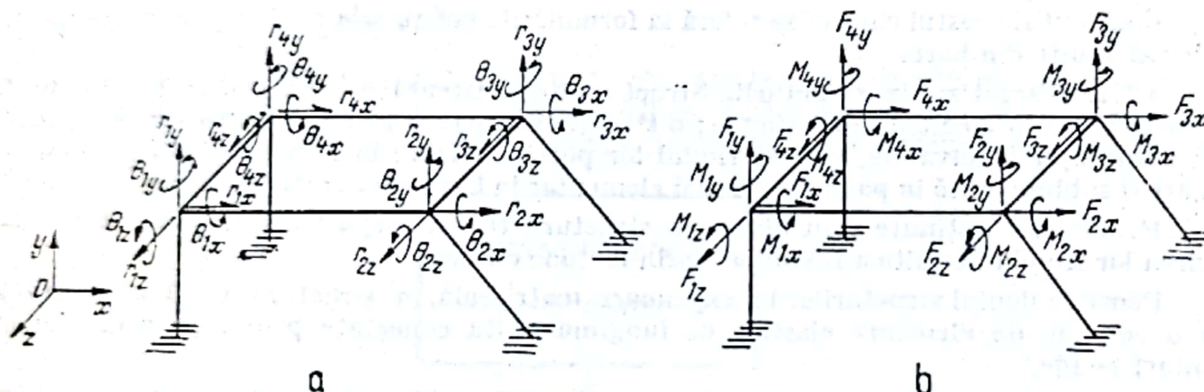


Fig. IV.75

În vederea exprimării ecuaţiilor caracteristice, forţele la noduri şi deplasările acestora vor fi definite cu componente în sistemul de axe al structurii (fig. IV.75, *a*, *b*).

4.1.3. Transformarea componentelor vectorilor la rotirea axelor de coordonate. Matrice de rotaţie. Se consideră pentru exemplificare cazul plan unde axele de coordonate sînt rotite cu unghiul α pozitiv (fig.IV.76,*a*) şi se vor determina noile componente ale unui vector forţă **F** (fig. IV.76, *b*).

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.105)}$$

Scriind matriceal ecuaţiile de proiecţie, se obţine

$$\begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \text{ respectiv } \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.106)}$$

sau

$$\mathbf{F}' = \mathbf{L}^T\mathbf{F} \text{ respectiv } \mathbf{F} = \mathbf{L}\mathbf{F}' \qquad \text{(IV.106a)}$$

Termenii trigonometrici din matricea **L** pot fi interpretaţi ca cosinuşii directori ai axelor Ox' şi Oy' în raport cu axele Ox respectiv Oy.

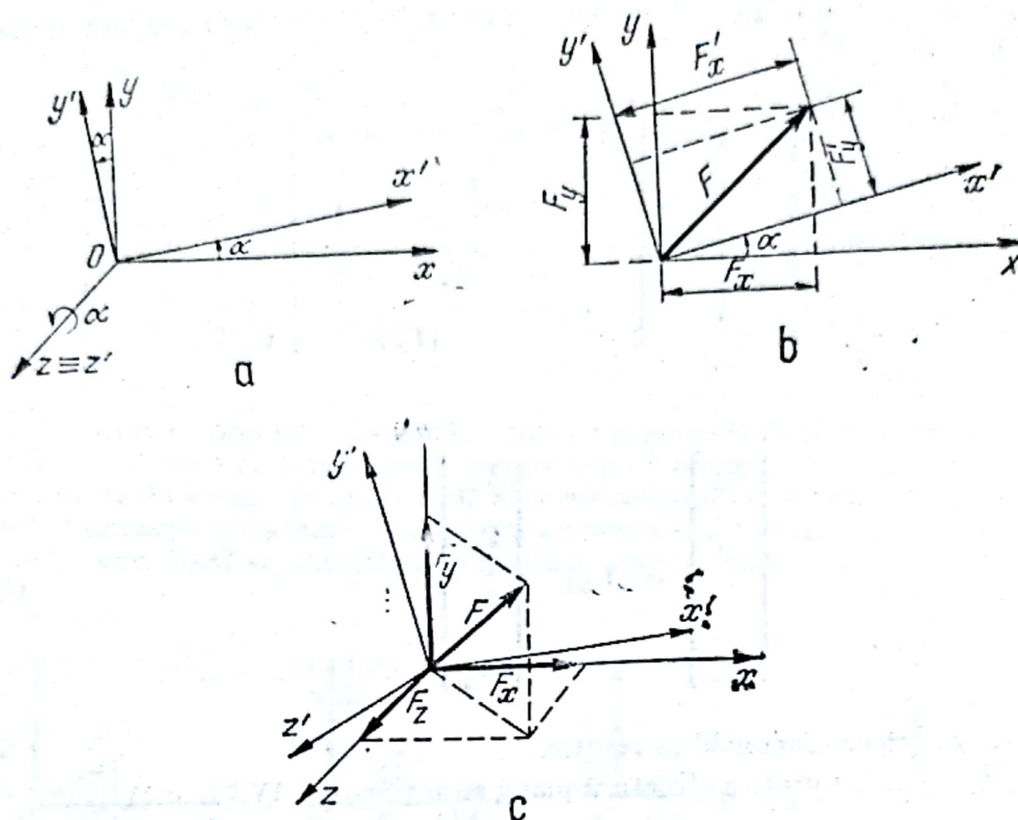


Fig. IV.76

În cazul sistemelor tridimensionale, axele de coordonate rotire $Ox'y'z'$ sînt descrise în raport cu sistemul de axe original $Oxyz$ prin cosinuşii directori l_{ij}(i — indică axele $x'y'z'$ iar j axele xyz).

Considerînd vectorul **F** cu componentele (F_x, F_y, F_z) în sistemul de axe original, prin proiecţii se obţin componentele în sistemul de axe rotit (F'_x, F'_y, F'_z), (fig. IV.76, c)

$$\begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \\ l_{zx} & l_{zy} & l_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.107)}$$

sau

$$\mathbf{F}' = \mathbf{L}^T\mathbf{F} \qquad \text{(IV.107a)}$$

Pe baza ortogonalităţii matricei **L** rezultă

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}\mathbf{F}' \qquad \text{(IV.107b)}$$

Particularizînd relaţia (IV.107) pentru cazul plan se obţine

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{xx} & l_{yx} & 0 \\ l_{xy} & l_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.108)}$$

În calculul structurilor se întîlnesc vectori alcătuiți la rîndul lor din mai mulți vectori pentru care se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}'_1 \\ \mathbf{F}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_1]^T & & & \\ & [\mathbf{L}_2]^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\mathbf{L}_n]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.109)}$$

Sau

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}'_1 \\ \mathbf{F}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}'_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{L}_D]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.109a)}$$

unde $\mathbf{L}_D$ este matricea diagonală de rotație.

Pentru un element dintr-o structură plană se obține (fig. IV.77, *a,b*)

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

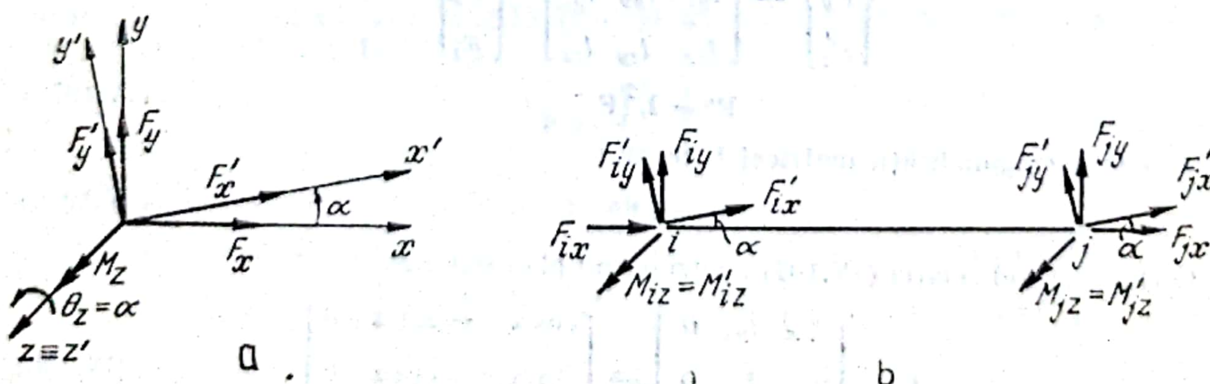


Fig. IV.77

Relația (IV.109) devine

$$\begin{Bmatrix} F'_{ix} \\ F'_{iy} \\ M' \\ F'_{jx} \\ F'_{jy} \\ M'_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.109b)}$$

4.1.4. Eforturi și deplasări de capăt pentru un element de bară dreaptă. În vederea caracterizării stării de eforturi și deformații pentru un element de bară dreaptă, în continuare se va prezenta studiul unui astfel de element solicitat la extremități.

4.1.4.1. Convenție de semne. Convenția de semn pozitiv pentru componentele vectorului forță generalizată și vectorului deplasare generalizată este prezentată în fig. IV.78, *a*, *b*.

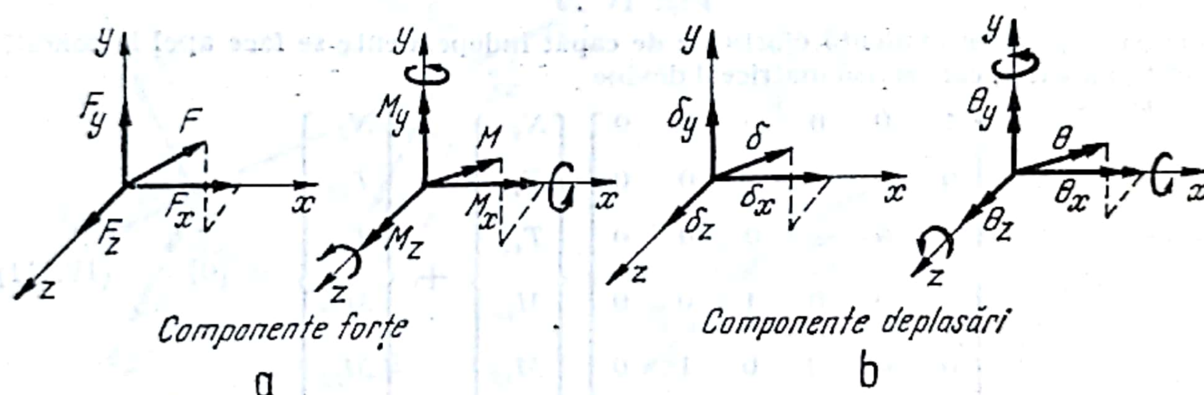


Fig. IV.78

4.1.4.2. Eforturi de capăt pentru un element de bară dreaptă. În fig. IV.79 sînt prezentate eforturile de capăt pentru un element de bară dintr-o structură spațială cuprins între nodurile *i* și *j*. Componentele forțe și momente de capăt sînt prezentate în sistemul de axe al elementului.

Vectorii eforturilor de capăt s-au notat cu $\mathbf{E}'_i$ pentru extremitatea *i* și $\mathbf{E}'_j$ pentru extremitatea *j*

$$\mathbf{E}'_i = \begin{Bmatrix} N_i \\ T_{iy} \\ T_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{E}'_j = \begin{Bmatrix} N_j \\ T_{jy} \\ T_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.110)}$$

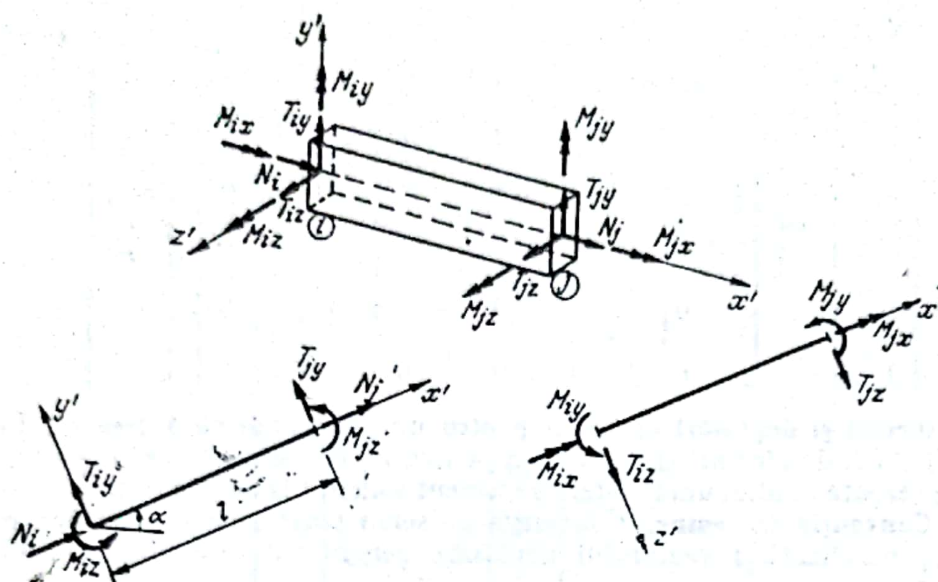


Fig. IV.79

Pentru a pune în evidenţă eforturile de capăt independente se face apel la condiţia de echilibru a barei, care scrisă matriceal devine

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ T_{iy} \\ T_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_j \\ T_{jy} \\ T_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \text{(IV.111)}$$

sau

$$\mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}'_i + \mathbf{E}'_j = 0 \qquad \text{(IV.111a)}$$

unde matricea $\mathbf{T}_{ij}$ numită *matrice de transfer* stabileşte legătura între eforturile din extremitatea i şi cele din extremitatea j.

Pe baza relaţiei (IV.111) se reţin numai şase eforturi de capăt independente, care pot caracteriza complet starea de eforturi a elementului, denumite *set fundamental*. Grupîndu-le într-un vector se obţine

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{Bmatrix} M_{iz} \\ M_{jz} \\ M_{iy} \\ M_{jy} \\ M_x \\ N \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.112)}$$

În fig. IV.80,*a* este prezentat setul fundamental al eforturilor de capăt, iar în fig. IV.80, *b* și *c* eforturile de capăt pentru un element spațial de bară în două variante după cum se utilizează sistemul de axe al elementului, respectiv sistemul de axe al structurii.

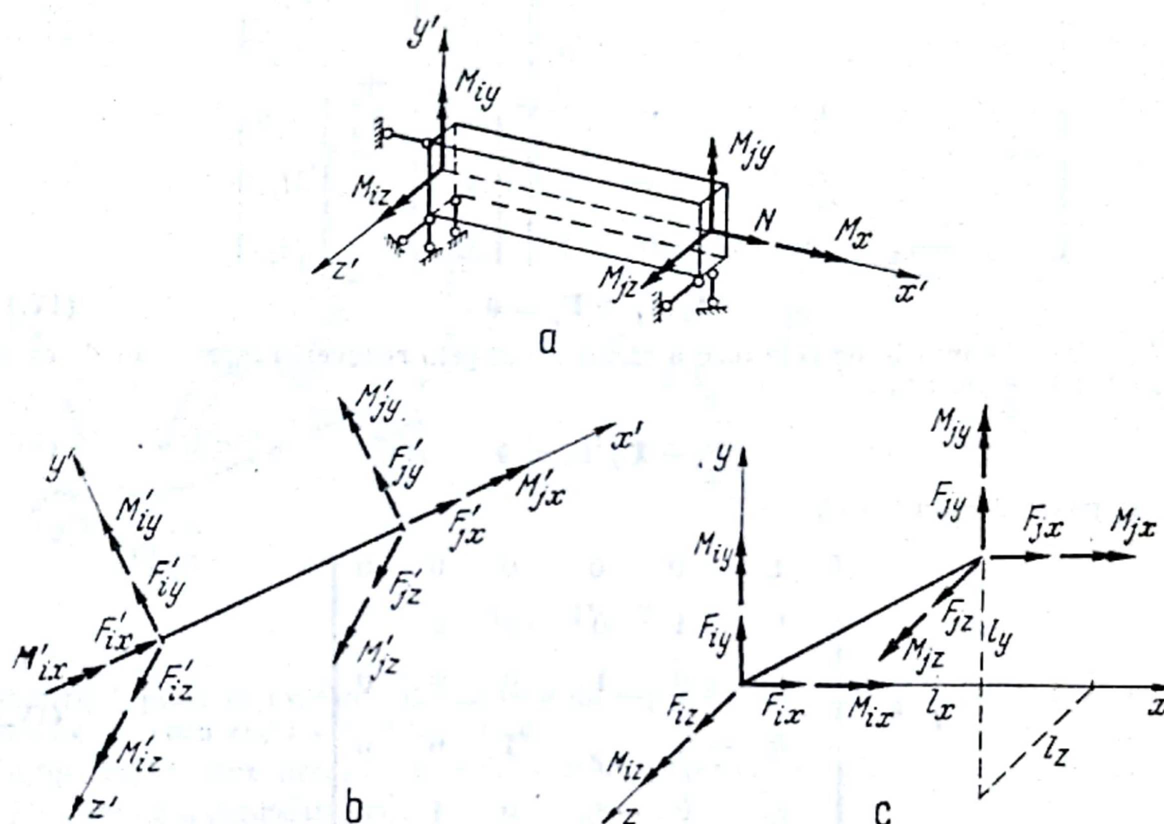


Fig. IV.80

Pentru un element de structură plană setul fundamental al eforturilor de capăt precum și componentele eforturilor de capăt în sistemul de axe al elementului, respectiv al structurii, sînt prezentate în fig. IV.81, *a*, *b* și *c*.

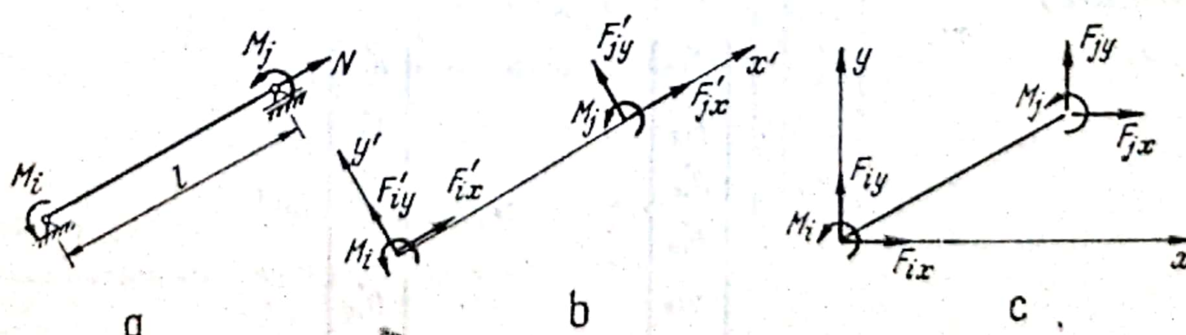


Fig. IV.81

Scriind în punctul j ecuaţiile de echilibru al elementului pentru componente eforturi de capăt exprimate în sistemul de axe al structurii (fig. IV.80, c) se obţine

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_z & -l_y & 1 & 0 & 0 \\ -l_z & 0 & l_x & 0 & 1 & 0 \\ l_y & -l_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \text{(IV.113)}$$

sau

$$\mathbf{T}_{ij}\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_j = \mathbf{0} \qquad \text{(IV.113a)}$$

Exprimînd condiţia de echilibru a elementului prin reducerea eforturilor de capăt în extremitatea i rezultă:

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{T}_{ij}^{-1}\mathbf{E}_j = \mathbf{0} \qquad \text{(IV.114)}$$

unde se poate demonstra că

$$\mathbf{T}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_z & l_y & 1 & 0 & 0 \\ l_z & 0 & -l_x & 0 & 1 & 0 \\ -l_y & l_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.115)}$$

4.1.4.3. **Deplasări de capăt pentru un element de bară dreaptă.** În fig. IV.82 sînt prezentate deplasările de capăt pentru un element spaţial de bară cuprins între nodurile i şi j. Componentele deplasări liniare şi rotiri ale extremităţilor sînt prezentate în sistemul de axe al elementului.

Vectorii deplasărilor de capăt s-au notat cu $\mathbf{D}'_i$ pentru extremitatea i şi $\mathbf{D}'_j$ pentru extremitatea j

$$\mathbf{D}'_i = \begin{Bmatrix} \delta'_{ix} \\ \delta'_{iy} \\ \delta'_{iz} \\ \theta'_{ix} \\ \theta'_{iy} \\ \theta'_{iz} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D}'_j = \begin{Bmatrix} \delta'_{jx} \\ \delta'_{jy} \\ \delta'_{jz} \\ \theta'_{jx} \\ \theta'_{jy} \\ \theta'_{jz} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.116)}$$

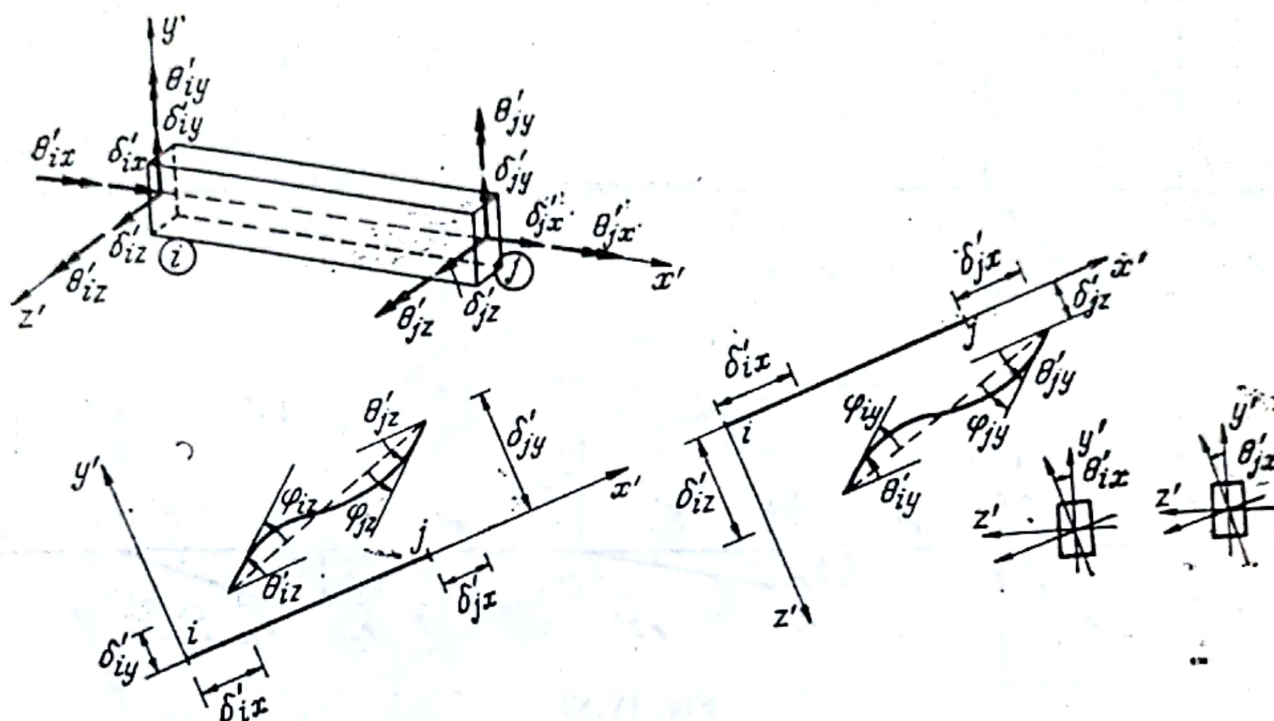


Fig. IV·82

Pentru a pune în evidenţă deplasările de capăt independente, vor trebui eliminate deplasările de corp rigid ale elementului.

În fig. IV.83 sînt prezentate deplasările de corp rigid ale elementului cînd extremităţii j îi este dată deplasarea $\mathbf{D}'_j$.

Scriind sub formă matriceală ecuaţiile de legătură între deplasările de capăt în ipoteza elementului rigid se obţine

$$\begin{Bmatrix} \delta'_{ix} \\ \delta'_{iy} \\ \delta'_{iz} \\ \theta'_{ix} \\ \theta'_{iy} \\ \theta'_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_{jx} \\ \delta'_{jy} \\ \delta'_{jz} \\ \theta'_{jx} \\ \theta'_{jy} \\ \theta'_{jz} \end{Bmatrix} \tag{IV.117}$$

Comparînd cu relaţia (IV.111) se poate scrie

$$\mathbf{D}'_i = \mathbf{T}^T_{ij}\, \mathbf{D}'_j \tag{IV.118}$$

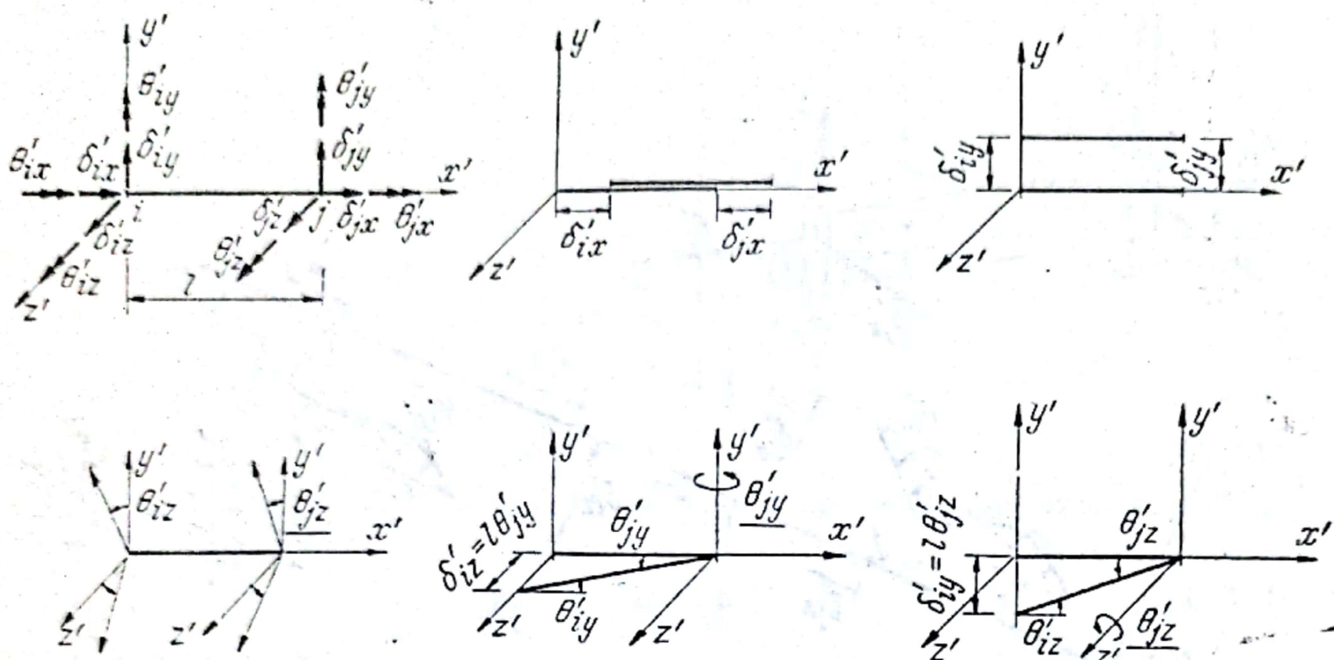


Fig. IV.83

Din analiza relaţiei (IV.117) rezultă deplasările de capăt independente ce definesc complet starea de deformare a elementului:

— alungirea axei elementului ($\Delta_{ij} = \delta'_{jx} - \delta'_{ix}$);

— rotirea relativă de răsucire a secţiunilor de capăt ($\psi_{ij} = \theta'_{jx} - \theta'_{ix}$);

— rotirile secţiunilor de capăt raportate la axa ce uneşte extremităţile deplasate ale elementului (φ_{iz}, φ_{jz}, φ_{iy}, φ_{jy}).

Pe baza fig. IV.84 translaţia relativă a secţiunilor de capăt normale pe axa elementului poate fi înlocuită cu o rotire negativă a extremităţilor.

Setul deplasărilor de capăt independente, denumit şi *set fundamental*, va fi grupat într-un vector sub forma

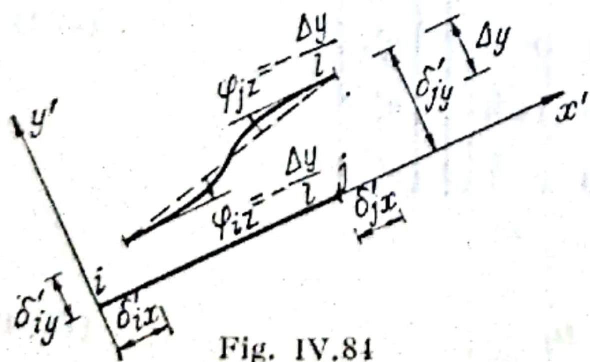


Fig. IV.84

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{Bmatrix} \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \\ \varphi_{iy} \\ \varphi_{jy} \\ \psi_{ij} \\ \Delta_{ij} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.119)}$$

În fig. IV.85, *a* este prezentat setul fundamental al deplasărilor de capăt iar în fig. IV.85, *b* și *c* deplasările de capăt pentru un element de bară spațial în două variante după cum se utilizează sistemul de axe al elementului, respectiv al structurii.

Pentru cazul elementelor de bară dreaptă plane componentele deplasărilor de capăt sînt indicate în fig. IV.86.

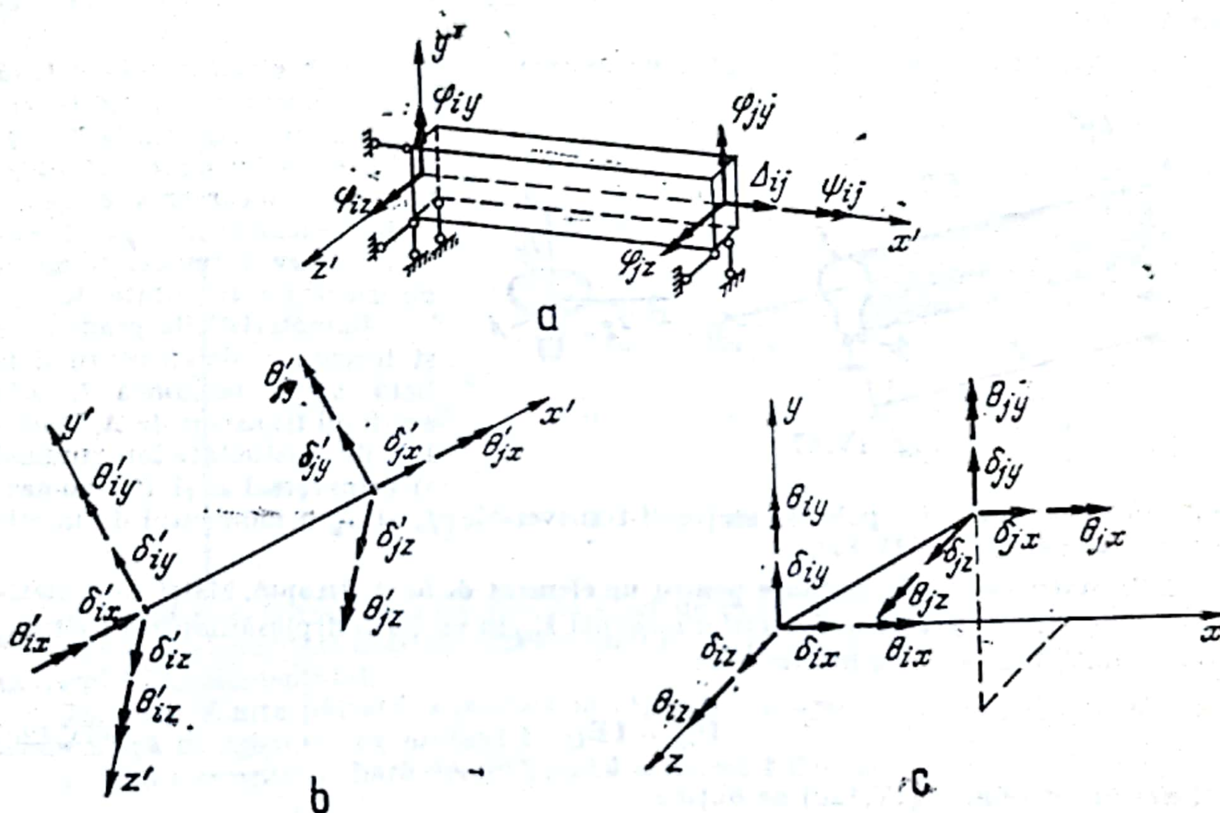


Fig. IV.85

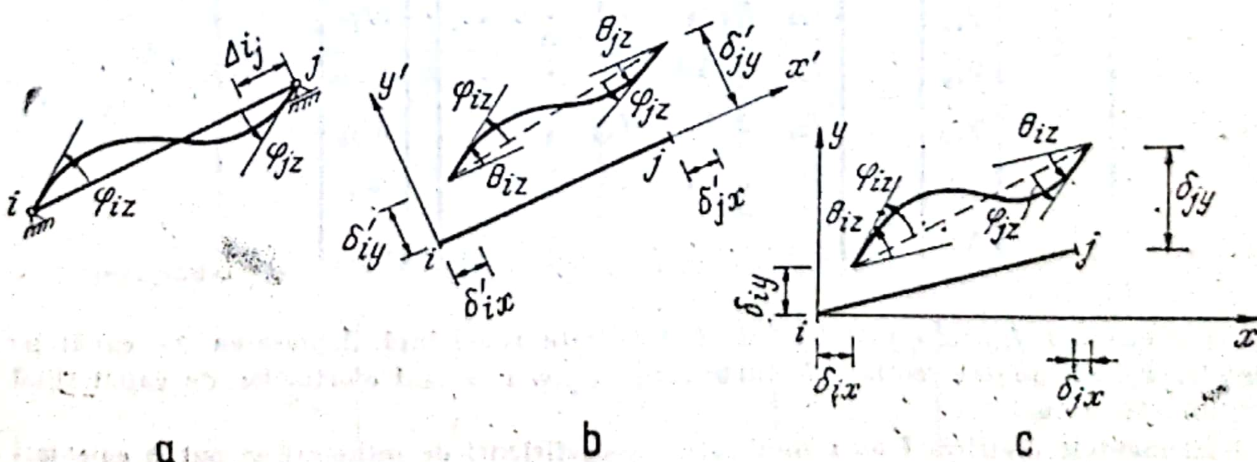


Fig. IV.86

4.2. Matrice caracteristice ale elementului de bară dreaptă

4.2.1. Matrice de flexibilitate şi rigiditate. Legătura între eforturile de capăt şi deplasările de capăt ale elementului se realizează prin intermediul matricelor de flexibilitate şi rigiditate. Aceste matrice reflectă proprietăţile elastice, deformabilitatea elementului.

Deplasările de capăt obţinute prin încărcarea extremităţilor elementului de bară cu forţe unitare constituie termenii matricei de flexibilitate **f**.

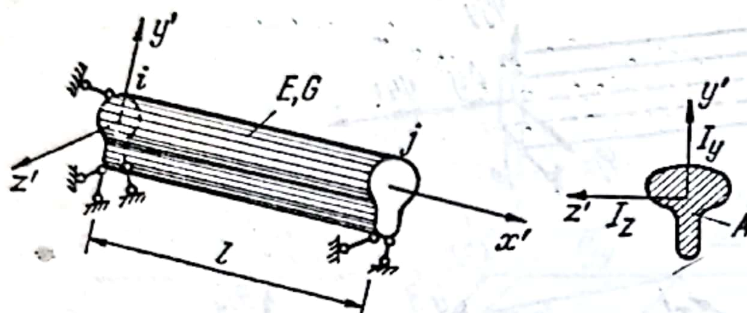


Fig. IV.87

Eforturile de capăt obţinute prin încărcarea extremităţilor elementului cu deplasări unitare, formează termenii matricei de rigiditate **k**.

Caracteristicile geometrice şi mecanice ale elementului de bară sînt: lungimea l, aria secţiunii transversale A, modulele de elasticitate longitudinal şi transversal E şi G, momentele de inerţie axiale principale ale secţiunii transversale I_z şi I_y şi momentul de inerţie polar echivalent J (fig. IV.87).

4.2.2. Matricea de flexibilitate pentru un element de bară dreaptă. Matricea de flexibilitate **f** transformă vectorul eforturilor de capăt $\mathbf{E}_{ij}$ în vectorul deplasărilor de capăt $\mathbf{D}_{ij}$ şi este definită prin ecuaţia matriceală:

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{f}\,\mathbf{E}_{ij} \tag{IV.120}$$

Dezvoltînd relaţia (IV.120) se obţine

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \\ \varphi_{iy} \\ \varphi_{jy} \\ \psi_{ij} \\ \Delta_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{41} & \cdot & \cdot & f_{kq} & \cdot & \cdot \\ f_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{iz} \\ M_{jz} \\ M_{iy} \\ M_{jy} \\ M_x \\ N \end{Bmatrix} \tag{IV,120a}$$

Un element f_{kq} din matricea de flexibilitate reprezintă deplasarea de capăt pe direcţia k, aplicînd pe direcţia q efortul de capăt $E_q = 1$, restul eforturilor de capăt fiind considerate zero.

Elementele matricei **f** au semnificaţie de coeficienţi de influenţă şi pot fi calculaţi cu una din metodele Staticii construcţiilor.

Pentru un element de bară spațială, matricea de flexibilitate considerînd seturile fundamentale ale eforturilor și deplasărilor de capăt este:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI_z} & -\frac{l}{6EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{6EI_z} & \frac{l}{3EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{3EI_y} & -\frac{l}{6EI_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l}{6EI_y} & \frac{l}{3EI_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.121)}$$

Fiecărui caz de încercare cu cîte un efort de capăt unitate îi corespunde o coloană a matricei $\mathbf{f}$, elementele acesteia reprezentînd succesiv cele șase deplasări ce se produc la extremitățile elementului.

Matricea $\mathbf{f}$ este pătrată, simetrică în raport cu diagonala principală, deci $\mathbf{f} = \mathbf{f}^T$, nesingulară în calculele de ordinul I.

Pentru elemente de bară dreaptă plană matricea $\mathbf{f}$ devine

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} & 0 \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I}{A} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.121a)}$$

Neglijînd forța axială se obține flexibilitatea la încovoiere în plan

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} = \frac{l}{6\,EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(IV.121b)}$$

Pentru bare ce leagă un nod i de un nod j articulat, matricea **f** în cazul plan este

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & \frac{l}{EA} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.121c)}$$

Neglijînd forța axială

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.121d)}$$

Pentru bare dublu articulate matricea **f** este:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.121e)}$$

În cazul în care se adoptă convenția de semne pentru eforturi și deplasări de capăt din fig. IV.88, matricea **f** este

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} & 0 \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.122)}$$

Fig. IV.88

4.2.3. **Matricea de rigiditate pentru un element de bară dreaptă.** Matricea de rigiditate **k** transformă vectorul deplasărilor de capăt **D** în vectorul eforturilor de capăt **E** și este definită prin ecuația matriceală

$$\mathbf{E} = \mathbf{k}\mathbf{D} \qquad \text{(IV.123)}$$

4.2.3.1. **Componente eforturi și deplasări de capăt independente.** Utilizînd seturile fundamentale ale eforturilor și deplasărilor de capăt relația (IV.123) devine

$$\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{k}\mathbf{D}_{ij} \qquad \text{(IV.123a)}$$

Dezvoltînd relația (IV.123a) se obține

$$\begin{Bmatrix} M_{iz} \\ M_{jz} \\ M_{iy} \\ M_{jy} \\ M_x \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & . & . & . & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & . & . & . & k_{26} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & k_{pq} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ k_{61} & . & . & . & . & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \\ \varphi_{iy} \\ \varphi_{jy} \\ \psi_{ij} \\ \Delta_{ij} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.123b)}$$

Un element k_{pq} din matricea de rigiditate reprezintă efortul de capăt ce se dezvoltă pe direcţia p cînd pe direcţia q se dă o deplasare $D_q = 1$, deplasările pe celelalte direcţii fiind menţinute egale cu zero.

Pentru determinarea elementelor matricei **k** este necesar să se blocheze deplasările pe toate direcţiile specificate şi să se permită pe rînd deplasarea numai după o anumită direcţie. Deci bara de referinţă este o bară dublu încastrată.

Elementele matricei **k** au deci caracter de reacţiuni elastice în legăturile de capăt.

Matricea de rigiditate a unui element de bară spaţială este

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{4\,EI_z}{l} & \frac{2\,EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\,EI_z}{l} & \frac{4\,EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\,EI_y}{l} & \frac{2\,EI_y}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\,EI_y}{l} & \frac{4\,EI_y}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.124)}$$

Fiecărui caz de încărcare cu cîte o deplasare de capăt unitară îi corespunde o coloană a matricei **k**, elementele acesteia reprezentînd succesiv cele şase eforturi ce se dezvoltă la extremităţile elementului.

Matricea **k** este pătrată, simetrică în raport cu diagonala principală, deci $\mathbf{k} = \mathbf{k}^T$, nesingulară în calculele de ordinul I.

Pentru elemente de bară dreaptă plană matricea **k** devine

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{4\,EI}{l} & \frac{2\,EI}{l} & 0 \\ \frac{2\,EI}{l} & \frac{4\,EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{2I} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.124a)}$$

Neglijînd forţa axială se obţine rigiditatea la încovoiere în plan

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{4\,EI}{l} & \frac{2\,EI}{l} \\ \frac{2\,EI}{l} & \frac{4\,EI}{l} \end{bmatrix} = \frac{2\,EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.124b)}$$

Pentru bare ce leagă un nod i de un nod j articulat, matricea $\mathbf{k}$ este

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{3\,EI}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.124c)}$$

Neglijînd forţa axială

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{3\,EI}{l} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.124d)}$$

Pentru bare dublu articulate matricea $\mathbf{k}$ este

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.124e)}$$

4.2.3.2. **Componente eforturi şi deplasări de capăt dependente.** Grupînd eforturile şi deplasările de capăt dependente

$$\mathbf{E}'_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}'_i \\ \mathbf{E}'_j \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D}'_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}'_i \\ \mathbf{D}'_j \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.125)}$$

relaţia (IV.123) devine:

$$\mathbf{E}'_t = \mathbf{k}_t\,\mathbf{D}'_t \qquad \text{(IV.126)}$$

Pentru determinarea elementelor matricei $\mathbf{k}_t$ intervin cîte şase situaţii de încărcare cu deplasări unitare la fiecare extremitate a elementului, prezentate în fig. IV.89, $a-l$, însoţite de eforturile de capăt rezultate.

Înscriind rezultatele obţinute în coloanele corespunzătoare, se obţine matricea de rigiditate $\mathbf{k}_t$ de dimensiuni 12 × 12 ce poate fi partiţionată după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}'_i \\ \mathbf{E}'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tii} & \mathbf{k}_{tij} \\ \mathbf{k}_{tji} & \mathbf{k}_{tjj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}'_i \\ \mathbf{D}'_j \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.127)}$$

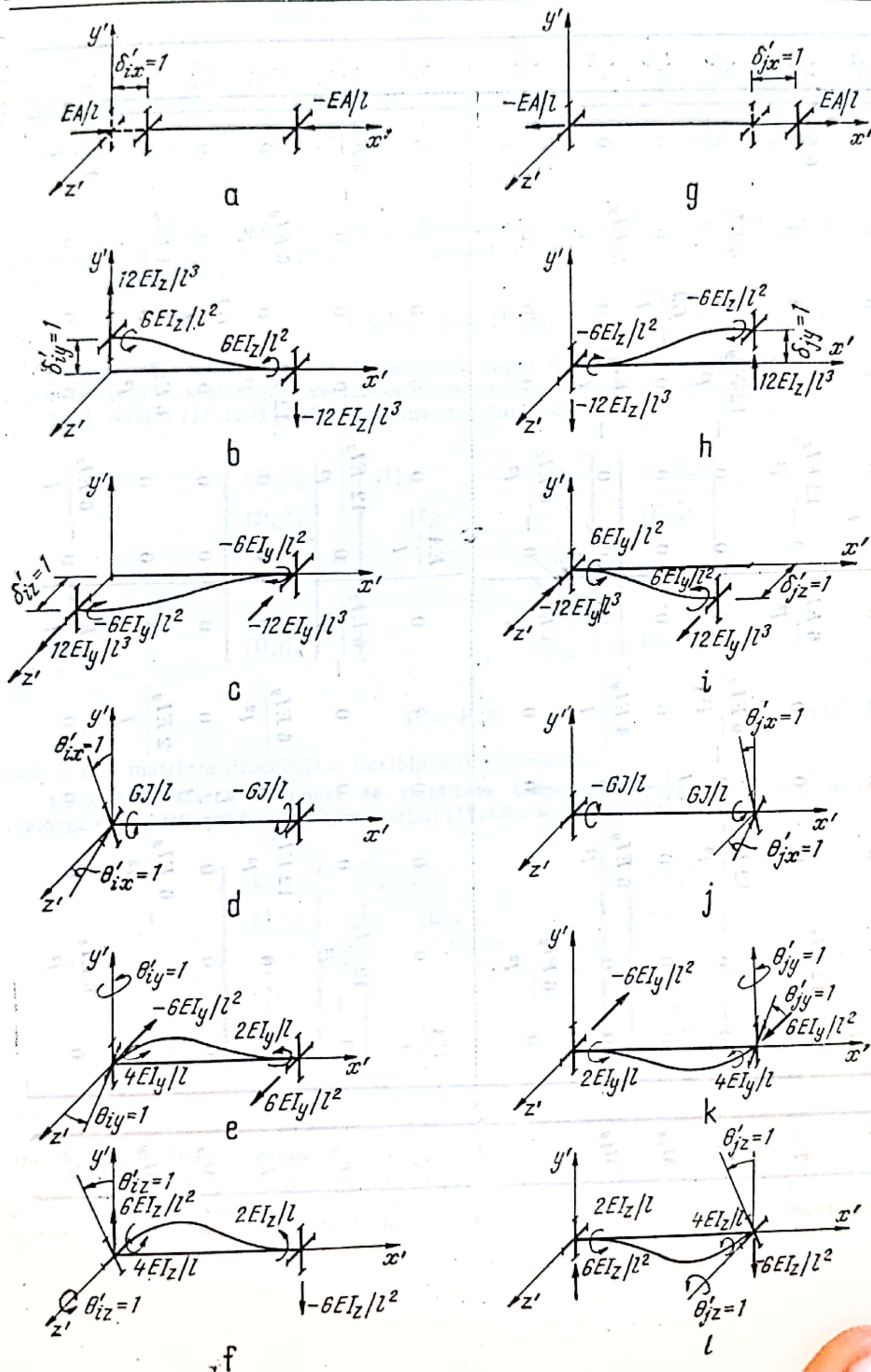


Fig. IV.89

Sau în formă detaliată

$$
\begin{Bmatrix} N_i \\ T_{iy} \\ T_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \\ \hline N_j \\ T_{jy} \\ T_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12\,EI_z & 0 & 0 & 0 & \frac{6\,EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12\,EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\,EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4\,EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2\,EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6\,EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4\,EI_z}{l} & 0 & -\frac{6\,EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\,EI_z}{l} \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12\,I_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\,EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12\,EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\,EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{G}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2\,EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\,EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4\,EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6\,EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\,EI_z}{l} & 0 & -\frac{6\,EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{4\,EI_z}{l}
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix} \delta'_{ix} \\ \delta'_{iy} \\ \delta'_{iz} \\ \theta'_{ix} \\ \theta'_{iy} \\ \theta'_{iz} \\ \hline \delta'_{jx} \\ \delta'_{jy} \\ \delta'_{jz} \\ \theta'_{jx} \\ \theta'_{jy} \\ \theta'_{jz} \end{Bmatrix}
\qquad (IV.127a)
$$

Deoarece eforturile de capăt sînt legate printr-un număr de şase relaţii de echilibru, determinantul matricei $\mathbf{k}_t$ este nul, deci matricea este singulară.

Observație. Pentru seturile fundamentale ale eforturilor și deplasărilor de capăt există relațiile:

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}^{-1} \text{ şi } \mathbf{f} = \mathbf{k}^{-1}. \tag{IV.128}$$

4.2.4. **Asamblarea matricei de flexibilitate diagonale.** La pct. 4.2.2. a fost stabilită relaţia de flexibilitate pentru un element de bară dreaptă. Pentru elementul a relaţia (IV.120) devine

$$\{\mathbf{D}_{ij}\}_a = [\mathbf{f}]_a \{\mathbf{E}_{ij}\}_a. \tag{IV.129}$$

Considerînd vectorul tuturor eforturilor de capăt **E** şi al tuturor deplasărilor de capăt **D** construite prin asamblarea vectorilor corespunzători pentru elementele $a, b, \ldots, q$ ale structurii, relaţia (IV.129) pentru întreaga structură este

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_{ij}\}_a \\ \{\mathbf{D}_{ij}\}_b \\ \vdots \\ \{\mathbf{D}_{ij}\}_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{f}]_a & & & \\ & [\mathbf{f}]_b & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\mathbf{f}]_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{E}_{ij}\}_a \\ \{\mathbf{E}_{ij}\}_b \\ \vdots \\ \{\mathbf{E}_{ij}\}_q \end{Bmatrix} \tag{IV.130}$$

sau

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}\,\mathbf{E} \tag{IV.130a}$$

unde **F** este matricea diagonală a flexibilităţii elementare.

4.2.5. **Asamblarea matricei de rigiditate diagonale.** Procedînd într-o manieră analoagă celei utilizate la stabilirea relaţiei (IV.130) se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{E}_{ij}\}_a \\ \{\mathbf{E}_{ij}\}_b \\ \vdots \\ \{\mathbf{E}_{ij}\}_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}]_a & & & \\ & [\mathbf{k}]_b & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\mathbf{k}]_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_{ij}\}_a \\ \{\mathbf{D}_{ij}\}_b \\ \vdots \\ \{\mathbf{D}_{ij}\}_q \end{Bmatrix} \tag{IV.131}$$

sau

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}\,\mathbf{D} \tag{IV.131a}$$

unde **K** este matricea diagonală a rigidităţii elementare.

4.2.6. **Încărcări echivalente la noduri.** Rezolvarea în formă matriceală a structurilor este simplificată dacă încărcările sînt aplicate numai la noduri. În acest scop, se va înlocui calculul cadrelor cu sarcini aplicate între noduri, cu calculul unor structuri încărcate cu

sarcini echivalente, aplicate la noduri. O consecinţă directă a acestui procedeu este reducerea numărului total de elemente, deci a volumului de calcule (fig. IV.90, *a*, *b*).

Pe baza principiului suprapunerii liniare a efectelor, este posibil ca analiza unei

Sarcini între noduri *Sarcini echivalente*

a b

Fig. IV.90

structuri să fie făcută adăugînd şi scăzînd un sistem de forţe sistemului de încărcări existent, fără ca rezultatele să se altereze (fig. IV.91, *a*—*c*).

Relaţia dintre vectorul încărcărilor din situaţia reală de încărcare **R** şi vectorul încărcărilor suplimentare **A** scrisă matriceal este:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R} + \mathbf{A}) - \mathbf{A} \qquad \text{(IV.132)}$$

a b c

Fig. IV.91

Dacă sistemul de forţe suplimentar **A** este astfel ales ca deplasările nodurilor să fie zero, situaţia este cea din fig. IV.92, *a*—*c*.

Eforturile de capăt finale sînt

$$\mathbf{E}_F = \overline{\mathbf{E}} + \mathbf{E} \qquad \text{(IV.133)}$$

unde $\overline{\mathbf{E}}$ este vectorul eforturilor de încastrare perfectă iar **E** vectorul eforturilor produse de încărcările echivalente la noduri.

a b c

Fig. IV.92

4.2.7. Matricea de transformare a forțelor. Vectorul încărcărilor la noduri **R** poate fi transformat în vectorul eforturilor la extremitățile elementelor **E** printr-o matrice de transformare liniară, definită de ecuația matriceală

$$\mathbf{E} = \mathbf{b}\,\mathbf{R} \qquad \text{(IV.134)}$$

Matricea **b** este o matrice de influență avînd numărul de coloane egal cu numărul încărcărilor la noduri iar numărul de linii egal cu numărul total al eforturilor de capăt.

$$\mathbf{b} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1=1 & R_2=1 & \quad R_n=1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ b_{k1} & b_{k2} \cdots\cdots & b_{kn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{(IV.135)}$$

4.3. Exprimarea matriceală a teoremelor de lucru mecanic

4.3.1. Exprimarea matriceală a lucrului mecanic. Cînd asupra unei structuri acționează concomitent un sistem de forțe exterioare $\mathbf{F}^T = \{F_1 \quad F_2 \ldots F_n\}$, cărora în poziția deformată le corespund deplasările $\mathbf{D}_c^T = \{\Delta_1 \; \Delta_2 \; . \; . \; . \; \Delta_n\}$, lucrul mecanic exterior total este

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \Delta_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2} F_n \Delta_n. \qquad \text{(IV.136)}$$

În exprimare matriceală

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \{F_1 \; F_2 \ldots F_n\} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{\Delta_1 \; \Delta_2 \ldots\ldots \Delta_n\} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.136a)}$$

Sau :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{D}_c \qquad \text{(IV.136b)}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_c^T \mathbf{F} \qquad \text{(IV.136c)}$$

Dacă deplasarea corespunzătoare este o deplasare virtuală, lucrul mecanic se scrie

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}^T \overline{\mathbf{D}}_c \qquad \text{(IV.137)}$$

$$\mathbf{L} = \overline{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{F}. \qquad \text{(IV.137a)}$$

4.3.2. Matricea generală de transformare a forţelor. Dacă două sisteme de forţe static echivalente **Q** şi **P** aplicate pe o structură, sînt legate prin relaţia de transformare liniară

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{P} \qquad \text{(IV.138)}$$

atunci seturile deplasărilor asociate celor două sisteme de forţe **q** şi **p** sînt legate prin transformarea liniară

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^T \mathbf{q} \qquad \text{(IV.139)}$$

Un caz particular al matricei **B** este matricea **b**.

4.3.3. Energia potenţială de deformare. Energia potenţială de deformare **u** se măsoară prin lucrul mecanic al eforturilor

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}_{ef} = -\mathbf{L}_i \qquad \text{(IV.140)}$$

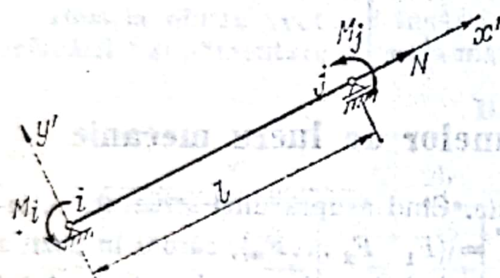


Fig. IV.93

4.3.3.1. Energia potenţială de deformare pentru un element de bară dreaptă. Se studiază cazul elementului de bară plană, considerîndu-se eforturile de capăt corespunzătoare setului fundamental (fig. IV.93).

Energia potenţială totală

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_M \qquad \text{(IV.141)}$$

Se poate demonstra relaţia

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\{M_i \quad M_j \quad N\} \begin{bmatrix} \frac{l}{3\,EI} & -\frac{l}{6\,EI} & 0 \\ -\frac{l}{6\,EI} & \frac{l}{3\,EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.141a)}$$

sau

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_{ij}^T\,\mathbf{f}\,\mathbf{E}_{ij} \qquad \text{(IV.141b)}$$

4.3.3.2. Energia potenţială de deformare pentru structură. Pentru toate elementele structurii $a, b, \ldots, q$ se poate scrie

$$\mathbf{U}_{total} = \frac{1}{2}\{\mathbf{E}_{ij}\}_a^T\,[\mathbf{f}]_a\,\{\mathbf{E}_{ij}\}_a + \frac{1}{2}\{\mathbf{E}_{ij}\}_b^T\,[\mathbf{f}]_b\,\{\mathbf{E}_{ij}\}_b + \ldots + \frac{1}{2}\{\mathbf{E}_{ij}\}_q^T\,[\mathbf{f}]_q\,\{\mathbf{E}_{ij}\}_q \qquad \text{(IV.142)}$$

Şi în formă matriceală

$$\mathbf{U}_{total} = \{\{E_{ij}\}_a \{E_{ij}\}_b \ldots \{E_{ij}\}_q\} \begin{bmatrix} [f_a] & & & \\ & [f]_b & & \\ & & \ddots & \\ & & & [f]_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E_{ij}\}_a \\ \{E_{ij}\}_b \\ \vdots \\ \{E_{ij}\}_q \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.142a)}$$

sau $$\mathbf{U}_{total} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{F}\mathbf{E}. \quad \text{(IV.142b)}$$

Pe baza relației (IV.133) se poate scrie

$$\mathbf{U}_{total} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{b}^T \mathbf{F} \mathbf{b} \mathbf{R} \quad \text{(IV.143)}$$

sau $$\mathbf{U}_{total} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}_s \mathbf{R} \quad \text{(IV.143a)}$$

unde $\mathbf{F}_s$ este matricea de flexibilitate structurală.

4.3.4. Teorema lui Betti. Fiind date două sisteme de forțe $\mathbf{R}_1$ și $\mathbf{R}_2$, ce solicită pe rînd o structură, teorema de reciprocitate a lucrului mecanic în exprimare matriceală este

$$\mathbf{R}_1^T \mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_2^T \mathbf{r}_{21} \quad \text{(IV.144)}$$

unde vectorul $\mathbf{r}_{21}$ reprezintă deplasările pe direcțiile lui $\mathbf{R}_2$, produse de $\mathbf{R}_1$, iar vectorul $\mathbf{r}_{12}$ deplasările pe direcțiile lui $\mathbf{R}_1$ produse de $\mathbf{R}_2$.

4.3.5. Teorema lui Maxwell. Particularizînd relația (IV.144) pentru cazul unei forțe unitare

$$\mathbf{R}_1 = 1 \text{ și } \mathbf{R}_2 = 1$$

se obține

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21} \quad \text{(IV.145)}$$

unde $\mathbf{r}_{12}$ și $\mathbf{r}_{21}$ cuprind un singur element.

4.3.6. Calculul deplasărilor elastice. Încărcare cu forțe la noduri. Ca urmare a deformării elementelor structurii, deplasările de capăt ale acestora **D**, produc deplasările nodurilor **r**, pe direcțiile încărcărilor **R** (fig. IV.94).

La pct. 4.2.7 s-a stabilit expresia

$$\mathbf{E} = \mathbf{b}\,\mathbf{R} \quad \text{(IV.146)}$$

Pentru a obține relația dintre vectorul deplasărilor nodurilor **r** și vectorul deplasărilor de capăt **D** se apelează la relația (IV.139), întrucît **E** și **R** sînt sisteme de forțe static echivalente

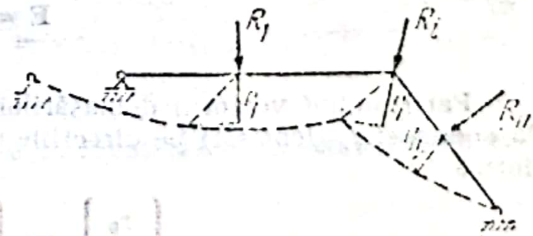


Fig. IV.94

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}^T \mathbf{D} \quad \text{(IV.147)}$$

Introducînd relația (IV.130a) în (IV.147)

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}^T \mathbf{F}\mathbf{E} \quad \text{(IV.148)}$$

Utilizînd relația (IV.146) rezultă

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}^T \mathbf{F} \mathbf{b} \mathbf{R} \qquad \text{(IV.149)}$$

relație ce exprimă deplasările nodurilor funcție de încărcări

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}_s \mathbf{R} \qquad \text{(IV.150)}$$

unde $\mathbf{F}_s = \mathbf{b}^T \mathbf{F} \mathbf{b}$ este matricea de flexibilitate a structurii.

Dacă se solicită determinarea deplasărilor pentru alte puncte și direcții decît cele pe care acționează încărcările **R**, relația (IV.149) devine:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{F} \mathbf{b} \mathbf{R} \qquad \text{(IV.151)}$$

unde $\bar{\mathbf{b}}$ este matricea de transformare a forțelor obținută pentru încărcări unitare aplicate în nodurile și pe direcția de calcul a deplasării.

4.4. Metoda generală a eforturilor în formulare matriceală

Rezolvarea unei structuri static nedeterminate prin metoda generală a eforturilor se efectuează practic în două etape. În prima etapă, prin suprimare de legături, structura devine (în general) static determinată, punîndu-se în evidență necunoscutele. Pe sistemul de bază ales se pot construi matricele de transformare a forțelor, **b**, pentru încărcări la noduri (v. pct. 4.2.7) și necunoscute unitare. În etapa a doua, exprimînd condițiile de deplasare nulă în punctele de secționare, se obțin ecuațiile necesare determinării necunoscutelor și implicit a eforturilor și deplasărilor în structură.

4.4.1. **Efectul încărcărilor la noduri.** Se consideră o structură cu *m* grade de nedeterminare statică, încărcată cu sistemul de sarcini la noduri $\mathbf{R}^T = \{R_1 R_2 \ldots R_n\}$.

Se alege un sistem de bază obținut din structura reală prin suprimare a *m* legături, punîndu-se în evidență vectorul necunoscutelor $\mathbf{X}^T = \{X_1 X_2 \ldots X_m\}$. Pentru sistemul de bază ales, se construiesc matricele $\mathbf{b}_0$ corespunzător încărcărilor la noduri **R** și $\mathbf{b}_1$ corespunzător necunoscutelor **X**.

Eforturile de capăt se obțin prin suprapunerea liniară a efectelor produse de încărcările la noduri și necunoscute

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_x \qquad \text{(IV.152)}$$

Pe baza relației (IV.133), relația (IV.152) se poate scrie

$$\mathbf{E} = [\mathbf{b}_0 \mid \mathbf{b}_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{X} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.152a)}$$

Partiționînd vectorul deplasărilor nodurilor în $\mathbf{r}_0$ deplasări pe direcțiile încărcărilor la noduri și $\mathbf{r}_x$ deplasări pe direcțiile necunoscutelor, relația (IV.149) se poate scrie sub forma

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \hline \mathbf{r}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^T \\ \hline \mathbf{b}_1^T \end{bmatrix} [\mathbf{F}] [\mathbf{b}_0 \mid \mathbf{b}_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{X} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.153)}$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \hline \mathbf{r}_x \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b}_0^T \mathbf{F} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_0^T \mathbf{F} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_1^T \mathbf{F} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{F} \mathbf{b}_1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{X} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.153a)}$$

sau renotînd produsele matriceale din membrul drept al relației (IV.153a)

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{X} \end{Bmatrix} \tag{IV.154}$$

Restabilind continuitatea deformatei în punctele de secționare

$$\mathbf{r}_x \equiv 0; \; [\mathbf{D}_{10}]\{\mathbf{R}\} + [\mathbf{D}_{11}]\{\mathbf{X}\} = 0 \tag{IV.155}$$

Rezultă

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10}\mathbf{R} \tag{IV.155a}$$

Substituind expresia lui $\mathbf{X}$ în relația (IV.152 a) se obțin eforturile de capăt pentru elementele structurii

$$\mathbf{E} = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10})\mathbf{R} \tag{IV.156}$$

sau $\mathbf{E} = \mathbf{b}_n\mathbf{R}$ unde $\mathbf{b}_n$ este matricea de transformare a forțelor pentru structura static nedeterminată.

Deplasările nodurilor pe direcțiile încărcărilor se obțin substituind relația (IV.155 a) în relația (IV.154)

$$\mathbf{r}_0 = (\mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10})\mathbf{R} \tag{IV.157}$$

sau $\mathbf{r}_0 = \mathbf{F}_n\mathbf{R}$ unde $\mathbf{F}_n$ este matricea de flexibilitate a structurii reale, pentru calculul deplasărilor nodurilor pe direcțiile încărcărilor.

4.4.2. **Efectul variațiilor de temperatură.** Fiecare element al structurii, considerat izolat, sub efectul variațiilor de temperatură se va deforma, producînd deplasări de capăt (fig. IV.95).

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_i \\ \bar{\varphi}_j \\ \bar{\delta} \end{Bmatrix} = \frac{\alpha l}{} \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_s \end{Bmatrix} \tag{IV.158}$$

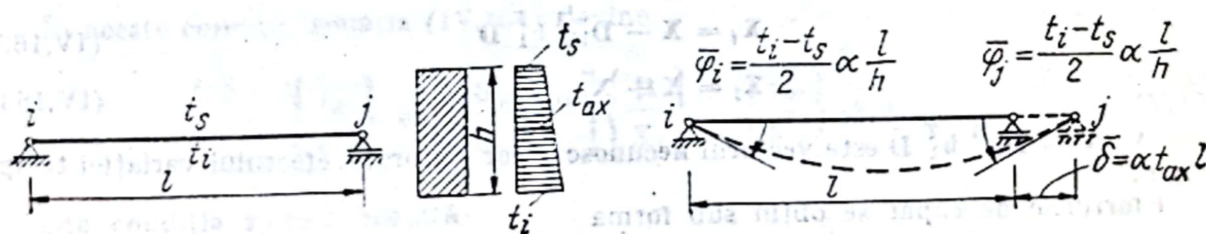


Fig. IV.95

Pentru toate elementele structurii deplasările de capăt datorate temperaturii se vor grupa în vectorul $\bar{\mathbf{D}}$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \bar{\mathbf{D}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{D}}_n \end{Bmatrix} \tag{IV.159}$$

Pentru a utiliza rezultatele deja stabilite la pct. 4.4.1, se consideră efectul simultan al încărcărilor la noduri și al temperaturii

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D} + \bar{\mathbf{D}} \tag{IV.160}$$

Eforturile de capăt, produse de sarcinile la noduri și de variațiile de temperatură, se obțin suprapunînd efectele pe sistemul de bază

$$\mathbf{E} = [\mathbf{b}_0 \mid \mathbf{b}_1]\begin{Bmatrix}\mathbf{R} \\ \hline \mathbf{X}_t\end{Bmatrix} \tag{IV.161}$$

Procedînd analog ca la pct. 4.4.1 se obține

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_0 \\ \hline \mathbf{r}_x\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_0^T \\ \hline \mathbf{b}_1^T\end{bmatrix}\{\mathbf{D}_t\} \tag{IV.162}$$

Dezvoltînd,

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_0 \\ \hline \mathbf{r}_x\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_0^T \\ \hline \mathbf{b}_1^T\end{bmatrix}[\mathbf{F}][\mathbf{b}_0\,\mathbf{b}_1]\begin{Bmatrix}\mathbf{R} \\ \hline \mathbf{X}_t\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{b}_0^T \\ \hline \mathbf{b}_1^T\end{bmatrix}\{\bar{\mathbf{D}}\} \tag{IV.162a}$$

sau

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_0 \\ \hline \mathbf{r}_x\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{R} \\ \hline \mathbf{X}_t\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{b}_0^T \\ \hline \mathbf{b}_1^T\end{bmatrix}\{\bar{\mathbf{D}}\} \tag{IV.162b}$$

Restabilind continuitatea deformațiilor în punctele de secționare, se poate determina vectorul necunoscutelor

$$\mathbf{X}_t = -\mathbf{D}_{11}^{-1}(\mathbf{D}_{10}\,\mathbf{R} + \mathbf{b}_1^T\,\bar{\mathbf{D}}) \tag{IV.163}$$

Ținînd seama de relația (IV.155a).

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X} - \mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1^T\,\bar{\mathbf{D}} \tag{IV.163a}$$

sau

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X} + \mathbf{X}_1 \tag{IV.163b}$$

unde $\mathbf{X}_1 = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1^T\,\bar{\mathbf{D}}$ este vectorul necunoscutelor datorate efectului variației temperaturii.

Eforturile de capăt se obțin sub forma

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{b}_0\mathbf{R} + \mathbf{b}_1\mathbf{X}_t \tag{IV.164}$$

Dezvoltînd,

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1\,\mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{D}_{10})\mathbf{R} - (\mathbf{b}_1\,\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{b}_1^T)\bar{\mathbf{D}} \tag{IV.164a}$$

sau

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \mathbf{E}_1 \tag{IV.164b}$$

unde $\mathbf{E}_1 = (-\mathbf{b}_1\,\mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1^T\,\bar{\mathbf{D}})$ este vectorul eforturilor de capăt datorat efectului variației temperaturii.

Deplasările nodurilor se obţin sub forma

$$\mathbf{r}_{0t} = \mathbf{D}_{00}\,\mathbf{R} + \mathbf{D}_{01}\,\mathbf{X} + \mathbf{b}_0^T\,\overline{\mathbf{D}} \qquad \text{(IV.165)}$$

Dezvoltînd

$$\mathbf{r}_{0t} = (\mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10})\,\mathbf{R} + (\mathbf{b}_0^T - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1^T)\,\overline{\mathbf{D}} \qquad \text{(IV.165a)}$$

sau

$$\mathbf{r}_{0t} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{01} \qquad \text{(IV.165b)}$$

unde $\mathbf{r}_{01} = (\mathbf{b}_0^T - \mathbf{D}_{01}\,\mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1^T)\overline{\mathbf{D}}$ este vectorul deplasărilor nodurilor datorate efectului variaţiei temperaturii.

Observaţie. Utilizînd convenţia potrivit căreia rotirile sînt pozitive în sens antiorar, relaţia (IV.158) devine:

$$\begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_i \\ \overline{\varphi}_j \\ \overline{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{h} & \dfrac{1}{h} \\ \dfrac{1}{h} & -\dfrac{1}{h} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_s \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.166)}$$

4.4.3. Efectul cedărilor de reazem. Se consideră structura static nedeterminată încărcată cu deplasări $\mathbf{v}_q$ pe direcţiile unor legături. Pe sistemul de bază ales se determină matricele de transformare pentru reacţiuni produse de încărcările $\mathbf{R}$ şi necunoscutele $\mathbf{X}_t$.

$$\mathbf{q} = -\,\mathbf{b}_{0q}\,\mathbf{R} \qquad \text{(IV.167)}$$

$$\mathbf{q} = -\,\mathbf{b}_{xq}\,\mathbf{X}_t \qquad \text{(IV.168)}$$

Pe baza relaţiei (IV.139) se poate scrie

$$\mathbf{r}_0 = -\,\mathbf{b}_{0q}^T\,\mathbf{v}_q \qquad \text{(IV.169)}$$

$$\mathbf{r}_x = -\,\mathbf{b}_{xq}^T\,\mathbf{v}_q \qquad \text{(IV.170)}$$

În aceste condiţii, ecuaţia (IV.154) devine

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{X}_t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_{0q}^T \\ \mathbf{b}_{xq}^T \end{Bmatrix} \{\mathbf{v}_q\} \qquad \text{(IV.171)}$$

Din condiţia $\mathbf{r}_x \equiv 0$ rezultă

$$\mathbf{X}_t = -\,\mathbf{D}_{11}^{-1}\,(\mathbf{D}_{10}\,\mathbf{R} - \mathbf{b}_{xq}^T\,\mathbf{v}_q) \qquad \text{(IV.172)}$$

Ţinînd seama de (IV.155a) (IV.173)

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X} + \mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_{xq}^T\,\mathbf{v}_q \qquad \text{(IV.173)}$$

sau

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X} + \mathbf{X}_2 \qquad \text{(IV.173a)}$$

unde $\mathbf{X}_2 = \mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_{xq}^T\,\mathbf{v}_q$ este vectorul necunoscutelor datorate efectului cedărilor de reazem.

Eforturile de capăt se obţin sub forma

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \mathbf{b}_1\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{b}_{xq}^T\mathbf{v}_q \quad \text{(IV.174)}$$

sau

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \mathbf{E}_2 \quad \text{(IV.174 a)}$$

unde $\mathbf{E}_2 = \mathbf{b}_1\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{b}_{xq}^T\mathbf{v}_q$ este vectorul eforturilor de capăt datorat efectului cedărilor de reazem.

Deplasările nodurilor se obţin pe baza relaţiei

$$\mathbf{r}_{0t} = \mathbf{D}_{00}\mathbf{R} + \mathbf{D}_{01}\mathbf{X}_t - \mathbf{b}_{0q}^T\mathbf{v}_q \quad \text{(IV.175)}$$

Dezvoltînd,

$$\mathbf{r}_{0t} = (\mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10})\mathbf{R} - (\mathbf{b}_{0q}^T - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{b}_{xq}^T)\mathbf{v}_q \quad \text{(IV.175 a)}$$

sau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{02} \quad \text{(IV.175 b)}$$

unde $\mathbf{r}_{02} = (\mathbf{b}_{0q}^T - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{b}_{xq}^T)\mathbf{v}_q$ este vectorul deplasărilor nodurilor datorate efectului cedărilor de reazeme.

4.5. Metoda generală a deplasărilor în formulare matriceală

Rezolvarea structurilor prin metoda generală a deplasărilor în exprimare matriceală are la bază scrierea ecuaţiilor de echilibru a forţelor la noduri, cu componente în sistemul de axe al structurii.

În rezolvarea structurilor de tip cadru prin metoda deplasărilor, se va considera că barele sînt axial indeformabile, aceasta atrăgînd reducerea numărului de necunoscute referitoare la translaţiile nodurilor.

În metoda deplasărilor, sistemul de bază se obţine adăugînd structurii reale fig. IV.96,a un număr de legături suplimentare capabile să blocheze atît rotirile nodurilor (încastrări suplimentare), cît şi translaţiile lor (penduli suplimentari) fig. IV.96, *b*.

Necunoscutele în metoda deplasărilor sînt mărimile deplasărilor pe direcţiile legăturilor suplimentare, care se aleg corespunzător sistemului de axe al structurii (fig. IV.96, *c*).

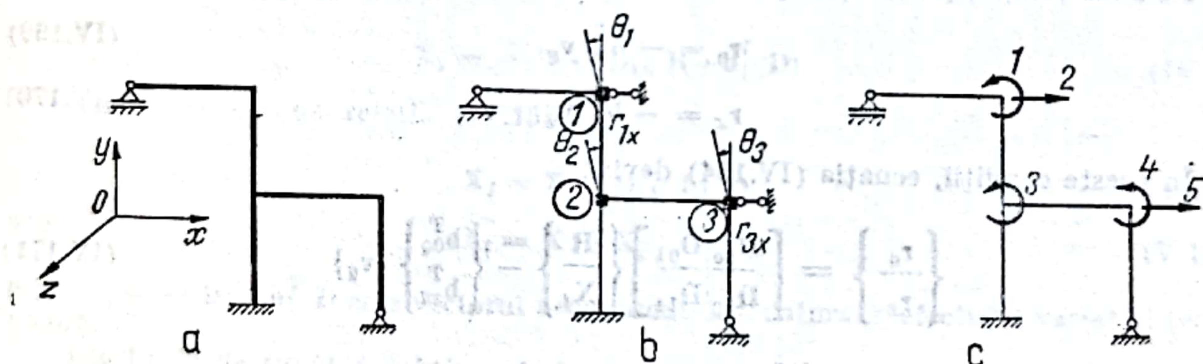


Fig. IV.96

Ecuaţiile de echilibru ale nodurilor se scriu pentru componente forţe pe noduri în sistemul de axe al structurii, deci încărcările echivalente la noduri trebuie să fie aplicate pe direcţiile legăturilor suplimentare. În general, momentele echivalente satisfac condiţia de a fi pe direcţiile legăturilor suplimentare, însă este posibil ca unele încărcări concentrate echivalente să fie aplicate pe alte direcţii. Aceste încărcări concentrate se pot înlocui cu un grup de încărcări concentrate pe direcţiile pendulilor suplimentari, cu condiţia ca în gradele de libertate existente, cele două grupe de încărcări să efectueze acelaşi lucru mecanic.

Un exemplu este prezentat în fig. IV.97 *a—e* unde sarcinile concentrate pe direcţiile pendulilor suplimentari Q_1 şi Q_3 se obţin sub forma

$$Q_1 \cdot 1 = -P_{1x} \cdot 1 + P_{2x} \cdot \delta_{2x} - P_{2y} \cdot \delta_{2y}$$

$$Q_2 \cdot 1 = P_{2x} \cdot \delta'_{2x} + P_{2y} \cdot \delta_{2y}$$

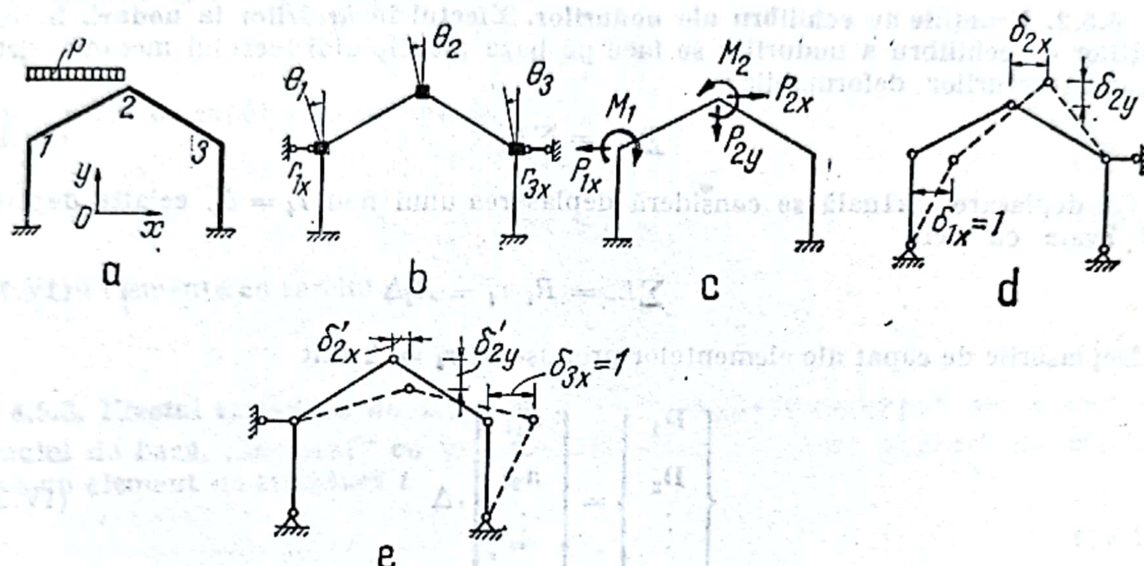


Fig. IV.97

În general, încărcarea concentrată echivalentă aplicată pe direcţia pendulului suplimentar *a* are expresia

$$Q_a = \sum_a P_w \cdot \delta_{wa} \tag{IV.176}$$

în care δ_{wa} reprezintă deplasarea cinematică pe direcţia încărcării P_w în gradul de libertate *a*.

4.5.1. Matricea de transformare a deplasărilor. Pentru un element de structură *i*, fie : $\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \ldots, \mathbf{a}_{ik}$, valorile deplasărilor de capăt $\mathbf{D}_i$ produse de deplasările unitare ale nodurilor $\mathbf{r}_1 = 1, \mathbf{r}_2 = 1, \ldots, \mathbf{r}_k = 1$. Luînd în considerare toate deplasările nodurilor

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_{i1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_{i2}\mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{ik}\mathbf{r}_k. \tag{IV.177}$$

Pentru cele *n* elemente ale structurii se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1k} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \end{Bmatrix} \tag{IV.178}$$

sau

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}\,\mathbf{r} \tag{IV.178a}$$

Matricea **a** este o matrice de influenţă, avînd un număr de coloane egal cu numărul deplasărilor distincte ale nodurilor şi un număr de linii egal cu numărul deplasărilor de capăt pentru toate elementele structurii.

Elementele coloanei l reprezintă deplasările de capăt ale elementelor structurii, produse din deplasarea de nod $r_l = 1$ pe direcţia l, celelalte deplasări ale nodurilor fiind menţinute egale cu zero. Deci operaţia de determinare a matricei **a** se face pe sistemul de bază.

4.5.2. Ecuaţiile de echilibru ale nodurilor. Efectul încărcărilor la noduri. Scrierea ecuaţiilor de echilibru a nodurilor se face pe baza principiului lucrului mecanic virtual aplicat structurilor deformabile:

$$\sum L_e = \sum L_i \tag{IV.179}$$

Ca deplasare virtuală se consideră deplasarea unui nod $r_i = \Delta$, celalte deplasări fiind egale cu zero

$$\sum L_e = R_i \cdot r_i = R_i \Delta \tag{IV.180}$$

Deplasările de capăt ale elementelor produse de $r_i = \Delta$ sînt

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1i} \\ \mathbf{a}_{2i} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{ni} \end{bmatrix} \cdot \Delta \tag{IV.181}$$

Lucrul mecanic interior produs de eforturile de capăt **E** prin deplasările de capăt **D** este

$$\sum L_i = [a_{1i} a_{2i} \ldots a_{ni}] \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{Bmatrix} \cdot \Delta \tag{IV.182}$$

sau condensat

$$\sum L_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{E} \tag{IV.182a}$$

unde $\mathbf{a}_i$ este coloana i din matricea **a**.

Introducînd relaţiile (IV.180) şi (IV.182) în (IV.179) se obţine

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{E} \tag{IV.183}$$

Procedînd analog pentru fiecare deplasare de nod se obţine relaţia (IV.184), care reprezintă condiţia de echilibru a nodurilor

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^T \mathbf{E} \tag{IV.184}$$

Pe baza relaţiei (IV.131a) se poate scrie

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{D} \tag{IV.185}$$

Substituind relația (IV.187a) în (IV.185)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^T \mathbf{K}\, \mathbf{a}\, \mathbf{r} \tag{IV.186}$$

sau

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_s \mathbf{r} \tag{IV.186a}$$

unde $\mathbf{K}_s$ este matricea de rigiditate a structurii.

Încărcările la noduri fiind cunoscute

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R} \tag{IV.187}$$

Eforturile de capăt se obțin sub forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}\, \mathbf{a}\, \mathbf{r} \tag{IV.188}$$

sau

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}\, \mathbf{a}\, \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R} \tag{IV.188a}$$

Pentru elemente cu sarcini plasate între noduri,

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}}. \tag{IV.189}$$

4.5.3. Efectul variațiilor de temperatură. În secțiunile de capăt ale elementelor sistemului de bază, „încărcat" cu variație de temperatură apar eforturi de capăt $\overline{\mathbf{E}}$. Pentru un element de structură *i*

$$\overline{\mathbf{E}}_i = -\mathbf{k}_i \overline{\mathbf{D}}_i \tag{IV.190}$$

unde deplasările de capăt $\overline{\mathbf{D}}_i$ sînt prezentate în relația (IV.158).

Pentru toate elementele sistemului de bază

$$\overline{\mathbf{E}} = -\mathbf{K}\, \overline{\mathbf{D}} \tag{IV.191}$$

Dar eforturile de capăt $\overline{\mathbf{E}}$ pot fi considerate efectul unor sarcini de blocare aplicate la noduri

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{a}^T \overline{\mathbf{E}} \tag{IV.192}$$

Se poate deci simula efectul temperaturii, aplicînd un set de încărcări la noduri egal cu

$$\mathbf{R}_t = -\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{D}} \tag{IV.193}$$

Analizînd structura la acțiunea simultană a încărcărilor exterioare și a variației temperaturii

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \mathbf{R}_t \tag{IV.194}$$

Eforturile de capăt devin

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{K}\, \mathbf{a}\, \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{R}^* \tag{IV.195}$$

Eforturile finale pentru un element de structură *i* vor fi

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^* + \overline{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i^* - \mathbf{k}_i \overline{\mathbf{D}}_i \tag{IV.196}$$

4.5.4. Considerarea reazemelor drept noduri. Efectul cedărilor de reazem. Pentru generalitate, reazemele structurii sînt considerate noduri ale căror deplasări sînt specificate, egale cu zero pentru reazeme fixe şi diferite de zero cînd reazemele au deplasări.

Partiţionînd vectorul deplasărilor nodurilor $\mathbf{r}$ în $\mathbf{r}_x$ deplasări de nod necunoscute şi $\mathbf{r}_0$ deplasări de nod cunoscute, ecuaţia (IV.186) devine

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{R}_x\\ \hline \mathbf{R}_0\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c}\mathbf{a}_1^T\\ \hline \mathbf{a}_0^T\end{array}\right][\mathbf{K}][\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_0]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{r}_x\\ \hline \mathbf{r}_0\end{array}\right\} \qquad \text{(IV.197)}$$

Deci:

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{R}_x\\ \hline \mathbf{R}_0\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{a}_1^T\mathbf{K}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{K}\mathbf{a}_0\\ \hline \mathbf{a}_0^T\mathbf{K}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0^T\mathbf{K}\mathbf{a}_0\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{r}_x\\ \hline \mathbf{r}_0\end{array}\right\} \qquad \text{(IV.197a)}$$

Şi cu alte notaţii, relaţia (IV.197 a) se scrie

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{R}_x\\ \hline \mathbf{R}_0\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{10}\\ \hline \mathbf{C}_{01} & \mathbf{C}_{00}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{r}_x\\ \hline \mathbf{r}_0\end{array}\right\} \qquad \text{(IV.197b)}$$

4.5.4.1. Deplasările reazemelor egale cu zero. Introducînd în relaţia (IV.197b) $\mathbf{r}_0 = 0$ se obţine

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{R}_x\\ \hline \mathbf{R}_0\end{array}\right\}\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{10}\\ \hline \mathbf{C}_{01} & \mathbf{C}_{00}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{r}_x\\ \hline 0\end{array}\right\} \qquad \text{(IV.198)}$$

Din prima ecuaţie rezultă

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{R}_x = (\mathbf{a}_1^T\mathbf{K}\,\mathbf{a}_1)^{-1}\mathbf{R}_x \qquad \text{(IV.198a)}$$

$$\text{sau}\quad \mathbf{r}_x = \mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{R}_x \qquad \text{(IV.198b)}$$

Relaţia (IV.198b) este identică cu relaţia (IV.187).

Din a doua ecuaţie se pot determina reacţiunile

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{C}_{01}\mathbf{r}_x = \mathbf{C}_{01}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{R}_x \qquad \text{(IV.199)}$$

4.5.4.2. Deplasările reazemelor diferite de zero. Din prima ecuaţie a relaţiei (IV.197b) rezultă

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{C}_{11}^{-1}(\mathbf{R}_x - \mathbf{C}_{10}\mathbf{r}_0) \qquad \text{(IV.200)}$$

Dacă $\mathbf{R}_x = 0$, cazul „încărcării" numai cu cedări de reazem

$$\mathbf{r}_x = -\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{10}\mathbf{r}_0 \qquad \text{(IV.201)}$$

Din a doua ecuaţie a relaţiei (IV.197 b) rezultă reacţiunile structurii

$$\mathbf{R}_0 = (\mathbf{C}_{00} - \mathbf{C}_{01}\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{10})\,\mathbf{r}_0 + \mathbf{C}_{01}\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{R}_x \qquad \text{(IV.202)}$$

Eforturile de capăt se determină pe baza relaţiei

$$\mathbf{E} = [\mathbf{K}]\left[\mathbf{a}_1 \,\vdots\, \mathbf{a}_0\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_x\\ \cdots\\ \mathbf{r}_0\end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.203)}$$

Substituind $\mathbf{r}_x$ în relaţia (IV.104)

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}[(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{10})\,\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{R}_x] \qquad \text{(IV.204)}$$

Pentru $\mathbf{R}_x = 0$

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{10})\,\mathbf{r}_0 \qquad \text{(IV.205)}$$

4.6. Automatizarea calculului structurilor

Din punct de vedere al automatizării depline a calculului structurilor, avînd în vedere caracteristicile de prelucrare a informaţiilor de către calculatorul electronic, metoda deplasărilor devine instrumentul principal de calcul datorită sistemului de bază unic şi a sistematizărilor ce rezultă din aceasta.

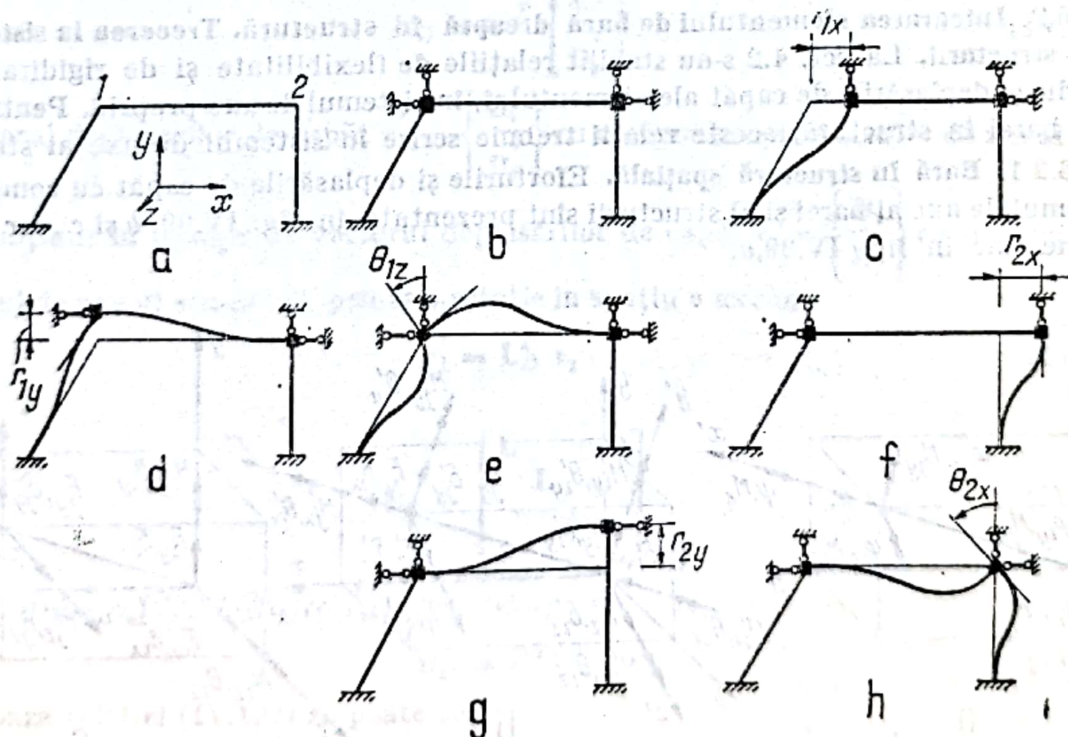


Fig. IV.98

În forma clasică a metodei deplasărilor, necesitatea studiului cinematic pentru caracterizarea translaţiilor nodurilor reprezintă un obstacol în calea automatizării depline a calculelor.

Un algoritm de calcul general devine posibil eliminînd studiul cinematic prin considerarea în calcul a deformării axiale a arelor, deci translaţiile tuturor nodurilor devin independente.

În aceste condiţii, sistemul de bază rezultă prin blocarea la fiecare nod a deplasărilor posibile, nodurile structurii ajungînd în aceeaşi situaţie.

Pentru cadrul din fig. IV.98, *a—h* apar în total şase necunoscute, patru translaţii şi două rotiri ale nodurilor.

Necunoscutele deplasări ale nodurilor se definesc în raport cu sistemul de axe al structurii, iar eforturile de capăt în raport cu sistemul de axe al elementului.

4.6.1. **Descrierea structurii idealizate.** În vederea descrierii elementelor structurii, a rezemărilor, a necunoscutelor, a situaţiilor de încărcare, nodurile structurii se numerotează de la 1 la N. Numerotarea se va face astfel încît să fie redusă la minim cea mai mare valoare $(i-j)$ pentru toate nodurile i şi j legate printr-un element, aceasta influenţînd topologia matricei de rigiditate.

Fiecare element este caracterizat printr-o origine i şi o extremitate j $(i < j)$, avînd orientarea $\overrightarrow{ij}$.

Un nod oarecare din structură se caracterizează prin numărul său şi prin eventualele deplasări impuse (valori cunoscute, sau nule pentru rezemări).

Încărcările sînt înlocuite cu forţe la noduri raportate la sistemul de axe al structurii (v. pct.4.2.6).

4.6.2. **Integrarea elementului de bară dreaptă în structură. Trecerea la sistemul de axe al structurii.** La pct. 4.2 s-au stabilit relaţiile de flexibilitate şi de rigiditate între eforturile şi deplasările de capăt ale elementului, în sistemul de axe propriu. Pentru integrarea barei în structură, aceste relaţii trebuie scrise în sistemul de axe al structurii.

4.6.2.1. **Bară în structură spaţială.** Eforturile şi deplasările de capăt cu componente în sistemul de axe al barei şi al structurii sînt prezentate în fig. IV.99, *b* şi *c*, iar seturile fundamentale în fig. IV.99,*a*.

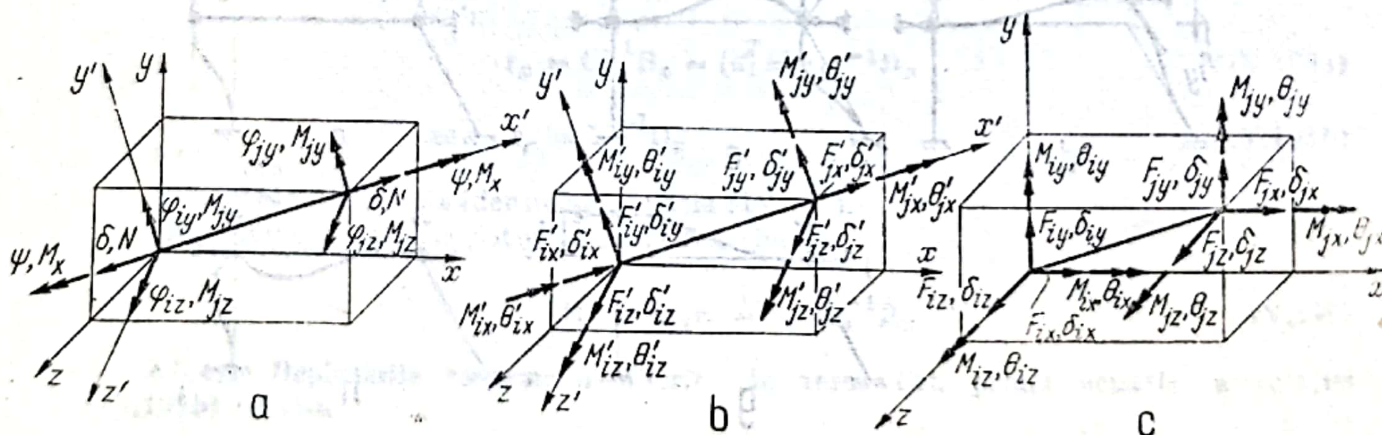


Fig. IV.99

Setul fundamental al deplasărilor de capăt poate fi exprimat pe baza deplasărilor de capăt ale elementului, raportate la sistemul de axe al barei, prin o transformare lineară, conform fig. IV.100, $a-l$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \\ \varphi_{iy} \\ \varphi_{jy} \\ \psi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_{ix} \\ \delta'_{iy} \\ \delta'_{iz} \\ \theta'_{ix} \\ \theta'_{iy} \\ \theta'_{iz} \\ \delta'_{jx} \\ \delta'_{jy} \\ \delta'_{jz} \\ \theta'_{jx} \\ \theta'_{jy} \\ \theta'_{jz} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.206)}$$

sau

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{U}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{D}'_i \\ \cdots \\ \mathbf{D}'_j \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.206a)}$$

Vectorul deplasărilor de capăt $r'_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}'_i \\ \cdots \\ \mathbf{D}'_j \end{Bmatrix}$ cu componente în sistemul de axe al barei poate fi obţinut în funcţie de vectorul deplasărilor de capăt $\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_i \\ \cdots \\ \mathbf{D}_j \end{Bmatrix}$ cu componente în sistemul de axe al structurii, printr-o rotaţie în spaţiu a axelor

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{L}_D^T \mathbf{r}_1 \qquad \text{(IV.207)}$$

unde

$$\mathbf{L}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & & & 0 \\ & \mathbf{L} & & \\ & & \mathbf{L} & \\ 0 & & & \mathbf{L} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.208)}$$

Substituind (IV.207) în relaţia (IV.206 a)

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{U}^T \mathbf{L}_D^T \mathbf{r}_1 \qquad \text{(IV.209)}$$

Pe baza relaţiei (IV.138) se poate scrie

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}_D \mathbf{U} \mathbf{E}_{ij} \qquad \text{(IV.210)}$$

sau

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}_D \mathbf{U} \mathbf{k} \mathbf{D}_{ij} \qquad \text{(IV.210a)}$$

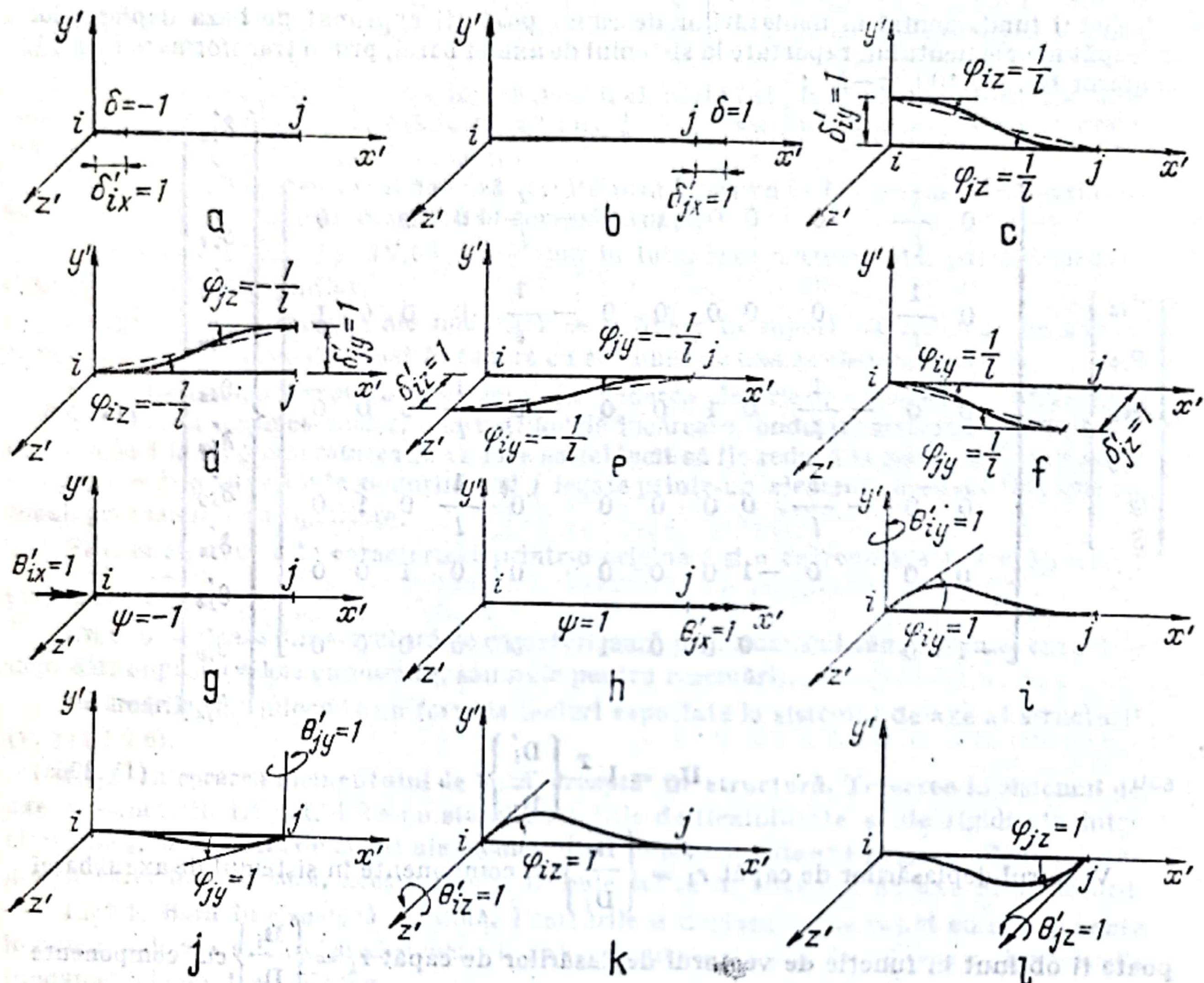


Fig. IV.100

Substituind relația (IV.209) în (IV.210a)

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}_D \mathbf{U} \mathbf{k} \mathbf{U}^T \mathbf{L}_D^T \mathbf{r}_1 \tag{IV.211}$$

sau

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{r}_1 \tag{IV.211a}$$

unde $\mathbf{K}_1$ este matricea de rigiditate a elementului de bară dreaptă exprimată pentru eforturi și deplasări de capăt în sistemul de axe al structurii.

Matricea $\mathbf{K}_1$ este singulară de ordinul (12×12).

Relația (IV.211 a) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_i \\ \mathbf{D}_j \end{Bmatrix} \tag{IV.212}$$

Pe baza condiției de echilibru a elementului între eforturile de capăt $\mathbf{E}_i$ și $\mathbf{E}_j$ există relația (IV.114) deci se poate scrie

$$\mathbf{K}_{ji} = -\mathbf{T}_{ij}\mathbf{K}_{ii} \tag{IV.213}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = -\mathbf{K}_{ii}\mathbf{T}_{ij}^T \tag{IV.213a}$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \mathbf{T}_{ij}\mathbf{K}_{ii}\mathbf{T}_{ij}^T \tag{IV.213b}$$

Relațiile (IV.213), (IV.213 a) și (IV.213 b) probează singularitatea matricei $\mathbf{K}_1$ și reprezintă o cale de asamblare a matricei, pe baza submatricei $\mathbf{K}_{ii}$.

Observație. Matricea $\mathbf{K}_1$ se poate determina și sub forma

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{L}_L \mathbf{k} \mathbf{L}_D^T \tag{IV.214}$$

unde $\mathbf{k}$ este prezentată la pct. 4.2.3.2.

4.6.2.2. Bară în structură plană. Setul fundamental al eforturilor și deplasărilor de capăt este prezentat în fig. IV.101, *a*, iar componentele forțe și deplasări de capăt exprimate în sistemele de axe al elementului și al structurii sînt prezentate în fig. IV.101, *b*.

Procedînd analog ca la pct. 4.6.2.1. se obține

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_{ix} \\ \delta'_{iy} \\ \theta'_{iz} \\ \delta'_{jx} \\ \delta'_{jy} \\ \theta'_{jz} \end{Bmatrix} \tag{IV.215}$$

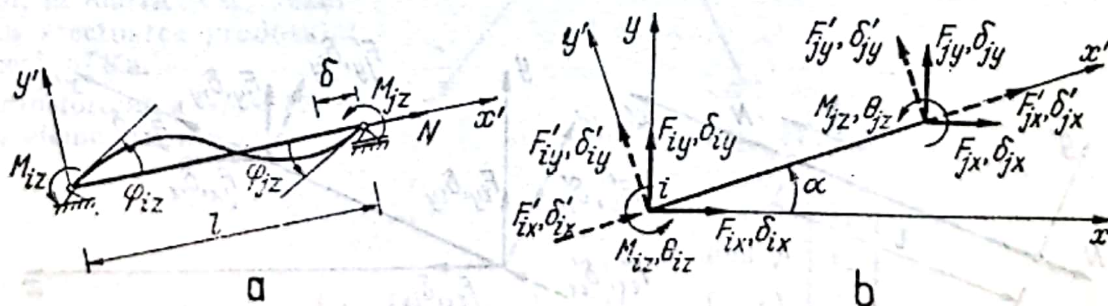


Fig. IV.101

Matricea $\mathbf{K}_1$ pentru elementul de bară plană are expresia (IV.211) unde matricea $\mathbf{U}^T$ este prezentată în relația (IV.215) iar matricea $\mathbf{L}_D^T$ în relația (IV.109 b). Efectuînd produsul matriceal din relația (IV.211) se obține

$$
\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix}
\frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha + \frac{EA}{l}\cos^2\alpha & -\frac{12\,EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha \\
-\frac{12EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{12EI}{l^2}\cos^2\alpha + \frac{EA}{l}\sin^2\alpha & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha \\
-\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{4EI}{l} \\
-\frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha - \frac{EA}{l}\cos^2\alpha & \frac{12EI}{l}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha \\
\frac{12EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{12EI}{l^3}\cos^2\alpha - \frac{EA}{l}\sin^2\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha \\
-\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{2EI}{l}
\end{bmatrix}
$$

4.6.2.3. **Bară dublu articulată în structură plană.** Setul fundamental al eforturilor și deplasărilor de capăt este prezentat în fig. IV.102, *a*, iar componentele eforturi și deplasări în fig. IV.102, *b*.

Matricea de rigiditate a barei are expresia

$$
\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix}
\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\
\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\
-\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\
-\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha
\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.217)}
$$

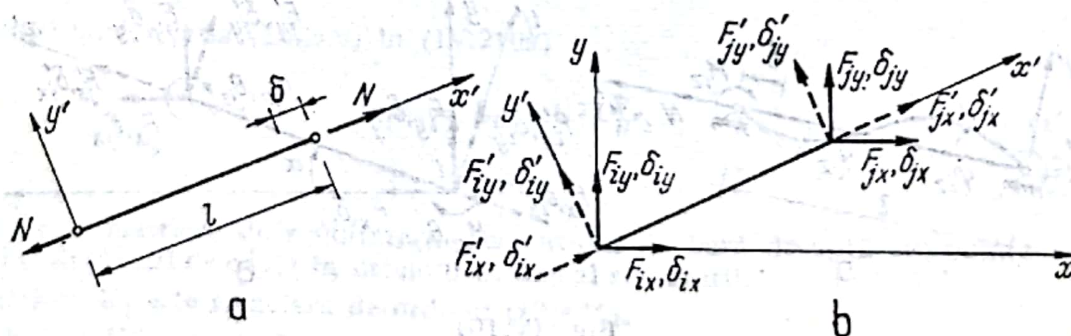


Fig. IV.102

4.6.3. **Stabilirea ecuațiilor de condiție. Asamblarea matricei de rigiditate a structurii $\mathbf{K}_s$.** După cum s-a arătat la pct. 4.5.2. determinarea matricei de rigiditate a structurii $\mathbf{K}_s$ implică efectuarea produsului matriceal $\mathbf{a}^T\mathbf{k}\mathbf{a}$. În practică, această operație

$$\begin{matrix}
-\frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha-\frac{EA}{l}\cos^2\alpha & \frac{12EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha \\
\frac{12EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{12EI}{l^3}\cos^2\alpha-\frac{EA}{l}\sin^2\alpha & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha \\
\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{2EI}{l} \\
\frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha+\frac{EA}{l}\cos^2\alpha & -\frac{12EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha \\
-\frac{12EI}{l^3}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{EA}{l}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{12EI}{l^3}\cos^2\alpha+\frac{EA}{l}\sin^2\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha \\
\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{4EI}{l}
\end{matrix}\Bigg] \qquad (IV.216)$$

nu se execută deoarece, pe de o parte, solicită rezervarea de zone mari în memoria calculatorului iar, pe de altă parte, operaţia este echivalentă cu plasarea matricelor de rigiditate a elementelor $\mathbf{K}_1$ în matricea $\mathbf{K}_s$.

Pentru cazul componentelor eforturi şi deplasări de capăt exprimate în sistemul de axe al structurii, matricea **a** este alcătuită din submatrice unitare.

Contribuţia unui element m legat la nodurile p şi q (fig. IV.103), la matricea $\mathbf{K}_s$ rezultă prin efectuarea produsului matriceal $\mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a}$.

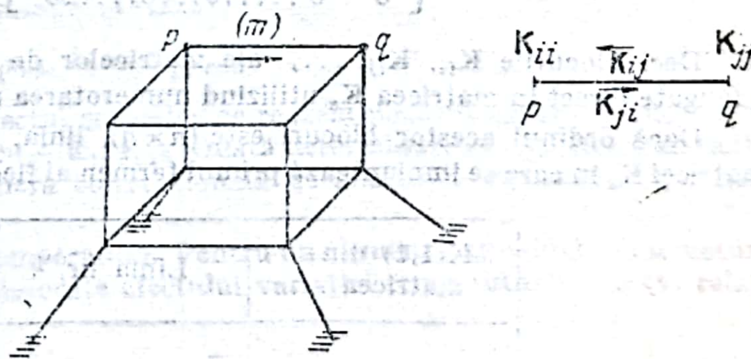


Fig. IV.103

Transformarea (IV.178a) pentru elementul m devine

$$\mathbf{D}_m=\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_p\\ \cdots\\ \mathbf{r}_q\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\ldots[\mathbf{I}]\ldots\ldots0 & 0\\ 0 & 0\ldots\ldots[\mathbf{I}]\ldots0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \vdots\\ \mathbf{r}_p\\ \vdots\\ \mathbf{r}_q\\ \vdots\end{Bmatrix} \qquad (IV.218)$$

(coloana p — marcată deasupra primului $[\mathbf{I}]$; coloana q — marcată sub al doilea $[\mathbf{I}]$)

Dezvoltînd produsul matriceal $\mathbf{K}_s^{(m)} = \mathbf{a}_m^T \mathbf{K}_1^m \mathbf{a}_m$ se obține

$$\mathbf{K}^m{}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & 0 & 0 \ldots \mathbf{I} \ldots\ldots 0 \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & 0 & 0 \ldots\ldots \mathbf{I} \ldots 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots\ldots & \overset{\downarrow \text{coloana } p}{0} \ldots & \overset{\downarrow \text{coloana } q}{0} \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \ldots & 0 \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots\ldots & \mathbf{K}_{ii} \ldots & \mathbf{K}_{ij} \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots\ldots & \mathbf{K}_{ji} \ldots & \mathbf{K}_{jj} \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \ldots & 0 \ldots\ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \rightarrow \text{linia } p \\ \\ \rightarrow \text{linia } q \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{IV.219}$$

Deci blocurile $\mathbf{K}_{ii}$, $\mathbf{K}_{ij}$, ..., ale matricelor de rigiditate pentru elemente pot fi adăugate direct în matricea $\mathbf{K}_s$ utilizînd numerotarea nodurilor p și q.

Dacă ordinul acestor blocuri este $(n \times n)$, linia, respectiv coloana corespunzătoare matricei $\mathbf{K}_s$ în care se implantează primul termen al fiecărei submatrice este :

K(1,1) din matricea	Linia nr.	Coloana nr.
$\mathbf{K}_{ii}$	$n(p-1)+1$	$n(p-1)+1$
$\mathbf{K}_{ij}$	$n(p-1)+1$	$n(q-1)+1$
$\mathbf{K}_{ji}$	$n(q-1)+1$	$n(p-1)+1$
$\mathbf{K}_{jj}$	$n(q-1)+1$	$n(q-1)+1$

Matricea $\mathbf{K}_s$ determinată pentru o structură liberă (nelegată la teren) este singulară, în componentele vectorului $\mathbf{R}$ sînt cuprinse și reacțiunile. Pentru a putea inversa matricea $\mathbf{K}_s$, vor trebui eliminate deplasările de corp rigid ale structurii, impunînd deplasări zero

pe direcțiile legăturilor fixe (eliminarea liniilor și coloanelor corespunzătoare). Se obțin astfel deplasările nodurilor libere ale structurii

$$\mathbf{r}_r = \mathbf{K}_r^{-1}\mathbf{R}_r \qquad \text{(IV.220)}$$

unde indicele r precizează că se lucrează cu matrice reduse.

Pentru un element de structură m, conectat la nodurile p și q, deplasările extremităților sale i și j sînt localizate în n linii ale vectorului $\mathbf{r}$, corespunzător locațiilor $[n(p-1)+1]$ pentru nodul i și $[n(q-1)+1]$ pentru nodul j.

Grupînd aceste deplasări într-un vector $\mathbf{r}_m$ se poate scrie

$$\mathbf{E}_{ij} = \overline{\mathbf{E}}_{ij} + \mathbf{k}\,\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T\mathbf{r}_m \qquad \text{(IV.221)}$$

Dacă în calcule se utilizează componentele eforturi și deplasări de capăt dependente relația (IV.221) devine

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_i' \\ \hdashline \mathbf{E}_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{E}}_i' \\ \hdashline \overline{\mathbf{E}}_j' \end{Bmatrix} + \mathbf{k}_t\,\mathbf{L}_D^T\,\mathbf{r}_m \qquad \text{(IV.222)}$$

4.6.4. Efectul cedărilor de reazem. În vederea introducerii în calcule a efectului cedărilor de reazem, punctele de rezemare ale structurii sînt considerate noduri ale căror deplasări sînt specificate. În acest caz, sistemul general al ecuațiilor de condiție se poate scrie partiționat sub forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{nec} \\ \hdashline \mathbf{r}_{cun} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.223)}$$

unde $\mathbf{R}_2$ este vectorul reacțiunilor.

Reținînd prima ecuație din relația (IV.223)

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{r}_{nec} = -\,\mathbf{K}_{12}\mathbf{r}_{cun}. \qquad \text{(IV.224)}$$

Relația (IV.224) arată că efectul cedărilor de reazem poate fi simulat printr-un set de încărcări fictive la noduri egal cu $-\mathbf{K}_{12}\,\mathbf{r}_{cun}$. Odată determinate aceste încărcări fictive la noduri, calculul urmează maniera convențională de analiză a structurii la sarcini exterioare.

4.6.5. Efectul variațiilor de temperatură. Pentru un element individual i al structurii, eforturile de încastrare perfectă datorate efectului variației temperaturii este (v. relația (IV.190)]

$$\overline{\mathbf{E}}_i = -\,\mathbf{k}_i\,\overline{\mathbf{D}}_i.$$

Suma la noduri a acestor eforturi de încastrare perfectă (luate cu semn schimbat) formează un set al încărcărilor fictive la noduri ce simulează efectul variației temperaturii.

Încărcările fictive la noduri se exprimă în sistemul de axe al structurii pe baza următoarelor transformări:

— eforturi de încastrare perfectă în sistemul de axe al structurii

$$\overline{\mathbf{R}}_i = \mathbf{L}_D\,\mathbf{U}\,\overline{\mathbf{E}}_i = -\,\mathbf{L}_D\mathbf{U}\,\mathbf{k}_i\overline{\mathbf{D}}_i\,; \qquad \text{(IV.225)}$$

— încărcări fictive la noduri în sistemul de axe al structurii

$$\mathbf{R}^* = -\,\overline{\mathbf{R}}_i. \qquad \text{(IV.226)}$$

Pe baza acestor forţe fictive, se evaluează un set de încărcări fictive la noduri, urmînd apoi maniera convenţională pentru analiza structurii sub încărcări exterioare.

4.7. Consideraţii asupra matricei de rigiditate a structurii (K_s)

4.7.1. Topologia matricei K_s. Matricea K_s are o structură particulară, este pozitiv definită, simetrică faţă de diagonala principală în jurul căreia se află o bandă de lăţime variabilă ţinînd seama de conexiunile existente între elemente. În afara benzii diagonale pot apărea coeficienţi secundari diferiţi de zero, depinzînd de alcătuirea structurii şi de ordinea de numerotare a nodurilor.

Lăţimea benzii matricei triunghiulare superioare, a matricei K_s se determină cu relaţia

$$L_b = n(\max |j - i| + 1) \tag{IV.227}$$

unde n este numărul deplasărilor pentru un nod al structurii ($n = 6$ la structuri spaţiale; $n = 3$ la structuri plane etc.).

Deci lăţimea maximă a benzii depinde de diferenţa maximă (în valoare absolută) dintre indicii j şi i ai nodurilor aflate la extremităţile unui element. Numerotarea nodurilor condiţionează lăţimea benzii, deci o bună utilizare a memoriei operative în care se stochează matricea.

Deşi sistemul de numerotare al nodurilor poate fi ales arbitrar, totuşi o numerotare particulară (numerotarea să urmeze direcţia predominantă a structurii) are avantajul obţinerii unei matrice de rigiditate de tip bandă, permiţînd să se cîştige spaţiu la introducerea matricei în memorie cît şi o economie de timp-maşină la rezolvarea sistemului de ecuaţii.

În fig. IV.104, *a*, *b*, este prezentat modul cum influenţează sistemul de numerotare al nodurilor, topologia matricei K_s, pentru un cadru plan cu două deschideri.

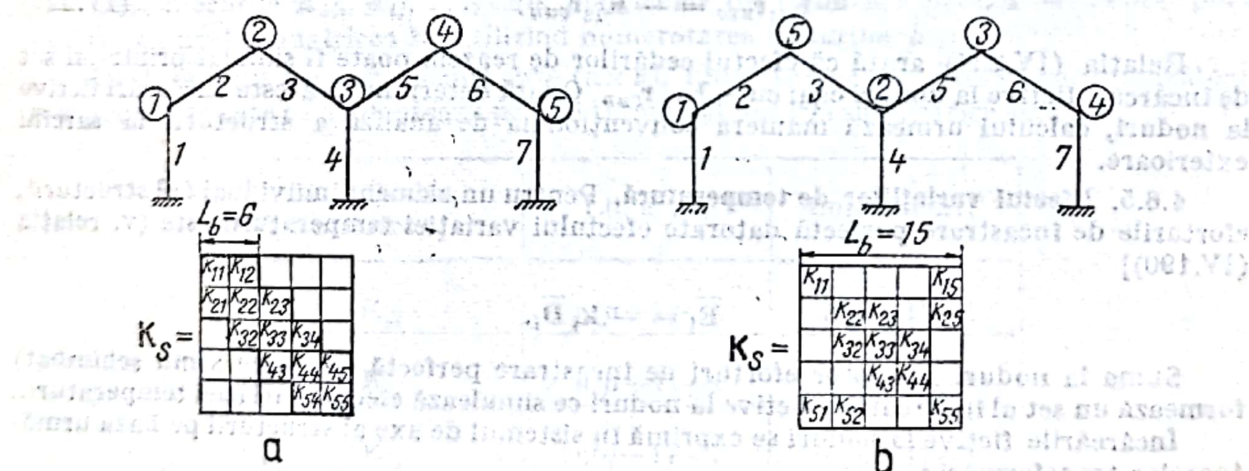


Fig. IV.104

4.7.2. Procedee de stocare a matricei K_s. În vederea rezolvării automatizate a structurilor complexe, prin metoda deplasărilor se poate proceda în două moduri:

1) Efectuarea întregii rezolvări în memoria internă a calculatorului utilizînd optim spaţiul limitat de stocare a informaţiilor de care se dispune.

În rezolvarea structurilor prin metoda deplasărilor adaptată calculului automat, tehnica inversării matricei de rigiditate redusă este prohibitivă deoarece: se rezervă spaţii mari de memorie (nu se uzează de particularităţile matricei $\mathbf{K}_s$), nu se realizează economie de timp-maşină, erorile de rotunjire devin supărătoare deoarece numărul de calcule este ridicat. Deci sînt de preferat procedee de rezolvare directă a sistemului ecuaţiilor de condiţie, care păstrează avantajele de memorizare rezultate din structura particulară a matricei $\mathbf{K}_s$.

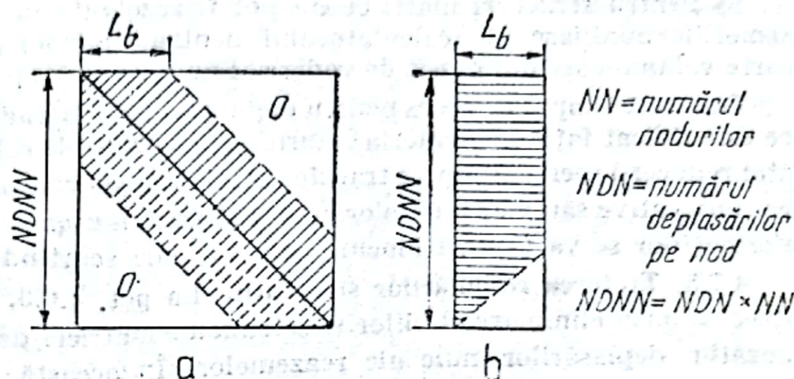


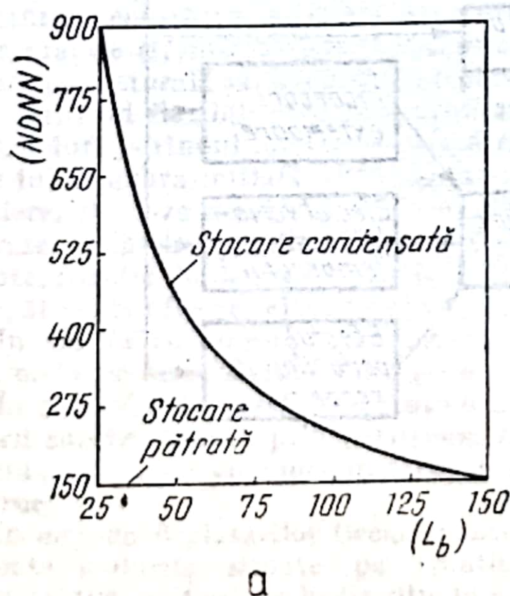
Fig. IV.105

Aparent, mărimea problemei de rezolvat este limitată de memoria operativă a calculatorului electronic utilizat şi de modul de stocare a matricei $\mathbf{K}_s$. Dacă se utilizează un calculator cu memorie operativă de 32 KB, mărimea matricei de rigiditate pătrate (fig. IV.105, *a*) nu poate depăşi 150 × 150, alocînd pentru aceasta 22,5 KB.

În aceste condiţii este avantajos să se reţină în memoria operativă a calculatorului numai elemente semnificative ale matricei $\mathbf{K}_s$, anume coeficienţii principali şi coeficienţii secundari diferiţi de zero situaţi deasupra diagonalei principale (fig. IV. 105, *b*).

În fig. IV.106, *a* este prezentat modul de variaţie al numărului ecuaţiilor ce pot fi stocate într-o memorie de 22,5 KB, funcţie de lăţimea benzii, utilizînd forma condensată a matricei $\mathbf{K}_s$ (fig. IV.105, *b*).

În fig. IV.106, *b* este arătată relaţia dintre numărul nodurilor (*NN*), lăţimea benzii (L_b) şi trei valori ale deplasărilor pe nod (*NDN*), pentru o memorie de 22,5KB.



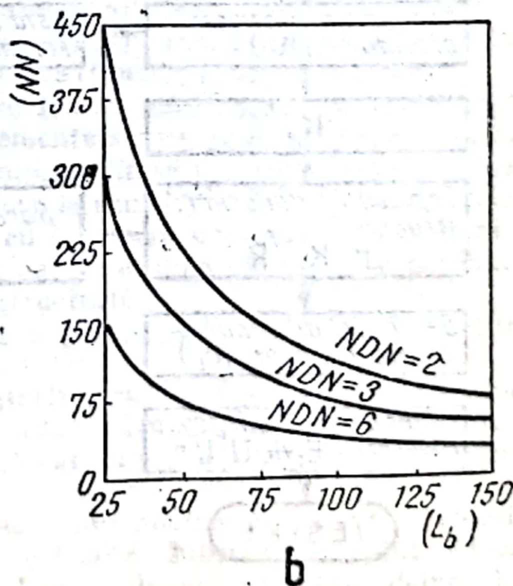


Fig. IV.106

2) Pentru structuri mari, ce nu pot fi rezolvate în memoria internă, se utilizează memoriile auxiliare ale calculatorului pentru depunerea unor rezultate intermediare foarte voluminoase din punct de vedere al numărului de informaţii.

Deoarece timpul de acces pentru depunerea sau extragerea datelor pe memorii auxiliare este ridicat faţă de memoria internă, algoritmul de calcul se cere organizat corespunzător reducerii acestui timp de transfer. Astfel, în general se va evita transferul de elemente nesemnificative sau a elementelor ce se pot genera uşor în memoria internă, iar transferul informaţiilor se va face în blocuri cît mai mari scurtînd astfel timpul de intrare-ieşire.

4.7.3. Tratarea rezemărilor structurii. La pct. 4.6.3. condiţiile de rezemare au fost introduse prin eliminarea liniilor şi coloanelor matricei de rigiditate a structurii $\mathbf{K}_s$ corespunzător deplasărilor nule ale reazemelor. În această manieră se calculează numai deplasările libere ale nodurilor. Inconvenientul acestei tratări a reazemelor constă în necesitatea rearanjării matricei $\mathbf{K}_s$.

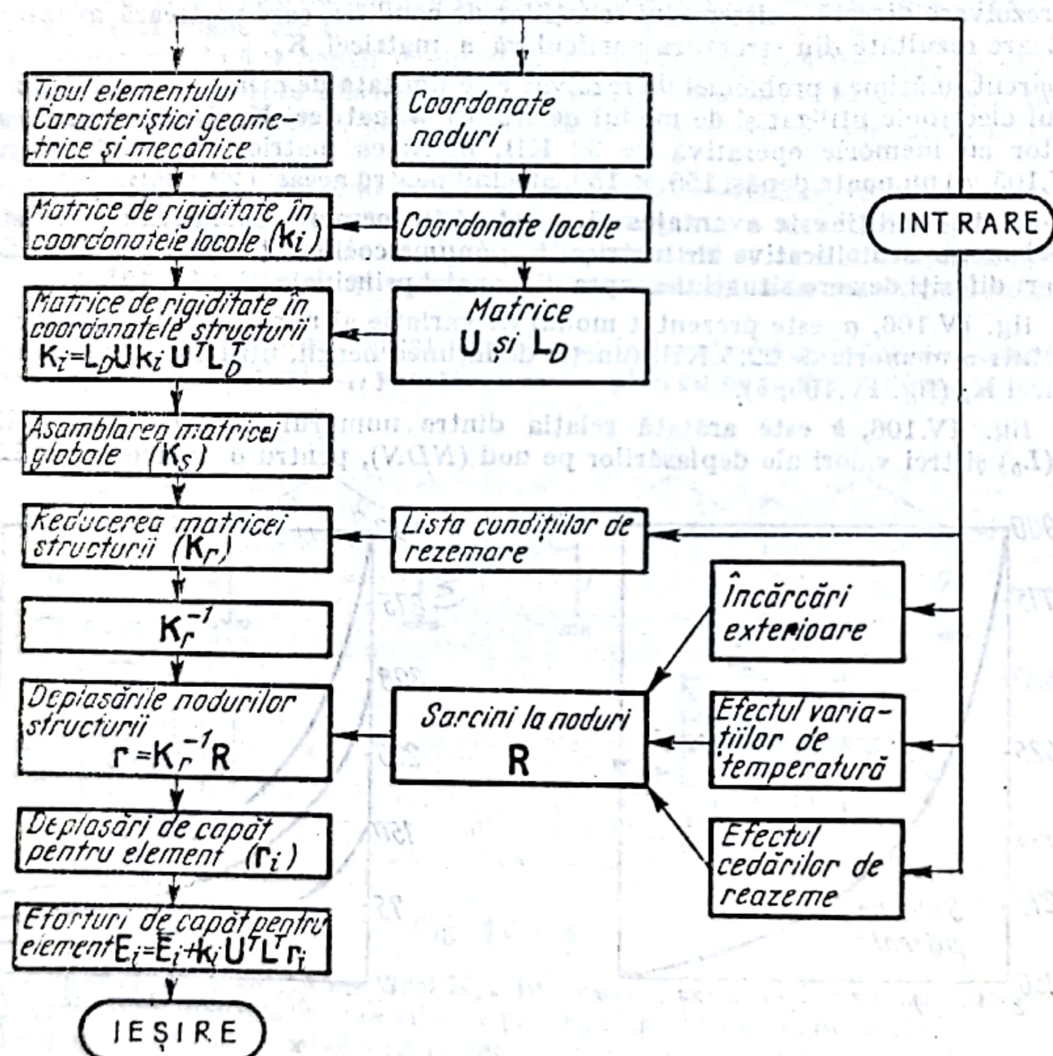


Fig. IV.107

Dacă se doreşte determinarea reacţiunilor din rezemări, se utilizează partiţionarea matricei globale $\mathbf{K}_s$ sub forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} \qquad (IV.228)$$

unde $\mathbf{R}_1$ cuprinde încărcările la noduri, $\mathbf{R}_2$ cuprinde reacţiunile din rezemări iar $\mathbf{r}_1$ cuprinde deplasările necunoscute (inclusiv deplasările libere din rezemări), $\mathbf{r}_2 = 0$ cuprinde deplasările pe direcţiile legăturilor din rezemări.

Dezvoltînd sistemul (IV.228) se obţine

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 \ \text{ şi } \ \mathbf{K}_{21}\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_2 \qquad (IV.228a)$$

Deci reacţiunile se pot obţine sub forma

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{R}_1 \qquad (IV.228b)$$

Este de remarcat că şi în acest caz este necesară o rearanjare a matricei de rigiditate globale $\mathbf{K}_s$.

Tratarea reazemelor poate fi înglobată în rezolvarea sistemului ecuaţiilor de condiţie, prin modificarea matricei $\mathbf{K}_s$ anulînd liniile şi coloanele corespunzătoare condiţiilor de rezemare nule, cu excepţia elementelor de pe diagonala principală care devin egale cu unu. Similar este modificat şi vectorul $\mathbf{R}$ prin plasarea unor încărcări nule pe direcţiile condiţiilor de rezemare. Este evident că în rezolvarea sistemului de ecuaţii se vor genera deplasări nule pe direcţiile specificate. Maniera expusă mai înainte privind tratarea rezemărilor are avantajul introducerii acestora în calcul fără o rearanjare a matricei $\mathbf{K}_s$ şi al tratării unitare a nodurilor structurii.

Diagrama bloc pentru aplicarea metodei deplasărilor adaptată calculului automat este prezentată în fig. IV.107.

4.7.4. **Analiza structurilor prin divizare în substructuri.** În cazul analizei structurilor de mare complexitate, utilizînd metode matriceale, numărul informaţiilor ce trebuie stocate în memoria operativă a calculatorului electronic depăşesc capacitatea acestuia, impunînd fragmentarea rezolvării analizei prin partiţionare structurală. Partiţionarea structurală constă în divizarea structurii analizate într-un număr de substructuri ale căror graniţe (frontiere) pot fi specificate arbitrar. Totuşi, este recomandabil ca partiţionarea structurală să se bazeze pe o partiţionare fizică (funcţională) a structurii.

Analizînd flexibilitatea sau rigiditatea pentru fiecare substructură în parte, aceste substructuri la rîndul lor pot fi considerate ca elemente structurale complexe şi reasamblate în structura iniţială utilizînd ecuaţii de compatibilitate sau de echilibru scrise pe frontiere. Pe baza acestor ecuaţii se determină forţele sau deplasările pe frontierele de separare. Încărcînd separat fiecare substructură cu forţe sau deplasări de frontieră cunoscute, funcţie de metoda de calcul adoptată, se pot determina eforturile şi deplasările de capăt pentru fiecare element component al substructurii.

În fig. IV.108, *a* este prezentat un caz curent de partiţionare în două substructuri I şi II, nodurile de conexiune fiind notate cu *F*.

În fig. IV.108, *b* este prezentat un sistem spaţial în formă de tub elastic, la care ideea alegerii substructurilor prin partiţionarea ansamblului spaţial în plane permite analiza fiecărui plan elastic component, separat, atît la încărcări în planul cît şi normal pe planul substructurii.

În metoda deplasărilor fiecare substructură este întîi analizată separat considerînd că toate nodurile situate pe frontierele cu celelalte substructuri sînt blocate (v. fig. IV.108, *a*) Apoi nodurile situate pe frontiere sînt relaxate simultan, determinîn-

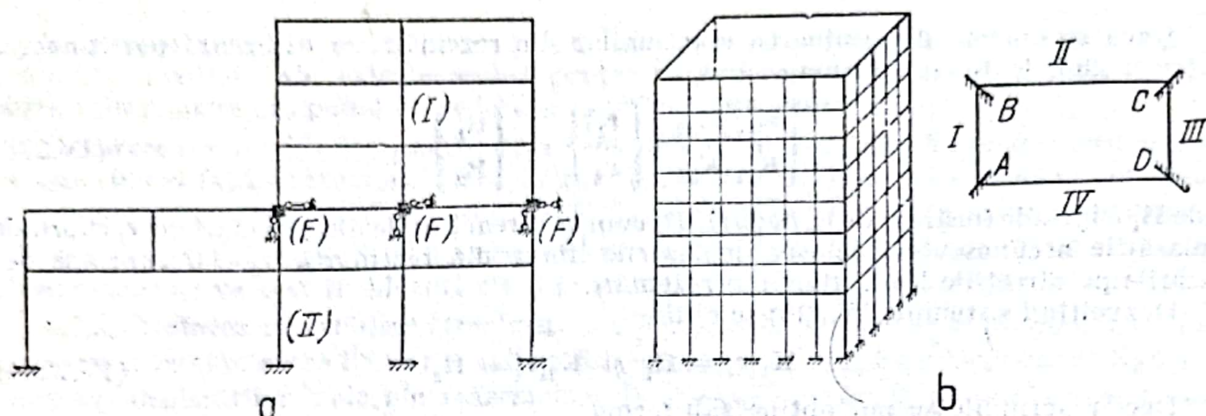


Fig. IV.108

du-se deplasările lor pe baza ecuațiilor de echilibru static a acestor noduri. Încărcînd fiecare substructură cu deplasările frontierelor sale, se determină eforturile de capăt pentru fiecare element component al substructurii.

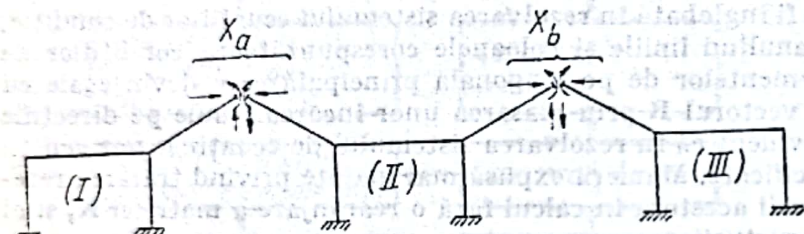


Fig. IV.109

Aceste eforturi de capăt se suprapun peste cele determinate în etapa frontierelor blocate, rezultînd eforturile de capăt finale. În metoda eforturilor fiecare substructură este întîi analizată separat considerînd legăturile pe frontiere suprimate și înlocuite cu forțe de legătură (fig. IV.109). Forțele de legătură pe frontieră se determină pe baza ecuațiilor de compatibilitate a deformatei scrise pe direcția fiecărei legături suprimate. Încărcînd fiecare substructură cu forțele de frontieră se determină eforturile de capăt pentru fiecare element component. Suprapunînd aceste eforturi peste cele determinate în etapa frontierelor tăiate, se obțin eforturile de capăt finale.

Exemplul de calcul IV.11. Pentru sistemul structural din fig. IV.110, *a* se determină diagrama de momente încovoietoare, utilizînd metoda eforturilor.

Elementele de conlucrare (reazemele elastice) dintre cele două grinzi au rigiditatea egală cu $k = 18EI/l^3$.

În fig. IV.110, *b* este prezentată împărțirea în elemente a sistemului structural iar în fig. IV.110, *c* și *d* este prezentată reducerea încărcării distribuite la noduri.

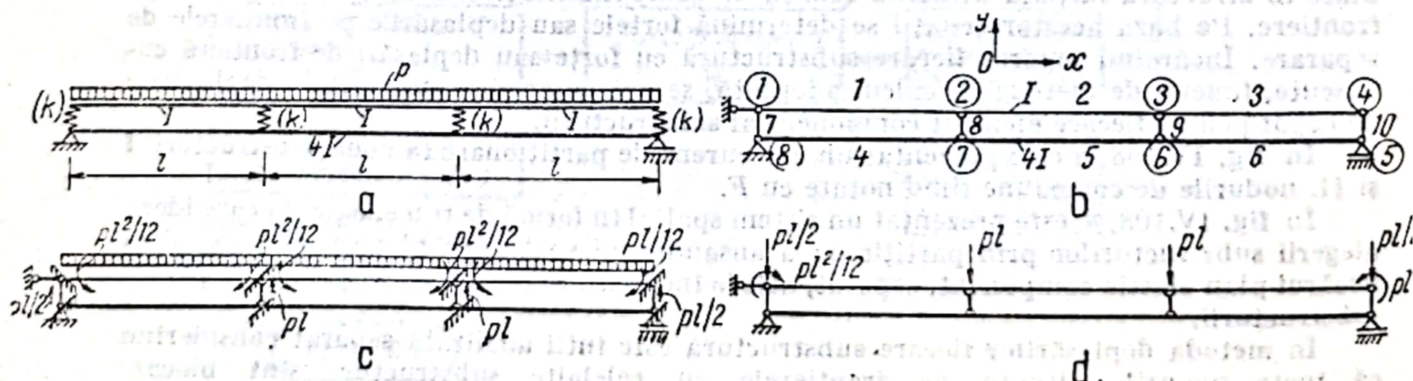


Fig. IV.110

În fig. IV.111 sînt prezentate eforturile de capăt pentru fiecare element al structurii.

Încărcînd sistemul de bază (fig. IV.112, *a*) succesiv, cu încărcări la noduri unitare (fig. IV.112, *b*–*g*) și cu necunoscute unitare (fig. IV.112, *h*, *i*) se pot determina matricele de transformare $\mathbf{b}_0$ și $\mathbf{b}_1$.

$$\mathbf{E} = \mathbf{b}_0\mathbf{R} + \mathbf{b}_1\mathbf{X}$$

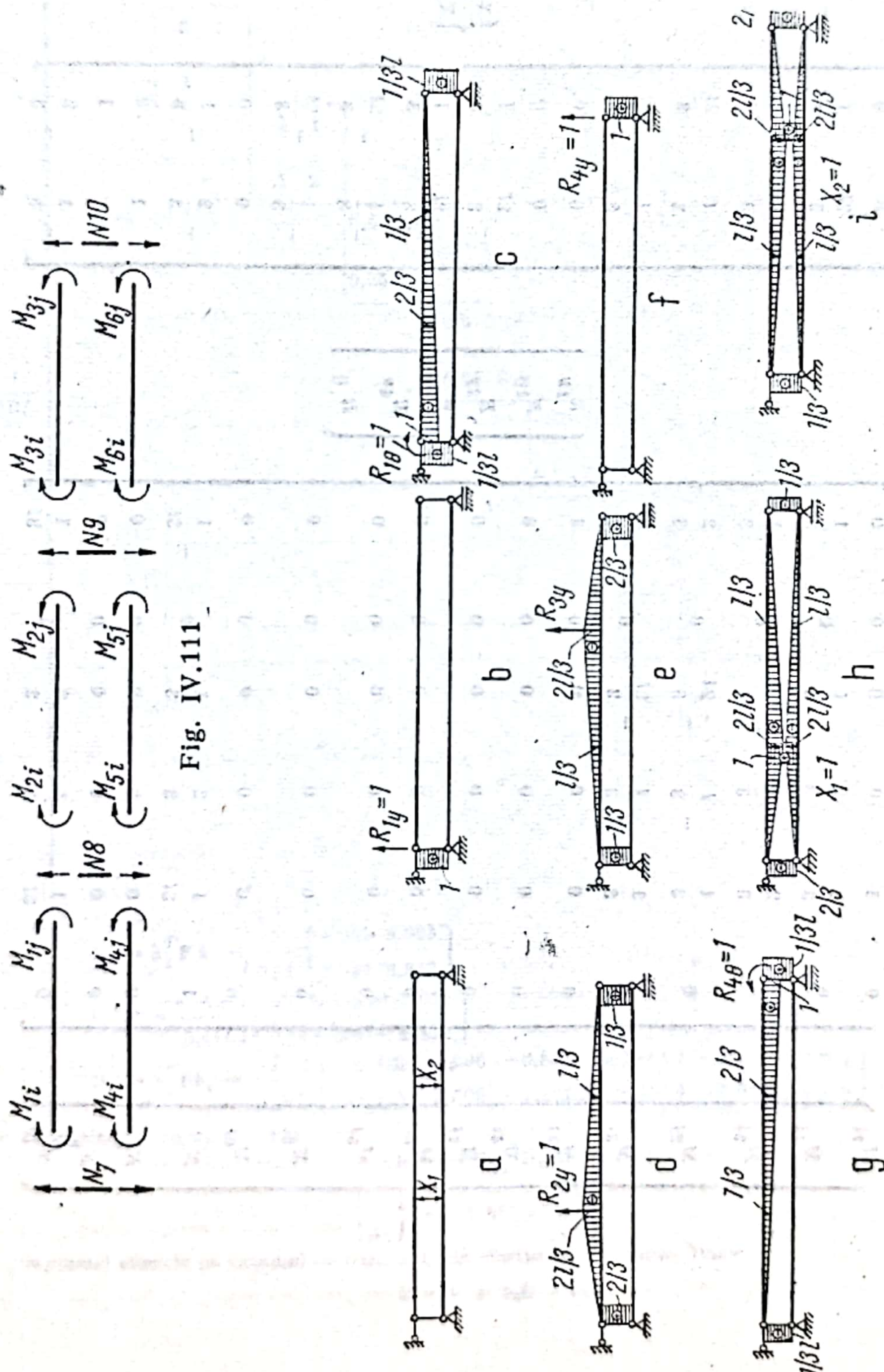


Fig. IV.111

Fig. IV.112

sau detaliat:

$$
\begin{Bmatrix} M_{1i} \\ M_{1j} \\ M_{2i} \\ M_{2j} \\ M_{3i} \\ M_{3j} \\ M_{4i} \\ M_{4j} \\ M_{5i} \\ M_{5j} \\ M_{6i} \\ M_{6j} \\ N_{7} \\ N_{8} \\ N_{9} \\ N_{10} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{3} & -\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & -\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & -\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & -\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{3l} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3l} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{3l} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} R_{1v} \\ R_{10} \\ R_{2v} \\ R_{3v} \\ R_{4v} \\ R_{0} \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
\frac{2l}{3} & \frac{l}{3} \\
\frac{2l}{3} & \frac{l}{3} \\
\frac{l}{3} & \frac{2l}{3} \\
\frac{l}{3} & \frac{2l}{3} \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
-\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} \\
-\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} \\
-\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} \\
-\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} \\
0 & 0 \\
-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\
1 & 0 \\
0 & 1 \\
-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}
$$

– Matricea flexibilității elementare diagonale

$$\mathbf{F} = \frac{l}{6EI}\begin{bmatrix} \begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix} & & & & & & & & & \\ & \begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix} & & & & & & & & \\ & & \begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix} & & & & & & & \\ & & & \begin{matrix}0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}5\end{matrix} & & & & & & \\ & & & & \begin{matrix}0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}5\end{matrix} & & & & & \\ & & & & & \begin{matrix}0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 0{,}5\end{matrix} & & & & \\ & & & & & & \frac{l^2}{3} & & & \\ & & & & & & & \frac{l^2}{3} & & \\ & & & & & & & & \frac{l^2}{3} & \\ & & & & & & & & & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{b}_1^T \mathbf{F}\, \mathbf{b}_1 = \frac{l^3}{6EI}\begin{bmatrix} 3{,}852 & 3{,}065 \\ 3{,}065 & 3{,}852 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{11}^{-1} = \frac{6\,EI}{5{,}444\, l^3}\begin{bmatrix} 3{,}852 & -3{,}065 \\ -3{,}065 & 3{,}852 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{10} = \mathbf{b}_1^T \mathbf{F} \mathbf{b}_0 = \frac{l^2}{6EI}\begin{bmatrix} -0{,}222\, l & 3{,}296 & -2{,}851\, l & -2{,}481\, l & -0{,}111\, l & 2{,}703 \\ -0{,}111\, l & 2{,}703 & -2{,}481\, l & -2{,}851\, l & -0{,}222 l, & 3{,}296 \end{bmatrix}$$

– Determinarea necunoscutelor

$$\mathbf{X} = -\,\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10}\mathbf{R}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -0{,}867\; pl \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Suprapunînd efectele pe sistemul de bază se obţin eforturile de capăt finale

$$\mathbf{E} = \mathbf{\bar{E}} + \mathbf{b}_0\mathbf{R} + \mathbf{b}_1\mathbf{X}$$

Sau

$$
\begin{Bmatrix} M_{1i} \\ M_{1j} \\ M_{2i} \\ M_{2j} \\ M_{3i} \\ M_{3j} \\ M_{4i} \\ M_{4j} \\ M_{5i} \\ M_{5j} \\ M_{6i} \\ M_{6j} \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -\frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ -\frac{pl^2}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{3} & -\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & -\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & -\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & -\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{3l} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3l} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{3l} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} -\frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \\ -pl \\ -pl \\ -\frac{pl}{2} \\ \frac{pl^2}{12} \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
2l & \frac{l}{3} \\
\frac{2l}{3} & \frac{l}{3} \\
\frac{l}{3} & \frac{2l}{3} \\
\frac{l}{3} & \frac{2l}{3} \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
-\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} \\
-\frac{2l}{3} & -\frac{l}{3} \\
-\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} \\
-\frac{l}{3} & -\frac{2l}{3} \\
0 & 0 \\
-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\
1 & 0 \\
0 & 1 \\
-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}
\end{bmatrix}
(0{,}867\ pl) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}133\ pl^2 \\ 0{,}133\ pl^2 \\ 0{,}133\ pl^2 \\ 0{,}133\ pl^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}867\ pl^2 \\ 0{,}867\ pl^2 \\ 0{,}867\ pl^2 \\ 0{,}867\ pl^2 \\ 0 \\ -0{,}633\ pl \\ -0{,}867\ pl \\ -0{,}867\ pl \\ -0{,}633\ pl \end{Bmatrix}
$$

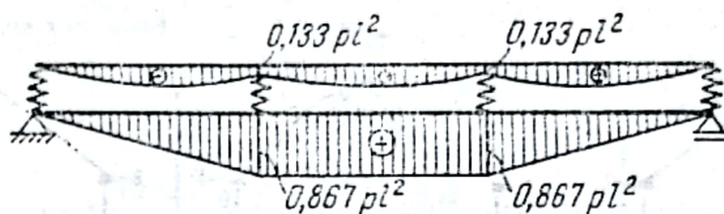


Fig. IV.113

Diagrama de momente încovoietoare este prezentată în fig. IV.113.

Exemplul de calcul IV.12. Pentru cadrul din fig. IV.114, *a* se determină diagrama de momente încovoietoare utilizind metoda generală a deplasărilor.

În fig. IV.114, *b* este prezentată împărțirea în elemente a structurii iar în fig. IV.114, *c*, sint prezentate sistemul de bază și necunoscutele (trei rotiri de noduri și două translații).

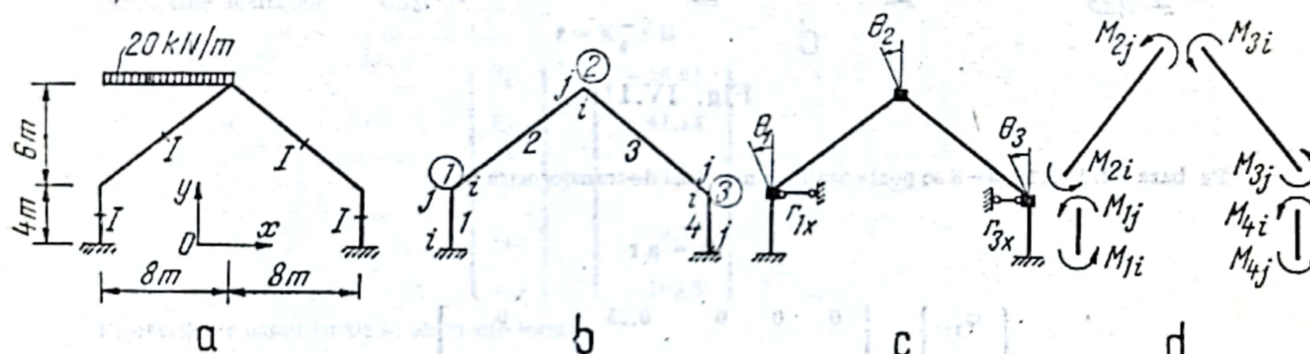


Fig. IV.114

În calcule se va neglija influența efortului axial, deci vectorul eforturilor de capăt este (fig. IV.114, *d*)

$$\{E\}^T = \{M_{1i} M_{1j} M_{2i} M_{2j} M_{3i} M_{3j} M_{4i} M_{4j}\}$$

In fig. IV.115, *a* — *c* este prezentat modul de reducere a încărcărilor la noduri.

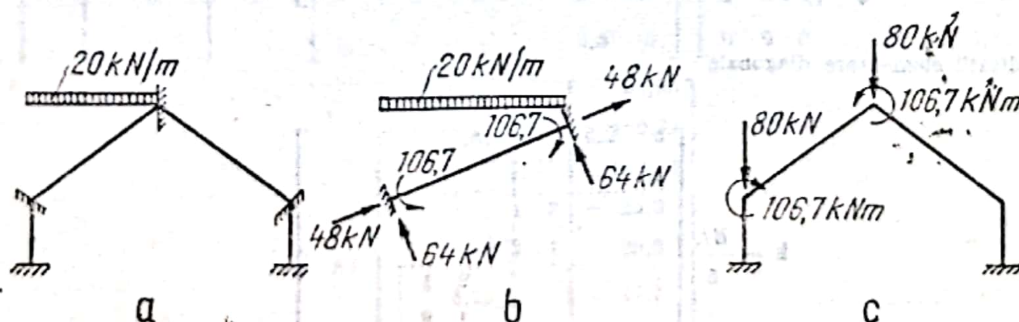


Fig. IV.115

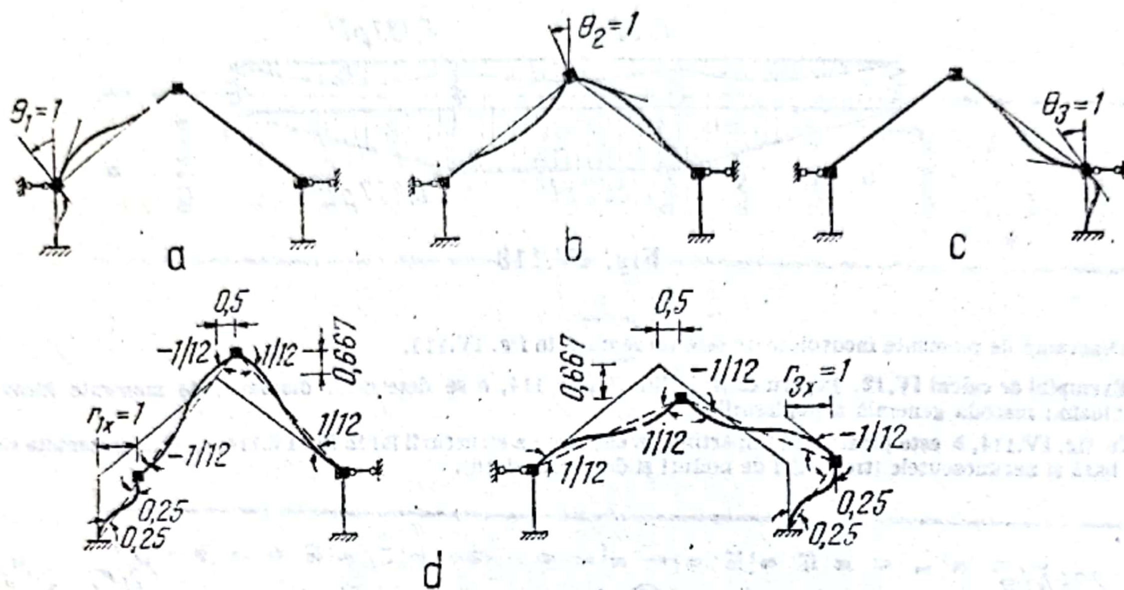


Fig. IV.116

Pe baza fig. IV.116, *a–d* se poate asambla matricea de transformare **a**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}\,\mathbf{r}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{1j} \\ \varphi_{2i} \\ \varphi_{2j} \\ \varphi_{3i} \\ \varphi_{3j} \\ \varphi_{4i} \\ \varphi_{4j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0{,}0833 & 0{,}0833 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}0833 & 0{,}0833 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}0833 & -0{,}0833 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0833 & -0{,}0833 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ r_{1x} \\ r_{3x} \end{Bmatrix}$$

Matricea rigidității elementare diagonale

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{5}\begin{bmatrix} 5 & 2{,}5 & & & & & & \\ 2{,}5 & 5 & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & & 5 & 2{,}5 \\ & & & & & & 2{,}5 & 5 \end{bmatrix}$$

Matricea de rigiditate a structurii

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{a}^T \mathbf{k}\, \mathbf{a}$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{EI}{5}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 1{,}625 & 0{,}25 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0{,}25 & 1{,}625 \\ 1{,}625 & 0 & 0{,}25 & 1{,}0203 & -0{,}0833 \\ 0{,}25 & 0 & 1{,}625 & -0{,}0833 & 1{,}0203 \end{bmatrix}$$

Încărcări la noduri pe direcţiile legăturilor suplimentare

$$Q_1 \cdot 1 = -80 \cdot 0{,}667 = -53{,}3 \text{ kN}$$

$$Q_2 \cdot 1 = 80 \cdot 0{,}667 = 53{,}3 \text{ kN}.$$

Vectorul încărcărilor la noduri pe direcţiile legăturilor suplimentare este

$$\{\mathbf{R}\}^T = \{-106{,}7 \quad 106{,}7 \quad 0 \quad -53{,}3 \quad 53{,}3\}$$

Deplasările nodurilor

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{R}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ r_{1x} \\ r_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26{,}61 \\ 41{,}14 \\ -31{,}56 \\ 6{,}75 \\ 109{,}6 \end{Bmatrix} \cdot \frac{5}{EI}$$

Eforturile de capăt finale se obţin sub forma

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{k}\,\mathbf{a}\,\mathbf{r}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{1i} \\ M_{1j} \\ M_{2i} \\ M_{2j} \\ M_{3i} \\ M_{3j} \\ M_{4i} \\ M_{4j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 106{,}7 \\ -106{,}7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{5}\begin{bmatrix} 5 & 2{,}5 & & & & & & \\ 2{,}5 & 5 & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & & 5 & 2{,}5 \\ & & & & & & 2{,}5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0{,}0833 & 0{,}0833 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}0833 & 0{,}0833 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}0833 & -0{,}0833 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0833 & -0{,}0833 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{5}{EI}\begin{Bmatrix} -26{,}61 \\ 41{,}14 \\ -31{,}56 \\ 6{,}75 \\ 109{,}6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -53{,}85 \\ -120{,}35 \\ 120{,}35 \\ -25{,}3 \\ 25{,}3 \\ -47{,}7 \\ 47{,}7 \\ 126{,}2 \end{Bmatrix}$$

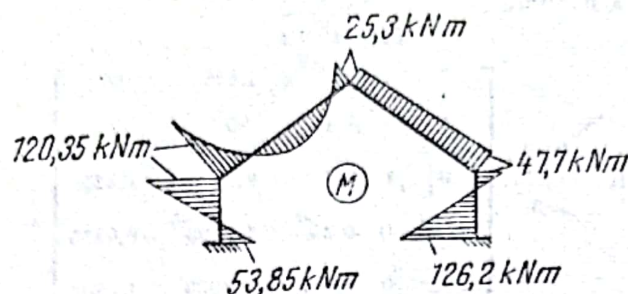


Fig. IV.117

În fig. IV.117 este prezentată diagrama de momente încovoietoare.

Exemplul de calcul IV.13. Pentru cadrul din fig. IV.118 se asamblează matricea de rigiditate a structurii exprimată pentru componente forțe și deplasări în sistemul de axe structura l.

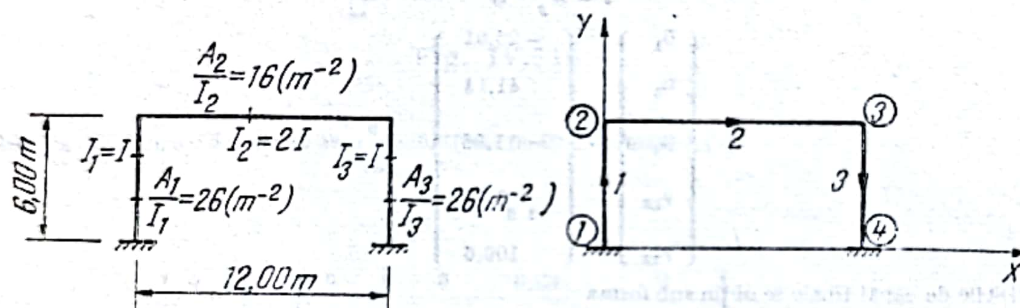


Fig. IV.118

Caracteristici geometrice ale elementelor

Element	Nod		Coordonate nod				l_i	$\sin\alpha = \frac{y_j - y_i}{l_i}$	$\cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{l_i}$
			x		y				
	i	j	i	j	i	j			
1	1	2	0	0	0	6	6	1,0	0,0
2	2	3	0	12	6	6	12	0,0	1,0
3	3	4	12	12	6	0	6	− 1,0	0,0

Matrice de rigiditate ale elementelor în sistemul de axe structura l

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}_D \mathbf{U} \mathbf{k} \mathbf{U}^T \mathbf{L}_D^T$$

1) Bara *1 – 2*

$$\mathbf{L}_D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k} = \frac{EI}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{EI}{3}\left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 & -\frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & -26 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 2 & 0{,}5 & 0 & 1 \\ \hdashline -\frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 & \frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -26 & 0 & 0 & 26 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Analog se obține:

2) Bara *2–3*

$$\mathbf{K}_{23} = \frac{EI}{3}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 16 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ \hdashline -16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 2 \end{array}\right];$$

3) Bara *3–4*

$$\mathbf{K}_{34} = \frac{EI}{3}\left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 & -\frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & -26 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 2 & -0{,}5 & 0 & 1 \\ \hdashline -\frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 & \frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -26 & 0 & 0 & 26 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Asamblarea matricei de rigiditate a structurii

$$
K_S = \frac{EI}{3}\begin{bmatrix}
\frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 & -\frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 & & & & & & \\
0 & 26 & 0 & 0 & -26 & 0 & & & & & & \\
-0{,}5 & 0 & 2 & -0{,}5 & 0 & 1 & & & & & & \\
-\frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 & \frac{1}{6}+16 & 0+0 & 0{,}5+0 & -16 & 0 & 0 & & & \\
0 & -26 & 0 & 0+0 & 26+\frac{1}{24} & 0+\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & & & \\
-0{,}5 & 0 & 1 & 0{,}5+0 & 0+\frac{1}{4} & 2+2 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & & & \\
 & & & -16 & 0 & 0 & 16+\frac{1}{6} & 0+0 & 0+0{,}5 & -\frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 \\
 & & & 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{4} & 0+0 & \frac{1}{24}+26 & -\frac{1}{4}+0 & 0 & -26 & 0 \\
 & & & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0+0{,}5 & -\frac{1}{4}+0 & 2+2 & -0{,}5 & 0 & 1 \\
 & & & & & & -\frac{1}{6} & 0 & -0{,}5 & \frac{1}{6} & 0 & 0{,}5 \\
 & & & & & & 0 & -26 & 0 & 0 & 26 & 0 \\
 & & & & & & 0{,}5 & 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

Prin suprimarea liniilor și coloanelor corespunzătoare deplasărilor nule, se obține matricea de rigiditate redusă (zona încadrată în centrul matricei K_S)

5. STRUCTURI PARTICULARE STATIC NEDETERMINATE

5.1. Grinzi drepte static nedeterminate

5.1.1. Grinda încastrată la un capăt și rezemată la celălalt capăt. Grinda este o dată static nedeterminată. Ca necunoscută statică se alege momentul din încastrare (fig. IV.119).

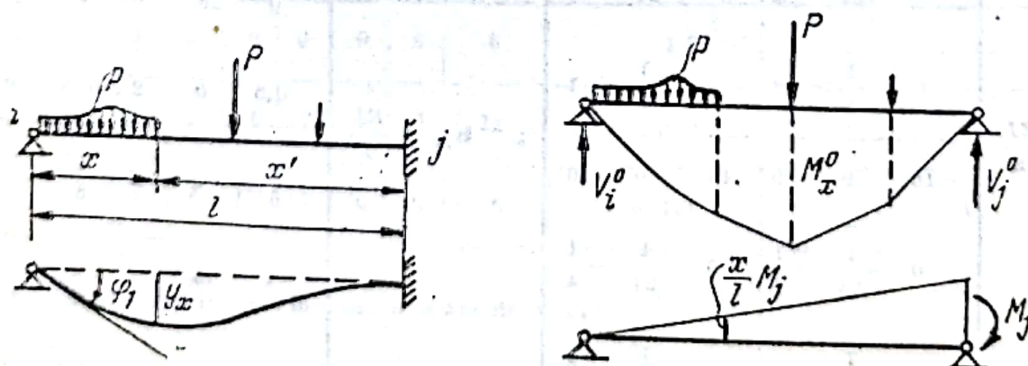


Fig. IV.11

5.1.1.1. Grinzi cu moment de inerție constant. Momentul de încastrare perfectă este

$$\mathfrak{M}_j = M_j = -\frac{m_j}{2}. \tag{IV.229}$$

în care m_j este factorul de încărcare din tabelul IV. 16a.

Expresiile reacțiunilor, forței tăietoare, momentului încovoietor și a săgeții grinzii în secțiunea x se obțin prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază

$$V_i = V_i^0 - \frac{M_j}{l}; \qquad V_j = V_j^0 + \frac{M_j}{l} \tag{IV.230}$$

$$T_x = T_x^0 - \frac{M_j}{l}; \qquad M_x = M_x^0 - \frac{x}{l} M. \tag{IV.231}$$

$$y_x = y_x^0 - \frac{M_j}{6EI_{ij}l} x(l^2 - x^2). \tag{IV.232}$$

unde V^0, T_x^0, M_x^0, y_x^0 se referă la grinda simplu rezemată avînd aceeași deschidere și aceleași încărcări.

5.1.1.2. Grinzi cu moment de inerție variabil. Expresia momentului de încastrare perfectă este

$$\mathfrak{M}_j = M_j = -\frac{m_j s''}{2c''}. \tag{IV.233}$$

Expresiile reacțiunilor, forței tăietoare și a momentului încovoietor în secțiunea x se pot obține pe baza relațiilor (IV.230) și (IV.231).

5.1.2. Grinda dublu încastrată. Dacă se consideră numai efectul încărcărilor cu forțe normale pe axa barei, grinda este de două ori static nedeterminată. Ca necunoscute statice se aleg momentele din încastrări (fig. IV.120).

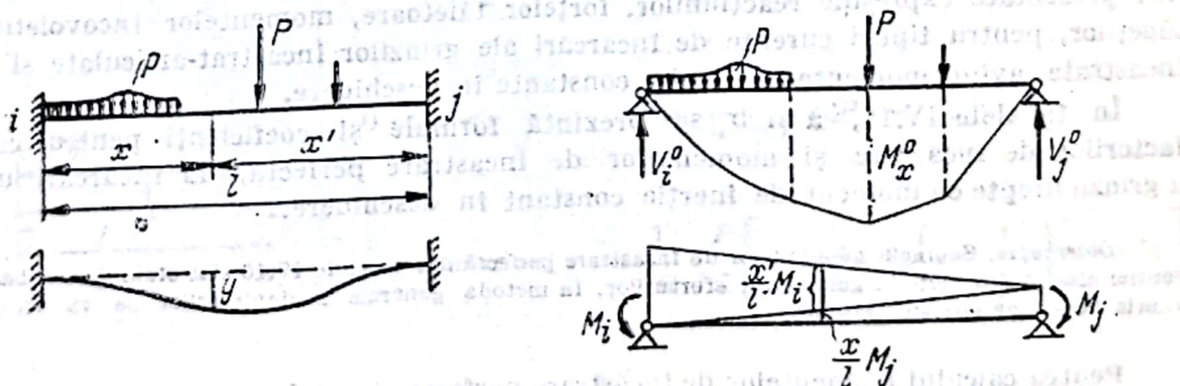


Fig. IV.120

5.1.2.1. Grindă cu moment de inerție constant. Momentele de încastrare perfectă sînt

$$\mathfrak{M}_i = M_i = -\frac{2m_i - m_j}{3}; \qquad \mathfrak{M}_j = M_j = -\frac{2m_j - m_i}{3}; \tag{IV.234}$$

Expresiile reacţiunilor, forţei tăietoare, momentului încovoietor, săgeţii şi rotirilor în secţiunea x se obţin prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază

$$V_i = V_i^0 + \frac{M_i - M_j}{l}; \qquad V_j = V_j^0 - \frac{M_i - M_j}{l} \tag{IV.235}$$

$$T_x = T_x^0 + \frac{M_i - M_j}{l}; \qquad M_x = M_x^0 - \frac{x'}{l} M_i - \frac{x}{l} M_j \tag{IV.236}$$

$$y_x = y_x^0 - \frac{1}{6EI_{ij}l}\,[M_i x'(l^2 - x'^2) + M_j x(l^2 - x^2)] \tag{IV.237}$$

în care V^0, T_x^0, M_x^0, y_x^0, corespund grinzii simplu rezemate avînd aceeaşi deschidere şi aceleaşi încărcări.

5.1.2.2. **Grinzi cu moment de inerţie variabil.** Momentele de încastrare perfectă se obţin sub forma

$$\mathfrak{M}_i = M_i = -\frac{2m_i s' c'' - m_j s'' c}{4c'c'' - c^2}; \qquad \mathfrak{M}_j = M_j = -\frac{2m_j s'' c' - m_i s' c}{4c'c'' - c^2} \tag{IV.238}$$

Expresiile reacţiunilor, forţei tăietoare şi a momentelor încovoietoare în secţiunea x se obţin pe baza relaţiilor (IV.235) şi (IV.236).

5.1.3. **Tabele uzuale pentru grinzi drepte static nedeterminate.** În tabelul IV.15 sînt prezentate expresiile reacţiunilor, forţelor tăietoare, momentelor încovoietoare şi săgeţilor, pentru tipuri curente de încărcări ale grinzilor încastrat-articulate şi dublu încastrate, avînd momente de inerţie constante în deschidere.

În tabelele IV.16, a şi b se prezintă formule şi coeficienţi pentru calculul factorilor de încărcare şi momentelor de încastrare perfectă, la încărcări uzuale, a grinzii drepte cu moment de inerţie constant în deschidere.

Observaţie. Semnele momentelor de încastrare perfectă din tabelele IV.16 sînt stabilite pe baza convenţiei clasice din metoda generală a eforturilor. În metoda generală a deplasărilor se va utiliza convenţia de semne corespunzătoare.

Pentru calculul momentelor de încastrare perfectă şi a deformaţiilor la grinzi drepte avînd momentul de inerţie variabil, se va utiliza tabelele IV.17—IV.21. Pe baza rapoartelor între caracteristicile vutelor şi ale grinzilor, $n = \frac{I_{min}}{I_{max}}$ şi $\lambda = \frac{l_v}{l}$, se pot extrage din tabele coeficienţii c', c'', c care depind numai de dimensiunile geometrice ale barei şi coeficienţii s', s'' pentru două cazuri de încărcare : o sarcină uniform repartizată pe întreaga deschidere a grinzii şi o sarcină concentrată aplicată la zecimile deschiderii. De-

oarece în calcule intervin produsele $m_i s'$ şi $m_j s''$, în tabele se găsesc coeficienţii α, α_1, α_2 care permit calculul lor direct.

De asemenea, tabelele IV.22—IV.27 permit calculul direct al momentelor de încastrare perfectă pentru o sarcină uniform distribuită în deschidere şi o sarcină concentrată acţionînd în zecimile deschiderii, al rigidităţilor şi al coeficienţilor de transmitere.

Observaţii. 1) Toţi coeficienţii sînt daţi pentru vute drepte.

2) Pentru alte valori ale lui n şi λ decît cele din tabele şi pentru alte tipuri de forme ale vutelor se pot utiliza tabele mai complete [4] sau expresiile date la metoda deplasărilor (v. tabelele IV.11 şi IV.13).

Tabelul IV.15

Reacţiuni, eforturi şi deformaţii la grinda dreaptă static nedeterminată

Tipul şi încărcarea barei	Expresiile reacţiunilor, forţelor tăietoare, momentelor încovoietoare şi deformaţiilor
1.	$M_2 = -\frac{1}{2} P \frac{b^3 + 2bl^2 - 3b^2 l}{l^2}$
1a.	$V_1 = \frac{5}{16} P; \quad V_2 = \frac{11}{16} P$ $M_3 = \frac{5}{32} Pl; \quad M_2 = -\frac{3}{16} Pl$ $0 < x < \frac{l}{2}: \quad y = \frac{1}{96} \frac{P}{EI} (3l^2 x - 5x^3)$ $\frac{l}{2} < x < l: \quad y = \frac{1}{96} \frac{P}{EI} \left[-5x^3 + 16\left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + 3l^2 x \right]$ $y_{max} = 0{,}00932 \frac{Pl^3}{EI}$ în secţiunea $x = 0{,}4472\, l$ $\varphi_1 = \frac{1}{32} \frac{Pl^2}{EI}$

Tabelul IV.15 (continuare)

Tipul şi încărcarea barei	Expresiile reacţiunilor, forţelor tăietoare, momentelor încovoietoare şi deformaţiilor
2. $P = pc$	$M_2 = \frac{Pa}{8l^2}(3bl - 4b^2 - c^2)$
2a. $P = pl$	$V_1 = \frac{3}{8}P$; $V_2 = \frac{5}{8}P$; $M_2 = -\frac{1}{8}Pl$ $T_x = P\left(\frac{3}{8} - \frac{x}{l}\right)$ $M_x = P\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l}\right)$; $M_{max} = \frac{9}{128}Pl$ la $x = \frac{3}{8}l$ $y = \frac{1}{48}\frac{P}{EIl}(2x^4 + l^3x - 3lx^3)$ $y_{max} = +0,0054\frac{Pl^3}{EI}$ în secţiunea $x = 0,4215\ l$ $\varphi_1 = \frac{1}{48}\frac{Pl^2}{EI}$
3. $P = \frac{1}{2}pl$	$V_1 = \frac{1}{5}P$; $V_2 = \frac{4}{5}P$; $M_2 = -\frac{2}{15}Pl$ $T_x = P\left(\frac{1}{5} - \frac{x^2}{l^2}\right)$; $M_x = P\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^2}\right)$

Tabelul IV.15 (continuare)

	Tipul și încărcarea barei	Expresiile reacțiunilor, forțelor tăietoare, momentelor încovoietoare și deformațiilor
		$M_{max} = 0{,}06\,Pl$ în secțiunea $x = 0{,}4474\,l$ $y = \frac{1}{60}\frac{P}{EIl}\left(l^3x + \frac{x^5}{l} - 2lx^3\right)$ $y_{max} = 0{,}00477\frac{Pl^3}{EI}$ în secțiunea $x = l\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\varphi_1 = \frac{1}{60}\frac{Pl^2}{EI}$
4.	$P=\frac{1}{2}pl$; p; 1; 2; l	$V_1 = \frac{11}{20}P;\ V_2 = \frac{9}{20}P;\ M_2 = -\frac{7}{60}Pl$ $T_x = P\left(\frac{11}{20} - \frac{2x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_x = P\left(\frac{11}{20}x - \frac{x^2}{l} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^2}\right)$ $M_{max} = 0{,}0846\ Pl$ în secțiunea $x = 0{,}329\,l$ $y = \frac{1}{120}\frac{P}{EIl}\left(3l^3x + 10x^4 - 11lx^3 - 2\frac{x^5}{l}\right)$ $y_{max} = 0{,}00609\frac{Pl^3}{EI}$ în secțiunea $x = 0{,}402\,l$ $\varphi_1 = \frac{1}{40}\frac{Pl^2}{EI}$

Tabelul IV.15 (continuare)

Tipul și încărcarea barei	Expresiile reacțiunilor, forțelor tăietoare, momentelor încovoietoare și deformațiilor
5.	$V_1 = \frac{11}{40} p_1 l + \frac{1}{10} p_2 l;\ V_2 = \frac{9}{40} p_1 l + \frac{4}{10} p_2 l$ $M_2 = -\frac{7}{120} p_1 l^2 - \frac{2}{30} p_2 l^2$ $T_x = \frac{1}{2} p_1 l \left(\frac{11}{20} - \frac{2x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) + \frac{1}{2} p_2 l \left(\frac{1}{5} - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_x = \frac{1}{2} p_1 l \left(\frac{11}{20} x - \frac{x^2}{l} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^2}\right) +$ $+ \frac{1}{2} p_2 l \left(\frac{1}{5} x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^2}\right)$ $y = \frac{1}{240} \frac{p_1}{EI} \left(3l^3 x + 10x^4 - 11lx^3 - 2\frac{x^5}{l}\right) +$ $+ \frac{1}{120} \frac{p_2}{EI} \left(l^3 x + \frac{x^5}{l} - 2lx^3\right)$ $\varphi_1 = \frac{1}{80} \frac{p_1 l^3}{EI} + \frac{1}{120} \frac{p_2 l^3}{EI}$
6.	$M_2 = -\frac{1}{2} M \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right)$
6a.	$V_1 = -\frac{3}{2} \frac{M}{l};\ V_2 = \frac{3}{2} \frac{M}{l};\ M_2 = -\frac{1}{2} M$ $T_x = -\frac{3}{2} \frac{M}{l};\ M_x = \frac{1}{2} M \left(2 - 3\frac{x}{l}\right)$ $y = \frac{1}{4} \frac{M}{EI} \left(\frac{x^3}{l} + lx - 2x^2\right)$ $y_{max} = \frac{1}{27} \frac{Ml^2}{EI}$ în secțiunea $x = \frac{1}{3} l$ $\varphi_1 = \frac{Ml}{4EI}$

Tabelul IV.15 (continuare)

Tipul și încărcarea barei	Expresiile reacțiunilor, forțelor tăietoare, momentelor încovoietoare și deformațiilor
7.	$M_1 = -P\frac{ab^2}{l^2}$; $M_2 - = P\frac{a^2b}{l^2}$
7a.	$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}P$; $T_{x_{1-3}} = +\frac{1}{2}P$; $T_{x_{3-2}} = -\frac{1}{2}P$ $M_{x_{1-3}} = \frac{1}{8}P(4x - l)$; $M_{x_{3-2}} = \frac{1}{8}P(3l - 4x)$ $M_3 = \frac{1}{8}Pl$; $M_1 = M_2 = -\frac{1}{8}Pl$ $y_{1-3} = \frac{1}{48}\frac{P}{EI}(3lx^2 - 4x^3)$; $y_{max} = \frac{1}{192}\frac{Pl^3}{EI}$ în secțiunea 3
8.	$M_1 = -\frac{1}{24}\frac{P}{l}\left(24\frac{b^3}{l} - 6\frac{\left(a + \frac{c}{2}\right)c^2}{l} + 3\frac{c^3}{l} + 4c^2 - 24b^2\right)$ $M_2 = -\frac{1}{24}\frac{P}{l}\left(24\frac{b^3}{l} - 6\frac{\left(a + \frac{c}{2}\right)c^3}{l} + 3\frac{c^3}{l} + 2c^2 - 48b^2 + 24bl\right)$

Tabelul IV.15 (continuare)

Tipul și încărcarea barei	Expresiile reacțiunilor, forțelor tăietoare, momentelor încovoietoare și deformațiilor
8a.	$V_1 = \frac{1}{4}\frac{P}{l^2}\left(12d^2 - 8\frac{d^3}{l} + \frac{a^3}{l} - a^2\right)$; $V_2 = P - V_1$ $M_1 = -\frac{1}{24}\frac{P}{l}\left(24\frac{d^3}{l} - 3\frac{a^3}{l} + 4a^2 - 24d^2\right)$ $M_2 = -\frac{1}{24}\frac{P}{l}\left(24\frac{d^3}{l} - 3\frac{a^3}{l} + 2a^2 - 48d^2 + 24dl\right)$ $T_{x_{1-3}} = V_1 - P\frac{x}{a}$; $T_{x_{3-2}} = V_1 - P$ $M_{x_{1-3}} = M_1 + V_1 x - \frac{1}{2}P\frac{x^2}{a}$; $M_{x_{3-2}} = M_1 + V_1 x - P\left(x - \frac{a}{2}\right)$ $+M_{max}$ se află între 1 și 3 la $x = \frac{V_1}{P}a$ $y_{1-3} = -\frac{1}{6EI}\left(V_1 x^3 + 3M_1 x^2 - \frac{1}{4}P\frac{x^4}{a}\right)$ $y_{3-2} = -\frac{1}{6EI}\left[V_2(l-x)^3 + 3M_2(l-x)^2\right]$
8b.	$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}P$; $M_1 = M_2 = -\frac{1}{12}Pl$ $T_x = \frac{1}{2}P\left(1 - \frac{2x}{l}\right)$ $M_x = \frac{1}{2}P\left(x - \frac{x^2}{l} - \frac{1}{6}l\right)$ $+M_{max} = \frac{1}{24}Pl$ la $x = \frac{l}{2}$ $y = \frac{1}{24}\frac{Px^2}{EIl}(x^2 + l^2 - 2lx)$ $y_{max} = \frac{1}{384}\frac{Pl^3}{EI}$ în secțiunea $x = \frac{1}{2}l$

Tabelul IV.15 (continuare)

Tipul și încărcarea barei	Expresiile reacțiunilor, forțelor tăietoare, momentelor încovoietoare și deformațiilor
9. $d = c + \frac{b}{3}$; a, b, c; $P = \frac{1}{2}pb$; p; 1, 3, l, 4, 2	$M_1 = -\frac{P}{l}\left(\frac{d^3}{l} + \frac{1}{9}b^2 + \frac{51}{810}\frac{b^3}{l} - \frac{1}{6}\frac{(a+b)b^2}{l} - d^2\right)$ $M_2 = -\frac{P}{l}\left(\frac{d^3}{l} + \frac{1}{18}b^2 + \frac{51}{810}\frac{b^3}{l} - \frac{1}{6}\frac{(a+b)b^2}{l} - 2d^2 + dl\right)$
9a. $P = \frac{1}{2}pl$; p; 1, 2, l	$V_1 = \frac{3}{10}P$; $V_2 = \frac{7}{10}P$; $M_1 = -\frac{1}{15}Pl$; $M_2 = -\frac{1}{10}Pl$; $T_x = P\left(\frac{3}{10} - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_x = P\left(\frac{3}{10}x - \frac{1}{15}l - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^2}\right)$ $+M_{max} = 0{,}043\ Pl$ la $x = 0{,}548l$ $y = \frac{1}{60}\frac{P}{EI}\left(2lx^2 + \frac{x^5}{l^2} - 3x^3\right)$ $y_{max} = 0{,}002617\frac{Pl^3}{EI}$ la $x = 0{,}525\ l$
10. a, b; M; 1, 3, l, 2	$M_1 = +\frac{M}{l^2}(4la - 3a^2 - l^2)$; $M_2 = -\frac{M}{l^2}(2la - 3a^2)$

Factorii de încărcare şi momentele de încas

Nr.	Încărcarea	Factorii de încărcare pentru: Reazemul stîng $m' = m_i = \frac{6R_i}{l}$	Reazemul drept $m'' = m_j = \frac{6R_j}{l}$
1		$\frac{q \cdot l^2}{4}$	$\frac{q \cdot l^2}{4}$
2		$\frac{q \cdot b \cdot l}{8}\left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q \cdot b \cdot l}{8}\left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right)$
3		$\frac{q \cdot a^2}{2}\left(3 - \frac{2a}{l}\right)$	$\frac{q \cdot a^2}{2}\left(3 - \frac{2a}{l}\right)$
4		$\frac{5}{32} \cdot q \cdot l^2$	$\frac{5}{32} \cdot q \cdot l^2$
5		$\frac{q}{4}\left[l^2 - a^2\left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$	$\frac{q}{4}\left[l^2 - a^2\left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$
6	Parabolă	$\frac{q \cdot l^2}{5}$	$\frac{q \cdot l^2}{5}$
7	Parabolă	$\frac{q \cdot l^2}{20}$	$\frac{q \cdot l^2}{20}$
8	Parabolă	$\frac{q \cdot l^2}{12}$	$\frac{q \cdot l^2}{15}$
9	Parabolă	$\frac{q \cdot l^2}{15}$	$\frac{q \cdot l^2}{12}$
10	Parabolă	$\frac{11 \cdot q \cdot l^2}{60}$	$\frac{q \cdot l^2}{6}$

Tabelul IV.16a

trare perfectă, pentru încărcări uzuale

Momente de încastrare perfectă pentru:		
Bare dublu încastrate		Bare încastrate la un capăt și articulate la capătul opus
M_i	M_j	M_i
$-\frac{q \cdot l^2}{12}$	$-\frac{q \cdot l^2}{12}$	$-\frac{q \cdot l^2}{8}$
$-\frac{q \cdot b \cdot l}{24}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$-\frac{q \cdot b \cdot l}{24}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$	$-\frac{q \cdot b \cdot l}{16}\left(3-\frac{b^2}{l^2}\right)$
$-\frac{q \cdot a^2}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$	$-\frac{q \cdot a^2}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$	$-\frac{q \cdot a^2}{4}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$
$-\frac{5}{96} \cdot q \cdot l^2$	$-\frac{5}{96} \cdot q \cdot l^2$	$-\frac{5}{64} \cdot q \cdot l^2$
$-\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$	$-\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$	$-\frac{q}{8}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$
$-\frac{q \cdot l^2}{15}$	$-\frac{q \cdot l^2}{15}$	$-\frac{q \cdot l^2}{10}$
$-\frac{q \cdot l^2}{60}$	$-\frac{q \cdot l^2}{60}$	$-\frac{q \cdot l^2}{40}$
$-\frac{q \cdot l^2}{30}$	$-\frac{q \cdot l^2}{60}$	$-\frac{q \cdot l^2}{24}$
$-\frac{q \cdot l^2}{60}$	$-\frac{q \cdot l^2}{30}$	$-\frac{q \cdot l^2}{30}$
$-\frac{q \cdot l^2}{15}$	$-\frac{q \cdot l^2}{20}$	$-\frac{11 \cdot q \cdot l^2}{120}$

Nr.	Încărcarea	Factorii de încărcare pentru: Reazemul sting $m' = m_i = \frac{6R_i}{l}$	Factorii de încărcare pentru: Reazemul drept $m'' = m_j = \frac{6R_j}{l}$
11		$\frac{q \cdot l^2}{6}$	$\frac{11 \cdot q \cdot l^2}{60}$
12		$\frac{q \cdot a \cdot b \cdot c}{l^2}\left(l + b - \frac{c^2}{4a}\right)$	$\frac{q \cdot a \cdot b \cdot c}{l^2}\left(l + a - \frac{c^2}{4l}\right)$
13		$\frac{q \cdot a^2}{4}\left(2 - \frac{a}{l}\right)^2$	$\frac{q \cdot a^2}{4}\left(2 - \frac{a^2}{l^2}\right)$
14		$\frac{q \cdot b^2}{4}\left(2 - \frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{q \cdot b^2}{4}\left(2 - \frac{b}{l}\right)^2$
15		$\frac{8 \cdot q \cdot l^2}{60}$	$\frac{7 \cdot q \cdot l^2}{60}$
16		$\frac{7 \cdot q \cdot l^2}{60}$	$\frac{8 \cdot q \cdot l^2}{60}$
17		$\frac{q(l + b)}{60l}(7l^2 - 3b^2)$	$\frac{q(l + a)}{60l}(7l^2 - 3a^2)$
18		$q \cdot a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{4l} + \frac{a^2}{20\,l^2}\right)$	$q \cdot a^2\left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{20l^2}\right)$
19		$q \cdot a^2\left(\frac{2}{3} - \frac{3a}{4l} + \frac{a^2}{5l^2}\right)$	$\frac{q \cdot a^2}{15}\left(5 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$
20		$\frac{3 \cdot P \cdot l}{8}$	$\frac{3 \cdot P \cdot l}{8}$
21		$\frac{P \cdot a \cdot b\,(b + l)}{l^2}$	$\frac{P \cdot a \cdot b\,(a + l)}{l^2}$

Tabelul IV. 16a (continuare)

Momente de incastrare perfectă pentru:		
M_i	M_j	M_i
$-\frac{q\cdot l^2}{20}$	$-\frac{q\cdot l^2}{15}$	$-\frac{q\cdot l^2}{12}$
$-\frac{q\cdot c}{l^2}\left[a\cdot b^2-\frac{c^2}{6}\left(b-\frac{a}{2}\right)\right]$	$-\frac{q\cdot c}{l^2}\left[a^2\cdot b^2-\frac{c^2}{6}\left(a-\frac{b}{2}\right)\right]$	$-\frac{q\cdot a\cdot b\cdot c}{2l^2}\left(l+b-\frac{c^2}{4a}\right)$
$-\frac{q\cdot a^2}{4}\left[2-\frac{a}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{a}{l}\right)\right]$	$-\frac{q\cdot a^3}{12l^2}(4l-3a)$	$-\frac{q\cdot a^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$
$-\frac{q\cdot b^3}{12l^2}(4l-3b)$	$-\frac{q\cdot b^2}{4}\left[2-\frac{b}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{b}{l}\right)\right]$	$-\frac{q\cdot b^2}{8}\left(2-\frac{b^2}{l^2}\right)$
$-\frac{q\cdot l^2}{20}$	$-\frac{q\cdot l^2}{30}$	$-\frac{q\cdot l^2}{15}$
$-\frac{q\cdot l^2}{30}$	$-\frac{q\cdot l^2}{20}$	$-\frac{7\cdot q\cdot l^2}{120}$
$-\frac{q\cdot l^2}{30}\left(1+\frac{b}{l}+\frac{b^2}{l^2}-1,5\cdot\frac{b^3}{l^3}\right)$	$-\frac{q\cdot l^2}{30}\left(1+\frac{a}{l}+\frac{a^2}{l^2}-1,5\cdot\frac{a^3}{l^3}\right)$	$-\frac{q(l+b)}{120l}(7l^2-3b^2)$
$-\frac{q\cdot a^2}{6}\left(1-\frac{a}{l}+\frac{3}{10}\cdot\frac{a^2}{l^2}\right)$	$-\frac{q\cdot a^2}{60}\cdot\frac{a}{l}\left(5-3\cdot\frac{a}{l}\right)$	$-\frac{q\cdot a^2}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{4l}+\frac{a^2}{20l^2}\right)$
$-q\cdot a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2l}+\frac{a^2}{5l^2}\right)$	$-\frac{q\cdot a^3}{l}\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{5l}\right)$	$-q\cdot a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{3a}{8l}+\frac{a^2}{10l^2}\right)$
$-\frac{P\cdot l}{8}$	$-\frac{P\cdot l}{8}$	$-\frac{3\cdot P\cdot l}{16}$
$-P\cdot a\cdot\frac{b^2}{l^2}$	$-P\cdot b\cdot\frac{a^2}{l^2}$	$-\frac{P\cdot a\cdot b}{2l^2}(l+b)$

Nr.	Încărcarea	Factorii de încărcare pentru: Reazemul stîng $m' = m_i = \frac{6R_i}{l}$	Reazemul drept $m'' = m_j = \frac{6R_j}{l}$
22		$3 \cdot P \cdot a\left(1 - \frac{a}{l}\right)$	$3 \cdot P \cdot a\left(1 - \frac{a}{l}\right)$
23		$\frac{15 \cdot P \cdot l}{16}$	$\frac{15 \cdot P \cdot l}{16}$
24		$\frac{Pl(n^2 - 1)}{4n}$	$\frac{Pl(n^2 - 1)}{4n}$
25		$\frac{P \cdot l}{8}\left(2n + \frac{1}{n}\right)$	$\frac{P \cdot l}{8}\left(2n + \frac{1}{n}\right)$
26		$2M$	M
27		$P \cdot c\left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$P \cdot c\left(3\frac{a^2}{l^2} - 1\right)$
28		$3 \cdot E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{d}$	$3 \cdot E \cdot I \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{d}$
29	$q' = \frac{ql}{2a}$	$q \cdot \frac{b}{4}(l - a)$	$q \cdot \frac{b}{4}(l - a)$

Tabelul IV.16a (continuare)

Momente de încastrare perfectă pentru:		
$+M_i$, $+M_j$, i, j, l		$+M_i$, i, j, l
M_i	M_j	M_i
$-\frac{P\cdot a}{l}(l-a)$	$-\frac{P\cdot a}{l}(l-a)$	$-\frac{3\cdot P\cdot a}{2l}(l-a)$
$-\frac{5\cdot P\cdot l}{16}$	$-\frac{5\cdot P\cdot l}{16}$	$-\frac{15\cdot P\cdot l}{32}$
$-\frac{P\cdot l(n^2-1)}{12n}$	$-\frac{P\cdot l(n^2-1)}{12n}$	$-\frac{P\cdot l(n^2-1)}{8n}$
$-\frac{P\cdot l}{24}\left(2n+\frac{1}{n}\right)$	$-\frac{P\cdot l}{24}\left(2n+\frac{1}{n}\right)$	$-\frac{P\cdot l}{16}\left(2n+\frac{1}{n}\right)$
$-M$	0	$-M$
$-P\cdot c\frac{a}{l}\left(4-3\frac{a}{l}-\frac{l}{a}\right)$	$-P\cdot c\cdot\frac{a}{l}\left(3\frac{a}{l}-2\right)$	$-P\cdot c\cdot\frac{a}{l}\left(3-1{,}5\frac{a}{l}-\frac{l}{a}\right)$
$-E\cdot I\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{d}$	$-E\cdot I\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{d}$	$-1{,}5\cdot E\cdot I\cdot\alpha_t\frac{\Delta t}{d}$
$-\frac{q\cdot l^2}{12}\left(\frac{2a^2}{l^2}-3\frac{a}{l}+1\right)$	$-\frac{q\cdot l^2}{12}\left(\frac{2a^2}{l^2}-\frac{3a}{l}+1\right)$	$-\frac{q\cdot l^2}{8}\left(1-\frac{3a}{l}+\frac{2a^2}{l^2}\right)$

Tabelul IV.16 b

Coeficienți pentru calculul factorilor de încărcare și al momentelor de încastrare perfectă

A. Sarcină trapezoidală

$\frac{p_2}{p_1}$	Factori de încărcare: $m_i = \alpha_1 p_1 l^2$	$m_j = \alpha_2 p_1 l^2$	Momente de încastrare perfectă: $M_i = -\mu_1 p_1 l^2$	$M_j = -\mu_2 p_1 l^2$	$M_i = -\beta_1 p_1 l^2$	$M_j = -\beta_2 p_1 l^2$
	α_1	α_2	μ_1	μ_2	β_1	β_2
0,00	0,1333	0,1167	0,0500	0,0333	0,0667	0,0583
0,05	0,1392	0,1232	0,0517	0,0358	0,0696	0,0617
0,10	0,1450	0,1300	0,0533	0,0383	0,0725	0,0650
0,15	0,1509	0,1367	0,0550	0,0408	0,0755	0,0683
0,20	0,1567	0,1433	0,0567	0,0433	0,0784	0,0717
0,25	0,1626	0,1500	0,0583	0,0458	0,0813	0,0750
0,30	0,1683	0,1567	0,0600	0,0483	0,0842	0,0783
0,35	0,1742	0,1633	0,0617	0,0508	0,0871	0,0817
0,40	0,1800	0,1700	0,0633	0,0533	0,0900	0,0850
0,45	0,1859	0,1767	0,0650	0,0558	0,0930	0,0883
0,50	0,1917	0,1833	0,0667	0,0583	0,0959	0,0907
0,55	0,1976	0,1900	0,0683	0,0608	0,0988	0,0950
0,60	0,2033	0,1967	0,0700	0,0633	0,1017	0,0983
0,65	0,2092	0,2033	0,0717	0,0658	0,1046	0,1017
0,70	0,2150	0,2100	0,0733	0,0683	0,1075	0,1050
0,75	0,2209	0,2167	0,0750	0,0708	0,1105	0,1083
0,80	0,2267	0,2233	0,0767	0,0733	0,1134	0,1117
0,85	0,2326	0,2300	0,0783	0,0758	0,1163	0,1150
0,90	0,2383	0,2367	0,0800	0,0783	0,1192	0,1183
0,95	0,2442	0,2433	0,0817	0,0808	0,1221	0,1217
1,00	0,2500	0,2500	0,0833	0,0833	0,1250	0,1250

Tabelul IV.16b (continuare)

B. Sarcină uniform repartizată parțial

$\xi = \frac{a}{l}$	Factori de încărcare		Momente de încastrare perfectă			
	$m_i = \alpha_1 p l^2$, $m_j = \alpha_2 p l^2$		$M_i = -\mu_1 p l^2$, $M_j = -\mu_2 p l^2$		$M_i = -\beta_1 p l^2$, $M_j = -\beta_2 p l^2$	
	α_1	α_2	μ_1	μ_2	β_1	β_2
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,0024	0,0012	0,0012	0,0000	0,0012	0,0006
0,10	0,0090	0,0050	0,0044	0,0003	0,0045	0,0025
0,15	0,0193	0,0111	0,0091	0,0010	0,0097	0,0056
0,20	0,0324	0,0196	0,0151	0,0023	0,0162	0,0098
0,25	0,0479	0,0303	0,0218	0,0042	0,0240	0,0152
0,30	0,0650	0,0430	0,0290	0,0070	0,0325	0,0215
0,35	0,0834	0,0575	0,0364	0,0105	0,0417	0,0288
0,40	0,1024	0,0736	0,0437	0,0149	0,0512	0,0368
0,45	0,1216	0,0910	0,0507	0,0201	0,0608	0,0455
0,50	0,1406	0,1094	0,0573	0,0261	0,0703	0,0547
0,55	0,1590	0,1284	0,0632	0,0326	0,0795	0,0642
0,60	0,1764	0,1476	0,0684	0,0396	0,0882	0,0738
0,65	0,1925	0,1666	0,0728	0,0469	0,0963	0,0833
0,70	0,2070	0,1850	0,0763	0,0543	0,1035	0,0925
0,75	0,2197	0,2021	0,0791	0,0615	0,1099	0,1011
0,80	0,2304	0,2176	0,0811	0,0683	0,1152	0,1083
0,85	0,2398	0,2307	0,0824	0,0742	0,1195	0,1154
0,90	0,2450	0,2410	0,0830	0,0790	0,1225	0,1205
0,95	0,2488	0,2476	0,8833	0,0821	0,1244	0,1238
1,00	0,2500	0,2500	0,0833	0,0833	0,1250	0,1250

Tabelul IV.16b (continuare)

C. Forță concentrată

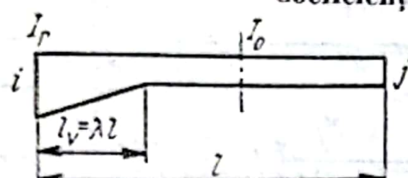
$\xi = \frac{a}{l}$	Factori de încărcare		Momente de încastrare perfectă			
	$m_i = \alpha_1 Pl$, $m_j = \alpha_2 Pl$		$M_i = -\mu_1 Pl$, $M_j = -\mu_2 Pl$		$M_i = -\beta_1 Pl$, $M_j = -\beta_2 Pl$	
	α_1	α_2	μ_1	μ_2	β_1	β_2
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,05	0,0926	0,0499	0,0451	0,0024	0,0463	0,0250
0,10	0,1710	0,0990	0,0810	0,0090	0,0855	0,0495
0,15	0,2359	0,1467	0,1081	0,0191	0,1180	0,0733
0,20	0,2880	0,1920	0,1280	0,0320	0,1440	0,0960
0,25	0,3281	0,2344	0,1406	0,0469	0,1611	0,1172
0,30	0,3570	0,2730	0,1470	0,0630	0,1785	0,1365
0,35	0,3754	0,3071	0,1479	0,0796	0,1877	0,1536
0,40	0,3840	0,3360	0,1440	0,0960	0,1920	0,1680
0,45	0,3836	0,3589	0,1361	0,1111	0,1920	0,1795
0,50	0,3750	0,3750	0,1250	0,1250	0,1918	0,1875
0,55	0,3589	0,3836	0,1114	0,1361	0,1875	0,1918
0,60	0,3360	0,3840	0,0960	0,1440	0,1795	0,1920
0,65	0,3071	0,3754	0,0796	0,1479	0,1680	0,1877
0,70	0,2730	0,3570	0,0630	0,1470	0,1536	0,1785
0,75	0,2344	0,3281	0,0469	0,1406	0,1365	0,1611
0,80	0,1920	0,2880	0,0320	0,1280	0,1172	0,1440
0,85	0,1467	0,2359	0,0191	0,1084	0,0960	0,1180
0,90	0,0990	0,1710	0,0090	0,0810	0,0733	0,0855
0,95	0,0499	0,0926	0,0024	0,0451	0,0495	0,0463
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0250	0,0000
					0,0000	
$\frac{1}{6}$	$\frac{55}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{27,5}{216}$	$\frac{17,5}{216}$
$\frac{1}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{27}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{5}{27}$
$\frac{6}{5}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{55}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{17,5}{216}$	$\frac{27,5}{216}$

Tabelul IV.165 (continuare)

D. Cuplu concentrat

$\xi = \frac{a}{l}$	Factori de încărcare		Momente de încastrare perfectă			
	$m_i = \alpha_1 M$, $m_j = \alpha_2 M$		$M_i = \mu_1 M$, $M_j = \mu_2 M$		$M_i = \beta_1 M$, $M_j = \beta_2 M$	
	α_1	α_2	μ_1	μ_2	β_1	β_2
0,00	2,0000	1,0000	−1,0000	0,0000	−1,0000	−0,5000
0,05	1,7075	0,9925	−0,8075	−0,0925	−0,8538	−0,4963
0,10	1,4300	0,9700	−0,6300	−0,1700	−0,7150	−0,4850
0,15	1,1675	0,9325	−0,4675	−0,2325	−0,5838	−0,4663
0,20	0,9200	0,8800	−0,3200	−0,2800	−0,4600	−0,4400
0,25	0,6875	0,8125	−0,1875	−0,3125	−0,3433	−0,4063
0,30	0,4700	0,7300	−0,0700	−0,3300	−0,2350	−0,3650
0,35	0,2675	0,6325	+0,0325	−0,3325	−0,1338	−0,3163
0,40	0,0800	0,5200	+0,1200	−0,3200	−0,0400	−0,2600
0,45	−0,0925	0,3925	+0,1925	−0,2925	+0,0463	−0,1963
0,50	−0,2500	0,2500	+0,2500	−0,2500	+0,1250	−0,1250
0,55	−0,3925	0,0925	+0,2925	−0,1925	+0,1963	−0,0463
0,60	−0,5200	−0,0800	+0,3200	−0,1200	+0,2600	+0,0400
0,65	−0,6325	−0,2675	+0,3325	−0,0325	+0,3163	+0,1338
0,70	−0,7300	−0,4700	+0,3300	+0,0700	+0,3650	+0,2350
0,75	−0,8125	−0,6875	+0,3125	+0,1875	+0,4063	+0,3433
0,80	−0,8800	−0,9200	+0,2800	+0,3200	+0,4400	+0,4600
0,85	−0,9325	−1,1675	+0,2325	−0,4675	+0,4663	+0,5838
0,90	−0,9700	−1,4300	+0,1700	+0,6300	+0,4850	+0,7150
0,95	−0,9925	−1,7075	+0,0925	+0,8075	+0,4963	+0,8538
1,00	−1,0000	−2,0000	+0,0000	+1,0000	+0,5000	+1,0000

Coeficienți de secțiune variabilă pentru calculul rotirilor



$$\lambda = \frac{l_v}{l};\quad n = \frac{I_0}{I_r}$$

$\lambda = \frac{l_v}{l}$	Coeficientul	$n = \frac{I_0}{I_r}$							
		0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080
0,000	c′	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,050	c′	0,870	0,876	0,881	0,885	0,889	0,893	0,896	0,901
	c″	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996
0,100	c′	0,753	0,762	0,773	0,781	0,788	0,794	0,800	0,809
	c″	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000
	c	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,982	0,983	0,984
0,200	c′	0,552	0,567	0,586	0,600	0,612	0,623	0,632	0,650
	c″	0,993	0,994	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996
	c	0,912	0,918	0,923	0,927	0,930	0,933	0,935	0,940
0,250	c′	0,468	0,483	0,506	0,523	0,535	0,545	0,560	0,581
	c″	0,988	0,989	0,990	0,991	0,992	0,993	0,993	0,994
	c	0,870	0,876	0,884	0,890	0,895	0,899	0,902	0,909
0,300	c′	0,393	0,411	0,434	0,453	0,469	0,482	0,495	0,518
	c″	0,978	0,980	0,982	0,983	0,984	0,985	0,986	0,987
	c	0,816	0,828	0,839	0,847	0,854	0,859	0,864	0,872
0,350	c′	0,327	0,346	0,372	0,390	0,408	0,423	0,438	0,462
	c″	0,966	0,969	0,972	0,974	0,975	0,976	0,977	0,978
	c	0,635	0,774	0,786	0,798	0,810	0,816	0,822	0,834
0,400	c′	0,270	0,288	0,315	0,336	0,354	0,370	0,385	0,412
	c″	0,951	0,954	0,958	0,961	0,963	0,965	0,966	0,968
	c	0,702	0,714	0,734	0,748	0,758	0,767	0,775	0,789
0,500	c′	0,174	0,195	0,224	0,246	0,266	0,283	0,299	0,328
	c″	0,906	0,909	0,918	0,923	0,928	0,931	0,934	0,939
	c	0,570	0,594	0,617	0,636	0,651	0,664	0,676	0,695
0,750	c′	0,050	0,066	0,091	0,113	0,133	0,150	0,167	0,198
	c″	0,671	0,693	0,724	0,742	0,756	0,767	0,778	0,794
	c	0,255	0,285	0,323	0,353	0,378	0,399	0,418	0,451
1,00	c′	0,015	0,027	0,048	0,067	0,084	0,099	0,115	0,144
	c″	0,228	0,282	0,348	0,388	0,421	0,449	0,473	0,512
	c	0,054	0,084	0,125	0,157	0,184	0,208	0,229	0,268

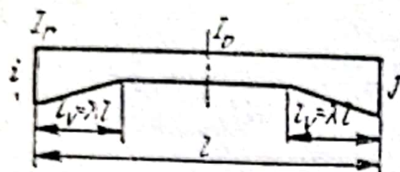
Tabelul IV.17

pe reazeme la grinzi cu vute drepte nesimetrice

$$\bar{\varphi}_{ii} = \frac{l}{3EI_0} c'; \quad \bar{\varphi}_{ji} = \bar{\varphi}_{ij} = \frac{l}{6EI_0} c; \quad \bar{\varphi}_{jj} = \frac{l}{3EI_0} c''$$

0,100	0,120	0,150	0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,800	1,000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,905	0,909	0,914	0,923	0,929	0,936	0,948	0,957	0,968	0,985	1,000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,996	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000
0,818	0,825	0,836	0,851	0,864	0,877	0,900	0,921	0,938	0,971	1,000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,985	0,986	0,987	0,988	0,989	0,991	0,992	0,994	0,995	0,998	1,000
0,665	0,678	0,697	0,725	0,748	0,773	0,814	0,848	0,884	0,945	1,000
0,996	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000
0,943	0,946	0,950	0,956	0,961	0,965	0,972	0,997	0,983	0,992	1,000
0,599	0,616	0,636	0,669	0,701	0,726	0,777	0,821	0,861	0,933	1,000
0,994	0,995	0,995	0,996	0,996	0,997	0,997	0,998	0,998	0,999	1,000
0,913	0,916	0,924	0,930	0,940	0,948	0,960	0,964	0,972	0,990	1,000
0,538	0,557	0,582	0,620	0,655	0,685	0,741	0,792	0,839	0,923	1,000
0,987	0,988	0,989	0,991	0,992	0,993	0,994	0,995	0,997	0,998	1,000
0,880	0,886	0,895	0,907	0,915	0,925	0,940	0,954	0,964	0,983	1,000
0,483	0,504	0,534	0,576	0,612	0,648	0,711	0,765	0,819	0,915	1,000
0,980	0,981	0,982	0,984	0,987	0,990	0,991	0,993	0,995	0,998	1,000
0,840	0,851	0,864	0,876	0,888	0,900	0,924	0,936	0,954	0,978	1,000
0,436	0,459	0,488	0,533	0,573	0,612	0,681	0,744	0,800	0,905	1,000
0,970	0,972	0,975	0,978	0,980	0,983	0,987	0,990	0,992	0,997	1,000
0,801	0,811	0,825	0,844	0,860	0,875	0,901	0,924	0,940	0,973	1,000
0,355	0,378	0,413	0,464	0,502	0,553	0,631	0,702	0,769	0,890	1,000
0,943	0,946	0,951	0,957	0,962	0,967	0,974	0,980	0,985	0,993	1,000
0,712	0,727	0,746	0,774	0,797	0,818	0,855	0,882	0,913	0,960	1,000
0,227	0,256	0,291	0,349	0,401	0,453	0,546	0,631	0,712	0,862	1,000
0,808	0,819	0,835	0,856	0,872	0,888	0,912	0,931	0,949	0,977	1,000
0,480	0,505	0,539	0,587	0,628	0,667	0,732	0,787	0,838	0,925	1,000
0,172	0,198	0,236	0,294	0,353	0,402	0,500	0,594	0,681	0,846	1,000
0,548	0,573	0,609	0,659	0,726	0,734	0,791	0,836	0,879	0,946	1,000
0,302	0,336	0,376	0,438	0,490	0,541	0,628	0,703	0,773	0,894	1,000

Coeficienţi de secţiune variabilă şi factori de încărcare pentru



$\lambda = \frac{l_v}{l}$ $\qquad c' = c''$

$n = \frac{I_0}{I_r}$ $\qquad s'm_i = s''m_j = \alpha q l^2$

Factorii de încărcare corespund

$\lambda = \frac{l_v}{l}$	Coeficientul	$n = \frac{I_0}{I_r}$ (pentru b = const							
		0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080
0,000	$c' = c''$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	c	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	α	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,050	$c' = c''$	0,870	0,876	0,881	0,886	0,889	0,812	0,859	0,900
	c	0,989	0,989	0,989	0,990	0,990	0,991	0,991	0,992
	α	0,247	0,247	0,247	0,248	0,248	0,248	0,248	0,248
0,100	$c' = c''$	0,793	0,762	0,772	0,781	0,788	0,794	0,799	0,809
	c	0,954	0,956	0,959	0,961	0,963	0,964	0,966	0,968
	α	0,238	0,239	0,240	0,240	0,241	0,241	0,241	0,242
0,200	$c' = c''$	0,546	0,561	0,581	0,595	0,608	0,618	0,628	0,646
	c	0,828	0,834	0,846	0,854	0,860	0,866	0,871	0,879
	α	0,206	0,209	0,212	0,214	0,215	0,217	0,218	0,220
0,250	$c' = c''$	0,456	0,474	0,495	0,513	0,528	0,540	0,552	0,573
	c	0,738	0,750	0,768	0,780	0,792	0,798	0,804	0,816
	α	0,184	0,188	0,192	0,195	0,197	0,199	0,201	0,205
0,300	$c' = c''$	0,372	0,390	0,417	0,435	0,453	0,468	0,481	0,505
	c	0,636	0,665	0,677	0,695	0,707	0,718	0,728	0,745
	α	0,159	0,163	0,169	0,173	0,177	0,179	0,182	0,187
0,350	$c' = c''$	0,294	0,315	0,342	0,366	0,384	0,399	0,414	0,441
	c	0,522	0,546	0,576	0,600	0,618	0,630	0,642	0,666
	α	0,131	0,137	0,144	0,150	0,154	0,158	0,161	0,167
0,400	$c' = c''$	0,219	0,243	0,273	0,297	0,317	0,335	0,352	0,381
	c	0,402	0,432	0,469	0,495	0,517	0,535	0,551	0,578
	α	0,100	0,108	0,117	0,124	0,129	0,134	0,138	0,145
0,500	$c' = c''$	0,078	0,105	0,141	0,170	0,192	0,214	0,233	0,267
	c	0,144	0,180	0,235	0,272	0,302	0,328	0,351	0,390
	α	0,035	0,046	0,059	0,068	0,076	0,082	0,088	0,098

Tabelul IV.18

calculul rotirilor pe reazeme la grinzi cu vute simetrice drepte

$$\overline{\varphi}_{ii} = \overline{\varphi}_{jj} = \frac{l}{3EI_0} c' \qquad \varphi_{ip} = \frac{l}{6EI_0} s' m_i$$

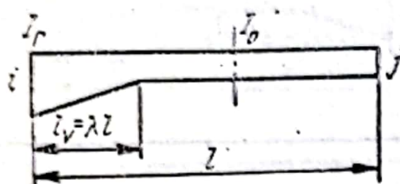
$$\overline{\varphi}_{ij} = \overline{\varphi}_{ji} = \frac{l}{6EI_0} c \qquad \varphi_{jp} = \frac{l}{6EI_0} s'' m_j$$

unei sarcini uniform repartizate

rezultă $n = \frac{h_0^3}{h_r^3}$)

0,100	0,120	0,150	0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,800	0,1000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,905	0,909	0,914	0,923	0,930	0,936	0,948	0,957	0,968	0,985	1,000
0,992	0,993	0,993	0,994	0,995	0,995	0,996	0,997	0,998	0,999	1,000
0,248	0,248	0,248	0,248	0,249	0,249	0,249	0,249	0,250	0,250	0,250
0,817	0,825	0,835	0,851	0,864	0,877	0,899	0,918	0,938	0,971	1,000
0,970	0,971	0,973	0,976	0,979	0,981	0,985	0,990	0,991	0,996	1,000
0,242	0,243	0,244	0,244	0,245	0,245	0,246	0,247	0,248	0,249	0,250
0,661	0,675	0,694	0,722	0,746	0,771	0,812	0,849	0,883	0,945	1,000
0,886	0,892	0,990	0,911	0,921	0,929	0,944	0,954	0,967	0,985	1,000
0,221	0,223	0,225	0,228	0,230	0,232	0,236	0,239	0,242	0,246	0,250
0,591	0,609	0,630	0,666	0,695	0,723	0,774	0,819	0,858	0,933	1,000
0,828	0,834	0,846	0,864	0,879	0,894	0,912	0,930	0,948	0,978	1,000
0,207	0,209	0,212	0,217	0,220	0,223	0,229	0,223	0,237	0,244	0,250
0,526	0,546	0,572	0,611	0,644	0,678	0,736	0,789	0,836	0,922	1,000
0,760	0,774	0,789	0,812	0,832	0,850	0,880	0,906	0,929	0,967	1,000
0,190	0,193	0,197	0,203	0,208	0,212	0,220	0,227	0,232	0,242	0,250
0,465	0,486	0,516	0,561	0,599	0,636	0,702	0,759	0,813	0,912	1,000
0,684	0,702	0,720	0,756	0,780	0,804	0,840	0,876	0,906	0,960	1,000
0,171	0,175	0,181	0,188	0,197	0,200	0,211	0,219	0,226	0,239	0,250
0,407	0,432	0,463	0,512	0,554	0,595	0,668	0,732	0,793	0,900	1,000
0,602	0,624	0,650	0,689	0,720	0,751	0,801	0,846	0,881	0,945	1,000
0,151	0,156	0,163	0,172	0,180	0,188	0,200	0,211	0,220	0,236	0,250
0,298	0,327	0,364	0,421	0,471	0,520	0,605	0,681	0,753	0,883	1,000
0,423	0,456	0,493	0,548	0,593	0,637	0,710	0,774	0,806	0,920	1,000
0,106	0,113	0,123	0,140	0,148	0,160	0,178	0,193	0,206	0,230	0,250

Factori de încărcare pentru o sarcină uniform



$$\lambda = \frac{l_v}{l}; \quad n = \frac{I_0}{I_r}$$

$\lambda = \frac{l_v}{l}$	Coeficientul	n = 0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080
0,000	α_1	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
	α_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,050	α_1	0,247	0,247	0,247	0,247	0,248	0,248	0,248	0,248
	α_2	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,100	α_1	0,239	0,239	0,240	0,241	0,241	0,242	0,242	0,242
	α_2	0,249	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,200	α_1	0,212	0,214	0,216	0,218	0,219	0,220	0,221	0,223
	α_2	0,245	0,245	0,245	0,246	0,246	0,246	0,247	0,247
0,250	α_1	0,194	0,197	0,200	0,203	0,205	0,206	0,208	0,211
	α_2	0,240	0,241	0,242	0,242	0,242	0,243	0,243	0,244
0,300	α_1	0,175	0,179	0,184	0,187	0,189	0,191	0,193	0,197
	α_2	0,234	0,235	0,236	0,237	0,238	0,238	0,239	0,239
0,350	α_1	0,156	0,160	0,165	0,170	0,173	0,176	0,178	0,182
	α_2	0,225	0,227	0,229	0,230	0,231	0,232	0,233	0,234
0,400	α_1	0,136	0,141	0,147	0,152	0,156	0,159	0,162	0,167
	α_2	0,215	0,217	0,220	0,221	0,223	0,224	0,225	0,227
0,500	α_1	0,098	0,104	0,113	0,119	0,124	0,128	0,132	0,139
	α_2	0,187	0,191	0,196	0,199	0,202	0,204	0,206	0,209
0,750	α_1	0,031	0,038	0,046	0,054	0,060	0,065	0,071	0,080
	α_2	0,097	0,105	0,115	0,123	0,129	0,134	0,139	0,146
1,000	α_1	0,007	0,012	0,020	0,026	0,032	0,037	0,042	0,051
	α_2	0,021	0,030	0,043	0,052	0,060	0,067	0,074	0,084

Tabelul IV.19

distribuită la grinzi cu vute drepte nesimetrice

$$\varphi_{ip} = \frac{l}{6EI_0} s'm_i \qquad s'm_i = \alpha_1 q l^2$$

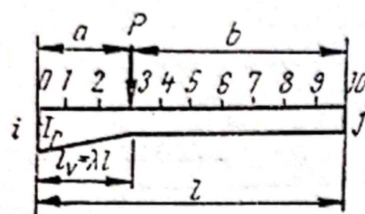
$$\varphi_{jp} = \frac{l}{6EI_0} s''m_i \qquad s''m_j = \alpha_2 q l^2$$

$\frac{I_0}{I_r}$

0,100	0,120	0,150	0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,800	1,000
0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250
0,248 0,250	0,248 0,250	0,248 0,250	0,248 0,250	0,249 0,250	0,249 0,250	0,249 0,250	0,249 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250	0,250 0,250
0,243 0,250	0,243 0,250	0,244 0,250	0,244 0,250	0,245 0,250	0,246 0,250	0,247 0,250	0,247 0,250	0,248 0,250	0,249 0,250	0,250 0,250
0,224 0,247	0,226 0,247	0,228 0,247	0,230 0,248	0,233 0,248	0,235 0,248	0,238 0,248	0,240 0,249	0,242 0,249	0,247 0,250	0,250 0,250
0,213 0,244	0,215 0,244	0,217 0,245	0,221 0,245	0,224 0,246	0,227 0,247	0,232 0,247	0,235 0,248	0,239 0,248	0,245 0,249	0,250 0,250
0,200 0,240	0,202 0,241	0,206 0,241	0,211 0,242	0,215 0,243	0,218 0,244	0,224 0,245	0,230 0,246	0,235 0,247	0,243 0,249	0,250 0,250
0,186 0,235	0,189 0,236	0,194 0,237	0,200 0,239	0,205 0,240	0,209 0,241	0,218 0,243	0,224 0,245	0,230 0,246	0,241 0,248	0,250 0,250
0,172 0,228	0,176 0,229	0,181 0,232	0,188 0,234	0,194 0,235	0,200 0,237	0,210 0,240	0,218 0,242	0,226 0,244	0,239 0,247	0,250 0,250
0,144 0,212	0,149 0,214	0,156 0,217	0,165 0,221	0,175 0,224	0,182 0,227	0,196 0,232	0,207 0,236	0,217 0,239	0,235 0,246	0,250 0,250
0,088 0,152	0,095 0,158	0,104 0,165	0,119 0,175	0,131 0,183	0,143 0,191	0,163 0,203	0,181 0,213	0,197 0,223	0,225 0,238	0,250 0,250
0,059 0,093	0,066 0,101	0,076 0,112	0,092 0,127	0,106 0,140	0,112 0,152	0,143 0,172	0,164 0,188	0,184 0,203	0,218 0,229	0,250 0,250

Tabelul IV.20

Factorii de încărcare pentru o forță concentrată în zecimile deschiderii la grinzi cu vute nesimetrice drepte



$$\varphi_{ip} = \frac{l}{6EI_0}\, s'm_i; \qquad s'm_i = \alpha_1 Pl$$

$$\varphi_{jp} = \frac{l}{6EI_0}\, s''m_j; \qquad s''m_j = \alpha_2 Pl$$

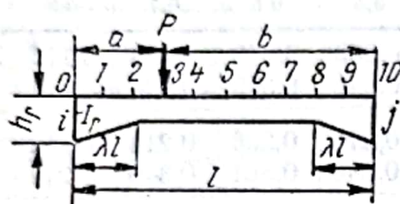
$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{I_0}{I_r}$	Coeficientul	$\xi = \frac{a}{l}$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,20	0,05	α_1	0,122	0,235	0,310	0,344	0,341	0,309	0,253	0,179	0,092
		α_2	0,093	0,185	0,267	0,331	0,371	0,380	0,355	0,286	0,170
	0,10	α_1	0,129	0,242	0,317	0,350	0,346	0,313	0,256	0,181	0,094
		α_2	0,094	0,186	0,268	0,332	0,371	0,381	0,355	0,287	0,170
	0,20	α_1	0,138	0,253	0,326	0,358	0,353	0,318	0,260	0,183	0,095
		α_2	0,095	0,188	0,269	0,333	0,372	0,382	0,355	0,287	0,170
	0,50	α_1	0,154	0,274	0,341	0,371	0,364	0,326	0,266	0,188	0,097
		α_2	0,098	0,190	0,271	0,334	0,374	0,383	0,356	0,287	0,170
0,25	0,05	α_1	0,109	0,209	0,283	0,323	0,325	0,295	0,242	0,172	0,089
		α_2	0,091	0,179	0,260	0,325	0,367	0,377	0,352	0,284	0,169
	0,10	α_1	0,118	0,221	0,295	0,332	0,332	0,302	0,245	0,175	0,090
		α_2	0,092	0,181	0,263	0,327	0,368	0,379	0,353	0,286	0,170
	0,20	α_1	0,128	0,238	0,308	0,344	0,342	0,310	0,253	0,178	0,092
		α_2	0,094	0,184	0,265	0,329	0,370	0,380	0,354	0,286	0,170
	0,50	α_1	0,148	0,263	0,332	0,364	0,358	0,324	0,263	0,124	0,096
		α_2	0,097	0,188	0,269	0,332	0,373	0,382	0,355	0,287	0,170
0,30	0,05	α_1	0,095	0,184	0,259	0,299	0,305	0,280	0,237	0,164	0,085
		α_2	0,085	0,171	0,252	0,318	0,360	0,372	0,384	0,282	0,168
	0,10	α_1	0,104	0,198	0,273	0,312	0,315	0,288	0,237	0,168	0,087
		α_2	0,088	0,175	0,256	0,321	0,363	0,374	0,350	0,283	0,169
	0,20	α_1	0,117	0,217	0,292	0,328	0,328	0,299	0,245	0,173	0,089
		α_2	0,091	0,179	0,260	0,325	0,366	0,377	0,352	0,284	0,169
	0,50	α_1	0,143	0,256	0,323	0,355	0,352	0,316	0,259	0,182	0,094
		α_2	0,095	0,185	0,266	0,329	0,371	0,380	0,353	0,286	0,170

Tabelul IV.20 (continuare)

$\lambda = \frac{l_1}{l}$	$n = \frac{I_0}{I_r}$	Coeficientul	$\xi = \frac{a}{l}$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,40	0,05	α_1	0,073	0,140	0,200	0,244	0,259	0,243	0,203	0,145	0,076
		α_2	0,077	0,153	0,227	0,293	0,340	0,356	0,336	0,274	0,164
	0,10	α_1	0,084	0,159	0,222	0,265	0,275	0,256	0,214	0,152	0,079
		α_2	0,080	0,159	0,235	0,301	0,346	0,361	0,340	0,277	0,165
	0,20	α_1	0,100	0,185	0,251	0,290	0,297	0,274	0,226	0,161	0,083
		α_2	0,084	0,167	0,244	0,310	0,353	0,367	0,344	0,279	0,167
	0,50	α_1	0,136	0,238	0,301	0,337	0,336	0,304	0,247	0,176	0,092
		α_2	0,094	0,180	0,258	0,322	0,365	0,375	0,350	0,285	0,170
0,50	0,05	α_1	0,055	0,106	0,151	0,187	0,207	0,202	0,172	0,125	0,065
		α_2	0,067	0,132	0,197	0,257	0,306	0,329	0,316	0,260	0,157
	0,10	α_1	0,068	0,128	0,178	0,214	0,231	0,221	0,187	0,134	0,070
		α_2	0,071	0,141	0,209	0,270	0,318	0,338	0,323	0,265	0,160
	0,20	α_1	0,086	0,159	0,215	0,250	0,262	0,245	0,205	0,147	0,076
		α_2	0,077	0,153	0,244	0,286	0,332	0,350	0,332	0,271	0,163
	0,50	α_1	0,127	0,225	0,287	0,317	0,318	0,289	0,236	0,160	0,088
		α_2	0,089	0,173	0,251	0,315	0,355	0,368	0,346	0,282	0,169
0,75	0,05	α_1	0,029	0,053	0,074	0,090	0,100	0,101	0,093	0,072	0,039
		α_2	0,040	0,079	0,118	0,154	0,186	0,209	0,218	0,195	0,124
	0,10	α_1	0,042	0,078	0,106	0,125	0,134	0,132	0,117	0,088	0,047
		α_2	0,048	0,095	0,140	0,182	0,216	0,239	0,242	0,211	0,133
	0,20	α_1	0,064	0,115	0,152	0,175	0,182	0,174	0,149	0,110	0,058
		α_2	0,059	0,116	0,169	0,217	0,253	0,274	0,271	0,230	0,142
	0,50	α_1	0,115	0,199	0,250	0,275	0,275	0,252	0,209	0,149	0,077
		α_2	0,077	0,152	0,244	0,280	0,318	0,332	0,316	0,261	0,157
1,00	0,05	α_1	0,019	0,034	0,046	0,053	0,056	0,055	0,049	0,037	0,020
		α_2	0,021	0,043	0,061	0,078	0,094	0,104	0,106	0,095	0,067
	0,10	α_1	0,032	0,056	0,075	0,086	0,089	0,085	0,073	0,055	0,029
		α_2	0,031	0,061	0,087	0,112	0,132	0,144	0,143	0,127	0,085
	0,20	α_1	0,053	0,094	0,121	0,137	0,140	0,131	0,112	0,082	0,043
		α_2	0,044	0,087	0,125	0,158	0,184	0,197	0,193	0,164	0,106
	0,50	α_1	0,109	0,181	0,229	0,252	0,252	0,230	0,189	0,137	0,070
		α_2	0,069	0,138	0,195	0,244	0,277	0,290	0,276	0,225	0,141

Tabelul IV.21

Factorii de încărcare pentru o forță concentrată în zecimile deschiderii la grinzi cu vute simetrice drepte



$$\varphi_{ip} = \frac{l}{6EI_0} s'm_i \qquad s'm_i = \alpha_1 Pl$$

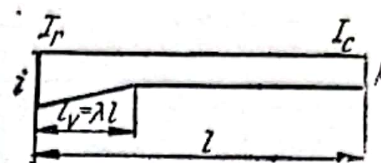
$$\varphi_{jp} = \frac{l}{6EI_0} s''m_j \qquad s''m_j = \alpha_2 Pl$$

$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{I_0}{I_r}$	Coeficientul	$\xi = \frac{a}{l}$ 0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
0,20	0,05	α_1	0,122	0,232	0,307	0,340	0,337	0,304	0,247	0,072	0,086
		α_2	0,086	0,172	0,247	0,304	0,337	0,340	0,307	0,232	0,122
	0,10	α_1	0,128	0,241	0,315	0,347	0,343	0,309	0,251	0,175	0,088
		α_2	0,088	0,175	0,251	0,309	0,343	0,347	0,315	0,241	0,128
	0,20	α_1	0,137	0,251	0,325	0,355	0,350	0,315	0,256	0,179	0,091
		α_2	0,091	0,179	0,256	0,315	0,350	0,355	0,325	0,251	0,137
	0,50	α_1	0,155	0,266	0,338	0,370	0,364	0,326	0,264	0,184	0,097
		α_2	0,097	0,184	0,264	0,326	0,364	0,370	0,338	0,266	0,155
0,25	0,05	α_1	0,106	0,204	0,280	0,316	0,316	0,285	0,230	0,159	0,079
		α_2	0,079	0,159	0,230	0,285	0,316	0,316	0,280	0,204	0,106
	0,10	α_1	0,116	0,217	0,291	0,326	0,325	0,293	0,236	0,164	0,083
		α_2	0,083	0,164	0,236	0,293	0,325	0,326	0,291	0,217	0,116
	0,20	α_1	0,127	0,232	0,307	0,339	0,336	0,302	0,245	0,169	0,086
		α_2	0,086	0,169	0,245	0,302	0,336	0,339	0,307	0,232	0,127
	0,50	α_1	0,148	0,258	0,328	0,361	0,357	0,319	0,257	0,180	0,092
		α_2	0,092	0,180	0,257	0,319	0,357	0,361	0,328	0,258	0,148

Tabelul IV.21 (continuare)

$\lambda = \frac{l_p}{l}$	$n = \frac{I_0}{I_r}$	Coeficientul	$\xi = \frac{a}{l}$								
			0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
0,30	0,05	α_1	0,092	0,178	0,250	0,287	0,290	0,262	0,210	0,143	0,072
		α_2	0,072	0,143	0,210	0,262	0,290	0,287	0,250	0,178	0,092
	0,10	α_1	0,101	0,193	0,266	0,302	0,302	0,273	0,220	0,151	0,076
		α_2	0,076	0,151	0,220	0,273	0,302	0,302	0,266	0,193	0,101
	0,20	α_1	0,115	0,214	0,286	0,320	0,319	0,287	0,232	0,160	0,081
		α_2	0,081	0,160	0,232	0,287	0,319	0,320	0,286	0,214	0,115
	0,50	α_1	0,143	0,248	0,320	0,352	0,347	0,312	0,251	0,176	0,092
		α_2	0,092	0,176	0,251	0,312	0,347	0,352	0,320	0,248	0,143
0,40	0,05	α_1	0,065	0,126	0,179	0,216	0,223	0,200	0,157	0,106	0,053
		α_2	0,053	0,106	0,157	0,200	0,223	0,216	0,179	0,126	0,065
	0,10	α_1	0,078	0,148	0,205	0,241	0,247	0,221	0,175	0,119	0,060
		α_2	0,060	0,119	0,175	0,221	0,247	0,241	0,205	0,148	0,078
	0,20	α_1	0,096	0,176	0,238	0,273	0,275	0,248	0,197	0,136	0,068
		α_2	0,068	0,136	0,197	0,248	0,275	0,273	0,238	0,176	0,096
	0,50	α_1	0,134	0,229	0,296	0,328	0,326	0,292	0,236	0,166	0,088
		α_2	0,088	0,166	0,236	0,292	0,326	0,328	0,296	0,229	0,134
0,50	0,05	α_1	0,041	0,078	0,109	0,131	0,138	0,122	0,096	0,065	0,033
		α_2	0,033	0,065	0,096	0,122	0,138	0,131	0,109	0,078	0,041
	0,10	α_1	0,056	0,105	0,143	0,169	0,174	0,155	0,122	0,083	0,042
		α_2	0,042	0,083	0,122	0,155	0,174	0,169	0,143	0,105	0,056
	0,20	α_1	0,078	0,142	0,189	0,216	0,220	0,196	0,156	0,107	0,055
		α_2	0,055	0,107	0,156	0,196	0,220	0,216	0,189	0,142	0,078
	0,50	α_1	0,116	0,210	0,271	0,299	0,297	0,269	0,217	0,151	0,078
		α_2	0,078	0,151	0,217	0,269	0,297	0,299	0,271	0,210	0,116

Rigidităţi pentru bare încastrate la un capăt şi articulate

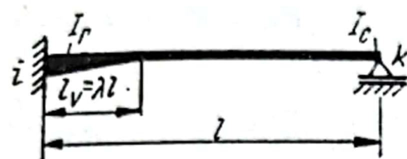


$$K^0_{ik} = 3\,Ev^0\frac{I_c}{l_{ik}}; \quad \rho^0_{ik} = v^0\frac{I_c}{l_{ik}};$$

λ \ n	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,125	0,150
0,00	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750
0,05	0,862	0,856	0,850	0,847	0,845	0,843	0,840	0,833	0,828	0,824	0,820
0,10	0,996	0,985	0,970	0,963	0,950	0,943	0,940	0,925	0,915	0,907	0,895
0,15	1,157	1,138	1,116	1,092	1,078	1,065	1,055	1,033	1,018	0,998	0,984
0,20	1,358	1,323	1,283	1,250	1,225	1,203	1,185	1,153	1,125	1,100	1,078
0,25	1,603	1,553	1,480	1,438	1,398	1,365	1,338	1,288	1,252	1,209	1,179
0,30	1,908	1,825	1,710	1,655	1,603	1,553	1,514	1,445	1,398	1,337	1,288
0,35	2,293	2,174	2,016	1,923	1,838	1,773	1,712	1,623	1,553	1,469	1,405
0,40	2,778	2,605	2,380	2,232	2,117	2,015	1,953	1,825	1,725	1,619	1,535
0,45	3,425	3,165	2,809	2,604	2,451	2,315	2,213	2,033	1,908	1,773	1,678
0,50	4,310	3,846	3,378	3,068	2,840	2,660	2,500	2,273	2,118	1,949	1,813
0,75	15,151	11,363	8,224	6,631	5,656	4,990	4,448	3,782	3,307	2,884	2,575
1,00	50,000	27,777	15,625	11,261	8,961	7,530	6,510	5,198	4,363	3,671	3,185

Tabelul IV.22

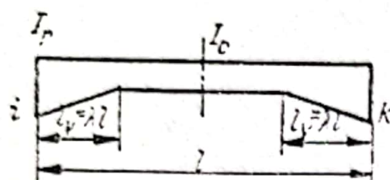
la capătul opus, avînd vute nesimetrice drepte



$$n = \frac{I_c}{I_r}; \quad \lambda = \frac{l_v}{l}$$

0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	n / λ
0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,00
0,813	0,808	0,803	0,791	0,783	0,778	0,767	0,763	0,755	0,750	0,05
0,881	0,868	0,855	0,833	0,814	0,798	0,786	0,773	0,760	0,750	0,10
0,954	0,933	0,912	0,877	0,847	0,825	0,804	0,783	0,767	0,750	0,15
1,033	1,003	0,970	0,923	0,880	0,848	0,820	0,794	0,772	0,750	0,20
1,121	1,069	1,033	0,965	0,914	0,871	0,836	0,805	0,774	0,750	0,25
1,208	1,146	1,098	1,012	0,947	0,893	0,850	0,812	0,779	0,750	0,30
1,302	1,225	1,157	1,055	0,980	0,916	0,865	0,820	0,783	0,750	0,35
1,406	1,309	1,225	1,102	1,008	0,937	0,877	0,828	0,785	0,750	0,40
1,506	1,389	1,288	1,147	1,037	0,958	0,890	0,836	0,788	0,750	0,45
1,613	1,495	1,358	1,190	1,068	0,978	0,903	0,845	0,793	0,750	0,50
2,148	1,170	1,657	1,374	1,190	1,053	0,953	0,870	0,805	0,750	0,75
2,551	2,128	1,866	1,498	1,263	1,101	0,980	0,888	0,809	0,750	1,00

Rigidităţi şi coeficienţi de transmitere pentru bare



$$K_{ik} = K_{ki} = 4Ev\frac{I_c}{l_{ik}};$$

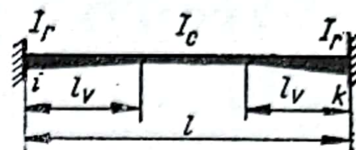
$$n = \frac{I_c}{I_r}$$

λ	Coeficientul \ n	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,125	0,150
0,00	v	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	γ	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,05	v	1,267	1,257	1,243	1,233	1,223	1,215	1,208	1,195	1,185	1,174	1,163
	γ	0,570	0,565	0,561	0,558	0,556	0,555	0,553	0,550	0,549	0,547	0,543
0,10	v	1,658	1,625	1,580	1,547	1,521	1,498	1,479	1,445	1,418	1,385	1,360
	γ	0,632	0,628	0,620	0,616	0,612	0,608	0,605	0,599	0,594	0,587	0,584
0,15	v	2,250	2,167	2,059	1,985	1,925	1,878	1,836	1,763	1,706	1,643	1,593
	γ	0,696	0,687	0,677	0,669	0,662	0,657	0,651	0,642	0,635	0,625	0,618
0,20	v	3,183	2,988	2,755	2,599	2,479	2,383	2,300	2,165	2,061	1,953	1,865
	γ	0,754	0,744	0,729	0,718	0,709	0,700	0,694	0,680	0,670	0,659	0,649
0,25	v	4,730	4,290	3,785	3,464	3,246	3,050	2,903	2,665	2,488	2,308	2,173
	γ	0,808	0,794	0,775	0,761	0,749	0,739	0,728	0,713	0,701	0,685	0,673
0,30	v	7,435	6,393	5,307	4,675	4,240	3,913	3,655	3,262	2,983	2,711	2,507
	γ	0,854	0,837	0,813	0,796	0,781	0,769	0,757	0,739	0,723	0,705	0,690
0,35	v	12,363	9,825	7,500	6,295	5,523	4,980	4,553	3,943	3,525	3,151	2,852
	γ	0,891	0,870	0,842	0,820	0,805	0,789	0,776	0,755	0,736	0,717	0,699
0,40	v	21,252	15,112	10,418	8,290	7,023	6,163	5,535	4,658	4,080	3,564	3,193
	γ	0,917	0,892	0,858	0,833	0,814	0,798	0,784	0,760	0,740	0,719	0,702
0,45	v	35,102	22,060	13,777	10,443	8,583	7,373	6,515	5,357	4,610	3,949	3,510
	γ	0,925	0,896	0,858	0,831	0,810	0,793	0,777	0,753	0,733	0,710	0,694
0,50	v	50,500	29,180	17,040	12,503	10,060	8,512	7,433	6,005	5,100	4,339	3,800
	γ	0,901	0,870	0,830	0,804	0,784	0,767	0,753	0,731	0,712	0,692	0,677

Tabelul IV.23

Incastrate la ambele capete, avînd vute simetrice drepte

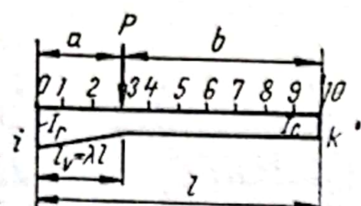
$$\rho_{ik} = \rho_{ki} = v\,\frac{I_c}{l}$$



$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	n / Coeficientul	λ
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	v	0,00
0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	γ	
1,146	1,131	1,117	1,093	1,073	1,055	1,039	1,025	1,012	1,000	v	0,05
0,539	0,536	0,531	0,526	0,520	0,516	0,512	0,507	0,504	0,500	γ	
1,314	1,278	1,245	1,190	1,148	1,110	1,078	1,049	1,023	1,000	v	0,10
0,574	0,566	0,560	0,548	0,538	0,529	0,520	0,513	0,506	0,500	γ	
1,508	1,450	1,383	1,293	1,221	1,163	1,113	1,070	1,033	1,000	v	0,15
0,605	0,594	0,584	0,567	0,552	0,539	0,527	0,517	0,508	0,500	γ	
1,724	1,629	1,529	1,394	1,293	1,212	1,145	1,090	1,042	1,000	v	0,20
0,630	0,618	0,603	0,581	0,563	0,546	0,532	0,521	0,510	0,500	γ	
1,960	1,801	1,678	1,493	1,360	1,258	1,175	1,108	1,049	1,000	v	0,25
0,651	0,633	0,618	0,591	0,570	0,553	0,536	0,524	0,510	0,500	γ	
2,205	1,994	1,825	1,588	1,422	1,299	1,203	1,122	1,055	1,000	v	0,30
0,666	0,645	0,627	0,598	0,575	0,556	0,538	0,526	0,512	0,500	γ	
2,448	2,178	1,965	1,674	1,480	1,338	1,225	1,135	1,063	1,000	v	0,35
0,673	0,652	0,632	0,602	0,578	0,557	0,539	0,526	0,512	0,500	γ	
2,680	2,349	2,092	1,755	1,533	1,369	1,245	1,147	1,065	1,000	v	0,40
0,673	0,650	0,631	0,600	0,577	0,556	0,538	0,526	0,512	0,500	γ	
2,895	2,496	2,210	1,828	1,578	1,398	1,263	1,158	1,068	1,000	v	0,45
0,666	0,642	0,624	0,595	0,572	0,553	0,536	0,523	0,511	0,500	γ	
3,090	2,623	2,315	1,889	1,617	1,423	1,281	1,167	1,073	1,000	v	0,50
0,651	0,629	0,613	0,586	0,566	0,548	0,534	0,521	0,509	0,500	γ	

Tabelul IV.24



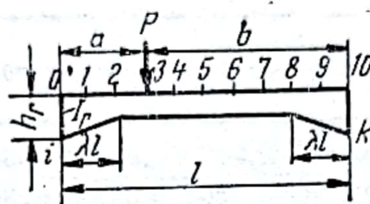
Coeficienţi pentru calculul momentelor de încastrare perfectă produse de o forţă concentrată acţionînd în zecimile deschiderilor, pentru bare încastrate la un capăt şi articulate la capătul opus, avînd vute nesimetrice drepte

$$\lambda = \frac{l_v}{l} \qquad n = \frac{I_c}{I_r} \qquad \overline{M}_i^0 = \eta_i P l$$

λ	$\xi = \frac{a}{l}$ / n	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	$\xi = \frac{a}{l}$ / n	λ
0,20	0,05	0,098	0,189	0,249	0,277	0,274	0,248	0,203	0,144	0,074	0,05	0,20
	0,10	0,097	0,182	0,239	0,264	0,260	0,236	0,193	0,136	0,071	0,10	
	0,20	0,095	0,174	0,225	0,247	0,243	0,219	0,179	0,126	0,065	0,20	
	0,50	0,091	0,162	0,201	0,219	0,215	0,192	0,157	0,111	0,057	0,50	
0,25	0,05	0,101	0,192	0,260	0,296	0,298	0,271	0,222	0,158	0,082	0,05	0,25
	0,10	0,099	0,185	0,246	0,277	0,277	0,252	0,205	0,146	0,075	0,10	
	0,20	0,096	0,178	0,231	0,257	0,256	0,231	0,189	0,133	0,069	0,20	
	0,50	0,090	0,160	0,202	0,222	0,218	0,197	0,160	0,112	0,059	0,50	
0,30	0,05	0,098	0,190	0,268	0,310	0,316	0,290	0,247	0,170	0,088	0,05	0,30
	0,10	0,097	0,184	0,254	0,290	0,293	0,268	0,220	0,156	0,081	0,10	
	0,20	0,094	0,175	0,235	0,265	0,265	0,241	0,198	0,140	0,072	0,20	
	0,50	0,090	0,161	0,204	0,224	0,222	0,199	0,164	0,115	0,060	0,50	
0,35	0,05	0,100	0,192	0,274	0,323	0,334	0,310	0,258	0,184	0,096	0,0.	0,35
	0,10	0,099	0,186	0,257	0,299	0,307	0,283	0,234	0,167	0,087	0,10	
	0,20	0,095	0,175	0,236	0,269	0,272	0,249	0,205	0,145	0,076	0,20	
	0,50	0,091	0,162	0,201	0,227	0,225	0,202	0,166	0,117	0,061	0,50	
0,40	0,05	0,099	0,189	0,270	0,330	0,349	0,328	0,275	0,196	0,105	0,05	0,40
	0,10	0,096	0,182	0,255	0,304	0,316	0,294	0,245	0,175	0,091	0,10	
	0,20	0,094	0,174	0,235	0,272	0,278	0,257	0,212	0,151	0,078	0,20	
	0,50	0,092	0,160	0,202	0,227	0,226	0,204	0,166	0,119	0,062	0,50	
0,50	0,05	0,098	0,187	0,266	0,330	0,366	0,356	0,304	0,221	0,116	0,05	0,50
	0,10	0,096	0,180	0,250	0,302	0,326	0,311	0,263	0,190	0,099	0,10	
	0,20	0,093	0,171	0,232	0,270	0,283	0,265	0,224	0,159	0,082	0,20	
	0,50	0,090	0,160	0,203	0,225	0,225	0,205	0,168	0,120	0,062	0,50	
0,75	0,05	0,096	0,178	0,248	0,299	0,234	0,337	0,309	0,240	0,130	0,05	0,75
	0,10	0,093	0,172	0,233	0,275	0,298	0,291	0,258	0,194	0,103	0,10	
	0,20	0,091	0,164	0,217	0,250	0,260	0,249	0,214	0,157	0,083	0,20	
	0,50	0,091	0,158	0,198	0,218	0,218	0,200	0,166	0,119	0,061	0,50	
1,00	0,05	0,095	0,171	0,231	0,265	0,282	0,276	0,246	0,187	0,100	0,05	1,00
	0,10	0,093	0,164	0,218	0,250	0,260	0,248	0,213	0,161	0,086	0,10	
	0,20	0,091	0,159	0,206	0,233	0,239	0,224	0,190	0,140	0,074	0,20	
	0,50	0,093	0,154	0,196	0,202	0,215	0,196	0,161	0,117	0,059	0,50	
	1,00	0,086	0,144	0,179	0,192	0,188	0,168	0,136	0,096	0,050	1,00	

Tabelul IV.25

Coeficienţi pentru calculul momentelor de încastrare perfectă produse de o forţă concentrată acţionînd în zecimile deschiderilor, pentru bare încastrate la ambele capete, avînd vute simetrice drepte



$$\overline{M}_{ik} = -\eta_i Pl \qquad \overline{M}_{ki} = +\eta_k Pl$$

$$\lambda = \frac{l_v}{l} \qquad n = \frac{I_c}{I_r}$$

În tabel sînt daţi numai coeficienţii η_i. Coeficienţii η_k se obţin din η_i aşezînd forţa P într-o secţiune simetrică opusă faţă de axa de simetrie

λ	$\xi = \frac{a}{l}$ / n	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	$\xi = \frac{a}{l}$ / n	λ
0,20	0,05	0,097	0,179	0,214	0,202	0,160	0,105	0,050	0,014	0,002	0,05	C,20
	0,10	0,095	0,171	0,202	0,192	0,155	0,105	0,054	0,018	0,003	0,10	
	0,20	0,092	0,159	0,188	0,180	0,149	0,105	0,058	0,023	0,005	0,20	
	0,50	0,087	0,140	0,164	0,161	0,137	0,101	0,064	0,030	0,008	0,50	
	1,00	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009	1,00	
0,25	0,05	0,097	0,176	0,225	0,218	0,168	0,104	0,049	0,017	0,004	0,05	0,25
	0,10	0,093	0,170	0,205	0,198	0,162	0,108	0,054	0,020	0,005	0,10	
	0,20	0,092	0,157	0,188	0,184	0,153	0,108	0,061	0,025	0,006	0,20	
	0,50	0,086	0,140	0,164	0,162	0,139	0,102	0,063	0,030	0,008	0,50	
0,30	0,05	0,096	0,178	0,232	0,227	0,175	0,107	0,048	0,017	0,004	0,05	0,30
	0,10	0,093	0,168	0,213	0,209	0,167	0,109	0,055	0,022	0,005	0,10	
	0,20	0,090	0,157	0,194	0,190	0,157	0,109	0,062	0,027	0,006	0,20	
	0,50	0,085	0,140	0,167	0,163	0,140	0,104	0,063	0,032	0,009	0,50	
0,35	0,05	0,093	0,171	0,222	0,229	0,181	0,111	0,057	0,021	0,005	0,05	0,35
	0,10	0,091	0,162	0,208	0,210	0,172	0,114	0,063	0,028	0,008	0,10	
	0,20	0,090	0,154	0,189	0,191	0,160	0,112	0,067	0,029	0,008	0,20	
	0,50	0,085	0,140	0,167	0,165	0,141	0,104	0,065	0,033	0,009	0,50	
0,40	0,05	0,094	0,171	0,221	0,232	0,186	0,116	0,060	0,024	0,005	0,05	0,40
	0,10	0,092	0,161	0,204	0,211	0,174	0,117	0,065	0,028	0,006	0,10	
	0,20	0,090	0,124	0,189	0,191	0,161	0,115	0,067	0,030	0,007	0,20	
	0,50	0,097	0,156	0,188	0,186	0,141	0,121	0,076	0,039	0,003	0,50	
0,50	0,05	0,096	0,168	0,211	0,223	0,191	0,128	0,073	0,029	0,008	0,05	0,50
	0,10	0,092	0,158	0,194	0,202	0,171	0,120	0,070	0,030	0,007	0,10	
	0,20	0,088	0,149	0,181	0,175	0,158	0,115	0,069	0,032	0,008	0,20	
	0,50	0,078	0,135	0,161	0,159	0,139	0,108	0,070	0,035	0,013	0,05	

Coeficienți pentru calculul momentelor de încastrare perfectă din sarcină uniform

$$n = \frac{I_c}{I_r}$$

λ \ n	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,125	0,150
0,00	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
0,05	0,091	0,090	0,090	0,090	0,090	0,089	0,089	0,089	0,089	0,088	0,088
0,10	0,097	0,096	0,096	0,095	0,095	0,095	0,094	0,094	0,093	0,093	0,092
0,15	0,103	0,102	0,101	0,100	0,100	0,099	0,099	0,098	0,097	0,096	0,095
0,20	0,108	0,107	0,106	0,105	0,104	0,103	0,102	0,101	0,100	0,099	0,098
0,25	0,112	0,111	0,109	0,108	0,107	0,106	0,105	0,104	0,103	0,102	0,101
0,30	0,115	0,114	0,112	0,111	0,110	0,109	0,108	0,106	0,105	0,103	0,102
0,35	0,118	0,116	0,114	0,113	0,111	0,111	0,109	0,107	0,106	0,105	0,103
0,40	0,119	0,118	0,115	0,114	0,112	0,111	0,110	0,108	0,106	0,105	0,103
0,45	0,120	0,118	0,115	0,114	0,112	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102
0,50	0,119	0,116	0,114	0,111	0,110	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,101

Coeficienți pentru calculul momentelor de încastrare perfectă din sarcină opus, avînd vute

$$n = \frac{I_c}{I_r}$$

λ \ n	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,125	0,150
0,00	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
0,05	0,142	0,141	0,140	0,140	0,139	0,139	0,138	0,138	0,137	0,137	0,136
0,10	0,159	0,157	0,156	0,154	0,153	0,152	0,151	0,150	0,149	0,147	0,146
0,15	0,175	0,173	0,171	0,168	0,166	0,165	0,164	0,161	0,159	0,157	0,155
0,20	0,192	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177	0,175	0,172	0,169	0,166	0,164
0,25	0,208	0,204	0,198	0,194	0,191	0,189	0,186	0,181	0,178	0,173	0,171
0,30	0,223	0,218	0,211	0,206	0,202	0,198	0,195	0,190	0,186	0,181	0,177
0,35	0,239	0,232	0,223	0,218	0,212	0,208	0,203	0,197	0,193	0,186	0,182
0,40	0,252	0,245	0,235	0,227	0,220	0,215	0,211	0,203	0,198	0,190	0,186
0,45	0,266	0,258	0,243	0,234	0,228	0,221	0,217	0,207	0,201	0,195	0,189
0,50	0,283	0,268	0,252	0,242	0,233	0,226	0,221	0,211	0,203	0,196	0,189
0,75	0,315	0,286	0,253	0,239	0,226	0,218	0,212	0,201	0,193	0,186	0,179
1,00	0,240	0,222	0,206	0,194	0,190	0,184	0,182	0,177	0,171	0,166	0,160

Tabelul IV.26

distribuită pentru bare încastrate la ambele capete, avînd vute simetrice drepte

$\overline{M}_{ik} = -\overline{M}_{ki} = \chi q l^2 \qquad \lambda = \frac{l_v}{l}$

0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	n / λ
0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,00
0,088	0,087	0,087	0,086	0,086	0,086	0,085	0,084	0,084	0,083	0,05
0,091	0,090	0,090	0,088	0,088	0,087	0,086	0,085	0,084	0,083	0,10
0,094	0,093	0,092	0,090	0,089	0,088	0,087	0,085	0,084	0,083	0,15
0,097	0,096	0,094	0,092	0,090	0,089	0,087	0,086	0,084	0,083	0,20
0,099	0,097	0,096	0,093	0,091	0,089	0,087	0,086	0,085	0,083	0,25
0,100	0,098	0,096	0,094	0,091	0,089	0,088	0,086	0,085	0,083	0,30
0,100	0,100	0,097	0,094	0,091	0,089	0,088	0,086	0,085	0,083	0,35
0,101	0,099	0,097	0,094	0,091	0,089	0,088	0,086	0,085	0,083	0,40
0,100	0,098	0,096	0,093	0,091	0,089	0,087	0,086	0,084	0,083	0,45
0,098	0,097	0,095	0,093	0,090	0,089	0,087	0,086	0,084	0,083	0,50

Tabelul IV.27

uniform distribuită pentru bare încastrate la un capăt și articulate la capătul nesimetrice drepte

$\overline{M}^0_{ik} = \chi q l^2 \qquad \lambda = \frac{l_v}{l}$

0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	n / λ
0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,00
0,135	0,134	0,133	0,131	0,130	0,129	0,128	0,127	0,126	0,125	0,05
0,144	0,142	0,140	0,137	0,134	0,132	0,130	0,128	0,126	0,125	0,10
0,152	0,149	0,146	0,142	0,138	0,135	0,133	0,130	0,127	0,125	0,15
0,159	0,156	0,151	0,146	0,142	0,137	0,134	0,130	0,128	0,125	0,20
0,165	0,160	0,156	0,149	0,143	0,139	0,134	0,131	0,128	0,125	0,25
0,170	0,164	0,159	0,151	0,145	0,140	0,135	0,132	0,128	0,125	0,30
0,173	0,167	0,162	0,153	0,147	0,141	0,136	0,132	0,128	0,125	0,35
0,177	0,170	0,164	0,154	0,147	0,141	0,136	0,132	0,128	0,125	0,40
0,178	0,171	0,164	0,155	0,147	0,141	0,136	0,132	0,129	0,125	0,45
0,179	0,174	0,165	0,155	0,147	0,141	0,136	0,132	0,129	0,125	0,50
0,170	0,163	0,158	0,150	0,143	0,138	0,134	0,131	0,128	0,125	0,75
0,156	0,150	0,148	0,143	0,140	0,135	0,133	0,129	0,127	0,125	1,00

5.1.4. Grinzi continue. O grindă continuă pe r reazeme dintre care unul fix (articulație) și $r-1$ mobile, este de $r-2$ ori static nedeterminat. Cînd o extremitate este încastrată, gradul de nedeterminare statică este $r-1$. Forțele active aplicate pe axa grinzii se pot descompune în componente normale pe axă și componente după direcția axei.

5.1.4.1. Ecuația celor trei momente. Un mod sistematizat de rezolvare a grinzii continue constă în utilizarea metodei generale a eforturilor. Cel mai convenabil sistem de bază se obține suprimînd legătura pe direcția momentului în secțiunile de pe reazemele intermediare și în încastrările de la extremități. Apar astfel n necunoscute suplimentare — momente încovoietoare pe reazeme : $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (fig. IV.121, $a-c$). Ca o consecință a alegerii sistemului de bază, ecuația de condiție de rang i devine

$$\delta_{i,i-1}M_{i-1} + \delta_{i,i}M_i + \delta_{i,i+1} M_{i+1} + \Delta_{ic} = 0 \qquad \text{(IV.239)}$$

unde $\Delta_{ic} = \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ir}$ introduce influența încărcării grinzii continue cu sarcini, variații de temperatură și cedări de reazeme.

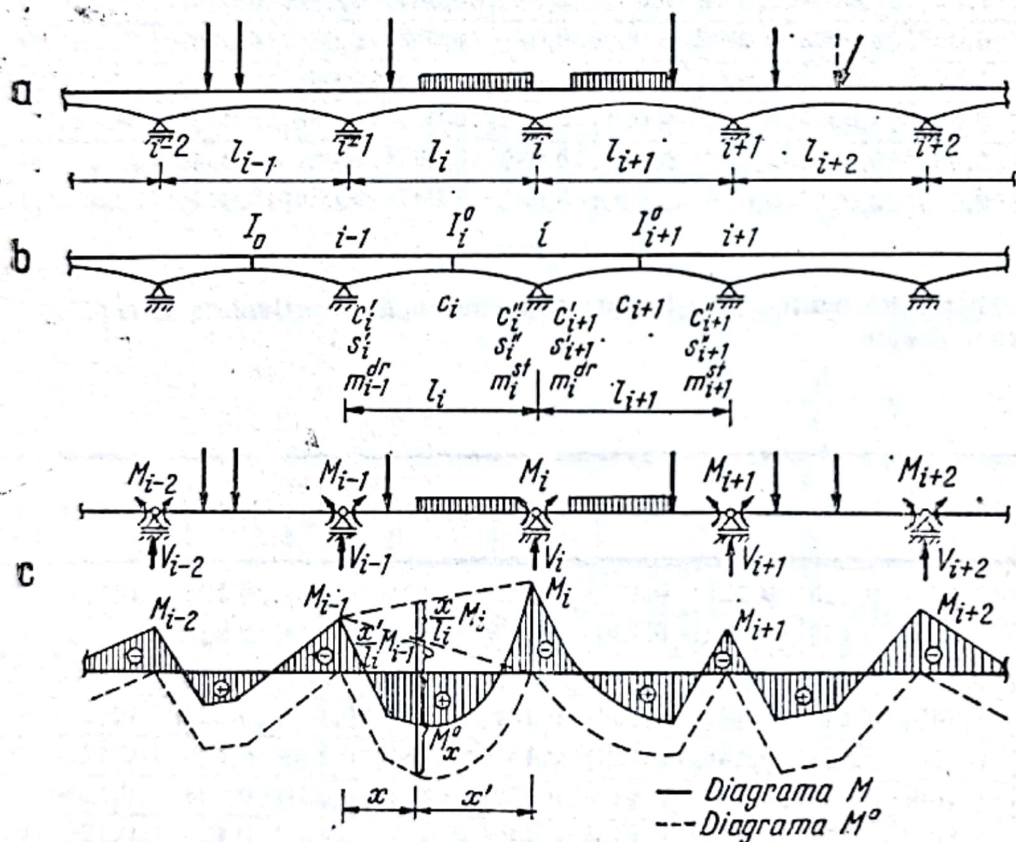


Fig. IV.121

Introducînd în ecuația (IV.239) expresiile deplasărilor pe sistemul de bază datorat necunoscutelor unitare, se obține *ecuația celor trei momente* sau *ecuația lui Clapeyron*

$$c_i\lambda_iM_{i-1} + 2(c_i''\lambda_i + c_{i+1}'\lambda_{i+1})\, M_i + c_{i+1}\lambda_{i+1}M_{i+1} + \Delta_{ic} = 0. \qquad \text{(IV.240)}$$

Pentru secţiuni constante în fiecare deschidere, coeficienţii $c' = c = c'' = 1$ iar ecuaţia (IV.240) devine

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + \Delta_{ic} = 0. \quad \text{(IV.240a)}$$

În ecuaţiile (IV.240) şi (IV.240 a) $\lambda_i = \frac{I_0}{I_i^0} l_i$ este *deschiderea rectificată* şi are dimensiunea unei lungimi.

În cazul în care lungimile rectificate ale tuturor deschiderilor sînt aceleaşi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_i = \ldots = \lambda_n$, ecuaţia (IV.240) capătă forma:

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} + \Delta_{ic} = 0. \quad \text{(IV.240b)}$$

Sistemul de ecuaţii are o structură particulară (cvasidiagonală), facilitînd astfel determinarea necunoscutelor.

Dacă unul din reazemele extreme este încastrat (fig. IV.122), se va scrie o ecuaţie de continuitate şi în secţiunea de încastrare. Ecuaţia corespunzătoare se obţine din ecuaţia curentă (IV.240) sau (IV.240 a), considerîndu-se încastrarea echivalentă cu o deschidere simplu rezemată de rigiditate infinită.

Pentru reazemul *0* (fig. IV.122, *a*) rezultă:

$$2c_1'\lambda_1 M_0 + c_1\lambda_1 M_0 + \Delta_{0c} = 0. \quad \text{(IV.241)}$$

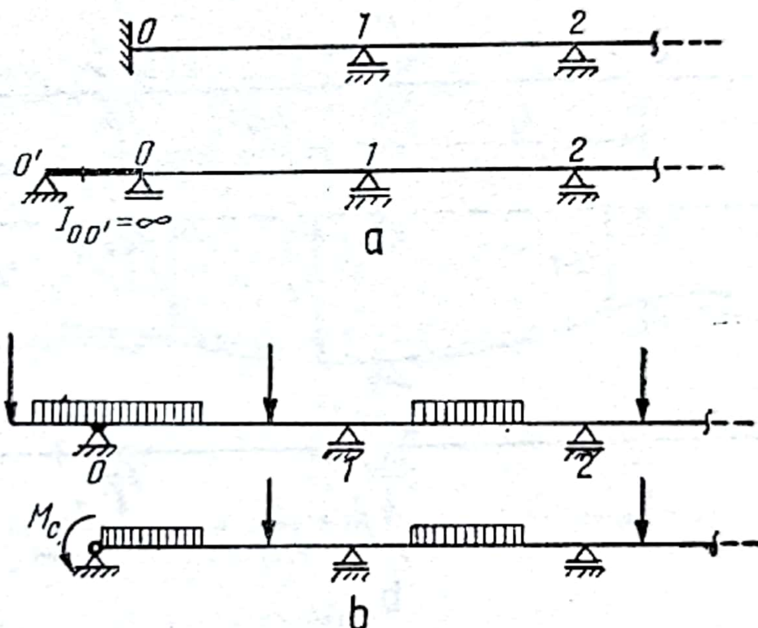


Fig. IV.122

Dacă pe reazemele extreme se aplică o încărcare cu momente concentrate, sau se ataşază console încărcate (fig. IV.122, *b*), în acest caz apare în ecuaţie un moment încovoietor cunoscut, pe primul, respectiv ultimul reazem. Pentru reazemul *1* ecuaţia (IV.240) devine

$$c_1\lambda_1(-M_c) + 2(c_1''\lambda_1 + c_2'\lambda_2) M_2 + c_2\lambda_2 M_2 + \Delta_{1c} = 0. \quad \text{(IV.242)}$$

Termenii liberi (Δ_{ic}). Pentru diverse categorii de solicitări ale grinzii continue, Δ_{ic} se determină pe baza următoarelor expresii:

1) *Încărcare cu sarcini*. ($\Delta_{ip} \neq 0$; $\Delta_{it} = 0$; $\Delta_{ir} = 0$). (fig IV.123)

Pentru secţiuni variabile expresia sistematizată a termenului liber este

$$\Delta_{ip} = s_i''\lambda_i m_i^{st} + s_{i+1}'\lambda_{i+1} m_i^{dr} \quad \text{(IV.243)}$$

iar pentru secţiuni constante în deschidere ($s' = s'' = 1$)

$$\Delta_{ip} = \lambda_i m_i^{st} + \lambda_{i+1} m_i^{dr} \quad \text{(IV.243a)}$$

unde m_i^{st} şi m_i^{dr} sînt factorii de încărcare pentru reazemul i, corespunzător deschiderii din stînga respectiv din dreapta faţă de reazem.

În cazul lungimilor rectificate aceleaşi pentru toate deschiderile rezultă:

$$\Delta_{ip} = m_i^{st} + m_i^{dr} = S_I. \quad \text{(IV.243b)}$$

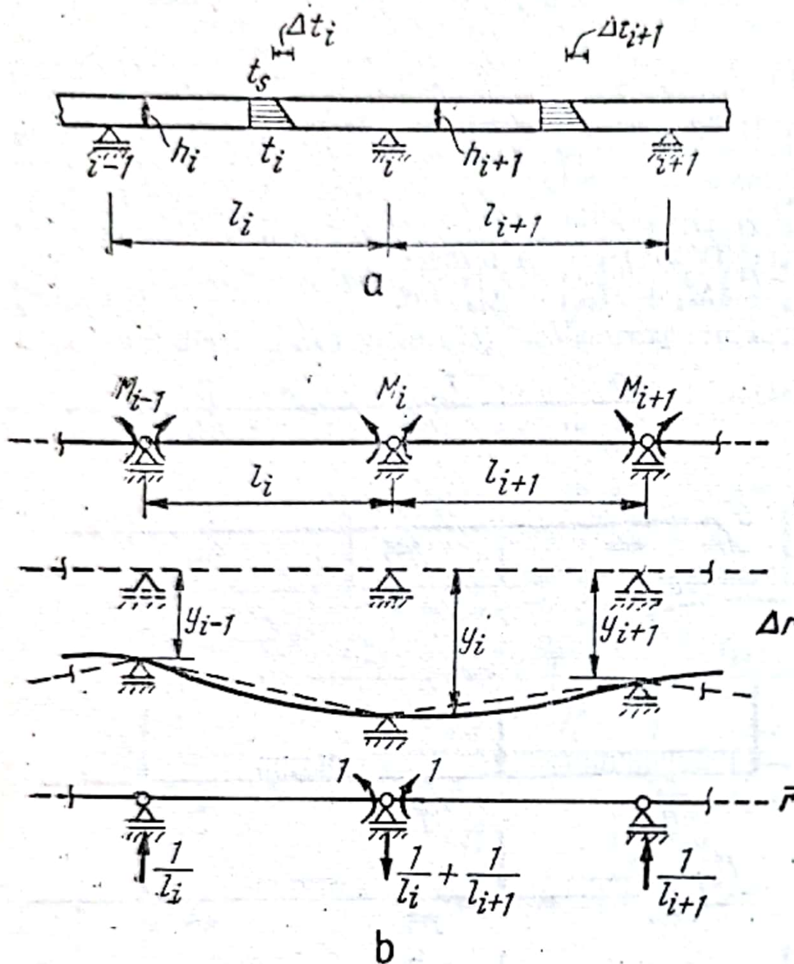


Fig. IV.123

Pentru evaluarea coeficienților de secțiune variabilă se poate utiliza tabelul IV.17, iar pentru calculul factorilor de încărcare tabelele IV.16 și IV.17.

2) *Încărcare cu variație de temperatură* ($\Delta_{ip} = 0$; $\Delta_{it} \neq 0$; $\Delta_{ir} = 0$). Termenul liber Δ_{it} datorat variației de temperatură între fața inferioară și superioară a grinzii continue cu secțiuni constante în fiecare deschidere, are expresia

$$\Delta_{it} = \Sigma \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m \, dx = 3EI_0 \alpha \left(\frac{\Delta t_i}{h_i} l_i + \frac{\Delta t_{i+1}}{h_{i+1}} l_{i+1} \right) \tag{IV.244}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară, iar $\Delta t_i = t_i - t_s$ este diferența de temperatură la cele două fețe ale grinzii în deschiderea i (este pozitivă cînd $t_i > t_s$), (fig. IV.123, *a*).

3) *Încărcare cu cedări ale reazemelor* ($\Delta_{ip} = 0$; $\Delta_{it} = 0$; $\Delta_{ir} \neq 0$). Cînd reazemele grinzii continue au tasări cunoscute ca valoare (fig. IV.123, *b*), termenul liber Δ_{ir} are expresia

$$\Delta_{ir} = -\sum \bar{r} \Delta_r = 6\, EI_0 \left(\frac{y_{i-1} - y_i}{l_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} \right) \tag{IV.245}$$

unde deplasările y_{i-1}, y_i, y_{i+1} sînt pozitive cînd reazemele se deplasează sub axa grinzii.

Expresia generală a ecuației celor trei momente, corespunzător încărcării grinzii continue concomitent cu toate solicitările este:

— pentru secțiuni variabile

$$c_i \lambda_i M_{i-1} + 2(c_i'' \lambda_i + c_{i+1}' \lambda_{i+1}) M_i + c_{i+1} \lambda_{i+1} M_{i+1} + s_i'' \lambda_i m_i^{st} + s_{i+1}' \lambda_{i+1} m_i^{dr} + \Delta_{it} + 6EI_0 \left(\frac{y_{i-1} - y_i}{l_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} \right) = 0 \tag{IV.246}$$

unde termenul Δ_{it} se calculează prin integrare numerică ;

— pentru secţiuni constante

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + \lambda_i m_i^{st} + \lambda_{i+1} m_i^{dr} +$$

$$+ 3\alpha EI_0 \left(\frac{\Delta t_i}{h_i} l_i + \frac{\Delta t_{i+1}}{h_{i+1}} l_{i+1} \right) + 6EI_0 \left(\frac{y_{i-1} - y_i}{l_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} \right) = 0. \qquad \text{(IV.246a)}$$

Reacţiuni, eforturi şi deplasări. Cunoscînd momentele încovoietoare în secţiunile de pe reazeme şi încărcările, prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază se obţine (v. fig. IV.120) :

— reacţiunea în reazemul i

$$V_i = V^0_{i,i-1} + V^0_{i,i+1} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} ; \qquad \text{(IV.247)}$$

— forţa tăietoare în secţiunea x a deschiderii $i-1$, i

$$T_x = T^0_x + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} ; \qquad \text{(IV.248)}$$

— momentul încovoietor în secţiunea x a deschiderii $i-1$, i

$$M_x = M^0_x + \frac{x'}{l_i} M_{i-1} + \frac{x}{l_i} M_i ; \qquad \text{(IV.249)}$$

— deplasarea după normala la axa grinzii a centrului de greutate al unei secţiuni curente din deschiderea $i-1$, i (I_i este constant în deschidere)

$$y_x = y^0_x + \frac{M_{i-1}}{6EI_i l_i} x'(l_i^2 - x'^2) + \frac{M_i}{6EI_i l_i} x(l^2 - x^2). \qquad \text{(IV.250)}$$

Observaţii. 1) În relaţiile de mai înainte, mărimile statice V^0, T^0, M^0, y^0, se referă la grinda dreaptă simplu rezemată. 2) Toate mărimile statice sînt considerate pozitive în convenţia de semn a metodei generale a eforturilor.

5.1.4.2. Procedeul punctelor fixe. Procedeul punctelor fixe este utilizat în special la calculul grinzilor continue cu multe deschideri şi la construirea liniilor de influenţă. Procedeul are eficienţă maximă în cazul grinzilor cu o singură deschidere încărcată, motiv pentru care este preferat în calculul liniilor de influenţă. În cazul grinzilor continue cu mai multe deschideri încărcate, se va rezolva pe rînd grinda pentru fiecare deschidere încărcată, diagrama de momente finală obţinîndu-se prin suprapunere liniară a diagramelor pentru fiecare situaţie de încărcare.

Dacă o singură deschidere a grinzii continue este încărcată, restul deschiderilor fiind neîncărcate, se remarcă (fig. IV.124) :

— axa deformată a grinzii continue are forma unei curbe continue, avînd în fiecare deschidere puncte de inflexiune ce separă zone cu curburi diferite ;

— în deschiderile neîncărcate, axa deformată prezintă numai un punct de inflexiune, care defineşte poziţia punctului de anulare pentru diagrama M ; curba de momente variază liniar, schimbînd de semn de la un reazem la cel imediat vecin.

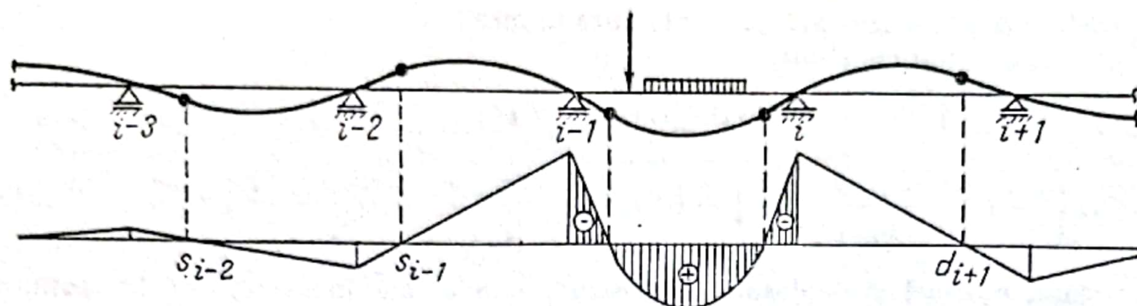


Fig. IV.124

Punctele de inflexiune ale deformatei se numesc puncte fixe deoarece au o poziţie fixă ce depinde numai de caracteristicile geometrice elastice şi de rezemare ale grinzii continue, fiind independente în raport cu încărcările grinzii. Fiecare deschidere a grinzii continue are două puncte fixe, unul corespunzător deschiderii încărcate situată la dreapta celei considerate, şi altul corespunzător deschiderii încărcate situată la stînga ei; deschiderile marginale cu reazeme extreme articulate, au un singur punct fix distinct, celălalt confundîndu-se cu reazemul extrem.

Rapoarte de punct fix. Pornind de la cele două extremităţi ale grinzii continue, ţinînd seama de modul de rezemare a acestora, se pot determina două serii de rapoarte

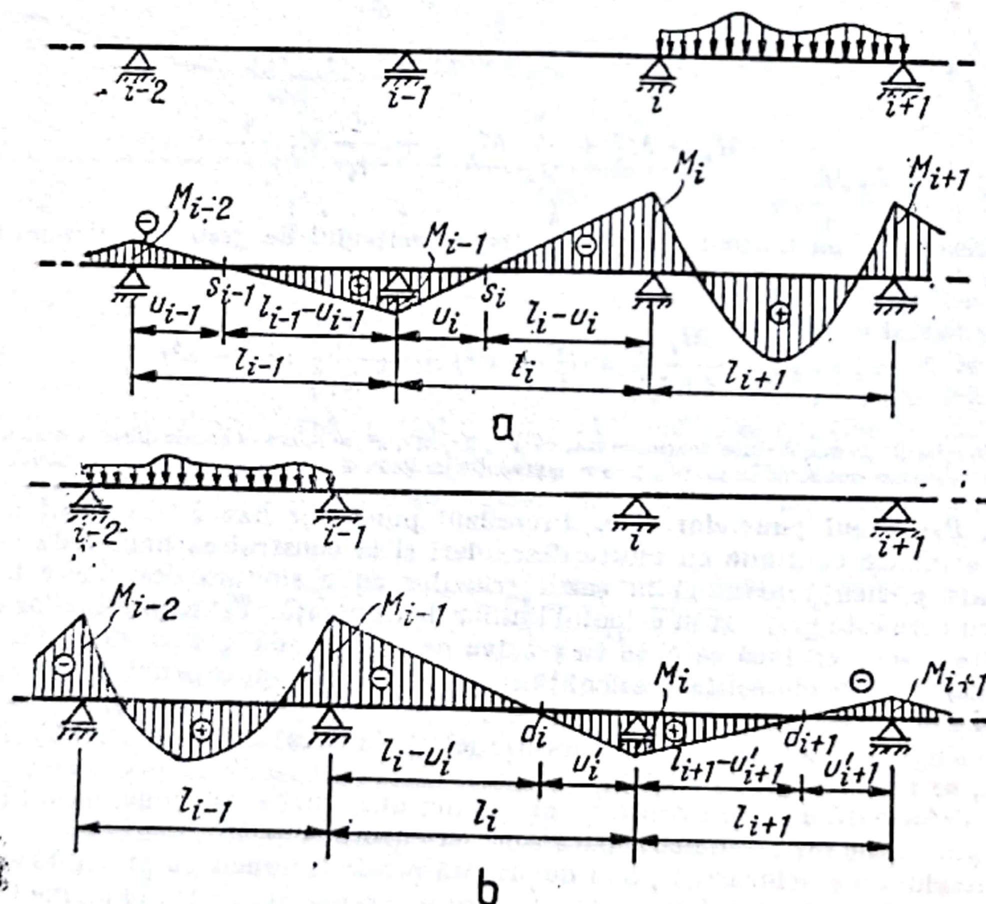


Fig. IV.125

de punct fix, corespunzătoare transmiterii spre stînga (fig. IV.125, *a*) sau spre dreapta, (fig. IV.125, *b*) a momentelor pe reazeme. Relaţiile de definiţie şi expresiile rapoartelor de punct fix sînt prezentate în tabelul IV.28.

Cunoscînd rapoartele de punct fix într-o deschidere neîncărcată $i-1,\ i$, momentele pe reazemele ce mărginesc deschiderea sînt dependente pe baza relaţiilor

$$k_i^s = -\frac{M_i}{M_{i-1}}; \qquad k_i^d = -\frac{M_{i-1}}{M_i}. \tag{IV.251}$$

Tabelul IV.28

Expresiile rapoartelor de punct fix

Raport de punct fix	Relaţie de definiţie	Secţiune variabilă în deschidere	Secţiune constantă în deschidere
Raport de punct fix pentru transmitere spre stînga în deschiderea $i-1,\ i$	$k_i^s = \frac{l_i - u_i}{u_i}$	$k_i^s = 2\frac{c_i'}{c_i} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2\frac{c_{i-1}''}{c_i} - \frac{c_{i-1}}{c_i}\frac{1}{k_{i-1}^s}\right)$	$k_i^s = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\cdot\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}^s}\right)$
Raport de punct fix pentru transmiterea spre dreapta în deschiderea $i-1,\ i$	$k_i^d = \frac{l_i - u_i'}{u_i'}$	$k_i^d = 2\frac{c_i''}{c_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2\frac{c_{i+1}'}{c_i} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\frac{1}{k_{i+1}^d}\right)$	$k_i^d = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\cdot\left(2 - \frac{1}{k_{i+1}^d}\right)$

Pentru deschiderile marginale, funcţie de condiţiile de rezemare ale extremităţilor, expresiile rapoartelor de punct fix sînt prezentate în tabelul IV.29.

Tabelul IV.29

Valorile rapoartelor de punct fix pentru deschiderile marginale

Deschiderea marginală		0 (reazem articulat) / r (reazem articulat)	0 (încastrare) / r (încastrare)
1	Secţiune variabilă	$k_1^s = \infty$	$k_1^s = 2\frac{c_1'}{c_1}$
	Secţiune constantă	$k_1^s = \infty$	$k_1^s = 2$
r	Secţiune variabilă	$k_r^d = \infty$	$k_r^d = 2\frac{c_r''}{c_r}$
	Secţiune constantă	$k_r^d = \infty$	$k_r^d = 2$

Momente la marginea deschiderii încărcate. Considerînd numai deschiderea $i-1$, i încărcată (fig. IV.126), expresiile momentelor încovoietoare în secţiunile de pe reazemele $i-1$ şi i sînt date în tabelul IV.30.

Momentele la marginea deschiderii încărcate se transmit prin punctele fixe de o parte şi de alta a deschiderii. Momentul pe un reazem se obţine din momentul pe reazemul precedent prin împărţire cu raportul de punct fix k, corespunzător deschiderii mărginite de cele două reazeme şi sensului în care se face transmiterea, şi schimbînd semnul (v. fig. IV.126).

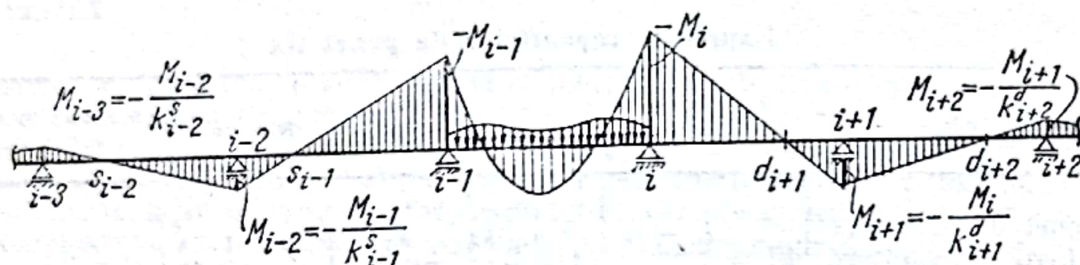


Fig. IV.126

Tabelul IV.30

Expresiile momentelor la marginea deschiderii încărcate

Reazemul	Secţiune variabilă în deschidere	Secţiune constantă în deschidere
$i-1$	$M_{i-1}=-\dfrac{k_i^d s_i' m_{i-1}^{dr}-s_i'' m_i^{st}}{c_i(k_i^s k_i^d-1)}$	$M_{i-1}=-\dfrac{k_i^d m_{i-1}^{dr}-m_i^{st}}{k_i^s k_i^d-1}$
i	$M_i=-\dfrac{k_i^s s_i'' m_i^{st}-s_i' m_{i-1}^{dr}}{c_i(k_i^s k_i^d-1)}$	$M_i=-\dfrac{k_i^s m_i^{st}-m_{i-1}^{dr}}{k_i^s k_i^d-1}$

5.1.4.3. **Calculul eforturilor la grinzile continue cu ajutorul tabelelor.** Pentru calculul eforturilor la grinzile continue au fost întocmite o serie de tabele de calcul care permit fie calculul momentelor încovoietoare pe reazeme pentru orice încărcări, fie momentele încovoietoare în diferite secţiuni pentru încărcări uniform repartizate. În lucrare vom reproduce numai două asemenea tabele (tabelul IV.31a şi IV.31b), cu aplicaţie mai largă în proiectare. Pentru alte tabele vezi lucrarea [15] secţiunea VIII.

Cu tabelul IV.31a momentul încovoietor pe un reazem se obţine ca sumă a *factorilor de încărcare* ai tuturor reazemelor, fiecare factor de încărcare fiind multiplicat cu un anumit coeficient ce se găseşte în tabel. Astfel, momentul pe reazemul din mijloc M_C la o grindă continuă cu 4 deschideri rectificate egale este dat de relaţia :

$$M_C = +0{,}07143S_B - 0{,}28708S_C + 0{,}0756S_D - 0{,}01914S_C$$

în care termenii de forma $S_I = m_I^{st} + m_I^{dr}$ reprezintă suma celor doi factori de încărcare, din stînga și dreapta, aferenți reazemului I. Expresiile factorilor de încărcare, pentru diferite încărcări se iau din tabelele IV.16 a și b. Se precizează că factorii de încărcare m_I^{st} și m_I^{dr} trebuie calculați pentru deschiderile reale ale fiecărei deschideri. Pentru cazurile în care toate deschiderile sînt la fel încărcate, termenul S fiind același pentru toate reazemele, momentele rezultă multiplicînd acest termen cu suma coeficienților din tabelul corespunzător numărului de deschideri ale grinzii, sumă ce se găsește în ultima coloană a tabelului. Cunoscînd momentele pe reazeme, eforturile și deplasările într-o secțiune se calculează pe baza relațiilor (IV.247) — (IV.250).

Tabelul IV.31b conține așa-numiții *coeficienți Winkler* a, b, c și α, β, γ, cu care se pot calcula eforturile extreme în zecimile deschiderilor grinzilor continue cu 2 — 5 deschideri egale. Eforturile extreme se calculează cu relațiile:

$$M_{max} = (ag + bp)l^2; \qquad M_{min} = (ag + cp)l^2$$

$$T_{max} = (\alpha g + \beta p)l; \qquad T_{min} = (\alpha g + \gamma p)l.$$

Coeficienții ce intervin în formulele de mai sus sînt de fapt ariile liniilor de influență pentru o deschidere $l = 1$ ce trebuie încărcate pentru a obține efortul căutat. Coeficienții scriși cu litere groase dau valorile extreme din secțiunile cele mai solicitate. Cu ajutorul acestui tabel se pot trasa și curbele înfășurătoare ale momentelor și forțelor tăiatoare.

5.1.4.4. Grinzi continue pe reazeme elastice (fig. IV.127, *a*). În calculul rețelelor de grinzi, longeronilor de poduri, a șinelor de cale ferată etc. se întîlnesc frecvent grinzi continue rezemate pe elemente de rezistență deformabile, care reprezintă pentru grinda continuă rezemări elastice. Deformarea reazemelor elastice este proporțională cu mărimea reacțiunii transmisă de grinda continuă în punctul de rezemare

$$y_i = \beta_i V_i \tag{IV.252}$$

unde β_i este caracteristica elastică a reazemului i, definită prin coeficientul de flexibilitate. Flexibilitatea β_i este o caracteristică proprie reazemului, independentă de încărcări, reprezentînd deplasarea pe verticală a reazemului i sub sarcină unitară (fig. IV.127, *b*).

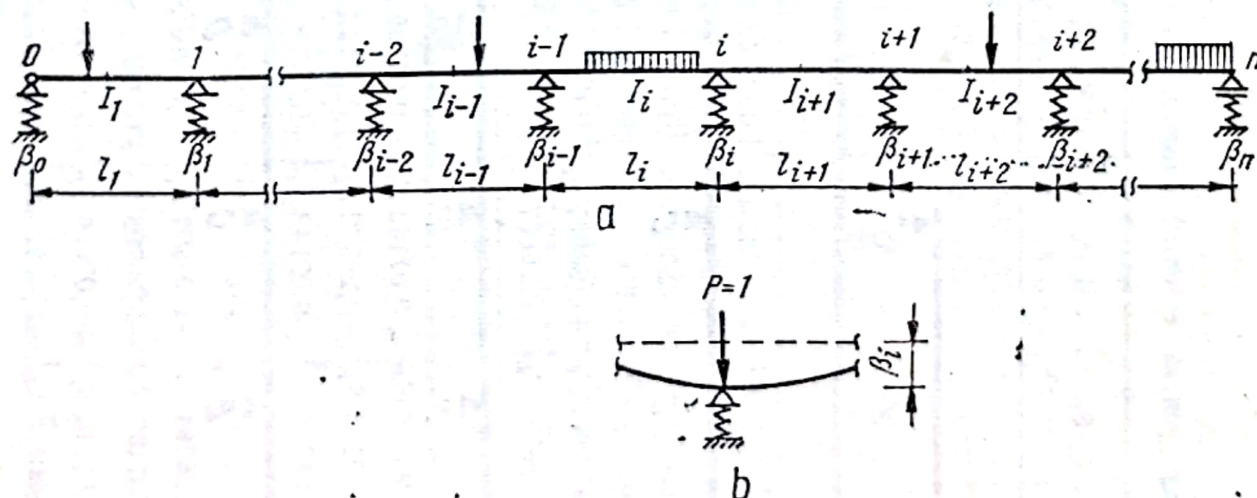


Fig. IV.127

Tabelul IV.31a

Coeficienți pentru calculul momentelor încovoietoare pe reazeme pentru grinzi avînd 2—8 deschideri egale

Momentul pe reazem M_I =	$i_B \cdot S_B$ +	$i_C \cdot S_C$ +	$i_D \cdot S_D$ +	$i_E \cdot S_E$ +	$i_F \cdot S_F$ +	$i_G \cdot S_G$ +	$i_H \cdot S_H$	$S\,\Sigma_i$
A B C								
M_B =	$-0{,}25000\ S_B$							$-0{,}25000\ S$
A B C D								
M_B =	$-0{,}26667\ S_B$	$+0{,}06667\ S_C$						$-0{,}20000\ S$
M_C =	$+0{,}06667\ S_B$	$-0{,}26667\ S_C$						$-0{,}20000\ S$
A B C D E								
M_B =	$-0{,}26786\ S_B$	$+0{,}07143\ S_C$	$-0{,}01786\ S_D$					$-0{,}21429\ S$
M_C =	$+0{,}07143\ S_B$	$-0{,}28572\ S_C$	$+0{,}07143\ S_D$					$-0{,}14286\ S$
M_D =	$-0{,}01786\ S_B$	$+0{,}07143\ S_C$	$-0{,}26786\ S_D$					$-0{,}21429\ S$
A B C D E F								
M_B =	$-0{,}26794\ S_B$	$+0{,}07177\ S_C$	$-0{,}01914\ S_D$	$+0{,}00478\ S_E$				$-0{,}21053\ S$
M_C =	$+0{,}07177\ S_B$	$-0{,}28708\ S_C$	$+0{,}07656\ S_D$	$-0{,}01914\ S_E$				$-0{,}15789\ S$
M_D =	$-0{,}01914\ S_B$	$+0{,}07656\ S_C$	$-0{,}28708\ S_D$	$+0{,}07177\ S_E$				$-0{,}15789\ S$
M_E =	$+0{,}00478\ S_B$	$-0{,}01914\ S_C$	$+0{,}07177\ S_D$	$-0{,}26794\ S_E$				$-0{,}21053\ S$

Tabelul conține coeficienții cu care trebuie multiplicați factorii de încărcare ai reazemelor, pentru a obține momentele pe acele reazeme. Factorul de încărcare S pentru reazemul I este:

$$S_I = m^{st} + m^{dr}.$$

(Valorile factorilor de încărcare pentru încărcări curente se găsesc în tabelele IV.16a și b). Tabelul poate fi folosit și pentru deschideri avînd aceeași deschidere rectificată $\lambda' = \frac{I^0 l_i}{I_i^0}$. El se utilizează și la calculul ordonatelor liniilor de influență ale momentelor pe reazeme

Pentru aplicații practice coeficienții din tabel se pot rotunji la trei cifre semnificative

A B C D E F B

$M_B =$	$-0{,}26795\ S_B$	$+0{,}07179\ S_C$	$-0{,}01925\ S_D$	$+0{,}00513\ S_E$	$-0{,}00128\ S_F$	$-\ 0{,}21154\ S$
$M_C =$	$+0{,}07179\ S_B$	$-0{,}28718\ S_C$	$+0{,}07692\ S_D$	$-0{,}02051\ S_E$	$+0{,}00513\ S_F$	$-\ 0{,}15385\ S$
$M_D =$	$-0{,}01925\ S_B$	$+0{,}07692\ S_C$	$-0{,}28846\ S_D$	$+0{,}07692\ S_E$	$-0{,}01925\ S_F$	$-\ 0{,}17308\ S$
$M_E =$	$+0{,}00513\ S_B$	$-0{,}02051\ S_C$	$+0{,}07692\ S_D$	$-0{,}28718\ S_E$	$+0{,}07179\ S_F$	$-\ 0{,}15385\ S$
$M_F =$	$-0{,}00128\ S_B$	$+0{,}00513\ S_C$	$-0{,}01925\ S_D$	$+0{,}07179\ S_E$	$-0{,}26795\ S_F$	$-\ 0{,}21154\ S$

A B C D E F G H

$M_B =$	$-0{,}26795\ S_B$	$+0{,}07180\ S_C$	$-0{,}01924\ S_D$	$+0{,}00515\ S_E$	$-0{,}00137\ S_F$	$+0{,}00034\ S_G$	$-\ 0{,}21127\ S$
$M_C =$	$+0{,}07180\ S_B$	$-0{,}28719\ S_C$	$+0{,}07695\ S_D$	$-0{,}02061\ S_E$	$+0{,}00550\ S_F$	$-0{,}00137\ S_G$	$-\ 0{,}15492\ S$
$M_D =$	$-0{,}01924\ S_B$	$+0{,}07695\ S_C$	$-0{,}28856\ S_D$	$+0{,}07729\ S_E$	$-0{,}02061\ S_F$	$+0{,}00515\ S_G$	$-\ 0{,}16902\ S$
$M_E =$	$+0{,}00515\ S_B$	$-0{,}02061\ S_C$	$+0{,}07729\ S_D$	$-0{,}28856\ S_E$	$+0{,}07695\ S_F$	$-0{,}01924\ S_G$	$-\ 0{,}16902\ S$
$M_F =$	$-0{,}00137\ S_B$	$+0{,}00550\ S_C$	$-0{,}02061\ S_D$	$+0{,}07695\ S_E$	$-0{,}28719\ S_F$	$+0{,}07180\ S_G$	$-\ 0{,}15492\ S$
$M_G =$	$+0{,}00034\ S_B$	$-0{,}00137\ S_C$	$+0{,}00515\ S_D$	$-0{,}01924\ S_E$	$+0{,}07180\ S_F$	$-0{,}26795\ S_G$	$-\ 0{,}21227\ S$

A B C D E F G H I

$M_B =$	$-0{,}26795\ S_B$	$+0{,}07180\ S_C$	$-0{,}01924\ S_D$	$+\ 0{,}00515\ S_E$	$-0{,}00138\ S_F$	$+0{,}00037\ S_G$	$-0{,}00009\ S_H$	$-\ 0{,}21135\ S$
$M_C =$	$+0{,}07180\ S_B$	$-0{,}28719\ S_C$	$+0{,}07695\ S_D$	$-\ 0{,}02062\ S_E$	$+0{,}00552\ S_F$	$-0{,}00147\ S_G$	$+0{,}00037\ S_H$	$-\ 0{,}15464\ S$
$M_D =$	$-0{,}01924\ S_B$	$+0{,}07695\ S_C$	$-0{,}28857\ S_D$	$+\ 0{,}07732\ S_E$	$-0{,}02071\ S_F$	$+0{,}00552\ S_G$	$-0{,}00138\ S_H$	$-\ 0{,}17011\ S$
$M_E =$	$+0{,}00515\ S_B$	$-0{,}02062\ S_C$	$+0{,}07732\ S_D$	$-\ 0{,}28866\ S_E$	$+0{,}07732\ S_F$	$-0{,}02062\ S_G$	$+0{,}00515\ S_H$	$-\ 0{,}16496\ S$
$M_F =$	$-0{,}00138\ S_B$	$+0{,}00552\ S_C$	$-0{,}02071\ S_D$	$+\ 0{,}07732\ S_E$	$-0{,}28857\ S_F$	$+0{,}07695\ S_G$	$-0{,}01924\ S_H$	$-\ 0{,}17011\ S$
$M_G =$	$+0{,}00037\ S_B$	$-0{,}00147\ S_C$	$+0{,}00552\ S_D$	$-\ 0{,}02062\ S_E$	$+0{,}07695\ S_F$	$-0{,}28719\ S_G$	$+0{,}07180\ S_H$	$-\ 0{,}15464\ S$
$M_H =$	$-0{,}00009\ S_B$	$+0{,}00037\ S_C$	$-0{,}00138\ S_D$	$+\ 0{,}00515\ S_E$	$-0{,}01924\ S_F$	$+0{,}07180\ S_G$	$-0{,}26795\ S_H$	$-\ 0{,}21134\ S$

Tabelul IV.31b

Coeficienţi pentru calculul valorilor extreme ale eforturilor în grinzi cu 2 pînă la 5 deschideri egale, acţionate de o încărcare permanentă uniform repartizată g şi una utilă p fracţionabilă, aceasta în poziţia cea mai defavorabilă

$$M_{max} = (ag + bp)\,l^2 \qquad M_{min} = (ag + cp)\,l^2.$$
$$T_{max} = (\alpha g + \beta p)\,l \qquad T_{min} = (\alpha g + \gamma p)\,l.$$

1. Grinzi cu două deschideri egale

Secţiunea la $\xi = \frac{x}{l}$	Momente încovoietoare — Influenţa lui g	Momente încovoietoare — Influenţa lui p		Forţe tăietoare — Influenţa lui g	Forţe tăietoare — Influenţa lui p	
	a	b	c	α	β	γ
0	0	0	0	**+0,3750**	**+0,4375**	−0,0625
0,1	+0,0325	+0,0388	−0,0067	+0,2750	+0,3437	−0,0687
0,2	+0,0550	+0,0675	−0,0125	+0,1750	+0,2624	−0,0874
0,3	+0,0675	+0,0863	−0,0188	+0,0750	+0,1932	−0,1182
0,4	**+0,0700**	**+0,0950**	−0,0250	−0,0250	+0,1359	−0,1609
0,5	+0,0625	+0,0937	−0,0313	−0,1250	+0,0898	−0,2148
0,6	+0,0450	+0,0825	−0,0375	−0,2250	+0,0544	−0,2794
0,7	+0,0175	+0,0613	−0,0438	−0,3250	+0,0287	−0,3537
0,75	0	+0,0469	−0,0469	−0,3750	+0,0193	−0,3943
0,8	−0,0200	+0,0300	−0,0500	−0,4250	+0,0119	−0,4369
0,85	−0,0425	+0,0152	−0,0577	−0,4750	+0,0064	−0,4814
0,9	−0,0675	+0,0061	−0,0736	−0,5250	+0,0027	−0,5277
0,95	−0,0950	+0,0014	−0,0964	−0,5750	+0,0027	−0,5757
1,0	**−0,1250**	**0**	**−0,1250**	**−0,6250**	**0**	**−0,6250**
	gl^2	pl^2	pl^2	gl	pl	pl

$V_{A\,max} = 0{,}375\,gl + 0{,}4375\,pl.$ $\qquad V_{B\,max} = 1{,}25\,(g + p)l.$

2. Grinzi cu trei deschideri egale

ξ	a	b	c	α	β	γ
	Deschiderile marginale			Deschiderile marginale		
0	0	0	0	**+0,4000**	**+0,4500**	−0,0500
0,1	+0,0350	+0,0400	−0,0050	+0,3000	+0,3560	−0,0563
0,2	+0,0600	+0,0700	−0,0100	+0,2000	+0,2752	−0,0752
0,3	+0,0750	+0,0900	−0,0150	+0,1000	+0,2665	−0,1065
0,4	**+0,0800**	**+0,1000**	−0,0200	0	+0,1496	−0,1496
0,5	+0,0750	+0,1000	−0,0250	−0,1000	+0,1042	−0,2042
0,6	+0,0600	+0,0900	−0,0300	−0,2000	+0,0694	−0,2694
0,7	+0,0350	+0,0700	−0,0350	−0,3000	+0,0443	−0,3443
0,8	0	+0,0402	−0,0402	−0,4000	+0,0280	−0,4280
0,85	−0,0213	+0,0277	−0,0490			
0,9	−0,0450	+0,0204	−0,0654	−0,5000	+0,0193	−0,5191
0,95	−0,0713	+0,0171	−0,0883			
1,0	**−0,1000**	+0,0167	**−0,1167**	**−0,6000**	+0,0167	**−0,6167**
	Deschiderea din mijloc			Deschiderea din mijloc		
0	**−0,1000**	+0,0167	**−0,1167**	**+0,5000**	**+0,5833**	−0,0833
0,05	−0,0763	+0,0141	−0,0903			
0,10	−0,0550	+0,0151	−0,0701	+0,4000	+0,4870	−0,0870
0,15	−0,0363	+0,0205	−0,0568			
0,20	−0,0200	+0,0300	−0,0500	+0,0300	+0,3991	−0,0991
0,3	+0,0050	+0,0550	−0,0500	+0,2000	+0,3210	−0,1210
0,4	+0,0200	+0,0700	−0,0500	+0,1000	+0,2537	−0,1537
0,5	**+0,0250**	**+0,0750**	−0,0500	+0	+0,1979	−0,1979
	gl^2	pl^2	pl^2	gl	pl	pl

$V_{A\,max} = 0{,}4\,gl + 0{,}45\,pl.$ $\qquad V_{B\,max} = 1{,}1\,gl + 1{,}2\,pl.$

Tabelul IV.31b (continuare)

3. Grinzi cu patru deschideri egale

Secțiunea la $\xi = \frac{x}{l}$	Momente încovoietoare			Forțe tăietoare		
	Influența lui *g*	Influența lui *p*		Influența lui *g*	Influența lui *p*	
	a	*b*	*c*	*α*	*β*	*γ*
	Deschiderile marginale			Deschiderile marginale		
0	0	0	0	**+0,3929**	**+0,4464**	−0,0535
0,1	+0,0343	+0,0396	−0,0054	+0,2929	+0,3528	−0,0599
0,2	+0,0586	+0,0693	−0,0107	+0,1929	+0,2715	−0,0788
0,3	+0,0729	+0,0889	−0,0161	+0,0929	+0,2029	−0,1101
0,4	**+0,0771**	**+0,0936**	−0,0214	−0,0071	+0,1461	−0,1533
0,5	+0,0714	+0,0982	−0,0268	−0,1071	+0,1007	−0,2079
0,6	+0,0557	+0,0879	−0,0321	−0,2071	+0,0660	−0,2731
0,7	+0,0300	+0,0675	−0,0375	−0,3071	+0,0410	−0,3481
0,8	−0,0057	+0,0374	−0,0431	−0,4071	+0,0247	−0,4319
0,85	−0,0273	+0,0248	−0,0522			
0,9	−0,0514	+0,0163	−0,0677	−0,5071	+0,0160	−0,5231
0,95	−0,0780	+0,0139	−0,0920			
1,0	**−0,1071**	+0,0134	**−0,1205**	**−0,6071**	+0,0134	**−0,6205**
	Deschiderile din mijloc			Deschiderile din mijloc		
0	**−0,1071**	+0,0134	**−0,1205**	**+0,5357**	**+0,6027**	−0,0670
0,05	−0,0816	+0,0116	−0,0932			
0,1	−0,0586	+0,0146	−0,0721	+0,4357	+0,5064	−0,0707
0,15	−0,0380	+0,0198	−0,0578			
0,2	−0,0200	+0,0300	−0,0500	+0,3357	+0,4187	−0,0830
0,3	+0,0086	+0,0568	−0,0482	+0,2357	+0,3410	−0,1153
0,4	+0,0271	+0,0736	−0,0464	+0,1357	+0,2742	−0,1385
0,5	**+0,0357**	**+0,0804**	−0,0446	+0,0357	+0,2190	−0,1833
0,6	+0,0343	+0,0772	−0,0429	−0,0643	+0,1755	−0,2398
0,7	+0,0229	+0,0639	−0,0411	−0,1643	+0,1435	−0,3078
0,8	+0,0014	+0,0417	−0,0403	−0,2643	+0,1222	−0,3865
0,85	−0,0130	+0,0345	−0,0475			
0,9	−0,0300	+0,0311	−0,0611	−0,3643	+0,1106	−0,4749
0,95	−0,0495	+0,0317	−0,0812			
1,0	**−0,0714**	+0,0357	**−0,1071**	**−0,4643**	+0,1071	**−0,5714**
	gl^2	pl^2	pl^2	gl	pl	pl

$V_{A\,max} = 0{,}3929\,gl + 0{,}4464\,pl$ $\qquad V_{B\,max} = 1{,}1428\,gl + 1{,}2232\,pl$

$V_{C\,max} = 0{,}9286\,gl + 1{,}1428\,pl$

4. Grinzi cu cinci deschideri egale

	Deschiderile marginale			Deschiderile marginale		
0	0	0	0	**+0,3947**	**+0,4474**	−0,0526
0,1	+0,0345	+0,0397	−0,0053	+0,2947	+0,3537	−0,0590
0,2	+0,0589	+0,0695	−0,0105	+0,1947	+0,2726	−0,0779
0,3	+0,0734	+0,0892	−0,0158	+0,0947	+0,2039	−0,1091
0,4	**+0,0779**	**+0,0989**	−0,0211	−0,0053	+0,1471	−0,1524
0,5	+0,0724	+0,0987	−0,0263	−0,1053	+0,1017	−0,2069
0,6	+0,0568	+0,0884	−0,0316	−0,2053	+0,0669	−0,2722
0,7	+0,0313	+0,0682	−0,0368	−0,3053	+0,0419	−0,3472
0,8	−0,0042	+0,0381	−0,0423	−0,4053	+0,0257	−0,4309
0,9	−0,0497	+0,0183	−0,0680	−0,5053	+0,0169	−0,5222
1,0	**−0,1053**	+0,0144	**−0,1196**	**−0,6053**	+0,0144	**−0,6196**

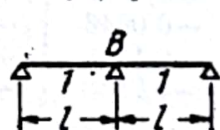
Tabelul IV.31b (continuare)

Secțiunea la $\xi = \frac{x}{l}$	Momente încovoietoare			Forțe tăietoare		
	Influența lui g	Influența lui p		Influența lui g	Influența lui p	
	a	b	c	α	β	γ
	Prima deschidere interioară			Prima deschidere interioară		
0	**−0,1053**	+0,0144	**−0,1196**	**+0,5263**	**+0,5981**	−0,0718
0,1	−0,0576	+0,0140	−0,0717	+0,4263	+0,5018	−0,0755
0,2	−0,0200	+0,0300	−0,0500	+0,3263	+0,4141	−0,0878
0,3	+0,0076	+0,0563	−0,0487	+0,2263	+0,3364	−0,1101
0,4	+0,0253	+0,0726	−0,0474	+0,1263	+0,2697	−0,1434
0,5	**+0,0329**	**+0,0789**	−0,0461	+0,0263	+0,2146	−0,1882
0,6	+0,0305	+0,0753	−0,0447	−0,0737	+0,1711	−0,2448
0,7	+0,0182	+0,0616	−0,0434	−0,1737	+0,1391	−0,3182
0,8	−0,0042	+0,0389	−0,0432	−0,2737	+0,1179	−0,3916
0,9	−0,0366	+0,0280	−0,0646	−0,3737	+0,1063	−0,4800
1,0	**−0,0789**	+0,0323	**−0,1112**	**−0,4737**	+0,1029	**−0,5766**
	Deschiderea din mijloc			Deschiderea din mijloc		
0	**−0,0789**	+0,0323	**−0,1112**	**+0,5000**	**+0,5909**	−0,0909
0,1	−0,0339	+0,0293	−0,0633	+0,4000	+0,4944	−0,0944
0,2	+0,0011	+0,0416	−0,0405	+0,3000	+0,4063	−0,1063
0,3	+0,0261	+0,0655	−0,0395	+0,2000	+0,3279	−0,1279
0,4	+0,0411	+0,0805	−0,0395	+0,1000	+0,2604	−0,1604
0,5	**+0,0461**	**+0,0855**	−0,0395	0	+0,2045	**−0,2045**
	gl^2	pl^2	pl^2	gl	pl	pl

$$V_{A\,max} = 0{,}3947\,gl + 0{,}4474\,pl \qquad V_{B\,max} = 1{,}1316\,gl + 1{,}2177\,pl$$

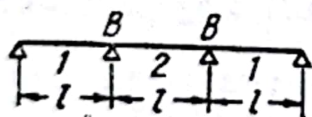
$$V_{C\,max} = 0{,}9737\,gl + 1{,}1675\,pl$$

5. **Momentele maxime în deschideri și pe reazeme pentru grinzi cu deschideri egale, produse de sarcinile g și p**



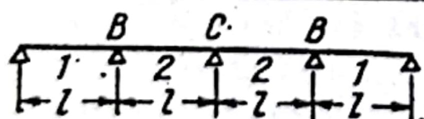
$$M_{1\,max} = \frac{gl^2}{14{,}3} + \frac{pl^2}{10{,}5}$$

$$M_{B\,max} = -\frac{(g+p)\,l^2}{8}$$



$$M_{1\,max} = \frac{gl^2}{12{,}5} + \frac{pl^2}{10{,}0}; \quad M_{2\,max} = \frac{gl^2}{40{,}0} + \frac{pl^2}{13{,}3}$$

$$M_{B\,min} = -\frac{gl^2}{10{,}0} - \frac{pl^2}{8{,}6}$$

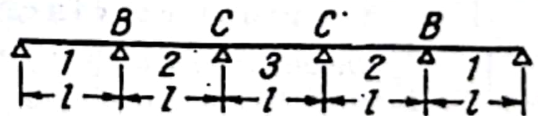


$$M_{1\,max} = \frac{gl^2}{12{,}9} + \frac{pl^2}{10{,}2}$$

$$M_{2\,max} = \frac{gl^2}{28{,}0} + \frac{pl^2}{12{,}4}$$

$$M_{B\,min} = -\frac{gl^2}{9{,}3} - \frac{pl^2}{8{,}3}$$

$$M_{C\,min} = -\frac{gl^2}{14{,}0} - \frac{pl^2}{9{,}3}$$



$$M_{1\,max} = \frac{gl^2}{12{,}8} + \frac{pl^2}{10{,}1}; \quad M_{2\,max} = \frac{gl^2}{30{,}4} + \frac{pl^2}{12{,}7}$$

$$M_{3\,max} = \frac{gl^2}{21{,}6} + \frac{pl^2}{11{,}7}$$

$$M_{B\,min} = -\frac{gl^2}{9{,}5} - \frac{pl^2}{8{,}4}$$

$$M_{C\,min} = -\frac{gl^2}{12{,}7} - \frac{pl^2}{8{,}9}$$

Calculul grinzilor continue pe reazeme elastice se face pornind de la ecuaţia celor trei momente pentru grinzi continue, încărcate cu sarcini şi cedări ale reazemelor. Ecuaţia de continuitate pentru reazemul i este

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + m_i^{st}\lambda_i + m_i^{dr}\lambda_{i+1} - 6EI_0 \Sigma \bar{r}_i y_i = 0 \qquad \text{(IV.253)}$$

unde r_i sînt reacţiunile pe sistemul de bază produse de necunoscuta $M_i = 1$ (fig. IV.128, *a*), iar y_i sînt deplasările reale ale reazemelor.

Pentru reazemele $i-1$, i, $i+1$, reacţiunile vor fi (fig. IV. 128, *b*)

$$V_{i-1} = V_{i-1}^0 + \frac{M_{i-2} - M_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}$$

$$V_i = V_i^0 + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \qquad \text{(IV.254)}$$

$$V_{i+1} = V_{i+1}^0 + \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{M_{i+2} - M_{i+1}}{l_{i+2}};$$

unde V^0 sînt reacţiuni produse de încărcarea cu sarcini pe sistemul de bază.

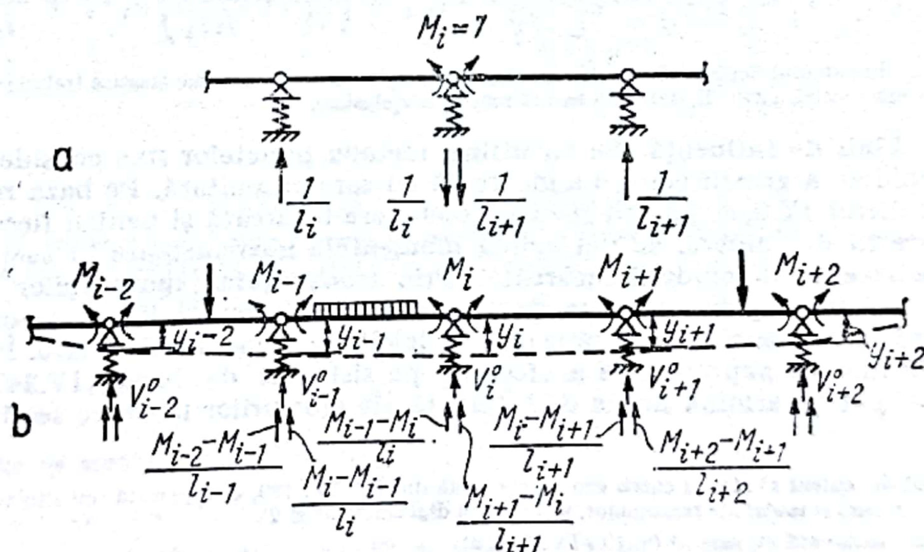


Fig. IV.128

Deplasările reazemelor fiind proporţionale cu reacţiunile se obţine:

$$y_{i-1} = \beta_{i-1} V_{i-1}; \quad y_i = \beta_i V_i; \quad y_{i+1} = V_{i+1}\beta_{i+1}. \qquad \text{(IV.255)}$$

Dezvoltînd expresia $\sum r_i y_i$, se obţine o ecuaţie cu cinci termeni denumită *ecuaţia celor cinci momente*

$$\delta_{i,i-2} M_{i-2} + \delta_{i,i-1} M_{i-1} + \delta_{i,i} M_i + \delta_{i,i+1} M_{i+1} + \delta_{i,i+2} M_{i+2} + \Delta_{ip} = 0 \qquad \text{(IV.256)}$$

unde s-a notat:

$$\delta_{i,i-2} = 6\,EI_0 \frac{\beta_{i-1}}{l_i l_{i-1}}$$

$$\delta_{i,i-1} = \lambda_i - 6\,EI_0\left[\frac{\beta_{i-1}}{l_i}\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) + \frac{\beta_i}{l_i}\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\right]$$

$$\delta_{i,i} = 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) + 6E\,I_0\left[\frac{\beta_{i-1}}{l_i^2} + \beta_i\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{\beta_{i+1}}{l_{i+1}^2}\right]$$

$$\delta_{i,i+1} = \lambda_{i+1} - 6EI_0\left[\frac{\beta_i}{l_{i+1}}\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) + \frac{\beta_{i+1}}{l_{i+1}}\left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right)\right] \quad \text{(IV. 257)}$$

$$\delta_{i,i+2} = 6EI_0 \frac{\beta_{i+1}}{l_{i+1}\, l_{i+2}}$$

$$\Delta_{ip} = (m_i^{st}\lambda_i + m_i^{dr}\lambda_{i+1}) + 6EI_0\left[\frac{\beta_{i-1}}{l_i} V_{i-1}^0 - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\beta_i V_i^0 + \frac{\beta_{i+1}}{l_{i+1}} V_{i+1}^0\right].$$

Observație. În calculul deplasărilor secțiunilor unei grinzi continue pe reazeme elastice trebuie să se țină seama și de deplasarea cinematică a grinzii, datorată tasării reazemelor elastice.

5.1.4.5. **Linii de influență.** Se va utiliza metoda punctelor fixe considerînd pe rînd fiecare deschidere a grinzii continue încărcată cu sarcina unitară. Pe baza relațiilor prezentate în tabelul IV.3, a, pentru fiecare deschidere încărcată și pentru fiecare poziție a forței unitare în deschidere, se determină momentele încovoietoare în secțiunile de pe reazemele adiacente deschiderii încărcate. Prin transmiterea momentelor la marginea deschiderii încărcate, prin punctele fixe spre stînga și spre dreapta, se obțin valorile momentelor încovoietoare în secțiunile de pe celelalte reazeme intermediare. În continuare, pe baza relațiilor de suprapunere a efectelor pe sistemul de bază (IV.247), (IV.248), (IV.249), se pot determina liniile de influență ale eforturilor în orice secțiune a grinzii continue.

Exemplul de calcul IV.14. Pentru grinda continuă din fig. IV. 129, *a*, încărcată cu sitemul de sarcini din figură, cu temperatură și tasări ale reazemelor, se trasează digramele M și T.

1) Efectul încărcării cu sarcini (v. fig. IV. 129, *a*)

— Deschideri rectificate

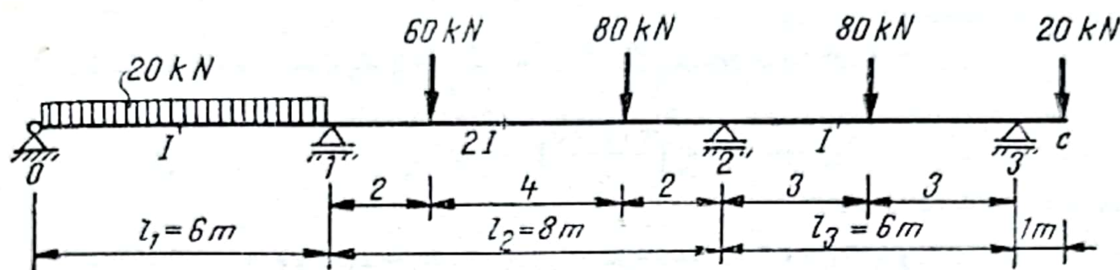
$$\lambda_1 = 6\text{m};\ \lambda_2 = 4\text{ m};\ \lambda_3 = 6\text{ m}.$$

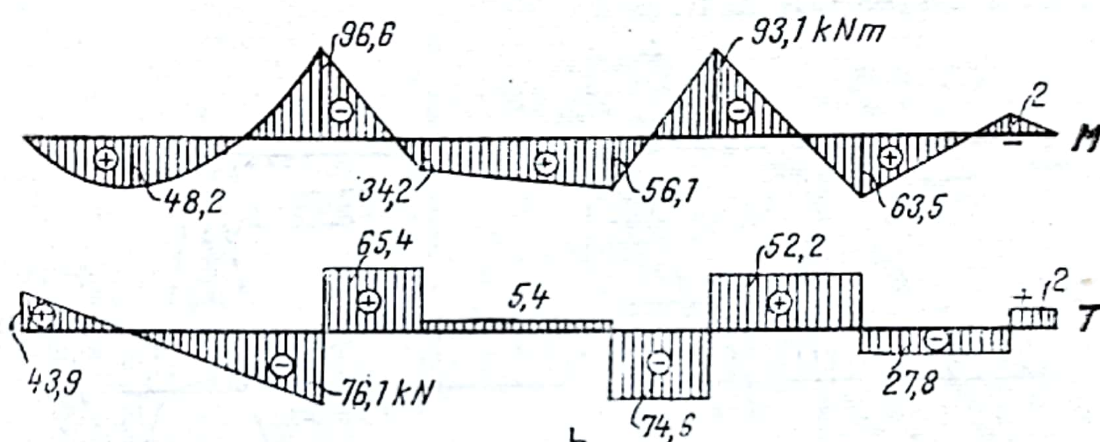
— Factori de încărcare

$$m_0^{dr} = m_1^{st} = 0{,}25 \cdot 20 \cdot 6^2 = 180;\quad m^{dr} = m_3^{st} = 0{,}375 \cdot 80 \cdot 6 = 180$$

$$m_1^{dr} = 0{,}3281 \cdot 60 \cdot 8 + 0{,}2344 \cdot 80 \cdot 8 = 307{,}8$$

$$m_2^{st} = 0{,}2344 \cdot 60 \cdot 8 + 0{,}3281 \cdot 80 \cdot 8 = 322{,}5.$$





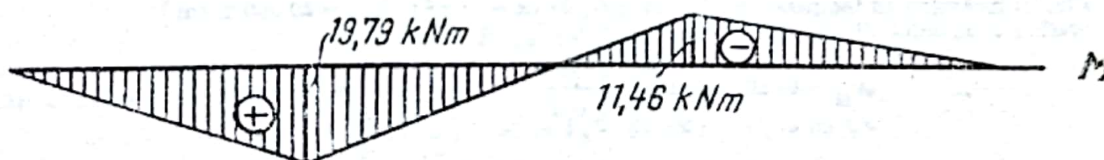


Fig. IV.129

Sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} 2(6+4)M_1 + 4M_2 + (6\cdot 180 + 4\cdot 307{,}3) = 0 \\ 4\,M_1 + 2(4+6)M_2 + 6\,(-20) + (4\cdot 322{,}5 + 6\cdot 180) = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 20\,M_1 + 4\,M_2 + 2\,307 = 0 \\ 4\,M_1 + 20\,M_2 + 2\,250 = 0. \end{cases}$$

Rezolvind sistemul ecuațiilor de condiție se obțin valorile momentelor încovoietoare în secțiunile de pe reazemele intermediare

$$M_1 = -96{,}6\ \text{kNm}; \qquad M_2 = -93{,}1\ \text{kNm}.$$

Diagramele de eforturi M și T sînt prezentate în fig. IV. 129, *b*.

2) Efectul încărcării cu tasare a reazemului *1*; $v_1 = 1$ cm ($EI_0 = 20\,000$ kNm²)

Expresiile termenilor liberi sînt

$$\Delta_{1r} = 6\cdot 20\,000\left(\frac{0-0{,}01}{6}+\frac{0-0{,}01}{8}\right) = -350$$

$$\Delta_{2r} = 6\cdot 20\,000\left(\frac{0{,}01-0}{8}\right) = 150.$$

Sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} 20M_1 + 4\,M_2 - 350 = 0 \\ 4\,M_1 + 20M_2 + 150 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} M_1 &= 19{,}79 \text{ kNm} \\ M_2 &= 11{,}46 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Diagrama M este prezentată în fig. IV. 129, *c*.

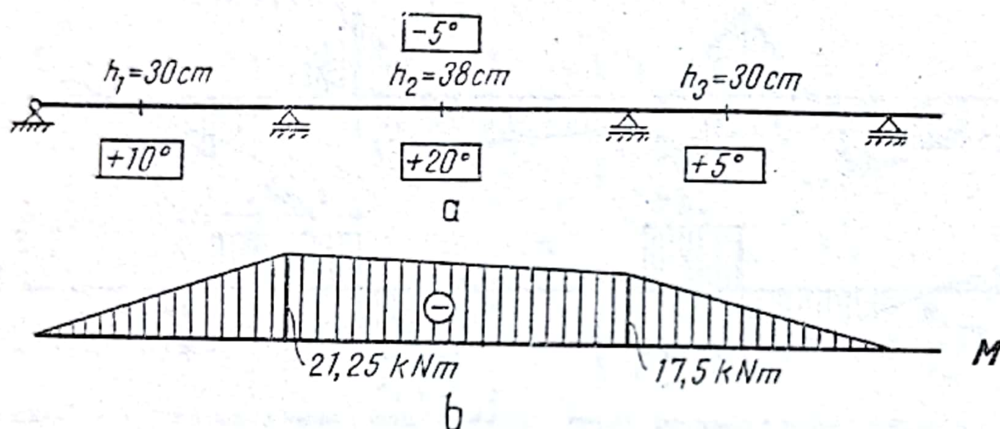


Fig. IV.130

3) Efectul încărcării cu temperatură (fig. IV.130, *a*) ($\alpha = 10^{-5}$; $EI_0 = 20\,000$ kNm²)
Expresiile termenilor liberi sînt

$$\Delta_{1t} = 3\cdot 20\,000\cdot 10^{-5}\left(\frac{15}{0{,}3}\cdot 6+\frac{25}{0{,}38}\cdot 8\right) = 495{,}0$$

$$\Delta_{2t} = 3\cdot 20\,000\cdot 10^{-5}\left(\frac{25}{0{,}38}\cdot 8+\frac{10}{0{,}3}\cdot 6\right) = 435{,}0.$$

Sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{cases} 20M_1 + 4\,M_2 + 495{,}0 = 0 \\ 4\,M_1 + 20M_2 + 435{,}0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} M_1 &= -21{,}25 \text{ kNm} \\ M_2 &= -17{,}5 \text{ kNm.} \end{aligned}$$

Diagrama M este prezentată în fig. IV. 130, *b*.

Exemplul de calcul IV.15. Se trasează diagramele M și T pentru grinda continuă rezemată pendular pe trei grinzi transversale (fig. IV.131)

1) Caracteristici elastice ale grinzilor:
 – grinda continuă: un profil I_{30}; $EI_0 = 20\,580$ kNm²;
 – grinda transversală: un profil I_{20}; $EI_1 = 4\,494$ kNm².

2) Deschideri rectificate

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 4{,}8 \text{ m}; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 6 \text{ m}.$$

3) Caracteristici elastice ale reazemelor (săgeata grinzilor transversale sub sarcina unitară)

$$\beta_0 = \beta_4 = 0$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1\cdot l^3}{48EI_1} = \frac{1\cdot 4^3}{48\cdot 4\,494} = 0{,}000297 \text{ m/kN}.$$

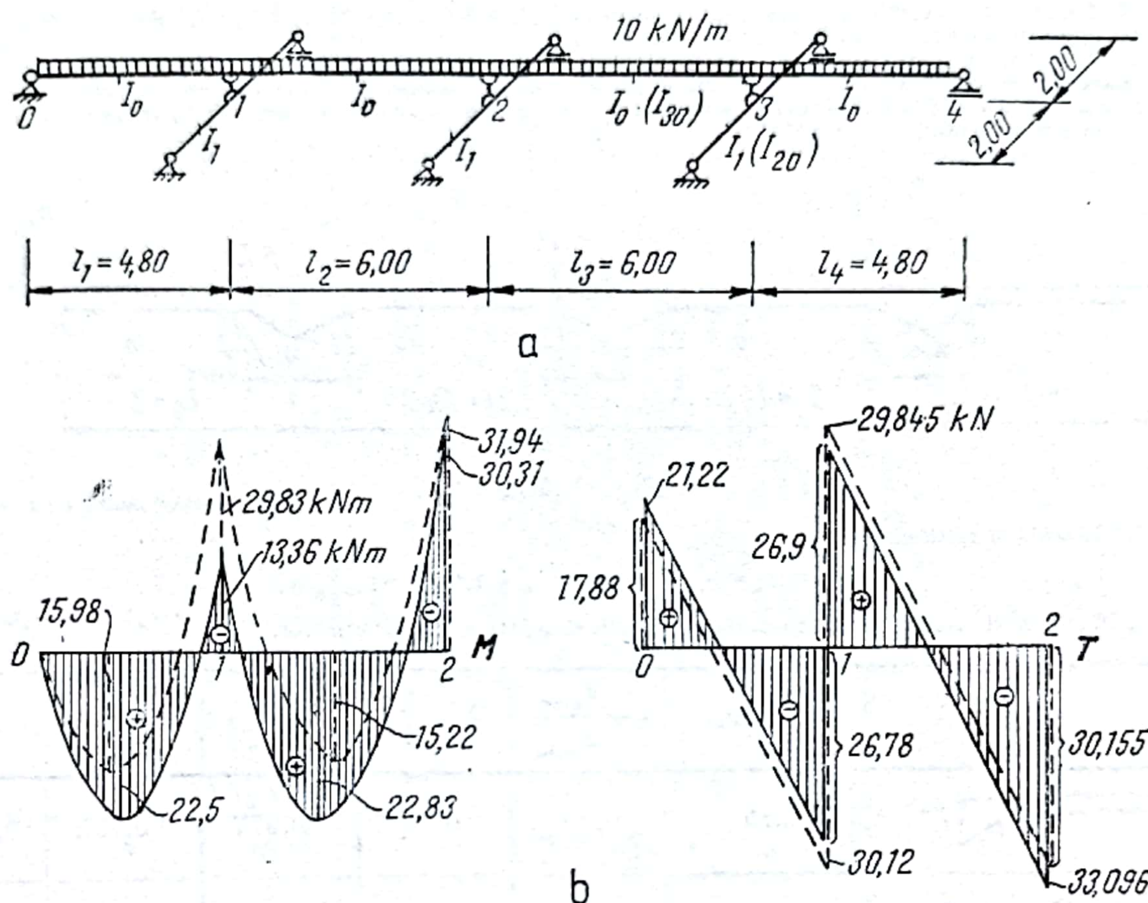


Fig. IV.131

4) Reacţiuni pe sistemul de bază

$$V_0 = V_4 = 24\ \text{kN}; \quad V_1 = V_3 = 54\ \text{kN}; \quad V_2 = 60\ \text{kN}.$$

5) Factori de încărcare pentru fiecare deschidere încărcată

$$m_0^{dr} = m_1^{st} = m_3^{dr} = m_4^{st} = \frac{10 \cdot 4{,}8^2}{4} = 57{,}6$$

$$m_1^{dr} = m_2^{st} = m_2^{dr} = m_3^{st} = \frac{10 \cdot 6^2}{4} = 90{,}0.$$

6) Sistemul ecuaţiilor de condiţie. Pe baza relaţiilor (IV. 257) rezultă

$$\begin{cases} 27{,}776\ M_1 + 1{,}67\ M_2 + 1{,}0187\ M_3 + 440{,}58 = 0 \\ 1{,}67\ M_1 + 30{,}112\ M_2 + 1{,}67\ M_3 + 1\,006{,}65 = 0 \\ 1{,}0187\ M_1 + 1{,}67\ M_2 + 27{,}776\ M_3 + 440{,}58 = 0. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obţin valorile momentelor încovoietoare în secţiunile de pe reazeme. Pentru comparaţie în paranteză s-au trecut valorile momentelor încovoietoare în aceleaşi secţiuni calculate în ipoteza rezemării fără tasări a grinzii continue.

$$M_1 = -13{,}36\ \text{kNm}\ (-29{,}38)$$
$$M_2 = -31{,}94\ \text{kNm}\ (-30{,}31)$$
$$M_3 = -13{,}36\ \text{kNm}\ (-29{,}38)$$

În fig. IV. 131, *b* sînt prezentate comparativ cu linie plină diagramele M şi T determinate în ipoteza rezemării elastice a grinzii continue şi cu linie punctată, diagramele M şi T determinate în ipoteza rezemării fără tasări a grinzii.

Exemplul de calcul IV.16. Se calculează ordonatele liniilor de influenţă ale momentelor pe reazemele intermediare, ale eforturilor M şi T în secţiunea $x = 0,5\ l_2$ din deschiderea a doua şi a reacţiunii în reazemul *1*, pentru grinda continuă prezentată în fig. IV.132.

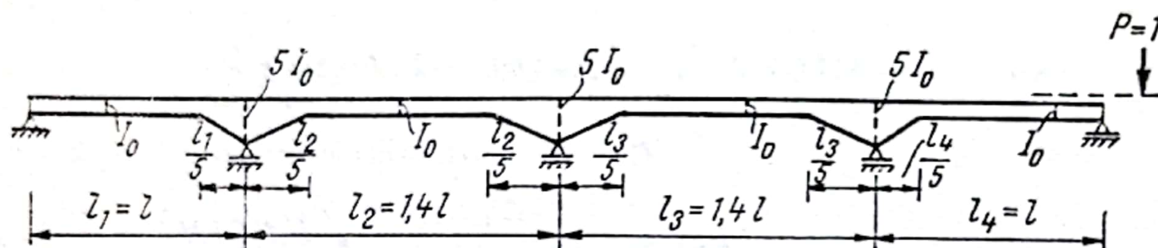


Fig IV.132

1) Deschideri rectificate

$$\lambda_1 = \lambda_4 = l; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1,4\ l.$$

2) Coeficienţii de corecţie pentru secţiuni variabile sînt daţi în tabelul următor.

Bara	Felul vutei	$n = \frac{I_{min}}{I_{max}}$	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	c'	c''	c
0 — 1	Liniară	0,20	0,20	0,977	0,725	0,956
1 — 2	Liniară	0,20	0,20	0,722	0,722	0,911
2 — 3	Liniară	0,20	0,20	0,722	0,722	0,911
3 — 4	Liniară	0,20	0,20	0,725	0,977	0,956

3) Rapoarte de punct fix

$$k_1^s = \infty$$

$$k_2^s = 2\,\frac{0,722}{0,911} + \frac{l}{1,4\,l}\left(\frac{0,725}{0,911} - 0\right) = 2,72$$

$$k_3^s = 2\,\frac{0,722}{0,911} + \frac{1,4\,l}{1,4\,l}\left(2\,\frac{0,722}{0,911} - \frac{0,911}{0,911}\cdot\frac{1}{2,72}\right) = 2,80$$

$$k_4^s = 2\,\frac{0,725}{0,956} + \frac{1,4\,l}{l}\left(2\,\frac{0,722}{0,956} - \frac{0,911}{0,956}\cdot\frac{1}{2,80}\right) = 3,15$$

$$k_4^d = \infty\ ; \quad k_3^d = 2,72; \quad k_2^d = 2,80; \quad k_1^d = 3,15.$$

4) Momente încovoietoare în secțiunile de pe reazeme

a) $P = 1$ pe deschiderea *0 – 1*

$$M_0 = 0;\ M_1 = -\frac{1}{c_1}\,\frac{k_1^s s_1'' m_1^{st} - s_1' m_1^{dr}}{k_1^s k_1^d - 1} = -\frac{1}{c_1}\,\frac{s_1'' m_1^{st} - \dfrac{s_1' m_1^{dr}}{k_1^s}}{k_1^d - \dfrac{1}{k_1^s}} =$$

$$= -\frac{l_1}{c_1 k_1^d}\cdot\alpha_1 = -Q_1\alpha_1$$

unde $s_1'' m_1'^{t} = \alpha_1 l_1$ (tabelul IV. 20)

$$M_2 = -\frac{M_1}{k_2^d};\quad M_3 = -\frac{M_2}{k_3^d};\quad M_4 = 0.$$

b) $P = 1$ pe deschiderea *1 – 2*

$$M_0 = 0;\ M_1 = -\frac{1}{c_2}\,\frac{k_1^d s_2' m_1^{dr} - s_2'' m_2^{st}}{k_2^s k_2^d - 1} = -\frac{1}{c_2}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2\dfrac{1}{k_2^d}}{k_2^s - \dfrac{1}{k_2^d}}\,l_2 = -\left(\alpha_1 - \alpha_2\frac{1}{k_2^d}\right)Q_2$$

$$M_2 = -\frac{1}{c_2}\,\frac{k_2^s s_2'' m_2^{st} - s_2' m_1^{dr}}{k_2^s k_2^d - 1} = -\frac{1}{c_2}\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1\dfrac{1}{k_2^s}}{k_2^d - \dfrac{1}{k_2^s}}\,l_2 = -\left(\alpha_2 - \alpha_1\frac{1}{k_2^s}\right)Q_3$$

unde $s_2' m_1^{dr} = \alpha_1 l_2$ și $s_2'' m_2^{st} = \alpha_2 l_2$ (tabelul IV.21)

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3^d};\quad M_4 = 0.$$

c) $P = 1$ pe deschiderea *2 – 3*. Procedînd analog ca la deschiderea *1 – 2*, pe baza simetriei se obține

$$M_0 = 0;\quad M_1 = -\frac{M_2}{k_1^s};\quad M_2 = -\left(\alpha_1 - \alpha_1\frac{1}{k_2^d}\right)Q_3$$

$$M_3 = -\left(\alpha_2 - \alpha_1\frac{1}{k_3^s}\right)Q_2;\quad M_4 = 0.$$

d) $P = 1$ pe deschiderea *3 – 4*. Procedînd analog ca la deschiderea *0 – 1*, se obține

$$M_0 = 0;\quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2^s};\quad M_2 = -\frac{M_3}{k_3^s};\quad M_3 = -Q_1\alpha_1;\quad M_4 = 0.$$

5) Calculul ordonatelor liniilor de influență ale momentelor încovoietoare în secțiunile de pe reazemele intermediare este prezentat în tabelul următor.

Deschi-derea	Secţi-unea	$\frac{a}{l}$	α_1	α_1	α_2	$\frac{\alpha_1}{k_i^s}$	$\frac{\alpha_2}{k_i^d}$	$\alpha_1-\frac{\alpha_2}{k_i^d}$	$\alpha_2-\frac{\alpha_1}{k_i^s}$	M_1 (xl)	M_2 (xl)	M_3 (xl)
	0,0	1,0	0	—	—	—	—	—	—	0	0	0
	0,2	0,8	0,183	—	—	—	—	—	—	−0,0607	0,0217	−0,008
	0,4	0,6	0,318	—	—	—	—	—	—	−0,1055	0,0377	−0,0139
0—1	0,5	0,5	0,353	—	—	—	—	—	—	−0,117	0,0417	−0,0153
	0,6	0,4	0,358	—	—	—	—	—	—	−0,119	0,0425	−0,0156
	0,8	0,2	0,253	—	—	—	—	—	—	−0,084	0,030	−0,011
	1,0	0	0	—	—	—	—	—	—	0	0	0
	1,2	0,2	—	0,251	0,179	0,0923	0,0639	0,1871	0,0867	−0,122	−0,055	0,020
	1,4	0,4	—	0,355	0,315	0,130	0,1120	0,2430	0,1850	−0,158	−0,1169	0,043
1—2	*1,5*	0,5	—	0,350	0,350	0,1286	0,1250	0,2250	0,2214	−0,1467	−0,139	0,049
	1,6	0,6	—	0,315	0,355	0,1158	0,1286	0,1882	0,2392	−0,1227	−0,151	0,055
	1,8	0,8	—	0,179	0,251	0,0658	0,0896	0,0894	0,1852	−0,058	−0,117	0,043
	2,0	1,0	—	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2,2	0,2	—	0,251	0,179	0,0896	0,0658	0,1852	0,0894	0,043	−0,117	−0,058
	2,4	0,4	—	0,355	0,315	0,1268	0,1158	0,2392	0,1882	0,055	−0,151	−0,1227
2—3	*2,5*	0,5	—	0,350	0,350	0,1250	0,1286	0,2214	0,2250	0,049	−0,139	−0,1467
	2,6	0,6	—	0,315	0,355	0,1120	0,130	0,1850	0,2430	0,043	−0,1169	−0,158
	2,8	0,8	—	0,179	0,251	0,0639	0,0923	0,0867	0,1871	0,020	−0,055	−0,122
	3,0	1,0	—	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3,2	0,2	0,253	—	—	—	—	—	—	−0,011	0,030	−0,084
	3,4	0,4	0,358	—	—	—	—	—	—	−0,0156	0,0425	−0,119
3—4	*3,5*	0,5	0,353	—	—	—	—	—	—	−0,0153	0,0417	−0,117
	3,6	0,6	0,318	—	—	—	—	—	—	−0,0139	0,0377	−0,1055
	3,8	0,8	0,183	—		—	—	—	—	−0,008	0,0217	−0,0607
	4,0	1,0	0	—	—	—	—	—	—	0	0	0

6) Calculul ordonatelor liniilor de influență ale eforturilor M și T în secțiunea 1, 5, și a reacțiunii în reazemul 1 este prezentat în tabelul următor:

Secțiunea	$M_{1,5} = M^0_{1.5} + 0{,}5\,M_1 + 0{,}5\,M_2$				$T_{1,5} = T^0_{1.5} + \frac{M_2 - M_1}{l_2}$			$V_1 = V^0_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_1}{l_1}$		
	$M^0_{1.5}$ (xl)	$0{,}5\,M_1$ (xl)	$0{,}5\,M_2$ (xl^2)	$M_{1,5}$ (xl)	$T^0_{1.5}$	$\frac{M_2 - M_1}{l_2}$	$T_{1,5}$	V^0_1	$-\frac{M_1}{l_1}$	V_1
0,0	—	0	0	0	—	0	0	0	0	0
0,2	—	−0,03035	0,01085	−0,0195	—	0,0588	0,0588	0,2	0,0607	0,3195
0,4	—	−0,05275	0,01885	−0,0339	—	0,1023	0,1023	0,4	0,1055	0,6078
0,5	—	−0,0585	0,02185	−0,03665	—	0,1133	0,1133	0,5	0,117	0,7303
0,6	—	−0,0595	0,02125	−0,03825	—	0,1153	0,1153	0,6	0,119	0,8343
0,8	—	−0,042	0,015	−0,027	—	0,0814	0,0814	0,8	0,084	0,9654
1,0	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0	1,00
1,2	0,14	−0,061	−0,0275	0,0515	−0,2	0,0487	−0,1522	0,8	0,122	0,9698
1,4	0,28	−0,079	−0,0585	0,1425	−0,4	0,0293	−0,3707	0,6	0,158	0,7873
1,5	0,35	−0,0733	−0,0645	0,2122	−0,5 0,5	0,0055	−0,4945 0,5055	0,5	0,1467	0,6522
1,6	0,28	−0,0613	−0,0755	0,1432	0,4	−0,0209	0,3791	0,4	0,1227	0,5018
1,8	0,14	−0,029	−0,0585	0,0525	0,2	−0,0421	0,1579	0,2	0,058	0,2159
2,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,2	—	0,0215	−0,0585	−0,037	—	−0,1142	−0,1142	—	−0,043	−0,1572
2,4	—	0,0275	−0,0755	−0,048	—	−0,1471	−0,1471	—	−0,055	−0,2021
2,5	—	0,0245	−0,0645	−0,04	—	−0,1342	−0,1342	—	−0,049	−0,1832
2,6	—	0,0215	−0,0585	−0,037	—	−0,1142	−0,1142	—	−0,043	−0,1572
2,8	—	0,010	−0,0275	−0,0175	—	−0,0535	−0,0535	—	−0,020	−0,0735
3,0	—	0	0	0	0	0	0	—	0	0
3,2	—	−0,0055	0,015	0,0095	—	0,0292	0,0292	—	0,011	0,0402
3,4	—	−0,0078	0,02125	0,01345	—	0,0415	0,0415	—	0,0156	0,0571
3,5	—	−0,00765	0,02185	0,0142	—	0,0407	0,0407	—	0,0153	0,0560
3,6	—	−0,00695	0,01885	0,0119	—	0,0368	0,0368	—	0,0139	0,0407
3,8	—	−0,004	0,01085	0,00685	—	0,0212	0,0212	—	0,008	0,0292
4,0	—	0	0	0	—	0	0	—	0	0

Pe baza rezultatelor din tabelele anterioare, în fig. IV. 133 se prezintă aspectul grafic al liniilor de influență calculate.

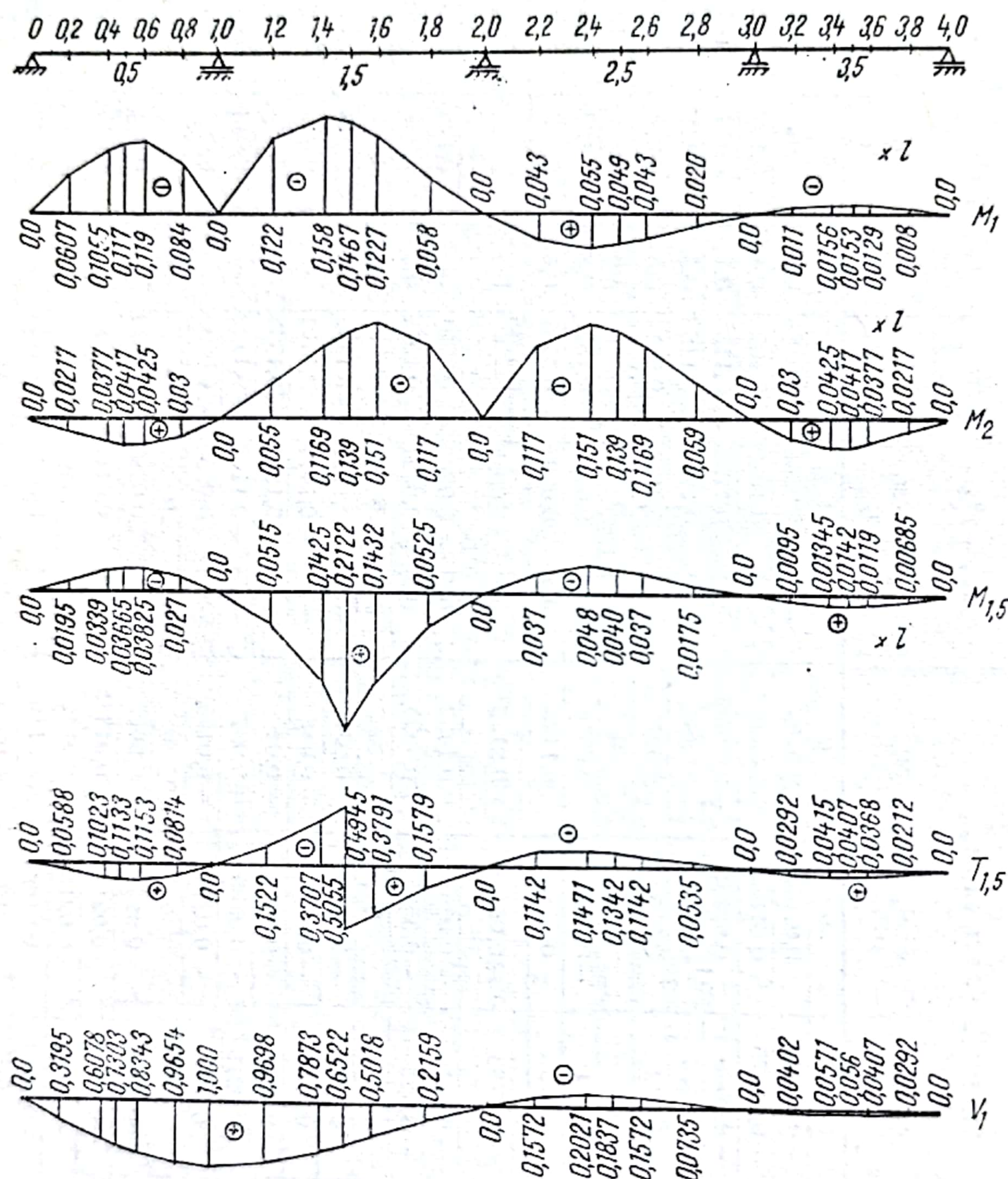


Fig. IV.133

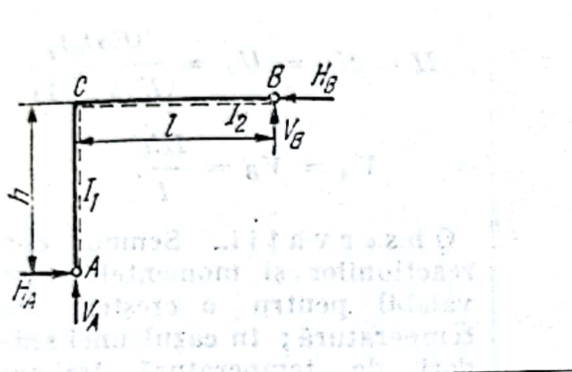
5.2. Cadre static nedeterminate

5.2.1. Cadre simple întîlnite curent în construcții. În tabelul IV. 32 sînt date formule gata calculate pentru calculul cîtorva cadre simple curente, mai des întîlnite în practica inginerească. Pentru fiecare tip de cadru, în tabel sînt dați coeficienții ce

Tabelul IV.32

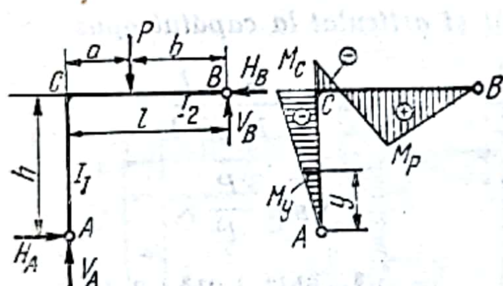
Formule pentru calculul cadrelor întîlnite curent în construcții

1. *Cadru dublu articulat cu două bare*



$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$$

1.a



$$V_A = \frac{Pb}{l} + \frac{Hh}{l}; \quad V_B = \frac{Pa}{l} - \frac{Hh}{l}$$

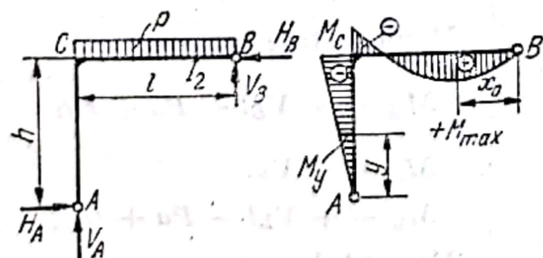
$$H = H_A = H_B = \frac{Pab(l + b)}{2hl^2(k + 1)}$$

$$M_y = - Hy; \quad M_C = - Hh.$$

Momentul pozitiv maxim în bară în dreptul sarcinii P:

$$M_P = \frac{Pab}{2l^3} \cdot \frac{2kl^2 + 3al - a^2}{k + 1}.$$

1.b



$$V_A = \frac{pl}{8} \cdot \frac{4k + 5}{k + 1}; \quad V_B = \frac{pl}{8} \cdot \frac{4k + 3}{k + 1}$$

$$H = H_A = H_B = \frac{pl^2}{8h(k + 1)}$$

$$M_y = - Hy; \quad M_C = -Hh = - \frac{pl^2}{8(k + 1)}$$

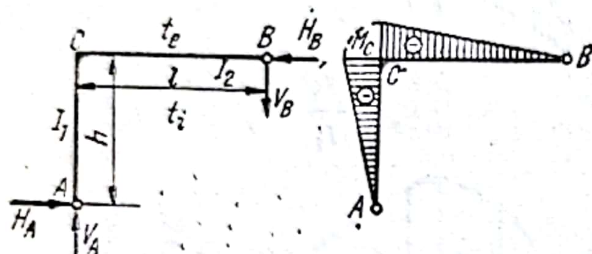
Momentul pozitiv maxim în bara orizontală:

pentru $x_0 = \frac{l}{8} \cdot \frac{4k + 3}{k + 1}$ (x_0 măsurat de la B):

$$M_{max} = + \frac{pl^2}{128} \left(\frac{4k + 3}{k + 1} \right)^2,$$

Tabelul IV.32 (continuare)

1.c



Influenţa unei variaţii de temperatură uniformă t_0

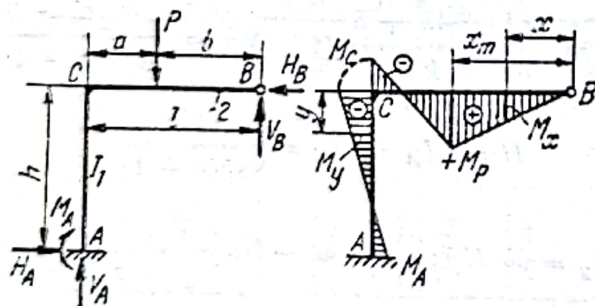
$$H = H_A = H_B = \frac{3E\alpha t_0 I_2}{h^2(k+1)}$$

$$V_A = V_B = \frac{Hh}{l}.$$

O b s e r v a ţ i i. Semnul dat reacţiunilor şi momentelor este valabil pentru o creştere de temperatură; în cazul unei scăderi de temperatură, trebuie luate toate momentele şi reacţiunile cu semnul schimbat.

2. *Cadru format din două bare, încastrat la un capăt şi articulat la capătul opus*

2.a



$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$V_B = \frac{P}{l^3} \times$$

$$\times \frac{4l^3 - 6bl^2 + 2b^3 + 3al^2k}{3k+4}$$

$$V_A = P - V_B; \quad H_A = H_B =$$

$$= \left[P\frac{a}{h} - V_B\frac{l}{h} \right] \frac{3}{2}$$

$$M_C = + V_B l - Pa$$

Momentul de încastrare:

$$M_A = + V_B l - Pa + Hh$$

$$M_x = + V_B x.$$

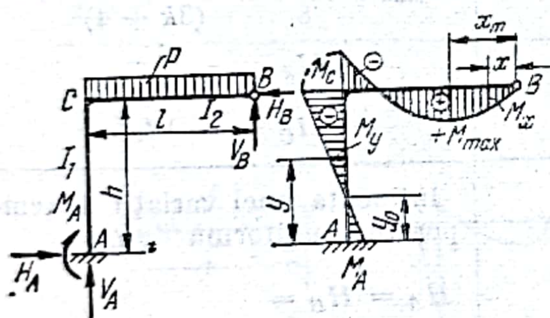
$$M_y = + V_B l - Pa + Hy.$$

Momentul pozitiv maxim al barei orizontale în dreptul sarcinii P:

$$M_p = + V_B b.$$

Tabelul IV.32 (continuare)

2.b



$$V_A = pl - V_B = \frac{pl}{2} \cdot \frac{3k+5}{3k+4}$$

$$V_B = \frac{3pl}{2} \cdot \frac{k+1}{3k+4} \cdot$$

$$H_A = H_B = \frac{3pl^2}{4h} \cdot \frac{1}{3k+4}$$

$$M_x = V_B x - \frac{px^2}{2}$$

$$M_C = + V_B l - \frac{pl^2}{2} \cdot$$

Momentul pozitiv maxim în bara orizontală pentru :

$$x_m = \frac{3}{2} l \cdot \frac{k+1}{3k+4} ;$$

$$M_{max} = \frac{p}{2} x_m^2 ;$$

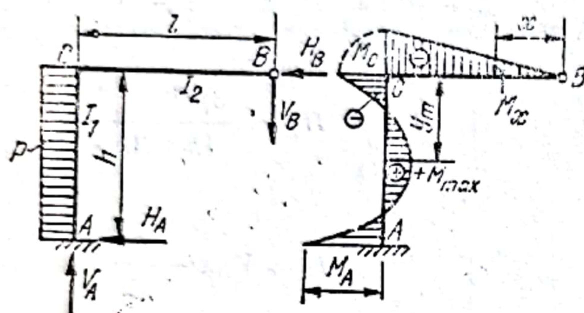
$$M_y = - Hy + M_A$$

$$M_A = + V_B l - \frac{pl^2}{2} +$$

$$+ Hh = M_C + Hh.$$

Tabelul IV.32 (continuare)

2.c



$$V_A = V_B = \frac{ph^2k}{4l(3k+4)}$$

$$H_A = \frac{ph}{2} \cdot \frac{3k+5}{3k+4}$$

$$H_B = \frac{3ph}{2} \cdot \frac{k+1}{3k+4}$$

$$M_A = -\frac{ph^2}{4} \cdot \frac{k+2}{3k+4} .$$

Moment pozitiv maxim în bara verticală pentru:

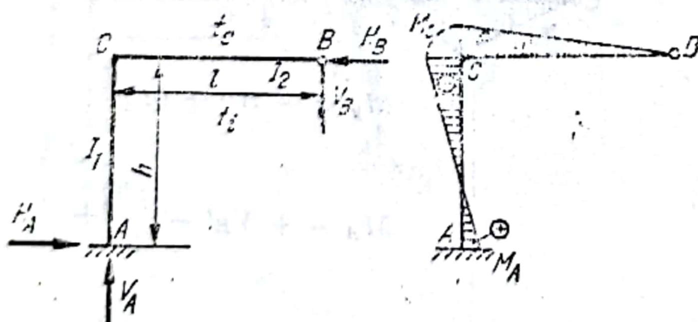
$$y_m = \frac{3h}{2} \cdot \frac{k+1}{3k+4}$$

$$M_{max} = \frac{ph^2}{8} \cdot \frac{3k^2+10k+9}{(3k+4)^2}$$

$$M_x = -Vx$$

$$M_C = -Vl.$$

2.d



Influenţa unei variaţii de temperatură uniformă de t_0 grade:

$$H_A = H_B =$$

$$= \frac{6E\alpha t_0 I_1[2l^2(3k+1)+3h^2k]}{h^3l(3k+4)}$$

$$V_A = V_B =$$

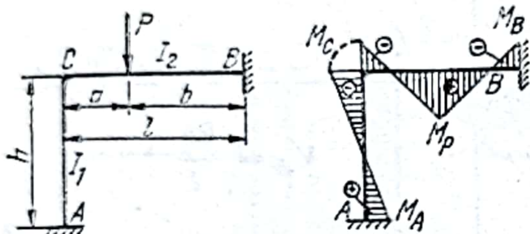
$$= \frac{6E\alpha t_0 I_1 k(2h^2+3l^2)}{h^2l^2(3k+4)} .$$

O b s e r v a ţ i i. Semnul dat reacţiunilor şi momentelor este valabil pentru o creştere de temperatură; în cazul unei scăderi de temperatură, toate momentele şi reacţiunile au semnul contrar.

Tabelul IV.32 (continuare)

3. *Cadru format din două bare, încastrat la ambele capete*

3.a



Se notează: $\beta = \frac{b}{l}$;

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$$

$$N = k + 1$$

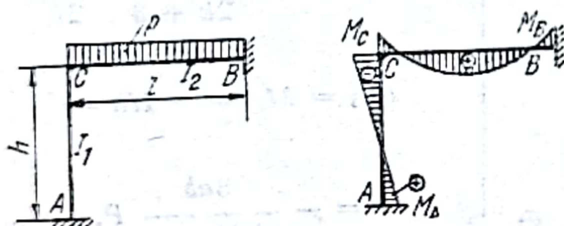
$$M_C = -\frac{Pab}{l} \cdot \frac{\beta}{N}.$$

$$M_A = \frac{-M_C}{2}$$

$$M_B = -\frac{Pab}{l} \cdot \frac{(2-\beta)k + 2(1-\beta)}{2N}$$

$$M_P = \frac{Pab}{l} + \beta M_C + (1-\beta) M_B$$

3.b



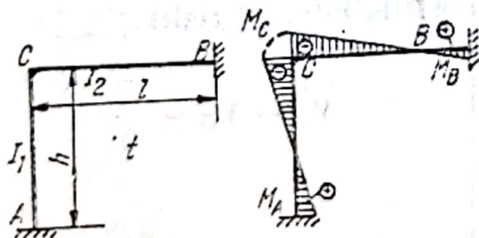
$$M_B = -\frac{pl^2(3k+2)}{24N}.$$

$$M_C = -\frac{pl^2}{12N}.$$

$$M_A = -\frac{M_C}{2}.$$

$$H = \frac{3M_A}{h}$$

3.c



Influența unei variații de temperatură:

$$T = \frac{3EJ_2\alpha t}{lN}; \quad B = \frac{l^2 + h^2}{lh}.$$

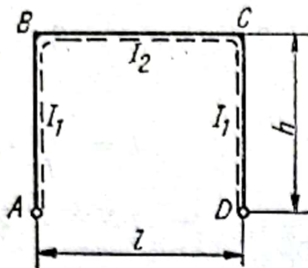
$$M_A = T\left[\frac{l(k+1)}{hk} + B\right]$$

$$M_B = T\left[B + \frac{h(k+1)}{l}\right]$$

$$M_C = -2TB.$$

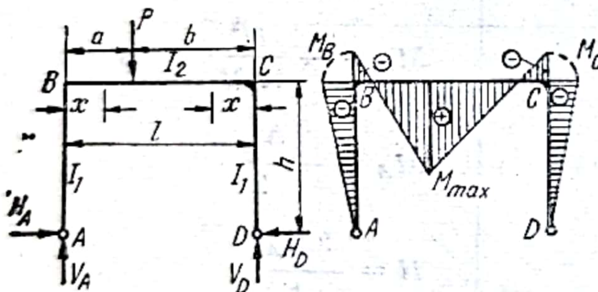
Tabelul IV.32 (continuare)

4. Cadru simetric dublu articulat cu stîlpi verticali și riglă orizontală



$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$$

4.a



$$V_A = \frac{Pb}{l}$$

$$V_D = \frac{Pa}{l}$$

$$H_A = H_D = \frac{3\,Pab}{2hl\,(2k+3)}$$

$$M_{max} = + \frac{4k+3}{2k+3} \cdot \frac{Pab}{2l}$$

$$M_B = M_C = -\,Hh =$$

$$= -\frac{3ab}{2l(2k+3)}\,P.$$

Caz particular $a = b = \dfrac{l}{2}$.

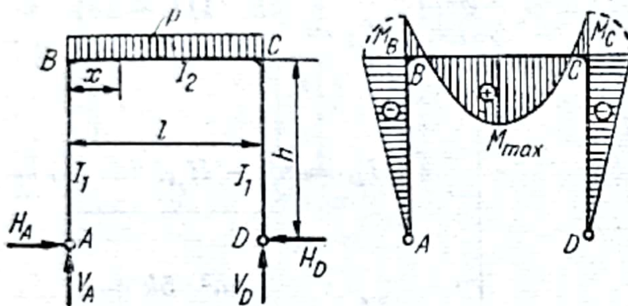
P la mijlocul riglei:

$$V_A = V_D = \frac{P}{2}$$

$$H_A = H_D = \frac{3\,Pl}{8h(2k+3)}$$

Tabelul IV.32 (continuare)

4.b



$$V_A = V_D = \frac{pl}{2}$$

$$H_A = H_D = \frac{pl^2}{4h(2k+3)}$$

$$M_B = M_C = -Hh =$$

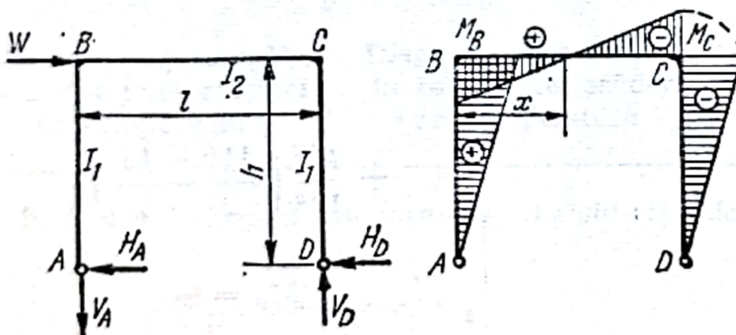
$$= -\frac{pl^2}{4(2k+3)}$$

Moment pozitiv maxim în riglă pentru

$$x_m = \frac{l}{2} \text{ (mijlocul riglei)}$$

$$M_{max} = +\frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{pl^2}{8}.$$

4.c



$$V_A = V_D = \frac{Wh}{l}$$

$$H_A = \frac{W}{2}$$

$$H_D = \frac{W}{2}$$

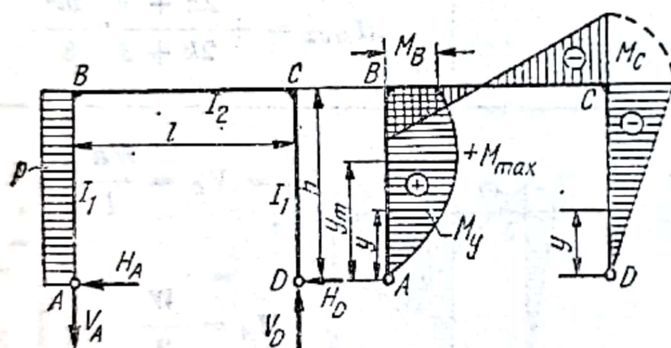
$$M_B = +\frac{W}{2}h = -M_C$$

Momentul într-o secţiune oarecare a riglei la o distanţă x de B:

$$M_x = +H_A \cdot h - V_A x.$$

Tabelul IV 32. (continuare)

4.d



$$V_A = V_D = \frac{ph^2}{2l}$$

$$H_A = \frac{ph}{8} \cdot \frac{11k + 18}{2k + 3}$$

$$H_D = ph - H_A.$$

$$M_C = -\frac{ph^2}{8} \cdot \frac{5k + 6}{2k + 3}$$

Moment pozitiv maxim în stîlpul AB pentru:

$$y_m = \frac{h}{8} \cdot \frac{11k + 18}{2k + 3}$$

(y_m măsurat de la A).

$$M_{max} = +$$

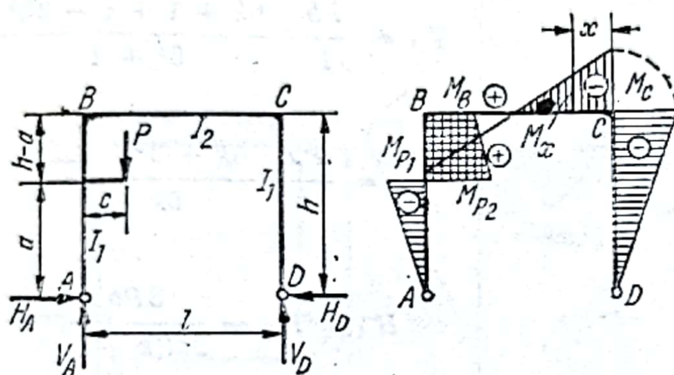
$$+ \frac{ph^2}{128} \left(\frac{11k + 18}{2k + 3} \right)^2$$

$$M_B = +$$

$$+ \frac{3}{8} \cdot ph^2 \cdot \frac{k + 2}{2k + 3}.$$

Tabelul IV.32 (continuare)

4.e



$$V_A = P \cdot \frac{l-c}{l}; \quad V_D = \frac{Pc}{l}$$

$$H_A = H_D = \frac{3}{2}\, Pc \times$$

$$\times \frac{k(h^2 - a^2) + h^2}{h^3\,(2k+3)}$$

$$M_B = Pc - Hh$$

$$M_C = -Hh$$

Momentul într-o secţiune x de C:

$$M_x = \frac{Pc}{l} \cdot x - Hh$$

4.f

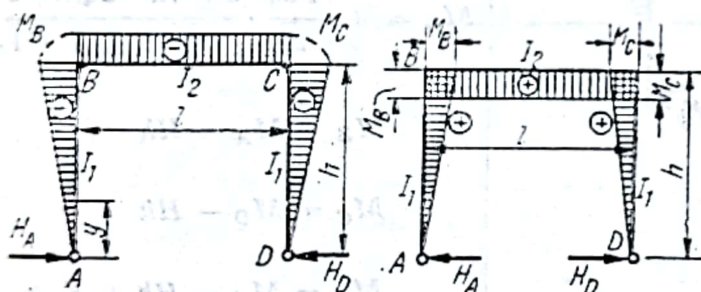


Diagrama momentelor în cazul unei creşteri de temperatură

Diagrama momentelor în cazul unei scăderi de temperatură

Influenţa unei variaţii de temperatură t.

$$H_A = H_D = \frac{3EI_2\alpha t}{h^2(3+2k)}.$$

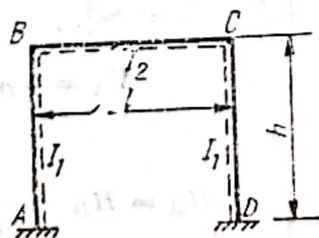
Momentul într-o secţiune oarecare a stîlpului:

$$M = \pm Hy$$

Momentul în riglă, rămînînd constant:

$$M_B = M_C = \pm Hh.$$

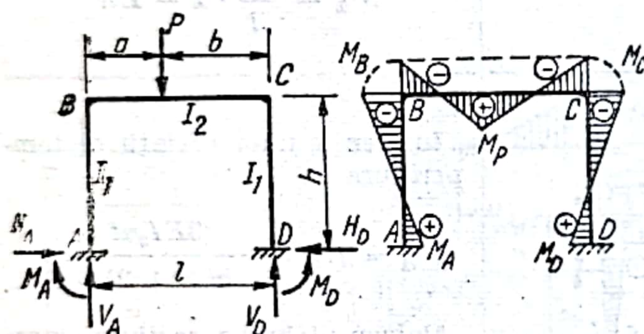
5. *Cadru simetric dublu încastrat cu riglă orizontală şi stîlpi verticali*



$$k = \frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l}$$

Tabelul IV.32 (continuare)

5.a



$$\xi = \frac{a}{l}$$

$$V_A = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{6k + 1 + \xi - 2\xi^3}{6k + 1}$$

$$V_D = \frac{Pa}{l} \cdot \frac{6k + 3\xi - 2\xi^2}{6k + 1}$$

$$H_A = H_D = \frac{3Pab}{2hl(k + 2)}$$

$$M_A = + \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{5k - 1 + 2\xi(k+2)}{(k + 2)(6k + 1)}$$

$$M_D = + \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{3 + 7k - 2\xi(k+2)}{(k + 2)(6k + 1)}$$

$$M_B = M_A - Hh$$

$$M_C = M_D - Hh$$

$$M_P = M_A - Hh + V_A a.$$

Caz particular:

$$a = b = \frac{l}{2}$$

$$V_A = V_D = \frac{P}{2}$$

$$H_A = H_D = \frac{3Pl}{8h(k + 2)}$$

Tabelul IV.32 (continuare)

5.b

$$V_A = V_D = \frac{pl}{2}$$

$$H_A = H_D = \frac{pl^2}{4h\,(k+2)}$$

$$M_B = M_C = -\frac{pl^2}{6\,(k+2)}$$

$$M_A = M_D = +\frac{pl^2}{12\,(k+2)}$$

$$M_{max} = +\frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{6\,(k+2)} = $$

$$= \frac{pl^2}{24}\cdot\frac{2+3k}{k+2}$$

5.c

$$V_A = V_D = \frac{3Whk}{l\,(6k+1)}$$

$$H_A = H_D = \frac{W}{2}$$

$$M_A = -\frac{Wh}{2}\cdot\frac{3k+1}{6k+1}$$

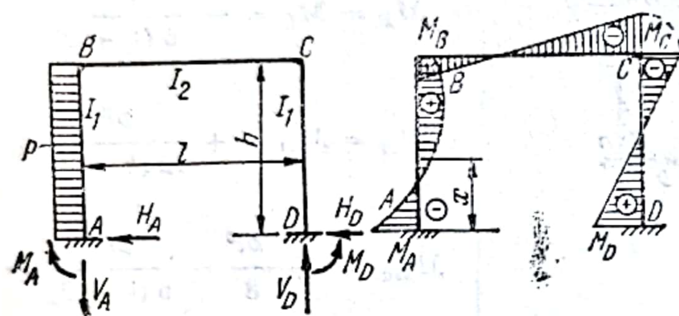
$$M_D = +\frac{Wh}{2}\cdot\frac{3k+1}{6k+1}$$

$$M_B = +\frac{Wh}{2}\cdot\frac{3k}{6k+1}$$

$$M_C = -\frac{Wh}{2}\cdot\frac{3k}{6k+1}$$

Tabelul IV.32 (continuare)

5.d



$$V_A = V_D = \frac{ph^2k}{l(6k+1)}$$

$$H_D = \frac{ph}{8} \cdot \frac{2k+3}{k+2}$$

$$H_A = ph - H_D$$

$$M_A = -$$

$$-\frac{ph^2}{24}\left(12 - \frac{5k+9}{k+2} - \frac{12k}{6k+1}\right)$$

$$M_D = +$$

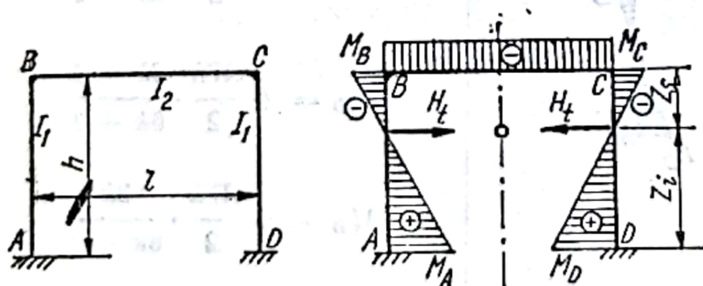
$$+\frac{ph^2}{24}\left(+\frac{5k+9}{k+2} - \frac{12k}{6k+1}\right)$$

$$M_x = M_A + (ph - H)x - \frac{px^2}{2}$$

$$M_B = M_A - H_Dh + \frac{ph^3}{2}$$

$$M_C = M_D - H_Dh$$

5.e



Influența unei variații de temperatură t:

$$Z_s = \frac{hk}{2k+1}$$

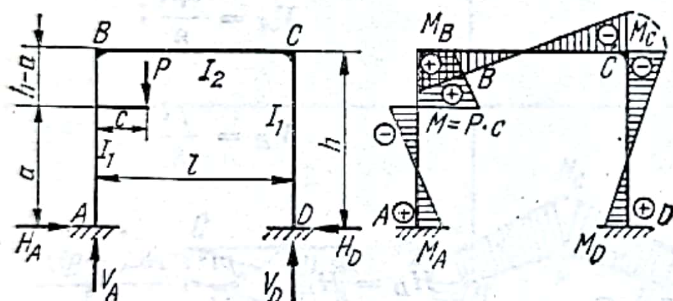
$$Z_i = \frac{h(k+1)}{2k+1}$$

$$H_t = \frac{3E\alpha tI_2(2k+1)}{h^2k(k+2)}$$

O b s e r v a ț i i. Semnul dat reacțiunilor și momentelor este valabil pentru o creștere de temperatură; în cazul unei scăderi de temperatură, trebuie luate toate momentele și reacțiunile cu semn contrar.

Tabelul IV.32 (continuare)

5.f



$$V_A = P\cdot\frac{l-c}{l} + \frac{M_D - M_A}{l}$$

$$V_D = P\cdot\frac{c}{l} + \frac{M_A - M_D}{l}$$

$$H = \frac{3Pc}{2h^3}\cdot\frac{2ak(h-a)+a(2h-a)}{k+2}$$

$$M_A = \frac{Pc}{2h^2}\left[\frac{k(4ah-3a^2-h^2)}{k+2}+\right.$$

$$+\frac{(6ah-2h^2-3a^2)}{k+2}-$$

$$\left.-\frac{6hk(h-a)+h^2}{6k+1}\right]$$

$$M_B = -Hh + M_A + Pc$$

$$M_C = -Hh + M_D$$

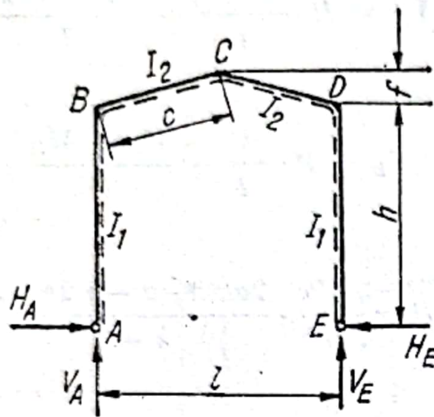
$$M_D = \frac{Pc}{2h^2}\left[\frac{k(4ah-3a^2-h^2)}{k+2}+\right.$$

$$+\frac{(6ah-2h^2-3a^2)}{k+2}+$$

$$\left.+\frac{6hk(h-a)+h^2}{6k+1}\right]$$

Tabelul IV.32 (continuare)

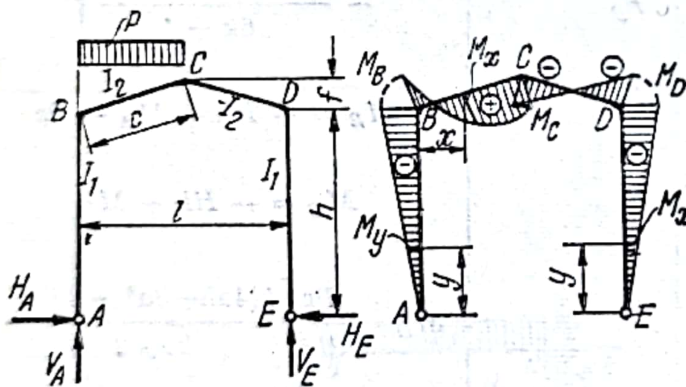
6. *Cadru simetric dublu articulat cu rigla în două pante*



$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{c}$$

$$\varkappa = h^2 (k + 3) + f(3h + f)$$

6.a



$$V_A = \frac{3pl}{8};$$

$$V_E = \frac{pl}{8}$$

$$H_D = H_E = \frac{pl^2}{64} \cdot \frac{8h + 5f}{\varkappa}$$

$$M_y = - Hy$$

$$M_B = - Hh$$

$$M_x = + V_A x -$$

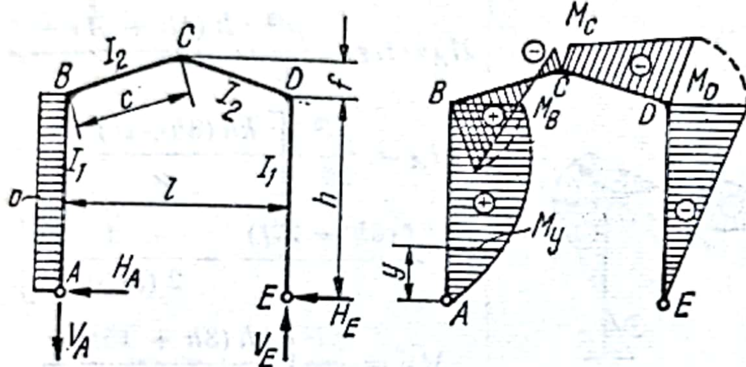
$$- H \left(h + \frac{2fx}{l} \right) - \frac{px^2}{2}$$

$$M_C = + V_E \frac{l}{2} - H (h + f)$$

$$M_D = - H_h$$

Tabelul IV.32 (continuare)

6.b



$$V_A = V_E = \frac{ph^2}{2l}$$

$$H_E = \frac{ph^2}{16} \cdot \frac{5hk + 6(2h + f)}{\varkappa}$$

$$H_A = ph - H_E$$

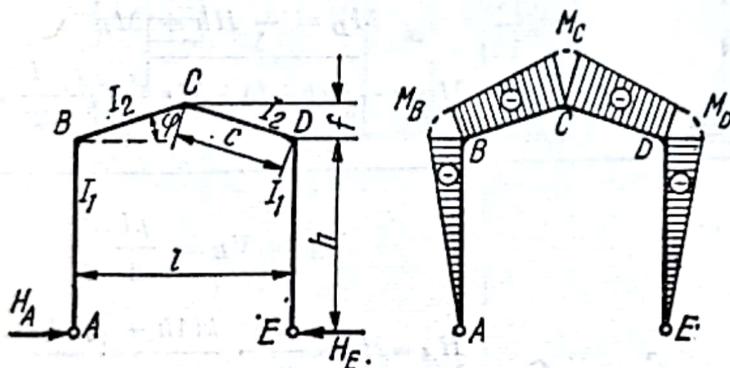
$$M_y = +(ph - H_E)y - \frac{py^2}{2}$$

$$M_B = +\frac{ph^2}{2} - H_E h$$

$$M_C = \frac{ph^2}{4} - H_E(h + f)$$

$$M_D = -H_E h.$$

6.c

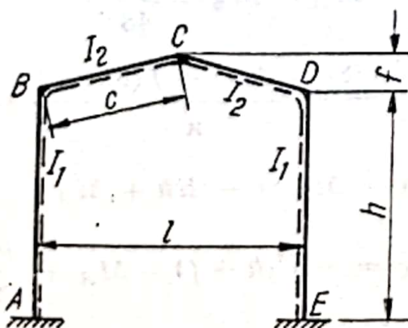


Influenţa unei variaţii de temperatură t:

$$H_A = H_E = \frac{3E\alpha t I_2 \cos\varphi}{\varkappa}$$

Semnele sînt pentru o creştere a temperaturii; în cazul unei scăderi de temperatură, momentele şi reacţiunile schimbă de semn.

7. *Cadru simetric dublu încastrat cu rigla în două pante*

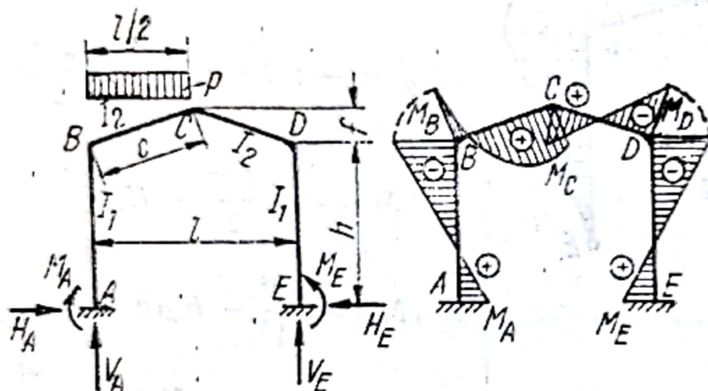


$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{c}$$

$$\varkappa = (hk + f)^2 + 4k(h^2 + hf + f^2)$$

Tabelul IV.32 (continuare)

7.a



$$V_A = \frac{3pl}{8} + \frac{M_E - M_A}{l}$$

$$V_E = \frac{pl}{8} - \frac{M_E - M_A}{l}$$

$$H_A = H_E = \frac{pl^2}{16} \cdot \frac{k(4h + 5f) + f}{\varkappa}$$

$$M_A = \frac{pl^2}{96} \cdot \left[\frac{kh(8h + 15f)}{\varkappa} + \frac{f(6h - 17f)}{\varkappa} - \frac{1}{2(3k + 1)} \right]$$

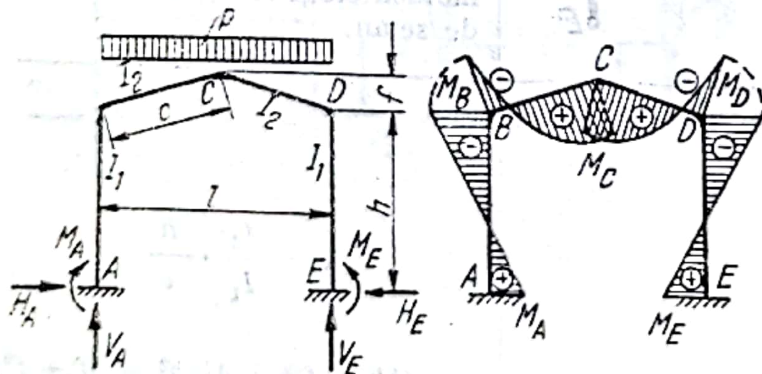
$$M_E = \frac{pl^2}{96} \left[\frac{kh(8h + 15f)}{\varkappa} + \frac{f(6h - 17f)}{\varkappa} + \frac{1}{2(3k + 1)} \right]$$

$$M_B = -Hh + M_A$$

$$M_D = -Hh + M_E$$

$$M_C = -H(h + f) + M_E + V_E \cdot \frac{l}{2}.$$

7.b



$$V_A = V_E = \frac{pl}{2}$$

$$H_A = H_E = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{k(4h + 5f) + f}{\varkappa}.$$

$$M_A = M_E = \frac{pl^2}{48} \times$$

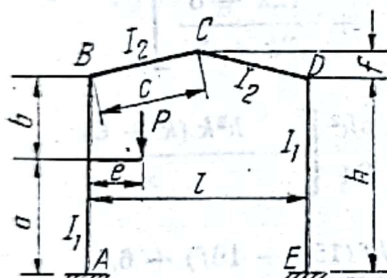
$$\times \frac{kh(8h + 15f) + f(6h - 17f)}{\varkappa}$$

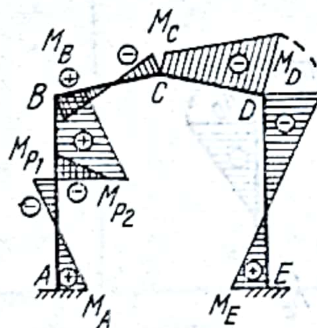
$$M_B = M_D = -Hh + M_A$$

$$M_C = -H(h + f) + M_A + \frac{pl^2}{8}$$

Tabelul IV.32 (continuare)

7.c





$$V_A = \frac{P(l - e)}{l} + \frac{M_E - M_A}{l};$$

$$V_E = \frac{Pe}{l} - \frac{M_E - M_A}{l}$$

$$H = \frac{3Pe}{h} \cdot \left[\frac{hk(h + f + bk)}{\varkappa} - \frac{bk(kb + b + f)}{\varkappa}\right]$$

$$M_A = \frac{Pe}{2h}\left[\frac{h^2k(2bk+2h+3f)}{\varkappa} - \frac{bfk(6h + 3b + 4f)}{\varkappa} - \frac{h(3b^2k^2 + 9b^2k + f^2)}{\varkappa} - \frac{3bk + h}{2(3k + 1)}\right]$$

$$M_E = \frac{Pe}{2h}\left[\frac{h^2k(2bk+2h+3f)}{\varkappa} - \frac{bfk(6h + 3b + 4f)}{\varkappa} - \frac{h(3b^2k^2 + 9b^2k + f^2)}{\varkappa} + \frac{3bk + h}{2(3k + 1)}\right]$$

$$M_{P1} = -Ha + M_A$$

$$M_{P2} = -Ha + M_A + Pe$$

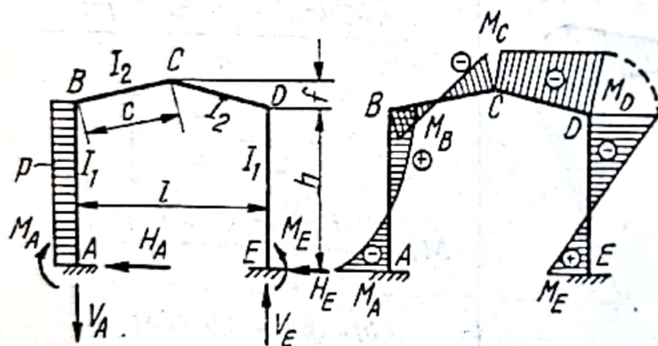
$$M_B = -Hh + M_A + Pe$$

$$M_D = -Hh + M_E$$

$$M_C = -H(h + f) + M_E + V_E\frac{l}{2}$$

Tabelul IV.32 (continuare)

7.d



$$V_A = V_E = \frac{ph^2}{2l} + \frac{M_A - M_E}{l}$$

$$H_E = \frac{ph^2}{4} \cdot \frac{k^2h + k(3h + 2f)}{\varkappa}$$

$$H_A = ph - H_E$$

$$M_A = -\frac{ph^2}{24}\left[\frac{h^2k(k+6)}{\varkappa} + \right.$$

$$+ \frac{kf(15h + 16f) + 6f^2}{\varkappa} +$$

$$\left. + \frac{12k + 6}{3k + 1}\right].$$

$$M_E = \frac{ph^2}{24}\left[-\frac{h^2k(k+6)}{\varkappa} + \right.$$

$$+ \frac{kf(15h + 16f) + 6f^2}{\varkappa} +$$

$$\left. + \frac{12k + 6}{3k + 1}\right].$$

$$M_D = -H_Eh + M_E$$

$$M_B = (ph - H_E)h -$$

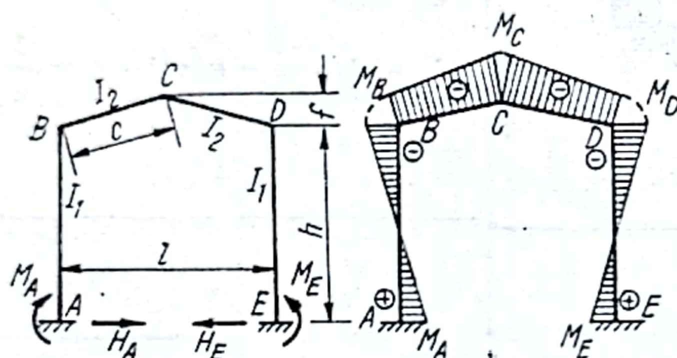
$$- M_A + \frac{ph^2}{2}.$$

$$M_C = -H_E(h + f) +$$

$$+ M_E + \frac{ph^2}{4}.$$

Tabelul IV.32 (continuare)

7.e



Influența unei variații de temperatură t:

$$H_A = H_E = \frac{6\alpha t E I_2 l (k+1)}{c\varkappa}$$

$$M_A = M_E = \frac{3\alpha t E I_2 l}{c} \times$$

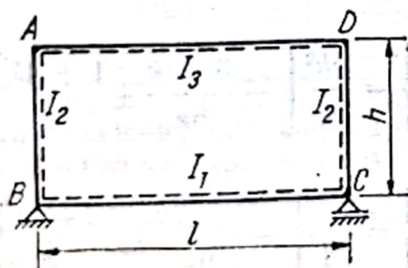
$$\times \frac{h(k+2)+f}{\varkappa}.$$

$$M_B = M_D = -Hh + M_A$$

$$M_C = -H(h+f) + M_A.$$

Observații: Semnul dat reacțiunilor și momentelor este valabil pentru o creștere de temperatură; pentru o scădere de temperatură, toate momentele și reacțiunile trebuie luate cu semn contrar.

8. ***Cadru simetric închis***, (Cadru portal)



$$k = \frac{I_3}{I_2} \cdot \frac{h}{l}; \; m = \frac{I_3}{I_1};$$

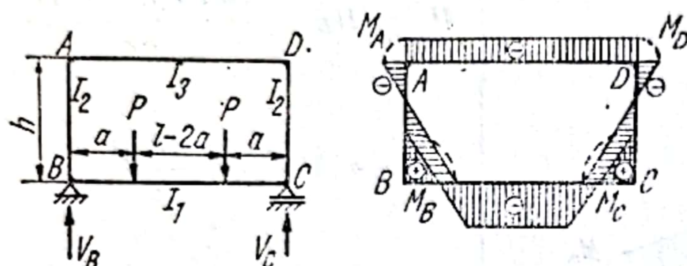
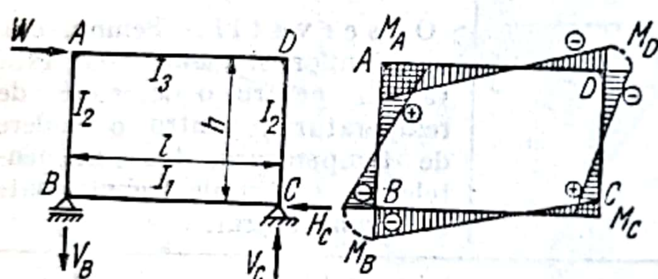
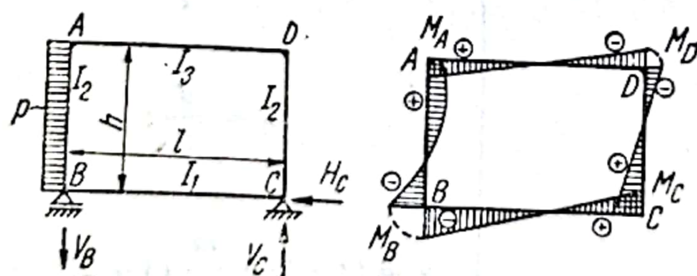
$$\alpha = \frac{a}{l};$$

$$\eta = \frac{y}{h};$$

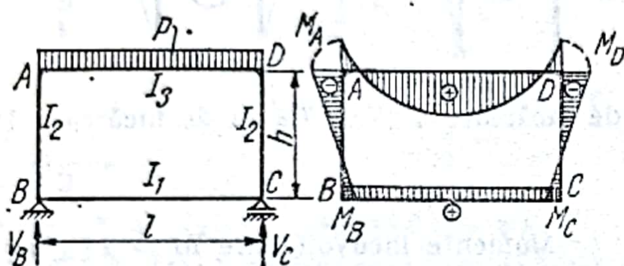
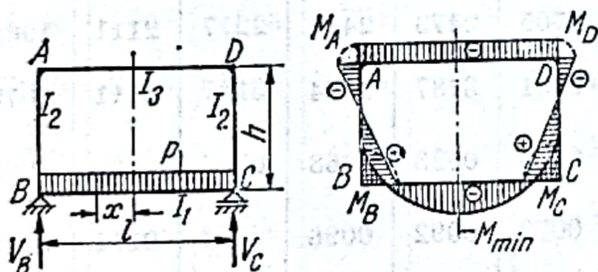
$$\varkappa = (2+k) + \frac{m}{k}(3+2k)$$

$$\mu = 1 + 6k + m$$

Tabelul IV.32 (continuare)

8.a 	$M_B = M_C = Pl\alpha(1-\alpha)m\,\frac{3+2k}{k\varkappa}$ $M_A = M_D = -Pl\alpha\,(1-\alpha)m\,\frac{1}{\varkappa}$
8.b 	$M_B = -M_C = -\frac{Wh}{2}\cdot\frac{1+3k}{\mu}$ $M_A = -M_D = \frac{Wh}{2}\cdot\frac{3k+m}{\mu}$
8.c 	$\left.\begin{matrix}M_B\\M_C\end{matrix}\right\} = \frac{ph^2}{4}\left[-\frac{3+k}{6\varkappa} \pm \frac{1+4k}{\mu}\right]$ $\left.\begin{matrix}M_A\\M_D\end{matrix}\right\} = \frac{ph^2}{4}\left[-\frac{k+3m}{6\varkappa} \pm \frac{2k+m}{\mu}\right]$

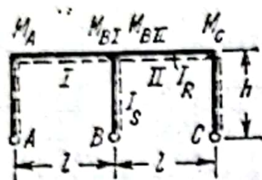
Tabelul IV.32 (continuare)

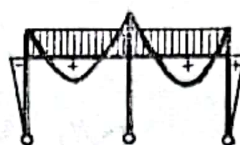
8.d 	Sarcina pe rigla superioară $M_B = M_C = \frac{pl^2}{12} \cdot \frac{1}{\varkappa}$ $M_A = M_D = -\frac{pl^2}{12} \frac{2k+3m}{k\varkappa}$
8.e 	Sarcina pe rigla inferioară $M_B = M_C = \frac{pl^2}{12} m \frac{3+2k}{k\varkappa}$ $M_A = M_D = -\frac{pl^2}{12} \frac{m}{\varkappa}$

intervin în calcule, care depind de elementele geometrice și mecanice ale cadrelor. Se dau de asemenea expresiile reacțiunilor și ale momentelor încovoietoare în secțiunile caracteristice. Momentele încovoietoare în alte secțiuni, precum și forțele tăietoare, se pot obține ușor introducînd în sistemul de bază necunoscutele statice, cu sarcini exterioare.

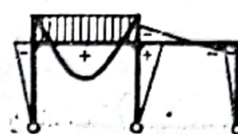
5.2.2. **Cadre continue.** Tabelul IV. 33 este calculat pentru cadre cu deschideri egale, avînd bare cu moment de inerție constant, și anume: pentru riglă, același moment de inerție I_R, iar pentru stîlpi, I_S. Tabelul este întocmit pentru cadre cu 2, 3 și 4 deschideri egale, cu stîlpi articulați la partea inferioară, avînd diferite raporturi k între rigiditatea riglei și a stîlpilor.

Coeficienţi α pentru calculul





Cazul de încărcare I



Cazul de încărcare II

Cadre

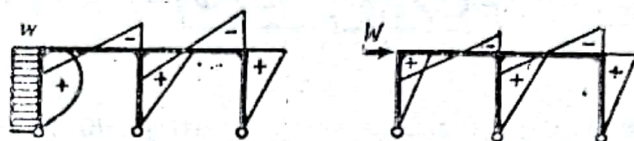
Momente încovoietoare $M = \alpha\,(\pm\, m)$.

m numai pentru încărcări simetrice pe deschidere;

	$k = \frac{I_R}{I_S} \cdot \frac{h}{l} =$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,33	0,4	0,5	0,6
Cazul I	$M_A = M_C$	3125	2941	2632	2381	2315	2174	2000	1852
	$M_{BI} = M_{BII}$	3438	3529	3684	3810	3843	3913	4000	4074
Cazul II	M_A	3150	2986	2705	2473	2411	2277	2111	1968
	M_{BI}	3306	3280	3231	3187	3174	3147	3111	3079
	M_{BII}	0132	0250	0453	0623	0668	0766	0889	0995
	M_C	0025	0045	0073	0092	0096	0104	0111	0116
Cazul III	M_A	1221	1196	1153	1120	1111	1093	1069	1050
	M_{BI}	1221	1194	1149	1113	1103	1081	1056	1033
	M_{BII}	1260	1268	1281	1291	1294	1299	1306	1311
	M_C	1299	1343	1417	1477	1488	1527	1569	1606
Cazul IV	$M_A = -M_C$	2540	2576	2639	2692	2707	2738	2778	2813
	$M_{BI} = -M_{BII}$	2460	2424	2361	2308	2293	2262	2222	2188

Tabelul IV.33

cadrelor continue



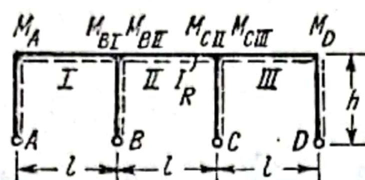
Cazul de încărcare III   Cazul de încărcare IV

continue

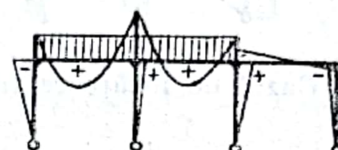
În riglă $M = \alpha w h^2$ respectiv $= \alpha W h$

m este factorul de încărcare (v. tabelul IV.16)

0,75	1,0	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	Multi-plicator
1667	1429	1250	1111	0909	0769	0667	0588	0526	0435	0370	$-m$
4167	4286	4375	4444	4545	4615	4667	4706	4737	4783	4815	$-m$
1786	1548	1366	1222	1010	0861	0750	0665	0597	0495	0423	$-m$
3036	2976	2928	2889	2828	2784	2750	2723	2702	2669	2646	$-m$
1131	1310	1447	1556	1717	1832	1917	1983	2035	2114	2169	$-m$
0119	0119	0116	0111	0101	0092	0083	0076	0070	0060	0053	$+m$
1027	0997	0975	0958	0934	0918	0906	0897	0891	0880	0872	$+wh^2$
1004	0967	0939	0917	0884	0861	0844	0831	0820	0805	0793	$-wh^2$
1317	1324	1329	1333	1338	1341	1344	1345	1346	1348	1349	$+wh^2$
1652	1711	1757	1792	1844	1880	1906	1927	1943	1967	1984	$-wh^2$
2857	2917	2963	3000	3056	3095	3125	3148	3167	3194	3214	$+Wh$
2143	2083	2037	2000	1944	1905	1875	1852	1831	1806	1786	$-Wh$



Cazul de încărcare III



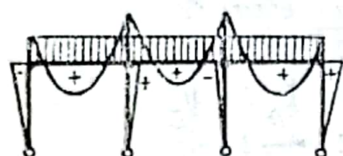
Cazul de încărcare IV

Momente încovoietoare $M = \alpha (\pm \text{m})$.

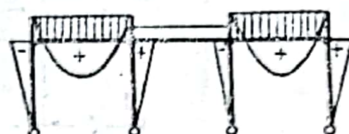
	$k = \frac{I_R}{I_S} \cdot \frac{h}{l}$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,33	0,4	0,5	0,6
Cazul I	$M_A = M_D$	3128	2951	2658	2424	2363	2231	2069	1930
	$M_{BI} = M_{CIII}$	3431	3508	3620	3697	3715	3754	3793	3825
	$M_{BII} = M_{CII}$	3336	3344	3367	3394	3402	3423	3446	3474
Cazul II	$M_A = M_D$	3223	3115	2911	2727	2676	2562	2414	2281
	$M_{BI} = M_{CIII}$	3232	3148	3013	2909	2883	2828	2759	2702
	$M_{BII} = M_{CII}$	0104	0197	0354	0485	0520	0595	0690	0772
Cazul III	$M_A = M_D$	0095	0164	0253	0303	0313	0331	0345	0351
	$M_{BI} = M_{CIII}$	0199	0361	0608	0788	0833	0926	1035	1123
	$M_{BII} = M_{CII}$	3232	3148	3013	2909	2882	2828	2759	2702
Cazul IV	M_{BI}	3482	3601	3781	3909	3941	4007	4081	4141
	M_{BII}	3388	3442	3516	3628	3652	3705	3770	3829
Cazul V	M_A	0801	0774	0729	0693	0683	0663	0638	0617
	M_{BI}	0815	0801	0780	0765	0761	0754	0747	0741
	M_{BII}	0827	0823	0818	0815	0815	0814	0811	0813
	M_{CII}	0826	0819	0805	0792	0789	0780	0773	0761
	M_{CIII}	0852	0866	0887	0901	0905	0912	0919	0925
	M_D	0877	0917	0982	1034	1047	1077	1112	1143
Cazul VI	$M_A = -M_D$	1719	1765	1842	1905	1921	1957	2000	2038
	$M_{BI} = -M_{CIII}$	1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667
	$M_{BII} = -M_{CII}$	1615	1569	1491	1429	1412	1377	1333	1296

Cifrele din tabel

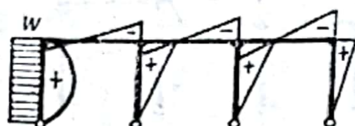
Tabelul IV.33 (continuare)



Cazul de încărcare I



Cazul de încărcare II



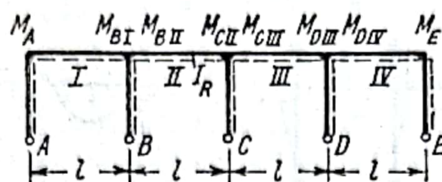
Cazul de încărcare V

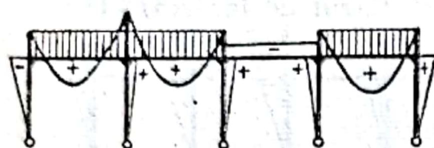
Cazul de încărcare VI

În riglă $M = \alpha w h^2$ respectiv $= \alpha W h$

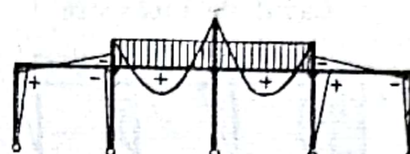
0,75	1,0	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	Multiplicator
1754	1525	1351	1212	1007	0861	0753	0669	0601	0501	0429	$-m$
3860	3898	3923	3939	3960	3971	3978	3983	3987	3990	3993	$-m$
3509	3559	3601	3636	3691	3732	3764	3788	3808	3839	3861	$-m$
2105	1864	1672	1517	1275	1101	0968	0864	0779	0652	0561	$-m$
2632	2542	2476	2424	2349	2297	2258	2228	2205	2170	2145	$-m$
0877	1017	1125	1212	1342	1435	1505	1560	1604	1669	1716	$-m$
0351	0339	0322	0303	0269	0239	0215	0195	0178	0152	0132	$+m$
1228	1356	1447	1515	1611	1675	1720	1755	1782	1820	1848	$-m$
2632	2542	2476	2424	2349	2267	2258	2228	2205	2170	2145	$-m$
4211	4294	4352	4394	4452	4490	4516	4536	4551	4572	4588	$-m$
3904	4003	4080	4141	4232	4297	4344	4381	4410	4454	4485	$-m$
0589	0554	0526	0505	0473	0449	0433	0419	0409	0393	0381	$+wh^2$
0734	0727	0723	0719	0716	0713	0712	0711	0711	0710	0709	$-wh^2$
0814	0816	0818	0821	0825	0828	0831	0833	0835	0838	0840	$+wh^2$
0748	0732	0718	0707	0691	0678	0669	0663	0657	0648	0642	$-wh^2$
0932	0939	0943	0947	0950	0953	0954	0955	0955	0956	0957	$+wh^2$
1181	1232	1270	1301	1345	1377	1401	1419	1433	1455	1471	$-wh^2$
2083	2143	2188	2222	2273	2308	2333	2353	2368	2391	2407	$+Wh$
1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667	1667	$-Wh$
1250	1190	1146	1111	1061	1026	1000	0980	0965	0942	0926	$+Wh$

se înmulțesc cu 10^{-4}.





Cazul de încărcare III



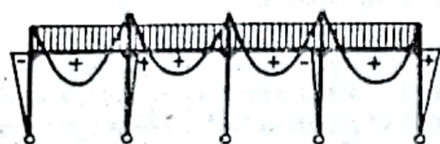
Cazul de încărcare IV

Moment încovoietor $M = \alpha(\pm m)$

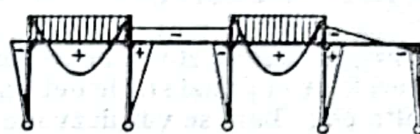
	$\lambda = \frac{I_R}{I_S} \cdot \frac{h}{l}$	0,05	0,10	0,20	0,30	0,33	0,4	0,5	0,6
Cazul I	$M_A = M_E$	3128	2950	2656	2419	2357	2224	2059	1917
	$M_{BI} = M_{DIV}$	3431	3509	3626	3110	3730	3773	3825	3863
	$M_{BII} = M_{DIII}$	3339	3354	3394	3440	3455	3486	3530	3569
	$M_{CII} = M_{CIII}$	3330	3323	3302	3279	3272	3256	3235	3215
Cazul II	M_A	3187	3052	2812	2605	2549	2425	2268	2130
	M_{BI}	3267	3207	3103	3018	2995	2946	2886	2833
	M_{BII}	0070	0142	0278	0402	0437	0514	0614	0704
	M_{CII}	0138	0250	0425	0554	0587	0654	0733	0797
	M_{CIII}	3192	3073	2877	2725	2686	2603	2502	2419
	M_{DIII}	3268	3212	3116	3038	3017	2972	2915	2866
	M_{DIV}	0164	0302	0522	0692	0736	0827	0938	1030
	M_E	0059	0102	0156	0186	0192	0202	0210	0213
Cazul III	M_{BI}	3436	3525	3671	3787	3816	3880	3958	4023
	M_{BII}	3435	3523	3666	3778	3808	3870	3946	4010
Cazul IV	$M_{CII} = M_{CIII}$	3431	3509	3626	3710	3731	3773	3824	3865
Cazul V	M_A	0586	0553	0498	0454	0442	0417	0386	0360
	M_{BI}	0607	0592	0570	0554	0551	0543	0533	0525
	M_{BII}	0626	0629	0637	0645	0648	0654	0662	0669
	M_{CII}	0626	0627	0631	0635	0636	0639	0643	0647
	M_{CIII}	0624	0623	0619	0615	0614	0611	0606	0603
	M_{DIII}	0624	0621	0613	0605	0602	0596	0588	0581
	M_{DIV}	0643	0658	0680	0696	0699	0707	0717	0725
	M_E	0664	0697	0752	0796	0808	0833	0864	0890
Cazul VI	$M_A = -M_E$	1298	1340	1410	1465	1480	1511	1549	1581
	$M_{BI} = -M_{DIV}$	1259	1266	1274	1279	1280	1282	1283	1284
	$M_{BII} = -M_{DIII}$	1221	1195	1125	1116	1107	1087	1062	1041
	$M_{CII} = -M_{CIII}$	1222	1199	1165	1140	1133	1121	1106	1095

Cifrele din tabel sînt zecimalele unui număr

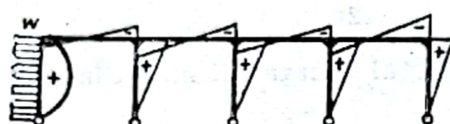
Tabelul IV.33 (continuare)



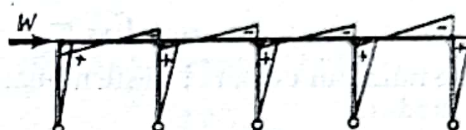
Cazul de încărcare I



Cazul de încărcare II



Cazul de încărcare V



Cazul de încărcare VI

În riglă $M = -\alpha wh^2$ respectiv $= \alpha Wh$

0,75	1,0	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	Multiplicator
1739	1507	1330	1190	0985	0839	0732	0649	0582	0485	0414	$-m$
3913	3973	4015	4048	4094	4124	4149	4163	4176	4196	4209	$-m$
3628	3699	3760	3810	3888	3943	3984	4016	4043	4083	4112	$-m$
3189	3151	3120	3096	3059	3029	3012	2991	2979	2958	2944	$-m$
1951	1710	1522	1370	1143	0980	0858	0762	0686	0572	0490	$-m$
2767	2682	2617	2567	2492	2440	2403	2371	2348	2313	2288	$-m$
0821	0980	1106	1207	1362	1473	1555	1619	1672	1750	1806	$-m$
0874	0967	1033	1082	1152	1198	1233	1256	1275	1303	1322	$-m$
2315	2184	2087	2013	1906	1831	1780	1736	1704	1656	1622	$-m$
2807	2719	2654	2603	2527	2470	2429	2397	2372	2333	2306	$-m$
1146	1291	1398	1481	1602	1684	1746	1792	1829	1833	1921	$-m$
0212	0203	0192	0180	0159	0141	0126	0114	0104	0087	0077	$+m$
4104	4207	4284	4344	4430	4490	4534	4568	4594	4634	4661	$-m$
4090	4193	4270	4330	4418	4479	4524	4558	4585	4626	4654	$-m$
3913	3973	4015	4048	4093	4124	4146	4163	4176	4196	4209	$-m$
0326	0283	0249	0223	0185	0157	0137	0122	0109	0091	0078	$+wh^2$
0516	0505	0497	0491	0482	0477	0473	0469	0467	0463	0461	$-wh^2$
0679	0693	0705	0714	0729	0739	0747	0753	0758	0766	0771	$+wh^2$
0652	0659	0665	0670	0677	0682	0686	0689	0692	0695	0698	$-wh^2$
0598	0591	0585	0580	0573	0568	0564	0561	0558	0555	0552	$+wh^2$
0571	0557	0545	0536	0521	0511	0503	0497	0492	0484	0479	$-wh^2$
0734	0745	0753	0759	0767	0773	0777	0781	0783	0787	0789	$+wh^2$
0924	0967	1001	1027	1065	1093	1113	1128	1141	1159	1172	$-wh^2$
1622	1673	1713	1744	1789	1821	1844	1862	1876	1898	1913	$+Wh$
1284	1283	1281	1279	1276	1273	1270	1269	1267	1264	1263	$-Wh$
1014	0978	0951	0930	0899	0877	0861	0848	0838	0823	0813	$+Wh$
1081	1065	1054	1047	1036	1029	1025	1021	1019	1015	1013	$-Wh$

subunitar. Deci 3125 este în realitate 0,3125.

5.3. Grinzi cu zăbrele static nedeterminate

5.3.1. Grinzi cu zăbrele static nedeterminate cu noduri articulate. La astfel de grinzi se menţin ipotezele de la grinzi static determinate inclusiv aceea că nodurile sînt articulaţii perfecte. Rezultă că în bare se vor dezvolta numai eforturi axiale. Nedeterminarea statică poate proveni din legături suplimentare interioare (bare), (fig. IV. 134, *a*), exterioare (fig. IV.134, *b*) sau combinate (fig. IV.134, *c* şi *d*). Gradul de nedeterminare statică se determină cu relaţia

$$G_{ns} = (b + r) - 2n$$

în care : b este numărul de bare ; r este numărul total de legături simple la reazeme ; n este numărul de noduri.

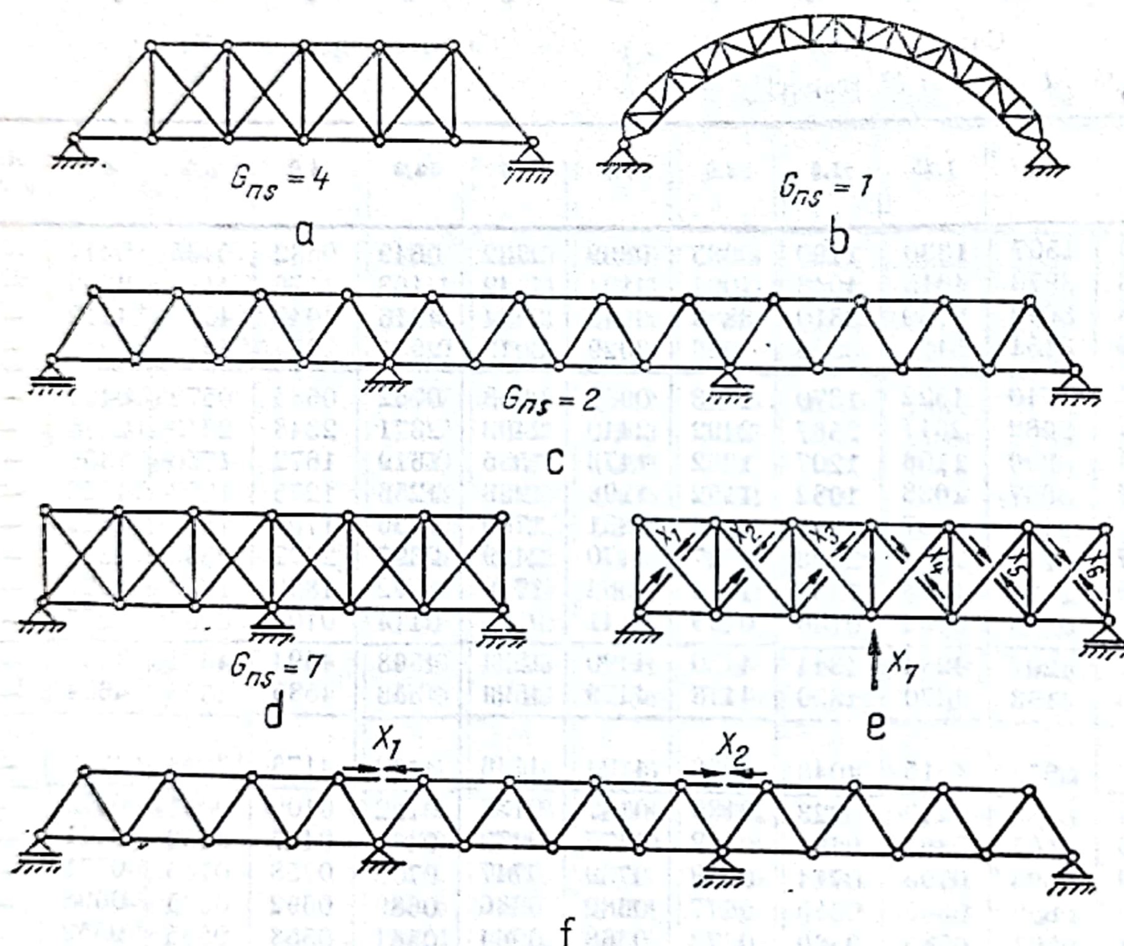


Fig. IV.134

5.3.1.1. Calculul la încărcări fixe. Metoda de calcul care conduce la calcule mai simple este metoda generală a eforturilor. Sistemul de bază static determinat şi geometric strict invariabil se obţine prin suprimarea unui număr de legături interioare sau exterioare corespunzător nedeterminării statice. Se pot utiliza şi sisteme de bază static nedeterminate (calculul în două etape) indicate în special cînd necunoscutele sînt de natură diferită (eforturi în bare şi reacţiuni). La alegerea sistemului de bază trebuie ţinut seama de posibilităţile de simplificare a calculelor şi ecuaţiilor de condiţie : simetria, necunoscutele

unitare să producă eforturi într-un număr cît mai mic de bare etc. În fig. IV. 134, *e* este prezentat sistemul de bază pentru grinda din fig. IV. 134, *d*. În fig. IV. 134, *f* se prezintă sistemul de bază pentru grinda cu zăbrele continuă din fig. IV. 134 *c*. Ecuaţia de condiţie *i* din sistemul de ecuaţii canonice are forma

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{i0} = 0. \quad \text{(IV.258)}$$

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi au următoarele expresii (multiplicaţi cu EA_0 pentru a nu lucra cu valori foarte mici, A_0 fiind aria secţiunii unei bare luată ca reper):

$$EA_0\delta_{ij} = \sum \frac{A_0}{A} n_i n_j l;\ EA_0\,\delta_{ii} = \sum \frac{A_0}{A} n_i^2 l \quad \text{(IV. 259)}$$

$$EA_0\Delta_{ip} = \sum \frac{A_0}{A} N^0 n_i l$$ (pentru încărcarea cu sarcini);

$$EA_0\,\Delta_{it} = EA_0\,\alpha_t \sum t_0\, n_i l$$ (pentru încărcarea cu variaţia temperaturii în axa barelor); (IV.260)

$$EA_0\Delta_{ir} = -\,EA_0 \sum r_i\,\Delta_r$$ (pentru încărcarea cu cedări de reazeme),

în care: n_j sînt eforturile în barele sistemului de bază din $X_j = 1$; N^0 — eforturile axiale în barele sistemului de bază din sarcinile exterioare date; l — lungimile barelor; EA — modulul de rigiditate la efort axial al unei bare oarecare; A — aria secţiunii transversale prin bare; E — modulul de elasticitate al materialului; α_t — coeficientul de dilatare termică a materialului; t_0 — variaţia de temperatură în axele barelor; $\sum r_i\Delta_r$ — lucrul mecanic efectuat de grupul de forţe r_i format din $X_i = 1$ şi reacţiunile corespunzătoare prin căderile de reazeme Δ_r date;
În formulele anterioare sumele se referă la toate barele sistemului de bază.

Efortul axial într-o bară oarecare k se obţine cu relaţia

$$N_k = N_k^0 + \sum_{i=1}^{n} n_{ki} X_i. \quad \text{(IV.261)}$$

5.3.1.2. **Linii de influenţă.** Expresiile liniilor de influenţă ale necunoscutelor în cazul folosirii unui sistem de bază static determinat rezultă din rezolvarea sistemului ecuaţiilor de condiţie (în care termenii liberi s-au notat $\Delta_{j0} = \delta_{ji}$ pentru forţa $P = 1$ mobilă în poziţia oarecare i) sub forma

$$X_j = \beta_{1j}\,\delta_{i1} + \beta_{2j}\,\delta_{i2} + \ldots\ldots\ldots + \beta_{jj}\delta_{ij} + \beta_{kj}\,\delta_{ik} + \ldots\ldots + \beta_{nj}\,\delta_{in} \quad \text{(IV.262)}$$

unde s-a folosit reciprocitatea deplasărilor din forţe unitare ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$) şi în care coeficienţii conjugaţi β_{kj} reprezintă valoarea necunoscută X_j cînd toţi termenii liberi sînt nuli afară de $\delta_{ik} = 1$ şi are forma

$$\beta_{kj} = \frac{\alpha_{kj}}{D}(-1)^{k+j-1} \quad \text{(IV.263)}$$

în care α_{kj} este minorul determinantului coeficienţilor necunoscutelor D corespunzător liniei i şi a coloanei j.

În acest mod, linia de influenţă a unei necunoscute se obţine prin suprapunerea liniară a liniilor elastice din necunoscute unitare (δ_{ij} reprezintă linia elastică pe verticală a nodurilor căii din $X_j = 1$). Aceste linii elastice se pot obţine prin procedeul grinzii conjugate, epura Williot (grafic sau analitic) sau determinînd deplasările nodurilor cu formula Maxwell-Mohr.

Liniile de influenţă ale necunoscutelor se pot obţine şi folosind un sistem de bază de $(n-1)$ ori static nedeterminat prin suprimarea legăturii pe direcţia unei singure necunoscute.

În acest caz, din ecuaţia de condiţie

$$\delta_{jj}X_j + \delta_{ji} = 0 \qquad \text{(IV.264)}$$

rezultă expresia necunoscutei sub forma

$$X_j = -\frac{\delta_{ji}}{\delta_{jj}} = -\frac{\delta_{ij}}{\delta_{jj}} = \frac{\delta^*_{ij}}{\delta_{jj}} \qquad \text{(IV.264a)}$$

în care δ^*_{ij} este linia elastică pe verticală din $X_j = -1$ pe sistemul de bază de $(n-1)$ ori static nedeterminat iar δ_{jj} este deplasarea pe direcţia necunoscutei X_j din încărcarea sistemului de bază, de $(n-1)$ ori static nedeterminat cu $X_j = 1$.

După determinarea liniilor de influenţă ale necunoscutelor, liniile de influenţă ale eforturilor în barele grinzii cu zăbrele rezultă prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază sub forma

$$N_k = N_k^0 + \sum n_{kj} X_j \qquad \text{(IV.265)}$$

în care: N_k^0 este linia de influenţă a efortului în bara k pe sistemul de bază; X_j sînt liniile de influenţă ale necunoscutelor; n_{kj} este efortul în bara k pe sistemul de bază din $X_j = 1$.

Calculele se efectuează în tabele.

Exemplul de calcul IV.17. Se determină eforturile în barele grinzii cu zăbrele static nedeterminată din fig IV.135 *a*, în ipoteza nodurilor articulate.

Grinda cu zăbrele dată este de opt ori static nedeterminată ($G_{ns} = 41 + 3 - 2 \cdot 18 = 8$). Pentru încărcare simetrică se alege un sistem de bază simetric grupînd necunoscutele în patru necunoscute simetrice X_1, X_2, X_3 şi X_4 (fig. IV. 135, *b*). Ecuaţiile de condiţie vor fi:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \qquad \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} = 0 \\ \qquad\qquad \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} = 0 \end{cases}$$

în care s-a ţinut seama că din necunoscutele unitare apar eforturi axiale numai în barele panoului corespunzător necunoscutei respective şi deci $\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{41} = \delta_{31} = 0$. Eforturile pe sistemul de bază din încărcări, N^0, şi din necunoscute unitare, n, sînt prezentate în fig. IV. 135, *c* şi *d*.

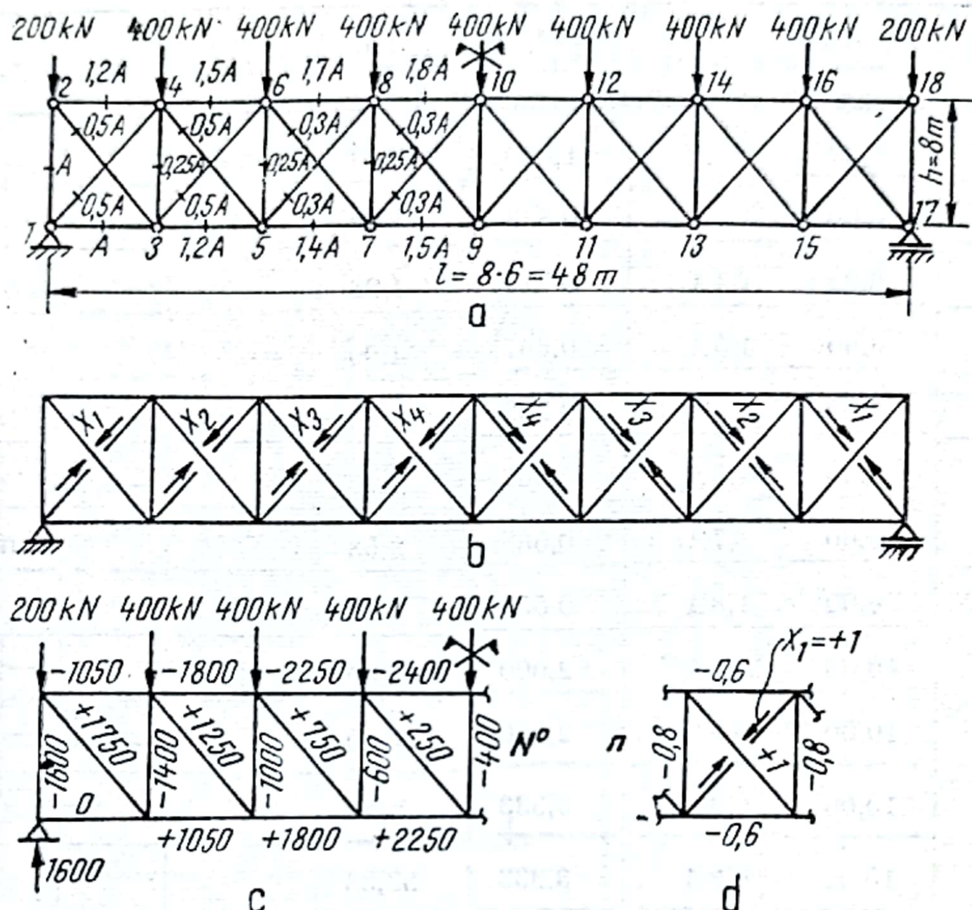


Fig. IV.135

Calculul coeficienților necunoscutelor și al termenilor liberi s-a făcut în tabelele de la pag. 736–739. Din aceste tabele rezultă:

$$EA\,\delta_{11} = 2 \cdot 69{,}58 = 139{,}16;\; EA\,\delta_{22} = 2 \cdot 84{,}24 = 168{,}48;\; EA\,\delta_{33} = 2 \cdot 110{,}48 = 220{,}96;$$

$$EA\,\delta_{44} = 2 \cdot 110{,}31 = 220{,}62;\; EA\,\delta_{12} = EA\,\delta_{23} = EA\,\delta_{34} = 2 \cdot 20{,}50 = 41{,}00$$

$$EA\,\Delta_1 p = 2 \cdot 84\,230 = 168\,460;\; EA\,\Delta_2 p = 2 \cdot 87\,610 = 175\,220;$$

$$EA\,\Delta_3 p = 2 \cdot 66\,100 = 132\,200;\; EA\,\Delta_4 p = 2 \cdot 33\,330 = 66\,660.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obțin următoarele valori pentru necunoscute:

$$X_1 = -1\,006{,}0 \text{ kN};\; X_2 = -691{,}5 \text{ kN};\; X_3 = -429{,}0 \text{ kN};\; X_4 = -222{,}2 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori s-au calculat în tabelul de la pag. 738 eforturile în barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate cu relația $N = N^0 + n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3 + n_4X_4$.

Bara	l_k	A_k	$\frac{A_0}{A_k}$	$l_k \frac{A_0}{A_k}$	n_1	n_2	n_3	n_4
1—3	6,00	A	1,000	6,00	−0,60			
3—5	6,00	1,2A	0,833	5,00		−0,60		
5—7	6,00	1,4A	0,714	4,28			−0,60	
7—9	6,00	1,5A	0,667	4,00				−0,60
2—4	6,00	1,2A	0,833	5,00	−0,60			
4—6	6,00	1,5A	0,667	4,00		−0,60		
6—8	6,00	1,7A	0,588	3,53			−0,60	
8—10	6,00	1,8A	0,555	3,33				−0,60
2—3	10,00	0,5A	2,000	20,00	+1,00			
4—5	10,00	0,5A	2,000	20,00		+1,00		
6—7	10,00	0,3A	3,333	33,33			+1,00	
8—9	10,00	0,3A	3,333	33,33				+1,00
1—4	10,00	0,5A	2,000	20,00	+1,00			
3—6	10,00	0,5A	2,000	20,00		+1,00		
5—8	10,00	0,3A	3,333	33,33			+1,00	
7—10	10,00	0,3A	3,333	33,33				+1,00
1—2	8,00	A	1,000	8,00	−0,80			
3—4	8,00	0,25A	4,000	32,00	−0,80	−0,80		
5—6	8,00	0,25A	4,000	32,00		−0,80	−0,80	
7—8	8,00	0,25A	4,000	32,00			−0,80	−0,80
9—10	8,00	0,25A	4,000	32,00				−0,80

$(l_k A_0/A_k)\times$						
n_1^2	n_2^2	n_3^2	n_4^2	n_1n_2	n_2n_3	n_3n_4
2,16						
	1,80					
		1,54				
			1,44			
1,80						
	1,44					
		1,27				
			1,20			
20,00						
	20,00					
		33,33				
			33,33			
20,00						
	20,00					
		33,33				
			33,33			
5,12						
20,50	20,50			20,50		
	20,50	20,50			20,50	
		20,50	20,50			20,50
			20,50			
69,58	84,24	110,48	110,31	20,50	20,50	20,50

Bara	N^0	n_1N^0	n_2N^0	n_3N^0	n_4N^0	$(l_kA_0/A_k)\times$		
						n_1N^0	n_2N^0	n_3N^0
1—3								
3—5	+1 050		−630				−3 150	
5—7	+1 800			−1080				− 4 622,4
7—9	+2 250				−1350			
2—4	−1 050	+630				+3 150		
4—6	−1 800		+1 080				+4 320	
6—8	−2 250			+1350				+ 4 765,5
8—10	−2 420				−1440			
2—3	+1 750	+1 750				+35 000,0		
4—5	+1 250		+1 250				+25 000,0	
6—7	+750			+750				+25 000,0
8—9	+250				+250			
1—4	0							
3—6	0							
5—8	0							
7—10	0							
1—2	− 1 600	+ 1 280				+10 240,0		
3—4	− 1 400	+ 1 120	+1 120			+35 840,0	+35 840,0	
5—6	− 1 000		+ 800	+ 800			+25 600,0	+25 600
7—8	− 600			+ 480	+ 480			+15 360,0
9—10	− 400				+ 320			
						+84 230	+87 610	+66 100

5.3.2. **Grinzi cu zăbrele static nedeterminate cu noduri rigide. Eforturi suplimentare.** În calculul grinzilor cu zăbrele se admite ipoteza că barele sînt perfect articulate în noduri și deci pentru sarcini aplicate la noduri, în bare apar numai eforturi axiale numite eforturi principale (fig. IV.136,*a*). În realitate, din motive constructive, nodurile grinzilor cu zăbrele metalice și din beton armat se realizează rigid. Datorită rigidității nodurilor, prin deformrea grinzii sub încărcări, barele se deformează prin încovoiere și deci apar momente încovoietoare numite eforturi suplimentare (fig. IV.136,*b*).

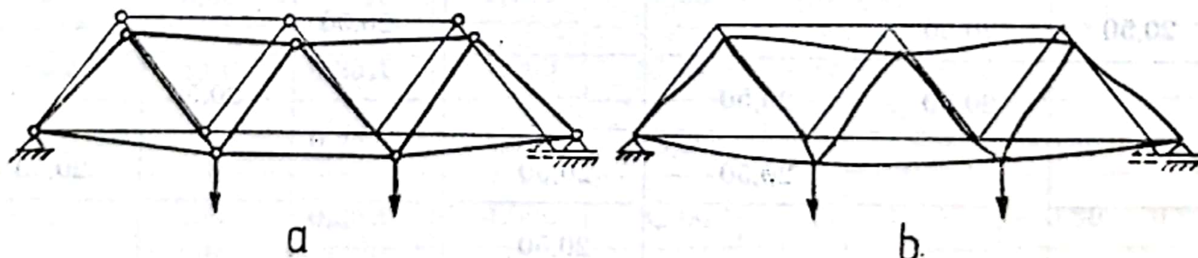


Fig. IV.136

n_4N^0	n_1X_1	n_2X_2	n_3X_3	n_4X_4	N
	+604				+604
		+415,0			+1 465
			+257,5		+2 057,5
−5 400				+133,5	+2 383,5
	+604				−446,0
		+415,0			−1 385
			+257,5		+1 992,5
+4 795,2				+133,5	−2 266,5
	−1 006				+744,0
		−691,5			−558,5
			−429,0		+321,0
+8 332,5				−222,2	+27,80
	−1 006				−1 006
		−691,5			−691,5
			−429,0		−429,0
				−222,2	−222,2
	+805,0				−795,0
	+805,0	+553,5			−41,50
		+553,5	+343,5		−103,0
+15 360			+343,5	+177,8	−78,70
+10 240				+355,6	−44,40
+33 330					

Pe baza eforturilor axiale determinate în ipoteza nodurilor articulate se determină variațiile lungimilor barelor care produc rotiri de bare. Aceste rotiri de bare se pot determina prin unul din procedeele cunoscute:

1) Aplicarea formulei Maxwell-Mohr pentru fiecare bară în parte, rotirea fiind dată de relația

$$\theta_{ij} = \Sigma \frac{N_{mn}\, n_{mn}^{ij}}{EA_{mn}}\, l_{mn} = \Sigma \Delta\, l_{mn}\, n_{mn}^{ij} \qquad \text{(IV. 266)}$$

în care: N_{mn} este efortul axial într-o bară oarecare $m-n$ din sarcinile date; n_{mn}^{ij} este efortul axial în bara $m-n$ din încărcarea virtuală care este un cuplu unitar format din forțe concentrate normale la capetele barei $i-j$ de mărime $1/l_{ij}$; l_{mn} și A_{mn} sînt lungimea și respectiv aria secțiunii barei $m-n$; Δl_{mn} este variația lungimii barei $(m-n)$. Suma se referă la toate barele grinzii.

2) Procedeul grinzilor conjugate și al sarcinilor elastice.

3) Epura Williot (grafic sau analitic).

Determinarea eforturilor secundare se reduce în acest fel la calculul unui cadru cu noduri fixe încărcat cu deplasări cunoscute ale nodurilor (echivalente cu rotirile de bare

determinate ca mai înainte). Metoda convenabilă de calcul este metoda deplasărilor în care necunoscute sînt rotirile nodurilor produse de deplasări de noduri cunoscute. Rotirile de bare produc, pe sistemul de bază al metodei deplasărilor cu nodurile blocate la rotiri, momente de încastrare perfectă egale cu

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = -\frac{6EI_{ij}}{l_{ij}}\,\theta_{ij}. \qquad \text{(IV.267)}$$

Exemplul de calcul IV.18. Se determină eforturile secundare în barele grinzii cu zăbrele din fig. IV. 137 considerînd prinderea rigidă a barelor la noduri. Datele caracteristice pentru barele grinzii sînt date în figură ($EA = 2 \times 10^6$ kN; $EI = 50\,000$ kNm²).

Fig. IV.137

Eforturile axiale calculate în ipoteza nodurilor articulate sînt date în tabelul următor în care s-au calculat și alungirile sau scurtările barelor din aceste eforturi.

Bara	l_{jk} m	A_{jk}	EA_{jk} kN	N_{jj} kN	$N_{jk} \cdot l_{jk}$ kNm	$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ m
1—2 1′—2′	5,00	A	$20 \cdot 10^5$	−1 150	−5 750	$-287{,}5 \cdot 10^{-5}$
2—3 2′—3′	5,00	0,8A	$16 \cdot 10^5$	+1 050	+5 250	$+328{,}0 \cdot 10^{-5}$
3—4 3′—4′	5,00	0,3A	$6 \cdot 10^5$	−50	−250	$-41{,}7 \cdot 10^{-5}$
2—4 2′—4′	6,00	A	$20 \cdot 10^5$	−1 320	−7 920	$-396{,}0 \cdot 10^{-5}$
1—3 1′—3′	6,00	0,5A	$10 \cdot 10^5$	+690	+4 140	$+414{,}0 \cdot 10^{-5}$
3—3′	6,00	A	$20 \cdot 10^5$	+1 350	+8 100	$+405{,}0 \cdot 10^{-5}$

Pentru calculul rotirilor barelor din deformare axială s-a construit epura Williot în fig. IV. 138. Segmentele r_{jk} pot fi măsurate la scara respectivă sau calculate analitic pe baza elementelor geometrice din epura Williot

$$r_{24} = 284{,}5 \cdot 10^{-5};\; r_{23} = 994 \cdot 10^{-5};\; r_{24} = 1\,062{,}7 \cdot 10^{-5}\; r_{12} = 1\,482 \cdot 10^{-5};\; r_{13} = 1\,976{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Calculul rotirilor de bare cu formula Maxwell-Mohr

Bara	$\Delta l \cdot 10^{-3}$ (m)	θ_{1-2}		θ_{2-3}		θ_{3-4}		θ_{2-4}		θ_{1-3}	
		n_{jk}	$n_{jk} \cdot \Delta l_{jk} \cdot 10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk} \cdot \Delta l_{jk} \cdot 10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk} \cdot \Delta l_{jk} \cdot 10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk} \cdot \Delta l_{jk} \cdot 10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk} \cdot \Delta l_{jk} \cdot 10^{-3}$
1—2	−2,875	−0,15	+0,431	0	0	0	0	0	0	−0,208	+0,598
2—3	+3,280	0	0	+0,15	+0,492	0	0	+0,208	+0,683	+0,208	+0,683
3—4	−0,417	0	0	0	0	−0,15	+0,062	−0,208	+0,087	0	0
2—4	−3,960	−0,25	+0,990	−0,25	+0,990	0	0	−0,125	+0,495	−0,25	+0,990
1—3	+4,140	+0,25	+1,035	0	0	0	0	0	0	+0,125	+0,517
3—3′	$+4{,}05\frac{1}{2}$	+0,25	+0,506	+0,25	+0,506	+0,25	+0,506	+0,25	+0,506	+0,25	+0,506
			$2{,}962 \cdot 10^{-3}$		$1{,}988 \cdot 10^{-3}$		$0{,}568 \cdot 10^{-3}$		$1{,}771 \cdot 10^{-3}$		$3{,}294 \cdot 10^{-3}$

Rezultă următoarele rotiri de bare $\left(\theta_{jk} = \frac{r_{jk}}{l_{jk}}\right)$:

$$\theta_{12} = \frac{1\,482 \cdot 10^{-5}}{5} = 296{,}4 \cdot 10^{-5}; \quad \theta_{23} = \frac{994 \cdot 10^{-5}}{5} = 198{,}8 \cdot 10^{-5}; \quad \theta_{34} = \frac{284{,}5 \cdot 10^{-5}}{5} = 56{,}9 \cdot 10^{-5}$$

$$\theta_{24} = \frac{1062{,}7 \cdot 10^{-5}}{6} = 177{,}1 \cdot 10^{-5}; \quad \theta_{13} = \frac{1\,976{,}5 \cdot 10^{-5}}{6} = 329{,}4 \cdot 10^{-5}; \quad \theta_{33}' = 0.$$

Rotirile de bare au fost recalculate cu formula Maxwell-Mohr în tabelul de la pag. 741.
Coeficienții de rigiditate și momentele de încastrare perfectă din rotiri de bare s-au calculat în tabelul următor.

Coeficienți de rigiditate. Momente de încastrare perfectă

Bara	l m	I	$\rho = \frac{I}{l}$ $I = 6$	$\theta_{jk} \cdot 10^{-3}$	EI kNm²	$\frac{6EI}{l}$	$\mathfrak{M}_{jk} = \mathfrak{M}_{kj} = -\frac{6EI}{l}$
1—2 1′—2′	5,00	I	1,20	2,962	50 000	60 000	−177,7
2—3 2′—3′	5,00	0,6I	0,72	1,988	30 000	36 000	−71,6
3—4 3′—4′	5,00	0,1I	0,12	0,568	5 000	6 000	−3,4
2—4 2′—4′	6,00	I	1,00	1,771	50 000	50 000	−88,5
1—3 1′—3′	6,00	0,3I	0,3	3,294	15 000	15 000	−49,4
3—3′	6,00	I	1,00	0	50 000	50 000	0

Calculul momentelor încovoietoare la capetele barelor se face cu metoda transmiterii rotirilor. Coeficienții de transmitere a rotirilor sînt $\left(t_{jk} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_{jk}}{\rho_k}\right)$:

$$t_{12} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}20}{2{,}92} = -0{,}2055; \quad t_{21} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}20}{1{,}50} = -0{,}400; \quad t_{23} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}72}{1{,}64} = -0{,}2195;$$

$$t_{32} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}72}{2{,}92} = -0{,}1233; \quad t_{13} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}30}{1{,}64} = -0{,}0915; \quad t_{31} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}30}{1{,}50} = -0{,}100.$$

Valorile inițiale ale rotirilor nodurilor sînt $\left(\varphi_j^{\circ} = -\frac{\sum\limits_k \mathfrak{M}_{jk}}{\rho_j}\right)$:

$$\varphi_1^0 = -\frac{-177{,}7 - 49{,}4}{1{,}50} = +151{,}3; \quad \varphi_2^0 = -\frac{-177{,}7 - 71{,}6 - 88{,}5}{2{,}92} = +115{,}4;$$

$$\varphi_3^0 = -\frac{-49{,}4 - 71{,}6 - 3{,}4}{1{,}64} = +75{,}9.$$

Determinarea rotirilor finale de noduri s-a făcut pe schema din fig. IV. 139. Obținerea momentelor de capăt este prezentată în fig. IV. 140, *a* iar diagrama de momente încovoietoare în fig. IV. 140, *b*.

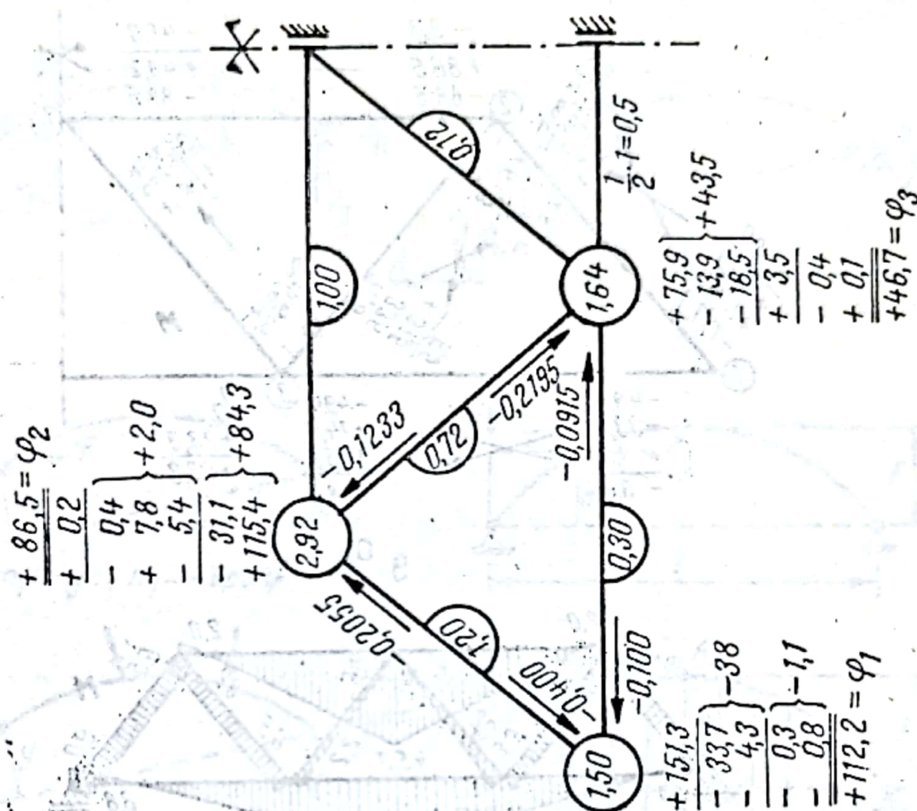


Fig. IV.139

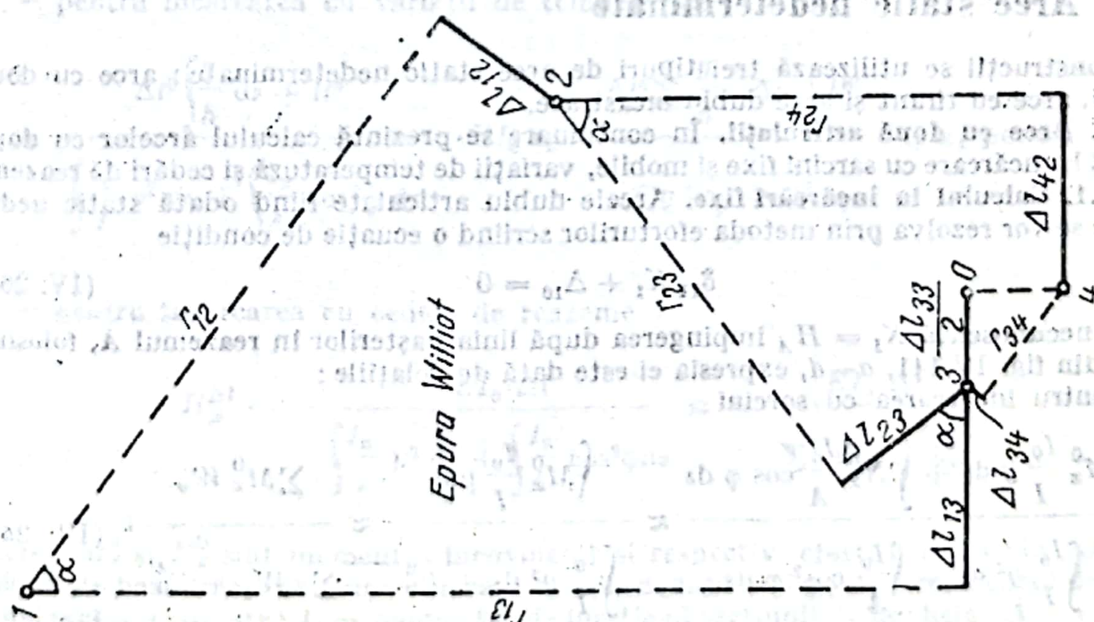


Fig. IV.138

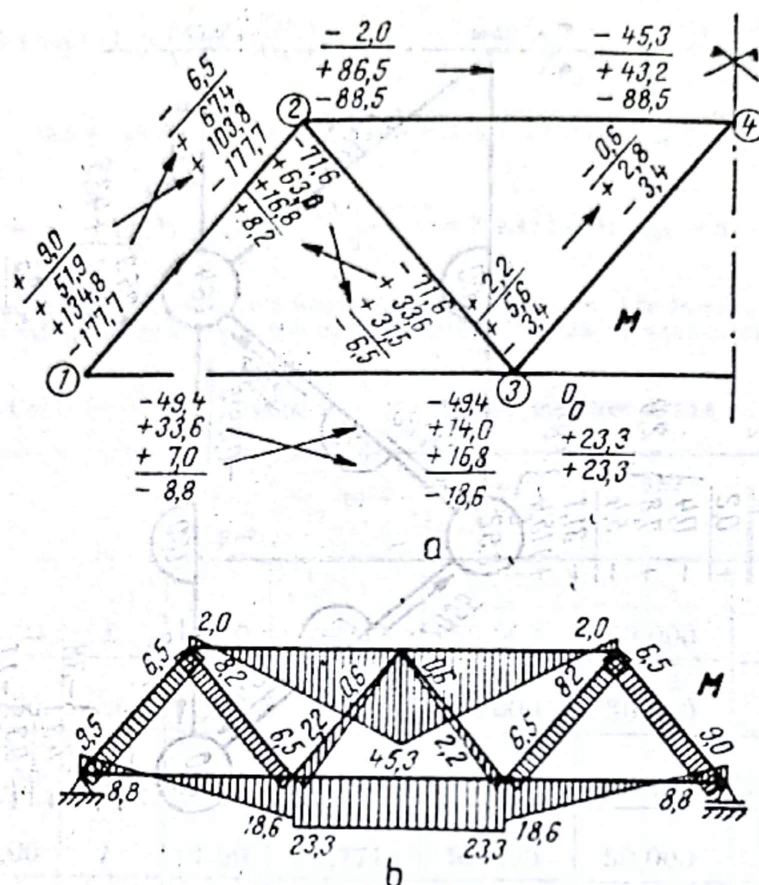


Fig. IV.140

5.4. Arce static nedeterminate

În construcţii se utilizează trei tipuri de arce static nedeterminate: arce cu două articulaţii, arce cu tirant şi arce dublu încastrate.

5.4.1. Arce cu două articulaţii. În continuare se prezintă calculul arcelor cu două articulaţii la încărcare cu sarcini fixe şi mobile, variaţii de temperatură şi cedări de reazem.

5.4.1.1. Calculul la încărcări fixe. Arcele dublu articulate fiind odată static nedeterminate se vor rezolva prin metoda eforturilor scriind o ecuaţie de condiţie

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0 \qquad \text{(IV. 268)}$$

Luînd ca necunoscută $X_1 = H_A$ împingerea după linia naşterilor în reazemul A, folosind notaţiile din fig. IV.141, $a-d$, expresia ei este dată de relaţiile:

— pentru încărcarea cu sarcini

$$H_A^v = \frac{\int M_x^0 \frac{I_0}{I} y \,\mathrm{d}s + \int N_x^0 \frac{I_0}{A} \cos\varphi \,\mathrm{d}s}{\int \frac{I_0}{I} y^2 \,\mathrm{d}s + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}s} \approx \frac{\int M_x^0 \frac{I_0}{I} y \mathrm{d}s}{\int \frac{I_0}{I} y^2 \,\mathrm{d}s + l i_0^2} \approx \frac{\Sigma M_x^0 W_y}{\Sigma y W_y + l i_0^2}; \qquad \text{(IV. 269)}$$

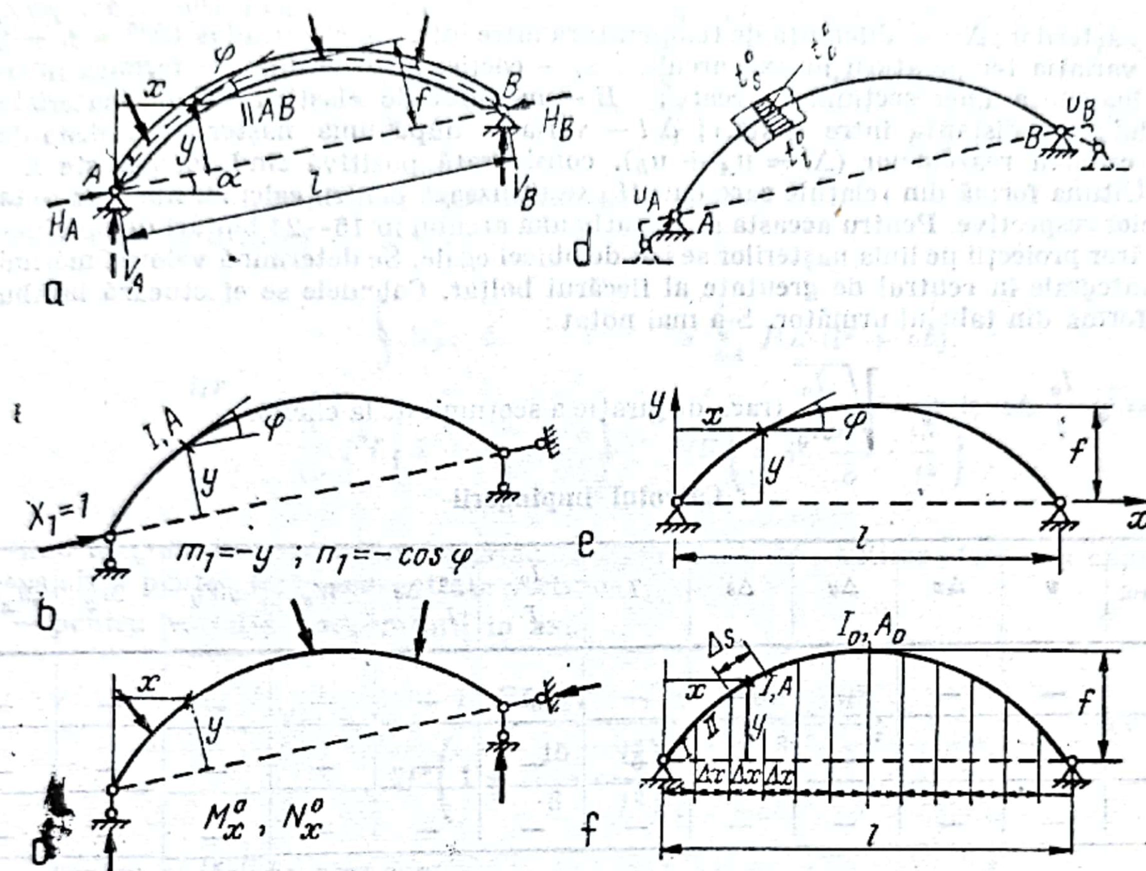


Fig. IV.141

— pentru încărcarea cu variaţii de temperatură

$$H_A^t = \frac{\Delta t^0 \int \frac{y}{h} ds + lt^0}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi \, ds} \cdot EI_0 \alpha_t \approx \frac{\Delta t^0 \sum \frac{y}{h} \cdot \Delta s + lt^0}{\sum y W_y + li_0^2} \cdot EI_0 \alpha_t \text{ pentru } \begin{cases} t_i^0 > t_s^0; \\ t^0 > 0 \end{cases} \tag{IV.270}$$

— pentru încărcarea cu cedări de reazeme

$$H_A^{\Delta l} = -\frac{EI_0 \cdot \Delta l}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi ds} \approx -\frac{EI_0 \cdot \Delta l}{\sum y W_y + li_0^2} \tag{IV.271}$$

în care: M_x^0 şi N_x^0 sînt momentul încovoietor şi respectiv efortul axial din sarcini pe sistemul de bază într-o secţiune oarecare de coordonate x şi y; I — momentul de inerţie al unei secţiuni curente; I_0 — momentul de inerţie al secţiunii de la cheie; A — aria unei secţiuni curente; φ — înclinarea tangentei la axa arcului într-o secţiune oarecare faţă de

linia naşterilor; Δt^0 — diferenţa de temperatură între intrados şi extrados ($\Delta t^0 = t_i^0 - t_s^0$); t^0 — variaţia temperaturii în axa arcului; α_t — coeficientul de dilatare termică liniară; h — înălţimea unei secţiuni oarecare; E — modulul de elasticitate al materialului arcului; l — distanţa între naşteri; Δl — variaţia după linia naşterilor a distanţei l prin cedarea reazemelor ($\Delta l = u_A + u_B$), considerată pozitivă cînd se măreşte l.

Ultima formă din relaţiile care dau H_A se utilizează pentru calculul numeric al integralelor respective. Pentru aceasta se împarte axa arcului în 16—24 bolţari de lungime Δs al căror proiecţii pe linia naşterilor se iau de obicei egale. Se determină valorile mărimilor din integrale în centrul de greutate al fiecărui bolţar. Calculele se efectuează întabulat sub forma din tabelul următor. S-a mai notat:

$W_y = y \dfrac{I_0}{I} \Delta s$ şi $i_0 = \sqrt{\dfrac{I_0}{A_0}}$ (raza de giraţie a secţiunii de la cheie).

Calculul împingerii

Bolţarul	y	Δx	Δy	Δs	I	$\frac{I_0}{I}$	$\frac{I_0}{I}\Delta s$	W_y	yW_y	M_x^0	$M_x^0 W_y$
I	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
II	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
									Σ		Σ

Formulele anterioare pentru împingerea H_A sînt valabile şi pentru *arcul cu naşterile la acelaşi nivel* (fig. IV.141, *e, f*), (la care pentru sarcini verticale, variaţii de temperatură şi cedări de reazeme $H_A = H_B = H$).

Expresiile eforturilor într-o secţiune oarecare x la arcul cu două articulaţii sînt

$$N_x = N_x^0 - H\cos\varphi;\; T_x = T_x^0 - H\sin\varphi;\; M_x = M_x^0 - Hy \qquad \text{(IV.272)}$$

în care N_x^0, T_x^0 şi M_x^0 sînt eforturile pe sistemul de bază, iar H este împingerea care se determină cu una din formulele date mai înainte.

Pentru sarcini verticale

$$N_x^0 = -T_x' \sin(\varphi+\alpha);\; T_x^0 = T_x' \cos(\varphi+\alpha);\; M_x^0 = M_x' \qquad \text{(IV.272a)}$$

unde T_x' şi M_x' sînt eforturi pe grinda dreaptă simplu rezemată de aceeaşi deschidere şi cu aceleaşi încărcări ca arcul. În general la arce T_x nu se calculează avînd valori mici.

Pentru *arce parabolice* cu articulaţiile la acelaşi nivel (fig. IV.142, *a*) a căror axă este dată de relaţia

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) \qquad \text{(IV.273)}$$

şi la care se admite $I \cos \varphi = I_0$ şi $A \cos \varphi = A_0$; numitorul din expresia împingerii este

$$\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \, ds = \frac{8}{15} f^2 l \left(1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i_0^2}{f^2}\right). \qquad \text{(IV.274)}$$

Pentru astfel de arce, împingerea este dată de expresiile:

— pentru încărcarea cu sarcini

$$H^p = \frac{\int M_x^0 y \, dx}{\frac{8}{15} f^2 l \left(1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i_0^2}{f^2}\right)} = \frac{5 \sum_1^n Pab\,(l^2 + ab)}{8 f l^3 \left(1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i_0^2}{f^2}\right)} \qquad \text{(IV.275)}$$

M_x^0 fiind diagrama de momente pe grinda simplu rezemată; ultima formă a expresiei este valabilă pentru forţe concentrate verticale);

— pentru variaţia temperaturii în axă

$$H^t = \frac{15\, E I_0 \alpha_t t^\circ}{8 f^2 \left(1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i_0^2}{f^2}\right)} \approx \frac{15\, E I_0 \alpha_t t^\circ}{8 f^2}; \qquad \text{(IV.276)}$$

— pentru cedări de reazeme

$$H^{\Delta l} = - \frac{15 E I_0 \cdot \Delta l}{8 f^2 l \left(1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i_0^2}{f^2}\right)} \approx - \frac{15\, E I_0 \Delta l}{8 f^2 l}. \qquad \text{(IV.277)}$$

Arce dublu articulate la care momentul de inerţie variază după legea $I \cos \varphi = I_0$ nu se folosesc deoarece grosimea arcului ar creşte spre reazeme. Formulele date folosesc însă la predimensionări şi pentru arce cu axa apropiată de parabolă. Cu aceste formule s-au întocmit tabele pentru cazuri uzuale de încărcare.

Pentru *arce circulare* cu secţiune constantă ($I = I_0$, $A = A_0$) (fig. IV. 142, *b*) integralele din expresia împingerii se pot efectua exact trecînd la coordonate polare folosind relaţiile

$$x = r \sin \varphi; \quad y = r(\cos \varphi - \cos \varphi_0); \quad ds = r d\varphi. \qquad \text{(IV.278)}$$

Astfel, numitorul de la expresia generală a împingerii [v. relaţia (IV.269)] poate fi scris sub forma

$$\int y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \, ds = (1 + \nu) \int y^2 ds = \left[1 + \nu' \left(\frac{i_0}{f}\right)^2\right] \cdot \frac{A r^3}{n^2} \qquad \text{(IV.279)}$$

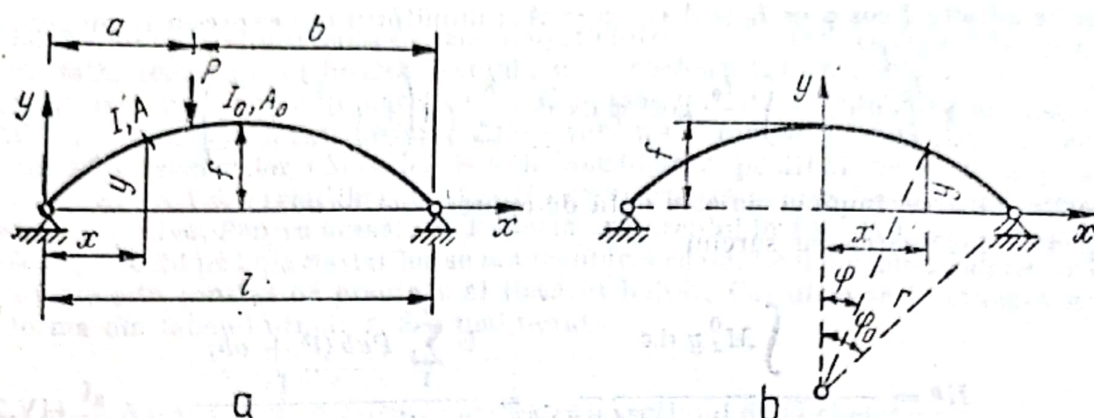


Fig. IV.142

în care valorile ν', A şi n^2 se iau din tabelul IV.34 în funcţie de pleoştire (f/l) [31].

Tabelul IV.34

Coeficienţi pentru calculul arcelor circulare

f/l	1/2,5	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8
ν'	1,419	1,522	1,651	1,724	1,780	1,837
A	2,2520	0,9568	0,2424	0,0819	0,0334	0,0081
n^2	2,6896	2,0863	1,5625	1,3456	1,2346	1,1289

5.4.1.2. Linii de influenţă. Din ecuaţia de condiţie pentru încărcarea cu o sarcină mobilă $P = 1$ (fig. IV.143, *a*), $(\Delta_{10} = \delta_{1i})$ rezultă expresia necunoscutei sub forma:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1i} = 0;\ X_1 = -\frac{\delta_{1i}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{i1}}{\delta_{11}} = \frac{\overset{*}{\delta}_{i1}}{\delta_{11}} = H \qquad \text{(IV.280)}$$

în care s-a folosit reciprocitatea deplasărilor din forţe unitare, $\delta_{1i} = \delta_{i1}$. *Linia de influenţă a împingerii H* se obţine împărţind ordonatele liniei elastice pe verticală $\overset{*}{\delta}_{i1}$ a sistemului de bază din încărcarea cu $X_1 = -1$(fig. IV.143, *b*) la o constantă δ_{11} (stabilită la sarcini fixe). Linia elastică $\overset{*}{\delta}_{i1}$ se obţine mai simplu ca diagramă de momente fictive pe grinda conjugată (fig. IV.143, *c*) încărcată cu sarcinile elastice corespunzătoare diagramei $\overset{*}{m}_1 = +y$ din $X_1 = -1$. Sarcina elastică distribuită într-o secţiune oarecare x pe grinda conjugată, multiplicată cu EI_0, are expresia

$$w_y = \frac{I_0}{I}\, y\, \frac{ds}{dx} = \frac{I_0}{I\cos\varphi}\, y. \qquad \text{(IV.281)}$$

Momentul încovoietor fictiv într-o secţiune oarecare i reperată prin x_i şi deci linia elastică $EI_0\delta_{i1}^*$ are expresia

$$EI_0\delta_{i1}^* = \frac{x_i}{l}\int_0^l w_y(l-x)\mathrm{d}x - \int_0^{x_i} w_y(x_i-x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_i}{l}\sum_0^l W_y(l-x) - \sum_0^{xi} W_y(x_i-x) \qquad \text{(IV.282)}$$

cu care se obţine diagrama din fig. IV.143, *d* care, pentru a obţine linia de influenţă se împarte la constanta $EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I}y^2\mathrm{d}s + \frac{I_0}{A}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}s = \sum y\,W_y + li_0^2$.

Pentru *arce parabolice* la care se admite $I\cos\varphi = I_0$, expresia liniei de influenţă a împingerii rezultă sub forma

$$X_1 = H = \frac{5}{8}\cdot\frac{l}{f}\cdot\frac{1}{1+\frac{15}{8}\left(\frac{i_0}{f}\right)^2}\times \xi\,\xi'(1+\xi\xi') \quad \text{cu} \quad \xi = x/l;\ \xi' = x'/l. \qquad \text{(IV.283)}$$

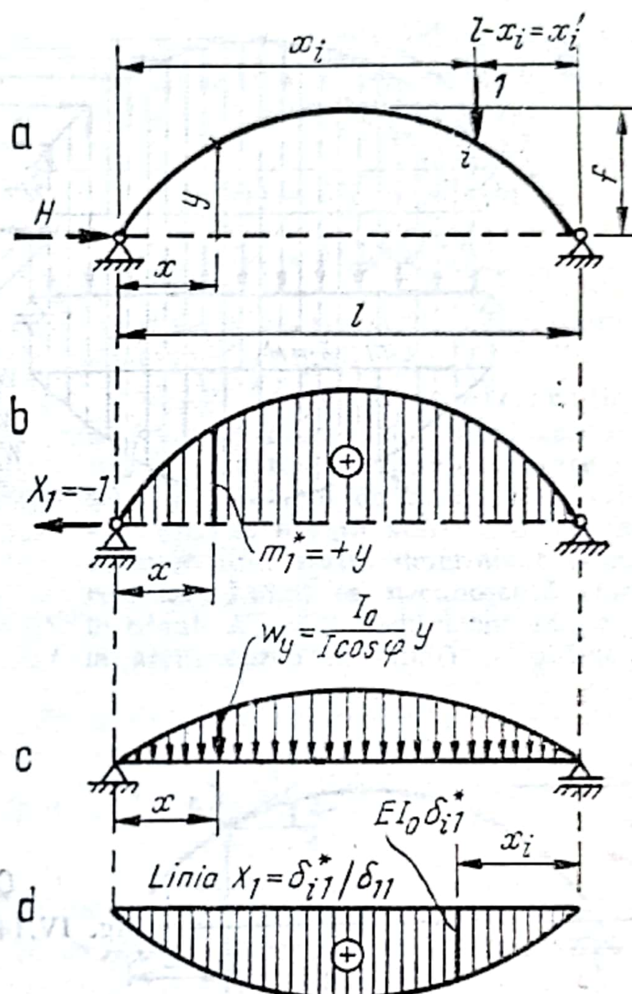


Fig. IV.143

În cazurile obişnuite în care integralele respective se efectuează greu se trece la calculul numeric pe bolţari, înlocuind sarcina elastică distribuită cu sarcini elastice concentrate

$$W_y = w_y\cdot\Delta x = \frac{I_0}{I}\,y\,\frac{\Delta x}{\cos\varphi} = \frac{I_0}{I}\,y\cdot\Delta s \qquad \text{(IV.284)}$$

cu ajutorul cărora se determină diagrama de momente încovoietoare pe grinda conjugată care prezintă valori reale în secţiunile ce delimitează bolţarii. Calculul analitic sub forma prezentată se efectuează în tabele.

Linia de influenţă a împingerii în cazul folosirii sarcinilor elastice concentrate se poate determina şi prin calcul grafic ca în fig. IV. 144, *a*. Cu notaţiile din figură se obţine momentul încovoietor pe grinda conjugată $EI_0\delta_{i1}^* = \eta\cdot h$ (fig. IV. 144, *b* şi *c*) iar $\sum y\,W_y = \mathrm{d}h$ (fig. IV.144 *d* şi *e*) ca moment static al sarcinilor elastice faţă de linia naşterilor şi deci :

$$H = \frac{\eta_i h}{\mathrm{d}h + li_0^2} = \frac{\eta_i}{d + li_0^2/h} = \frac{\eta_i}{d+c} = \eta_i \qquad \text{(IV.285)}$$

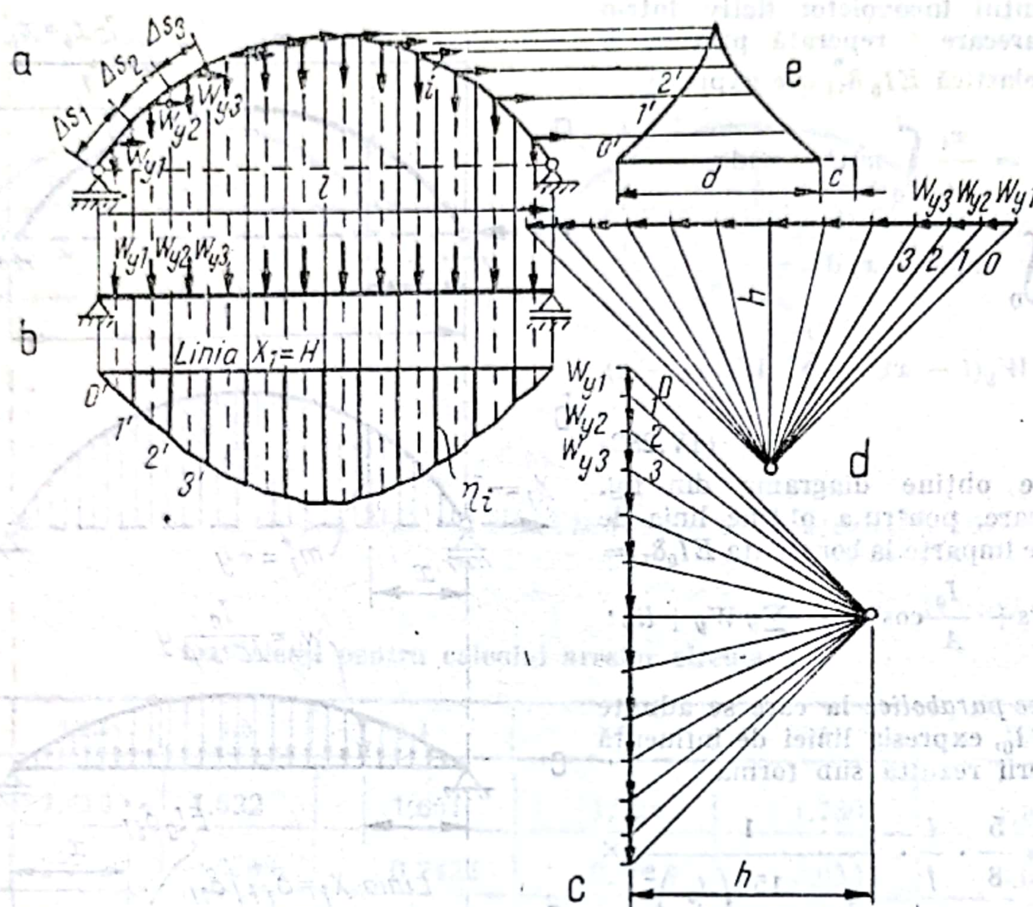


Fig. IV.144

($c = \dfrac{li_0^2}{h}$ introdus pe figură la scara aleasă).

Rezultă că linia de influență a împingerii H se obține grafic sub forma diagramei cuprinse între linia de închidere și poligonul funicular (v. fig. IV.144, *b*), ordonatele η_i fiind măsurate la scara $d + c = 1$.

Liniile de influență ale eforturilor într-o secțiune oarecare k se obțin pe baza relațiilor generale de suprapunere a efectelor pe sistemul de bază

$$N_k = N_k^0 - H \cos \varphi_k = - \ T_k' \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k \qquad \text{(IV.286)}$$

$$M_k = M_k^0 - H \cdot y_k$$

în care: T_k' și M_k^0 sînt liniile de influență ale forței tăietoare și respectiv momentului încovoietor în secțiunea k pe grinda dreaptă simplu rezemată; H este linia de influență a împingerii; φ_k și y_k sînt constante pentru secțiunea k. Suprapunerea acestor linii de influență se poate urmări pe fig. IV. 145, a—c, calculele efective făcîndu-se în tabele.

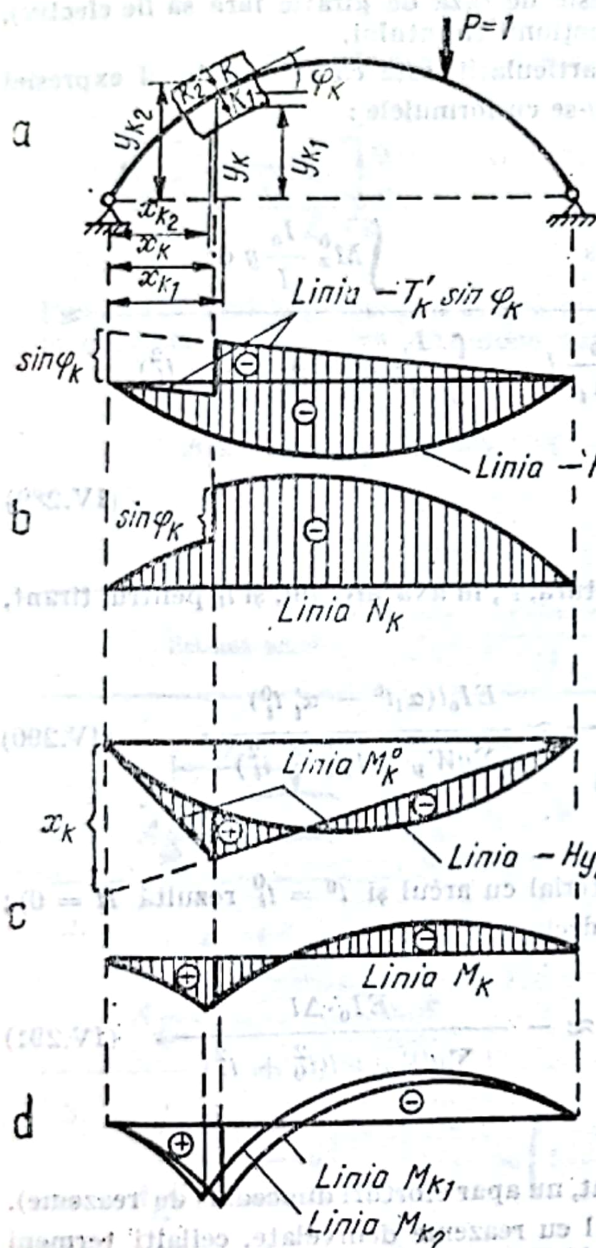


Fig. IV.145

Liniile de influență ale momentelor la limitele sîmburelui central, k_1 și k_2, se obțin analog (fig. IV.145, *d*):

$$M_{k_1} = M_{k1}^0 - H \cdot y_{k_1};$$

$$M_{k_2} = M_{k2}^0 - H \cdot y_{k_2}$$

unde y_{k_1} și y_{k_2} sînt ordonatele limitelor sîmburelui central.

5.4.2. Arce cu tirant. Arcul cu tirant se folosește atunci cînd împingerile nu pot fi preluate de corpurile pe care reazemă arcul. Arcul cu tirant (fig. IV.146) este interior o dată static nedeterminat, exterior fiind static determinat (simplu rezemat). Luînd ca necunoscută efortul în tirant $X_1 = H$ (echivalent împingerii la arcul dublu articulat) se obține ca

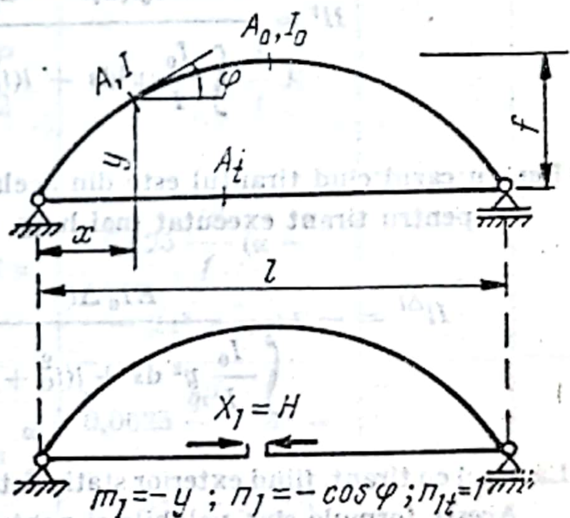


Fig. IV.146

sistem de bază arcul simplu rezemat (v. fig. IV.146). În ecuația de condiție:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0 \qquad \text{(IV.287)}$$

termenul liber Δ_{10} este același ca la arcul cu două articulații, deoarece sistemul de bază este același, iar în expresia coeficientului necunoscutei se introduce și efectul deformării axiale a tirantului din $X_1 = 1$:

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 \mathrm{d}s + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi \, \mathrm{d}s + \int \frac{EI_0}{E_t A_t} \mathrm{d}s \approx \Sigma y W_y + l(i_0^2 + i_t^2) \qquad \text{(IV.288)}$$

şi care s-a notat $EI_0/E_tA_t = i_t^2$ (avînd expresie de rază de giraţie fără să fie efectiv), E_t şi A_t sînt modulul de elasticitate şi aria secţiunii tirantului.

Deci, deosebirea faţă de arcul cu două articulaţii este că la numitorul expresiei împingerii se adaugă li_t^2, împingerea calculîndu-se cu formulele:

— pentru încărcarea cu sarcini

$$H^p = \frac{\int M_x^0 \frac{I_0}{I} y\,ds + \int N_x^0 \frac{I_0}{A}\cos\varphi\,ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2\,ds + \int \frac{I_0}{A}\cos^2\varphi\,ds + \frac{EI_0}{E_tA_t} l} \approx \frac{\int M_x^0 \frac{I_0}{I} y\,ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l(i_0^2 + i_t^2)} \approx$$

$$\approx \frac{\sum M_x^0 W_y}{\sum yW_y + l(i_0^2 + i_t^2)}; \qquad \text{(IV.289)}$$

— pentru încărcarea cu variaţii de temperatură, $t°$, în axa arcului, şi t_t^0 pentru tirant, care are coeficientul de dilatare termică α_t'

$$H^t = \frac{EI_0 l(\alpha_t t^0 - \alpha_t' t_t^0)}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l(i_0^2 + i_t^2)} \approx \frac{EI_0 l(\alpha_t t^0 - \alpha_t' t_t^0)}{\sum yW_y + l(i_0^2 + i_t^2)}. \qquad \text{(IV.290)}$$

(Pentru cazul cînd tirantul este din acelaşi material cu arcul şi $t^0 = t_t^0$ rezultă $H = 0$);

— pentru tirant executat mai lung cu Δl decît l

$$H^{\Delta l} = -\frac{EI_0\,\Delta l}{\int \frac{I_0}{I} y^2\,ds + l(i_0^2 + i_t^2)} \approx -\frac{EI_0 \cdot \Delta l}{\sum yW_y + l(i_0^2 + i_t^2)}. \qquad \text{(IV.291)}$$

(La arcul cu tirant, fiind exterior static determinat, nu apar eforturi din cedări de reazeme).

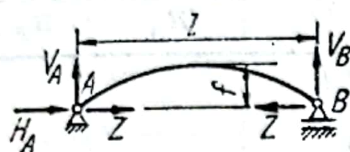
Aceste formule sînt valabile şi pentru arcul cu reazeme denivelate, ceilalţi termeni care intervin avînd semnificaţia dată la arcul dublu articulat.

Pentru *arce parabolice*, avînd $I\cos\varphi = I_0$ şi $A\cos\varphi = A_0$ şi reazeme la acelaşi nivel, integralele din expresia împingerii se pot efectua analitic, obţinînd următoarele expresii echivalente formulelor

$$H^p = \frac{\int M_x^0 y\,dx}{\frac{8}{15} f^2 l + l(i_0^2 + i_t^2)} = \frac{f\sum Pab(l^2 + ab)}{3l^2\left[\frac{8}{15} f^2 l + l(i_0^2 + i_t^2)\right]} \qquad \text{(IV.292)}$$

Tabelul IV.35

Formule pentru calculul arcelor parabolice dublu articulate



Arce cu tirant: $K = \dfrac{1}{1 + 1{,}876 \dfrac{I_c}{f^2}\left(\dfrac{E}{E_t A_t} + \dfrac{n}{A_c}\right)}$

Pentru calculul împingerii la arcele dublu articulate, pentru cazul încărcărilor verticale, în expresia lui Z se va introduce valoarea K_1 în loc de K.

Arce dublu articulate: $K_1 = \dfrac{1}{1 + 1{,}876 \dfrac{I_c \cdot n}{A_c f^2}}$

Schema arcului	Valoarea reacțiunii		Efortul în tirant Z	Împingerea	
	V_A	V_B		H_A	H_B
1. ($l/2$, P, A, B)	$\dfrac{P}{2}$	$\dfrac{P}{2}$	$0{,}1953\ P\dfrac{l}{f}K$		
2. (a, P, $a/l=\alpha$, A, B)	$P(1-\alpha)$	$P\alpha$	$0{,}625\dfrac{Pl}{f}(\alpha - 2\alpha^3 + \alpha_4)K$		
3. (q, a, $a/l=\alpha$, A, B)	$qa\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$qa\dfrac{\alpha}{2}$	$0{,}0625\dfrac{ql^2}{f}(5\alpha^2 - 5\alpha^4 + 2\alpha^5)K$		
4. (q, $l/2$, A, B)	$\dfrac{5}{24}ql$	$\dfrac{1}{24}ql$	$0{,}0228\dfrac{ql^2}{f}K$		
5. (q, A, B)	$\dfrac{ql}{6}$	$\dfrac{ql}{6}$	$0{,}0106\dfrac{ql^2}{f}K$		

Tabelul IV.35 (continuare)

Schema arcului	Valoarea reacțiunii		Efortul în tirant Z	Împingerea	
	V_A	V_B		H_A	H_B
6.	$-\frac{Pc}{l}$	$+\frac{Pc}{l}$	$0{,}625\,PK\left(\frac{4}{5}-\alpha^3+\frac{\alpha^5}{5}\right)$; $\alpha=\sqrt{1-\frac{c}{f}}$	P	
7.	$-\frac{Pf}{l}$	$+\frac{Pf}{l}$	$\frac{PK}{2}$	P	
8.	$-\frac{qf^2}{2l}$	$+\frac{qf^2}{2l}$		$-0{,}714\,qf$	$0{,}286qf$
9.	$-\frac{qf}{6l}$	$\frac{qf}{6l}$		$-0{,}401\,qf$	$0{,}099qf$
10.	—	—		$-\frac{15}{8}\cdot\frac{EI_c}{f^2l}\Delta h$	
11.	$-\frac{M}{l}$	$+\frac{M}{l}$	$0{,}625\,\frac{M}{f}K$		
12.	$\frac{3}{8}ql$	$\frac{ql}{8}$	$0{,}0625\,\frac{ql^2}{f}K$		
13.	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$0{,}125\,\frac{ql^2}{f}K$		

(M_x^0 fiind diagrama de momente pe grinda simplu rezemată; ultima formă a expresiei este valabilă pentru sarcini concentrate verticale);

$$H^t = \frac{EI_0(\alpha_t t^0 - \alpha_t' t_t^0)}{\frac{8}{15} f^2 + (i_0^2 + i_t^2)}; \qquad \text{(IV.293)}$$

$$H^{\Delta l} = -\frac{EI_0 \cdot \Delta l}{\frac{8}{15} f^2 l + l(i_0^2 + i_t^2)}, \qquad \text{(IV.294)}$$

Pentru arcul parabolic încărcat cu sarcină uniform distribuită p, împingerea este dată de expresia

$$H^p = \frac{pl^2}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i_0^2 + i_t^2}{f^2}} \qquad \text{(IV.295)}$$

(mai mică decît la arcul cu trei articulaţii la care $H^0 = pl^2/8f$).

Pentru determinarea eforturilor din sarcini fixe şi a liniilor de influenţă se procedează ca la arcul cu două articulaţii introducînd efectul deformării tirantului la numitorul expresiei împingerii ca în formulele de mai înainte.

În tabelul IV. 35 sînt prezentate sistematizat formule de calcul pentru arcele parabolice dublu articulate (arce cu tirant).

5.4.3. **Arce dublu încastrate.** Se prezintă în continuare calculul arcelor dublu încastrate la încărcare cu sarcini fixe şi mobile, variaţii de temperatură şi cedări de reazeme.

5.4.3.1. **Alegerea sistemului de bază şi a necunoscutelor.** Arcele dublu încastrate fiind de trei ori static nedeterminate se rezolvă prin metoda eforturilor pentru un sistem de bază oarecare folosind ecuaţiile de condiţie sub forma generală

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{30} = 0. \end{cases} \qquad \text{(IV.296)}$$

Simplificări importante se obţin utilizînd un sistem de bază la care necunoscutele sînt transferate, prin intermediul unor braţe infinit rigide (fig. IV.147,*b*), în centrul elastic al arcului determinat din condiţiile de anulare a coeficienţilor secundari. În acest caz, ecuaţiile sînt independente şi necunoscutele se separă

$$X_1 = -\Delta_{10}/\delta_{11}; \quad X_2 = -\Delta_{20}/\delta_{22}; \quad X_3 = -\Delta_{30}/\delta_{33}. \qquad \text{(IV.297)}$$

Poziţia centrului elastic şi direcţiile după care acţionează necunoscutele pentru un arc nesimetric la care se alege sistemul de bază din fig. IV.147, c, rezultă din condiţiile

$$\int y \frac{I_0}{I}\,ds = \int y\,dw \approx \sum y W = 0$$

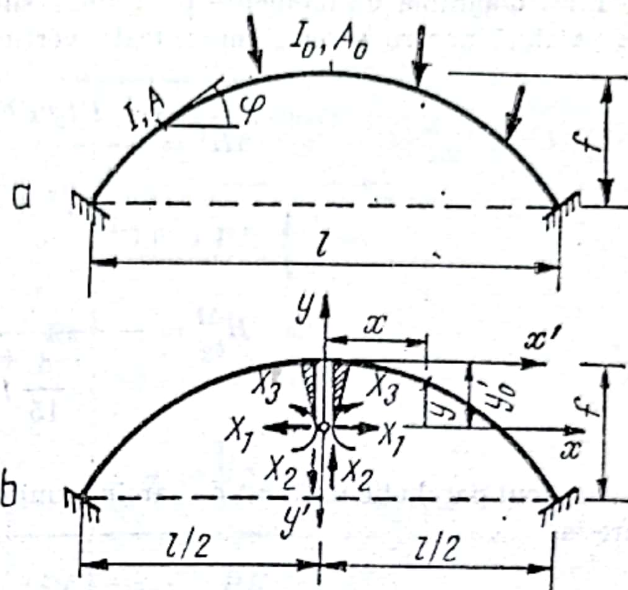
$$\int x \frac{I_0}{I}\,ds = \int x\,dw \approx \sum x W = 0$$

$$\int xy \frac{I_0}{I}\,ds = \int xy\,dw \approx \sum xy W = 0 \qquad \text{(IV.298)}$$

în care s-a notat $dw = \frac{I_0}{I}\,ds$ sarcina elastică elementară şi $W = \frac{I_0}{I}\Delta s$ sarcinile elastice concentrate pe bolţari.

Folosind sistemul de axe iniţial $(x'\,y')$ rezultă

$$x'_0 = \frac{\int x'\,dw}{\int dw} \approx \frac{\sum x'W}{\sum W}; \quad y'_0 = \frac{\int y'\,dw}{\int dw} \approx \frac{\sum y'W}{\sum W}; \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\int xy_1\,dw}{\int x^2\,dw} \approx \frac{\sum xy_1 W}{\sum x^2 W}. \qquad \text{(IV.299)}$$



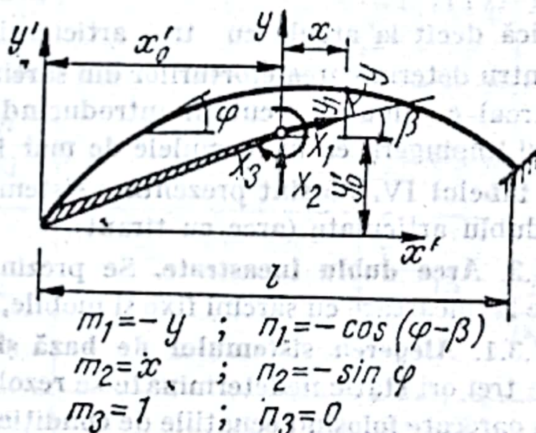


Fig. IV.147

La arce simetrice, ultima condiţie (tg β) este îndeplinită pentru axele formate din axa de simetrie şi normala pe ea în centrul elastic care se află pe axa de simetrie la o distanţă faţă de cheie (fig. IV.147.b)

$$y'_0 = \frac{\int y'\,dw}{\int dw} \approx \frac{\sum y'W}{\sum W}. \qquad \text{(IV.300)}$$

La arce simetrice se utilizează un sistem de bază simetric (v.fig.IV.147,*b*) care permite efectuarea calculelor pe jumătate de arc.

5.4.3.2. Calculul la încărcări fixe. Expresiile necunoscutelor în centrul elastic pentru sistemul de bază şi notaţiile din fig. IV.148, *c* sînt:

— pentru încărcarea cu sarcini

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} M_x^0 y\, ds + \int \frac{I_0}{A} N_x^0 \cos\varphi\, ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2\, ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi\, ds} \approx \frac{\int \frac{I_0}{I} M_x^0 y\, ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2\, ds + l i_0^2} \approx \frac{\sum M_x^0 W_y}{\sum y W_y + l i_0^2}$$

$$X_2 = -\frac{\int \frac{I_0}{I} M_x^0 x\, ds - \int \frac{I_0}{A} N_x^0 \sin\varphi\, ds}{\int \frac{I_0}{I} x^2\, ds + \int \frac{I_0}{A} \sin^2\varphi\, ds} \approx -\frac{\int \frac{I_0}{I} M_x^0 x\, ds}{\int \frac{I_0}{I} x^2\, ds} \approx -\frac{\sum M_x^0 W_x}{\sum x W_x}$$

$$X_3 = -\frac{\int \frac{I_0}{I} M_x^0\, ds}{\int \frac{I_0}{I}\, ds} \approx -\frac{\sum M_x^0 W}{\sum W} \qquad \text{(IV.301)}$$

(pentru arce nesimetrice se înlocuieşte $\cos\varphi$ cu $\cos(\varphi - \beta)$);

— pentru încărcare cu variaţii de temperatură (fig. IV.148, *a*)

$$X_1 = \frac{\frac{1}{h_0}\int \Delta t^0 \frac{h_0}{h} y\, ds + \int t^0\, dx}{\int \frac{I_0}{I} y^2\, ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi\, ds} \cdot EI_0\alpha \approx \frac{\frac{1}{h_0}\sum \Delta t^0 \frac{h_0}{h} y \cdot \Delta s + l t^0}{\sum y W_y + l i_0^2} \cdot EI_0\alpha$$

$$X_2 = -\frac{\int \Delta t^0 \frac{x}{h}\, ds + \int t^0 \operatorname{tg}\varphi\, dx}{\int \frac{I_0}{I} x^2\, ds + \int \frac{I_0}{A} \sin^2\varphi\, ds} \cdot EI_0\alpha \approx -\frac{\sum \Delta t^0 \frac{x}{h} \Delta s + \sum t^0 \operatorname{tg}\varphi \Delta x}{\sum x W_x} \cdot EI_0\alpha \qquad \text{(IV.302)}$$

$$X_3 = -\frac{\frac{1}{h_0}\int \Delta t^0 \frac{h_0}{h}\, ds}{\int \frac{I_0}{I}\, ds} \cdot EI_0\alpha \approx -\frac{\frac{1}{h_0}\sum \Delta t^0 \frac{h_0}{h} \Delta s}{\sum W}; \quad t^0 > 0; \ \Delta t^0 = t_i^0 - t_s^0 > 0$$

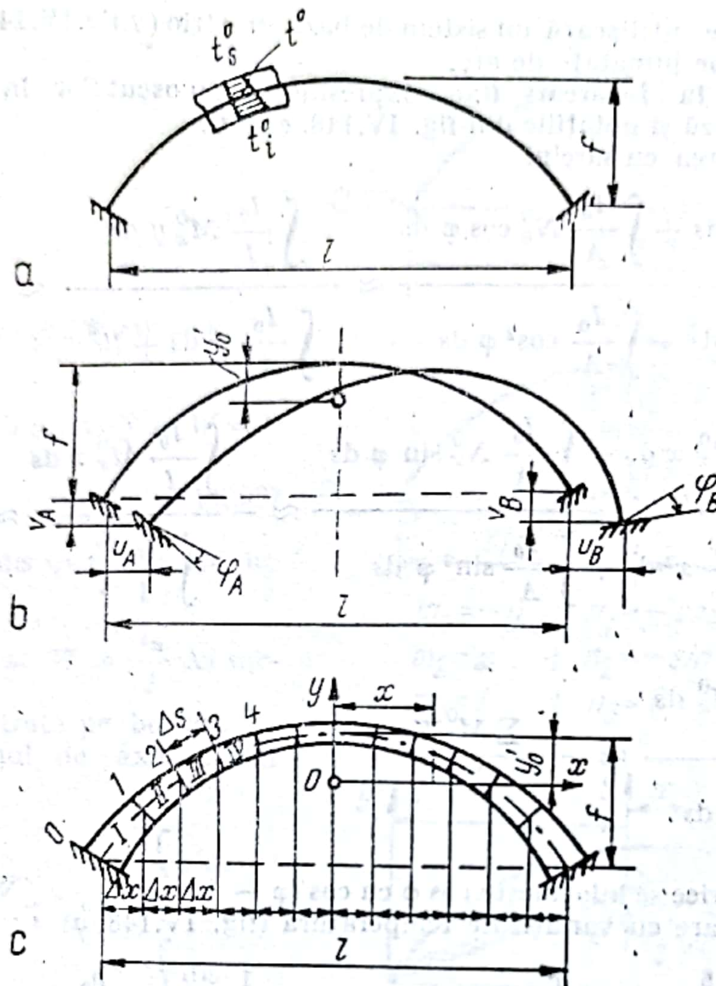


Fig. IV.148

care, pentru arce simetrice încărcate cu variaţii de temperatură simetrice, devin

$$X_1 = \frac{\dfrac{\Delta t^0}{h_0}\displaystyle\int \frac{h_0}{h}\, y\,ds + l t^0}{\displaystyle\int \frac{I_0}{I}\, y^2 ds + \int \frac{I_0}{A}\cos^2\varphi\, ds} \cdot EI_0\,\alpha \approx \frac{\dfrac{\Delta t^0}{h_0}\displaystyle\sum \frac{h_0}{h}\, y\,\Delta s + l t^0}{\sum y W_y + l t_0^2} \cdot EI_0\,\alpha\,; \tag{IV.303}$$

$$X_2 = 0\,; \quad X_3 = -\frac{\dfrac{\Delta t^0}{h_0}\displaystyle\int \frac{h_0}{h}\, ds}{\displaystyle\int \frac{I_0}{I}\, ds} \cdot EI_0\,\alpha \approx -\frac{\dfrac{\Delta t^0}{h_0}\displaystyle\sum \frac{h_0}{h}\,\Delta s}{\sum W}\,;$$

— pentru încărcarea cu cedări de reazeme (fig. IV.148, *b*)

$$X_1 \approx \frac{(u_A - u_B) + (f - y_0')(\varphi_A - \varphi_B)}{\sum y W_y + l i_0^2} \cdot EI_0;$$

$$X_2 \approx -\frac{(v_A - v_B) + 0{,}5\, l(\varphi_A + \varphi_B)}{\sum x W_x} \cdot EI_0; \qquad \text{(IV.304)}$$

$$X_3 \approx \frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{\sum W} EI_0$$

în care: M_x^0 și N_x^0 sînt momentul încovoietor și respectiv efortul axial într-o secțiune oarecare de coordonate x și y în sistemul de axe prin centrul elastic; I, A și h — momentul de inerție, aria și respectiv înălțimea unei secțiuni curente; I_0, A_0 h_0, i_0 — momentul de inerție, aria, înălțimea și respectiv raza de girație a secțiunii de la cheie; φ — înclinarea tangentei într-o secțiune oarecare față de orizontală; $\Delta t°$ — diferența de temperatură între intrados și extrados ($\Delta t^0 = t_i^0 - t_s^0$); t^0 — variația temperaturii în axa arcului; α — coeficientul de dilatare termică liniară; E — modulul de elasticitate al materialului; u, v și φ sînt cedări de reazeme considerate pozitive ca în figură.

Ultima formă a expresiilor necunoscutelor, pentru fiecare încărcare în parte, corespunde calculului numeric al integralelor prin împărțirea arcului în bolțari de lungime Δs. În aceste expresii s-a notat:

$$W = \frac{I_0}{I}\Delta s; \quad W_y = y\,W = y\frac{I_0}{I}\Delta s; \quad W_x = xW = x\frac{I_0}{I}\Delta s. \qquad \text{(IV.305)}$$

Calculul necunoscutelor se face întabulat sub forma tabelului de la pag. 760 sus, determinînd în prealabil valorile mărimilor care intervin în dreptul centrelor de greutate ale bolțarilor.

Determinarea eforturilor finale se face prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază cu relațiile

$$M_x = M_x^0 - X_1 y + X_2 x + X_3$$
$$N_x = N_x^0 - X_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi \qquad \text{(IV.306)}$$
$$T_x = T_x^0 - X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi$$

care, în calculul numeric efectuat întabulat (v. tabelul de la pag. 760 jos), se aplică pentru secțiunile ce delimitează bolțarii ($\sin\varphi$ este pozitiv pe jumătatea din stînga și negativ pe jumătatea din dreapta arcului). Aplicarea acestor relații pe un sistem de bază fără împingeri (console), în cazul încărcărilor a căror curbă funiculară este apropiată de axa arcului, cere un calcul cît mai exact al necunoscutelor cu multe cifre semnificative.

Pentru *arce parabolice* simetrice, la care $I\cos\varphi = I_0$ și $A\cos\varphi = A_0$ (fig. IV. 149,*a*), integralele de la numitorii necunoscutelor se pot efectua exact folosind ecuația axei arcului în raport cu sistemul de axe prin centrul elastic (a cărui poziție este $y_0' = f/3$)

$$y = \frac{1}{3} f - \frac{4f}{l^2} x^2 \qquad \text{(IV.307)}$$

Determinarea poziției centrului elastic și a necunoscutelor

Bolțarul	x	y'	Δx	Δy	Δs	A	I	$\frac{I_0}{I}$	W	Wy'	$y = y_0' - y'$	W_y	yW_y	W_x	xW_x	M_x^0	$M_x^0 \cdot W_y$	$M_x^0 \cdot W_x$	$M_x^0 \cdot W$
I	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
II	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
									Σ	Σ			Σ		Σ		Σ	Σ	Σ

Calculul eforturilor din sarcini fixe

Secțiunea	x	y	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$M_x = M_x^0 - X_1 y + X_2 x + X_3$					$N_x = N_x^0 - X_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi$				$T_x = T_x^0 - X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi$			
					M_x^0	$-X_1 y$	$X_2 x$	X_3	M_x	N_x^0	$-X_1 \cos\varphi$	$-X_2 \sin\varphi$	N_x	T_x^0	$-X_1 \sin\varphi$	$X_2 \cos\varphi$	T_x
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

obținîndu-se

$$EI_0\,\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I}\,y^2\,ds + \int \frac{I_0}{A}\cos^2\varphi\,ds = \frac{4}{45}\,lf^2 + li_0^2\,;$$

(IV.308)

$$EI_0\,\delta_{22} = \int \frac{I_0}{I}\,x^2\,ds = \frac{l^3}{12}\,;\quad EI_0\,\delta_{33} = \int \frac{I_0}{I}\,ds = l.$$

Numărătorii din expresiile necunoscutelor se pot determina și ei prin integrare directă pentru fiecare caz de încărcare în parte, introducînd expresia respectivă M_x^0 a momentului pe sistemul de bază.

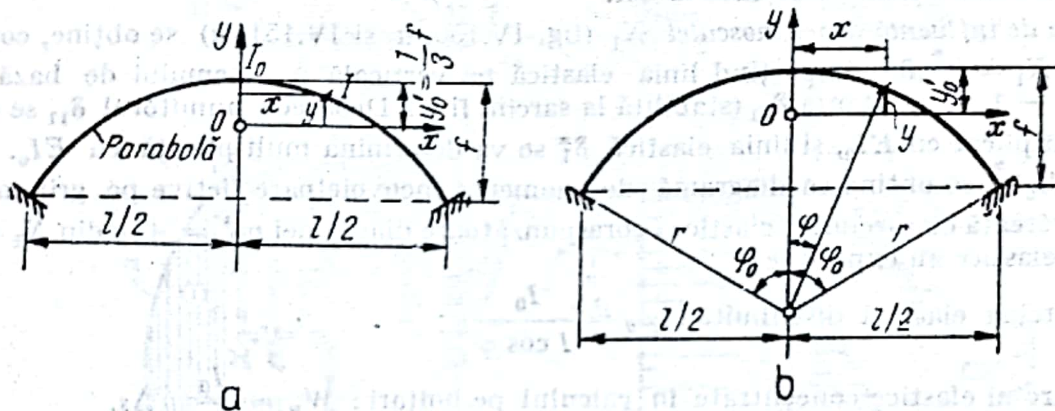


Fig. IV.149

Pentru *arce circulare* simetrice de secțiune constantă $I = I_0$ (fig. IV. 149, *b*) pe baza relațiilor

$$ds = r\,d\varphi\,;\quad x = r\sin\varphi\,;\quad y = r\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right);\quad y_0' = r\left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right);$$

(IV.309)

se obțin următoarele expresii pentru numitorii necunoscutelor

$$EI\,\delta_{11} = r^3\varphi_0\left[1 + \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\cos\varphi_0 - 2\left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\right)^2\right] + i_0^2\,r\,\varphi_0\left(1 + \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\cos\varphi_0\right);$$

(IV.310)

$$EI\,\delta_{22} = \frac{r\varphi_0}{\sin^2\varphi_0}\left(1 - \frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}\cos\varphi_0\right);\quad EI\,\delta_{33} = 2\,r\,\varphi_0.$$

5.4.3.3. Linii de influență. Pentru necunoscutele X_1, X_2 și X_3 în centrul elastic, ecuațiile de condiție fiind independente

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1i} = 0\,;\quad \delta_{22}X_2 + \delta_{2i} = 0\,;\quad \delta_{33}X_3 + \delta_{3i} = 0, \qquad \text{(IV.311)}$$

rezultă expresiile generale ale liniilor de influenţă sub forma:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1i}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{i1}}{\delta_{11}} = \frac{\overset{*}{\delta}_{i1}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{2i}}{\delta_{22}} = -\frac{\delta_{i2}}{\delta_{22}} = \frac{\overset{*}{\delta}_{i2}}{\delta_{22}};$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3i}}{\delta_{33}} = -\frac{\delta_{i3}}{\delta_{33}} = \frac{\overset{*}{\delta}_{i3}}{\delta_{33}} \qquad \text{(IV.311a)}$$

în care termenii au semnificaţiile cunoscute din metoda eforturilor, notîndu-se cu i secţiunea curentă a arcului din dreptul forţei $P = 1$ mobile. Indiferent care este sistemul de bază, consolă curbă pentru arcul nesimetric (v. fig. IV.147, *c*) sau două console curbe pentru arcul simetric (v. fig. IV.147, *b*) s-a arătat la sarcini fixe că eforturile pe sistemul de bază din necunoscute (m_1, m_2, m_3) au aceleaşi expresii şi deci determinarea liniilor de influenţă a necunoscutelor se face la fel.

Linia de influenţă a necunoscutei X_1 (fig. IV.150, *a* şi IV.151, *a*) se obţine, conform expresiei $X_1 = \overset{*}{\delta}_{i1}/\delta_{11}$, împărţind linia elastică pe verticală a sistemului de bază ($\overset{*}{\delta}_{i1}$) din $X_1 = -1$ la constanta δ_{11} (stabilită la sarcini fixe). Deoarece numitorul δ_{11} se calculează multiplicat cu EI_0, şi linia elastică δ_1^* se va determina multiplicată cu EI_0. Linia elastică $EI_0\overset{*}{\delta}_{i1}$ se obţine ca diagramă de momente încovoietoare fictive pe grinda conjugată încărcată cu sarcinile elastice corespunzătoare diagramei $m_1^* = +y$ din $X_1 = -1$. Sarcinile elastice au expresiile:

— sarcina elastică distribuită: $w_y = \frac{I_0}{I \cos\varphi} y$;

— sarcini elastice concentrate în calculul pe bolţari: $W_y = \frac{I_0}{I} y \Delta s$.

Linia de influenţă a necunoscutei X_2 (fig. IV.150, *b* şi IV. 151, *b*) se obţine ($X_2 = \overset{*}{\delta}_{i2}/\delta_{22}$) împărţind linia elastică pe verticală a sistemului de bază ($\overset{*}{\delta}_{i2}$) din $X_2 = -1$ la constanta δ_{22} (stabilită la sarcini fixe). Linia elastică $EI_0\overset{*}{\delta}_{i2}$ se obţine ca diagramă de momente încovoietoare fictive pe grinda conjugată încărcată cu sarcinile elastice corespunzătoare diagramei $m_2^* = -x$ din $X_2 = -1$. Sarcinile elastice au expresiile;

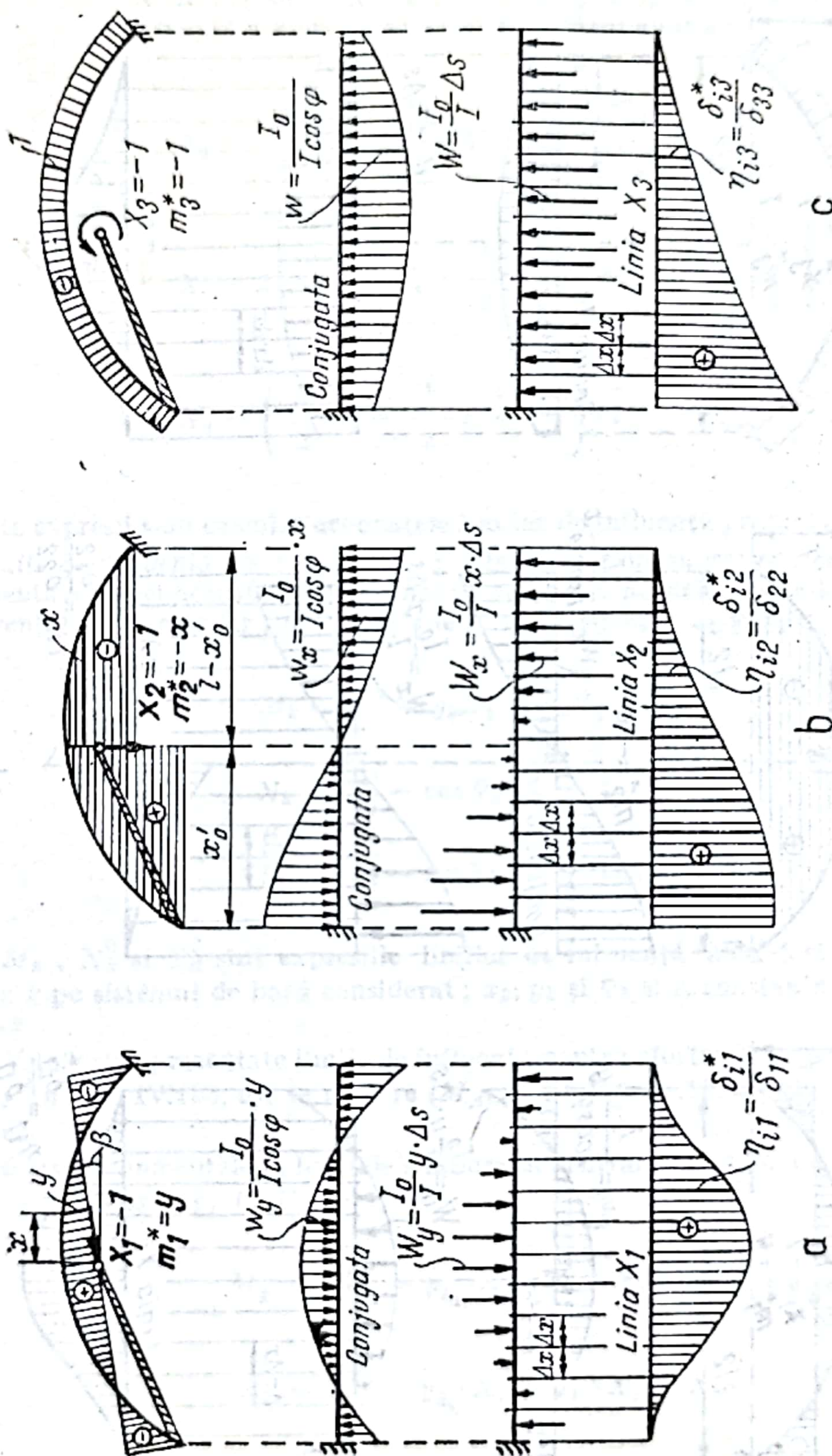
— sarcina elastică distribuită : $w_x = \frac{I_0}{I \cos\varphi} x$;

— sarcini elastice concentrate în calculul numeric : $W_x = \frac{I_0}{I} x \Delta s$.

Linia de influenţă a necunoscutei X_3 (fig. IV.150, *c* şi IV.151, *c*) se obţine ($X_3 = \overset{*}{\delta}_{i3}/\delta_{33}$) împărţind linia elastică pe verticală a sistemului de bază ($\overset{*}{\delta}_{i3}$) din $X_3 = -1$ la constanta δ_{33} (stabilită la sarcini fixe). Linia elastică $EI_0\overset{*}{\delta}_{i3}$ se obţine ca diagramă de momente încovoietoare fictive pe grinda conjugată încărcată cu sarcinile elastice corespunzătoare diagramei $m_3^* = -1$ din $X_3 = -1$. Sarcinile elastice au expresiile:

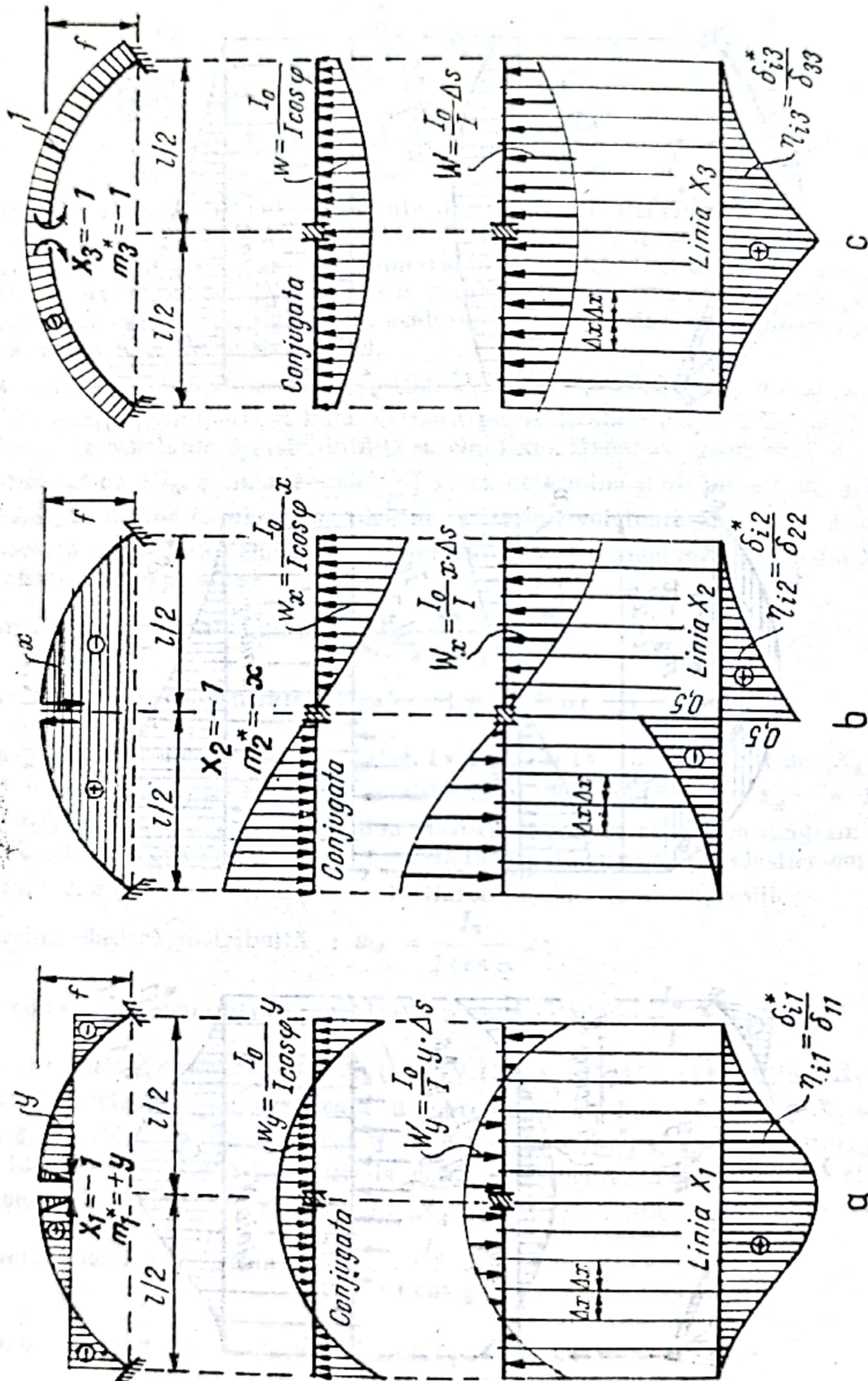
— sarcina elastică distribuită : $w = \frac{I_0}{I \cos\varphi}$;

— sarcini elastice concentrate în calculul pe bolţari : $W = \frac{I_0}{I} \Delta s$.



$X_1=1$
$m_1^*=y$
x
y
β
$w_y=\frac{I_0}{I\cos\varphi}\cdot y$
Conjugata
$W_y=\frac{I_0}{I}y\cdot\Delta s$
Δx Δx
Linia X_1
$\eta_{i1}=\frac{\delta_{i1}^*}{\delta_{11}}$
a
$X_2=-1$
$m_2^*=-x$
$l-x_0'$
x_0'
x
$w_x=\frac{I_0}{I\cos\varphi}\cdot x$
Conjugata
$W_x=\frac{I_0}{I}x\cdot\Delta s$
Δx Δx
Linia X_2
$\eta_{i2}=\frac{\delta_{i2}^*}{\delta_{22}}$
b
$X_3=-1$
$m_3^*=-1$
$w=\frac{I_0}{I\cos\varphi}$
Conjugata
$W=\frac{I_0}{I}\Delta s$
Δx Δx
Linia X_3
$\eta_{i3}=\frac{\delta_{i3}^*}{\delta_{33}}$
c

Fig. IV.150



X1=-1
m1*=+y
Conjugata
Linia X1
a
X2=-1
m2*=-x
Conjugata
Linia X2
0,5
b
X3=-1
m3*=-1
Conjugata
Linia X3
c
l/2
f
Δx

Fig. IV.151

Pentru *arce parabolice* simetrice la care $I \cos \varphi = I_0$ se obţin următoarele expresii pentru liniile de influenţă ale necunoscutelor în centrul elastic :

$$X_1 = \frac{15}{4}\left(\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{16}\right) \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{1}{1+\nu}$$

$$X_2 = 2\xi^3 - \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2} \qquad \text{cu} \qquad \nu = \frac{45}{4}\left(\frac{i_0}{f}\right)^2 \qquad \text{(IV.312)}$$

$$X_3 = \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{8}\right) l; \qquad \xi = \frac{x}{l}.$$

Cu aceste expresii s-au calculat ordonatele liniilor de influenţă prezentate în fig. IV.152.

Liniile de influenţă ale eforturilor se determină prin suprapunerea liniară a liniilor de influenţă ale necunoscutelor şi a efortului respectiv pe sistemul de bază. Astfel, liniile de influenţă ale eforturilor într-o secţiune k de coordonate x_k şi y_k se obţin cu relaţiile

$$M_k = M_k^0 - y_k X_1 + x_k X_2 + X_3$$

$$N_k = N_k^0 - \cos\varphi_k \cdot X_1 - \sin\varphi_k \cdot X_2 \qquad \text{(IV.313)}$$

$$T_k = T_k^0 - \sin\varphi_k \cdot X_1 + \cos\varphi_k \cdot X_2$$

în care M_k^0, N_k^0 şi T_k^0 sînt expresiile liniilor de influenţă ale efortului respectiv în secţiunea k pe sistemul de bază considerat ; x_k, y_k şi φ_k sînt constante pentru secţiunea respectivă.

În fig. IV.153 sînt prezentate liniile de influenţă pentru eforturile într-o secţiune curentă k(M_k, N_k în fig. IV.153, *a*), la naştere (M_A, N_A în fig. IV.153, *c*) şi la cheie (M_c în fig. IV.153, *d*).

Dacă se folosesc momentele la limitele sîmburelui central, liniile lor de influenţă se obţin în mod asemănător (fig. IV.153, *b*)

$$M_{k_1} = M_{k_1}^0 - y_{k_1} \cdot X_1 + x_{k_1} \cdot X_2 + X_3$$

$$\text{(IV.314)}$$

$$M_{k_2} = M_{k_2}^0 - y_{k_2} \cdot X_1 + x_{k_2} \cdot X_2 + X_3.$$

În tabelul IV. 36 sînt prezentate sistematizat formule de calcul al arcelor dublu încastrate parabolice pentru cazuri uzuale de încărcare.

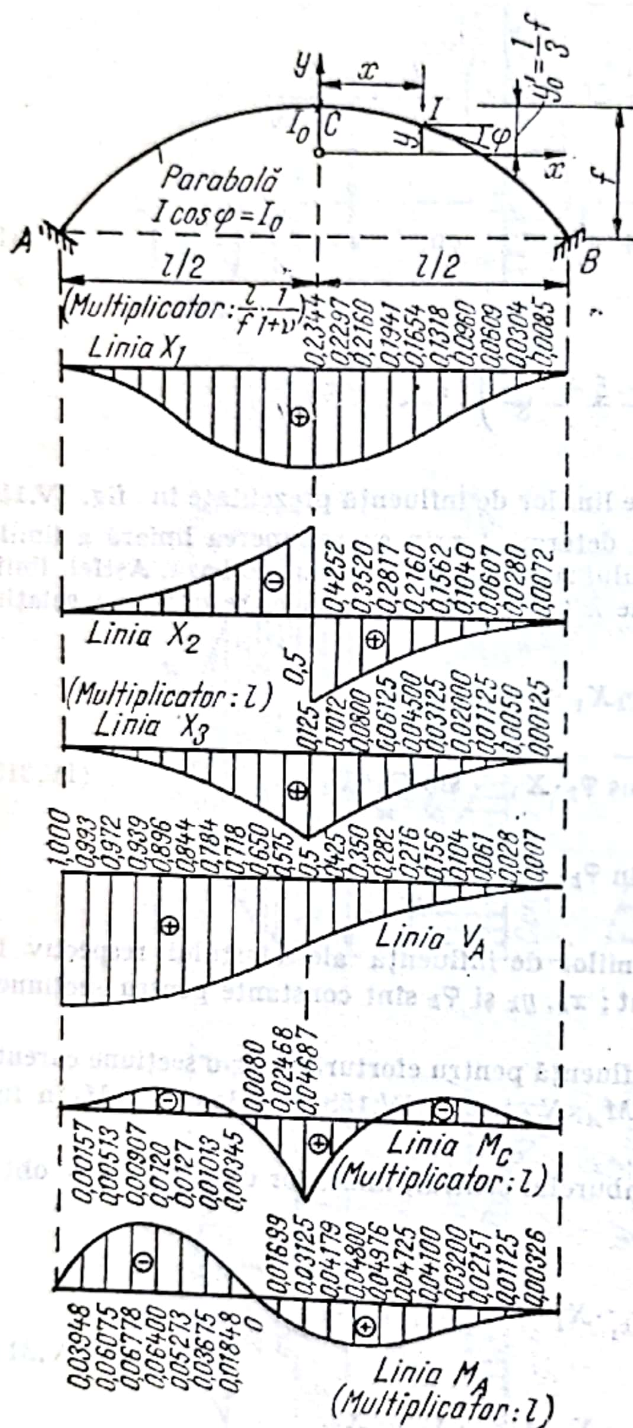


Fig. IV.152

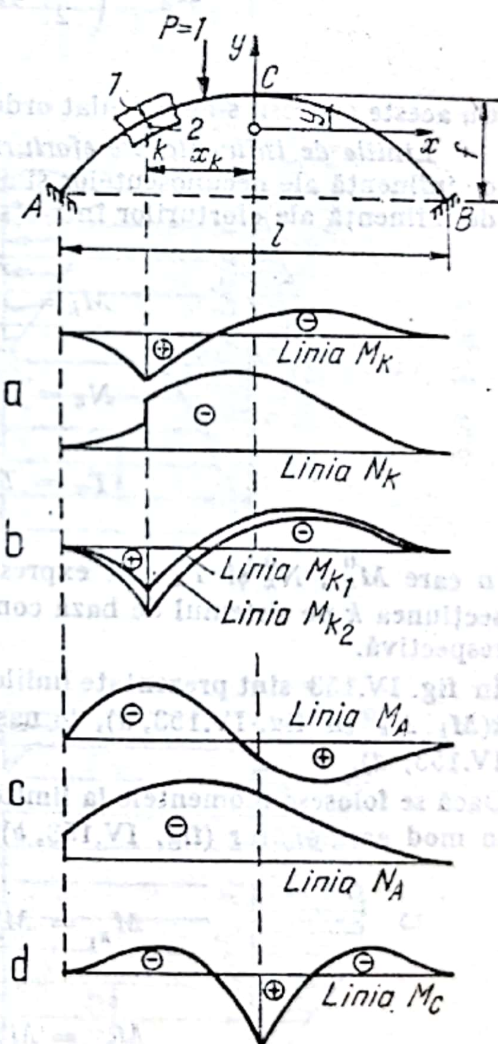
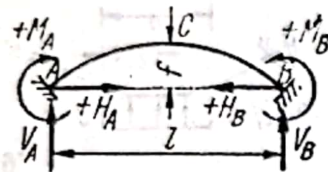


Fig. IV.153

Tabelul IV.36



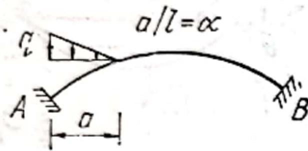
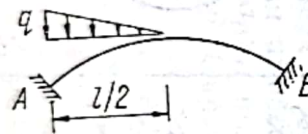
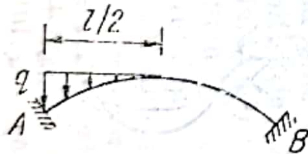
Formule pentru calculul arcelor parabolice dublu încastrate

Tabelul conţine formulele necesare calculului reacţiunilor verticale, al împingerii şi al momentelor la naşteri şi cheie. Sensul pozitiv al eforturilor şi sarcinilor conform figurii din stînga.

Schema de încărcare	V_A	V_B	H	M_A	M_B	M_C
1. a, P, $a/l=\alpha$, A, B	$+P(1-\alpha)^2 \times (1+2\alpha)$	$+P\alpha^2(3-2\alpha)$	$+\frac{15}{4}\frac{Pl}{f}\alpha^2 \times (1-\alpha^2)$	$-\frac{Pl}{2}\alpha(1-\alpha)^2 \times (2-5\alpha)$	$+\frac{Pl}{2}\alpha^2(1-\alpha)\times(3-5\alpha)$	Pentru $\alpha \leqslant 0{,}5$ $-\frac{Pl}{4}\alpha^2(3-10\alpha+5\alpha^2)$
2. $l/2$, P, A, B	$+\frac{P}{2}$	$+\frac{P}{2}$	$+\frac{15}{64}\frac{Pl}{f}$	$+\frac{Pl}{32}$	$+\frac{Pl}{32}$	$+\frac{3}{64}Pl$
3. P, $a/l=\alpha$, a, A, B	$-12\frac{Pf}{l}\times \alpha^2(1-\alpha)^2$	$+12\frac{Pf}{l}\times\alpha^2(1-\alpha)^2$	$H_B=+P\alpha^2(15-50\alpha+60\alpha^2-24\alpha^3)$; $H_A=-P(1-15\alpha^2+50\alpha^3-60\alpha^4+24\alpha^5)$	$-2Pf\alpha(1-\alpha)^2\times(2-7\alpha+8\alpha^2)$	$+2Pf\alpha^2(1-\alpha)(3-9\alpha+8\alpha^3)$	$-Pf\alpha^2(3-14\alpha+20\alpha^2-8\alpha^3)$
4. $l/2$, P, A, B	$-\frac{3}{4}\frac{Pf}{l}$	$+\frac{3}{4}\frac{Pf}{l}$	$H_B=+\frac{P}{2}$ $H_A=-\frac{P}{2}$	$-\frac{Pf}{8}$	$+\frac{Pf}{8}$	0

Tabelul IV.36 (continuare)

Schema de încărcare	V_A	V_B	H	M_A	M_B	M_C
5. $a/l=\alpha$; A; B; a	$+\frac{ql}{2}\alpha(2-2\alpha^2+\alpha^3)$	$+\frac{ql}{2}\alpha^3\times(2-\alpha)$	$+\frac{ql^2}{8f}\alpha^3(10-15\alpha+6\alpha^2)$	$-\frac{ql^2}{2}\alpha^2(1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3)$	$+\frac{ql^2}{2}\alpha^2(\alpha-2\alpha^2+\alpha^3)$	Pentru $\alpha \leqslant 0$ $-\frac{ql^2}{8}\alpha^2(2\alpha-5\alpha^2+2\alpha^3)$
6. q; A; B; $l/2$	$+\frac{13ql}{32}$	$+\frac{3ql}{32}$	$+\frac{ql^2}{16f}$	$-\frac{ql^2}{64}$	$+\frac{ql^2}{64}$	0
7. q; A; B	$+\frac{ql}{2}$	$+\frac{ql}{2}$	$+\frac{ql^2}{8f}$	0	0	0
8. q; A; B; $a/l=\alpha$; a; a	$+ql\alpha$	$+ql\alpha$	$+\frac{ql^2}{4f}\alpha^3(10-15\alpha+6\alpha^2)$	$-\frac{ql^2}{2}\alpha^2(1-4\alpha+5\alpha^2-2\alpha^3)$	$-\frac{ql^2}{2}\alpha^2(1-4\alpha+5\alpha^2-2\alpha^3)$	$-\frac{ql^2}{4}\alpha^2(2\alpha-5\alpha^2+2\alpha^3)$
9. q; $a/l=\alpha$; A; B; $a/2$; a	$+\frac{ql}{2}\alpha$	$+\frac{ql}{2}\alpha$	$+\frac{ql^2}{64f}\alpha(15-10\alpha^2+3\alpha^4)$	$+\frac{ql^2}{32}\alpha(1-2\alpha^2+\alpha^4)$	$+\frac{ql^2}{32}\alpha(1-2\alpha^2+\alpha^4)$	$+\frac{ql^2}{64}(3\alpha-8\alpha^2+6\alpha^3-\alpha^5)$

10. 	$+\frac{ql}{20}\alpha(10-5\alpha^2+2\alpha^3)$	$+\frac{ql}{20}\alpha^2(5\alpha-2\alpha^2)$	$+\frac{ql^2}{16f}\alpha^3(5-6\alpha+2\alpha^2)$	$-\frac{ql^2}{120}\alpha^2(20-15\alpha+36\alpha^2-10\alpha^3)$	$+\frac{ql^2}{120}\alpha^2(15\alpha-24\alpha^2+10\alpha^3)$	$-\frac{ql^2}{48}\alpha^2(3\alpha-6\alpha^2+2\alpha^3)$
11. 	$+\frac{9ql}{40}$	$+\frac{ql}{40}$	$+\frac{5}{256}\frac{ql^2}{f}$	$-\frac{7ql^2}{640}$	$+\frac{11ql^2}{1920}$	$-\frac{ql^2}{768}$
12. 	$+\frac{5}{32}ql$	$+\frac{ql}{96}$	$+\frac{ql^2}{112f}$	$-\frac{17ql^2}{2240}$	$+\frac{19ql^2}{6720}$	$-\frac{ql^2}{1120}$
13.	$-\frac{qf^2}{4l}$	$+\frac{qf^2}{4l}$	$H_B=+\frac{3}{14}qf$ $H_A=-\frac{11}{14}qf$	$-\frac{51}{280}qf^2$	$+\frac{19}{280}qf^2$	$-\frac{3}{140}qf^2$

Tabelul IV.36 (continuare)

Schema de încărcare	V_A	V_B	H	M_A	M_B	M_C
14. A, B, $\varphi_A=+1$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$+\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{15}{2}\frac{EI}{fl}$	$+\frac{9EI}{l}$	$+\frac{3EI}{l}$	$-\frac{3}{2}\frac{EI}{l}$
15. A, B, $\varphi_A=\varphi_B=+1$	0	0	$+\frac{15EI}{fl}$	$+\frac{12EI}{l}$	$+\frac{12EI}{l}$	$-\frac{3EI}{l}$
16. A, B, $\varphi_A=+1$, $\varphi_B=-1$	$-\frac{12EI}{l^2}$	$+\frac{12EI}{l^2}$	0	$+\frac{6EI}{l}$	$-\frac{6EI}{l}$	0
17. A, B, Δ_A	0	0	$\frac{45}{4}\frac{EI}{f^2l}\Delta_H$	$+\frac{15}{2}\frac{EI}{fl}\Delta_H$	$+\frac{15}{2}\frac{EI}{fl}\Delta_H$	$-\frac{15}{4}\frac{EI}{fl}\Delta_H$
18. A, B, B', Δv	$-\frac{12EI}{l^3}\Delta_v$	0	0	$-\frac{6EI}{l^2}\Delta_v$	$-\frac{6EI}{l^2}\Delta_v$	

5.5. INELE

Inelele sînt bare închise acționate pe contur cu forțe exterioare în echilibru (forțe active și reacțiuni) După forma conturului inelele pot fi circulare (fig IV. 154, *a*) eliptice sau dreptunghiulare. Inelele fiind contururi închise sînt de trei ori static nedeterminate. Ele se rezolvă prin metoda eforturilor ca și arcele, luînd ca necunoscute eforturile într-o secțiune curentă (fig. IV.154, *b*). Rezolvînd sistemul celor trei ecuații de condiție se

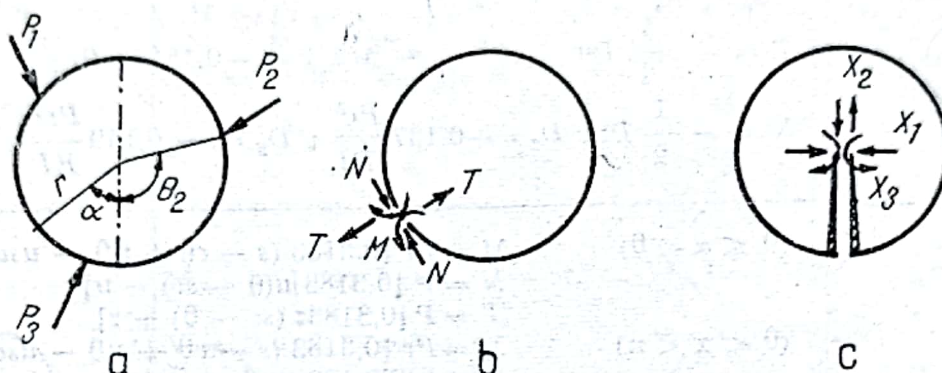


Fig. IV.154

obțin expresiile eforturilor într-o secțiune oarecare. Se poate folosi și un sistem de bază cu necunoscutele transferate în centrul elastic (fig. IV.154, *c*) care conduce la ecuații de condiție independente și apoi, după determinarea necunoscutelor, se stabilesc expresiile eforturilor într-o secțiune curentă.

În tabelul IV.37 sînt date expresiile eforturilor într-o secțiune curentă la inele circulare de secțiune constantă pentru cîteva cazuri uzuale de încărcări. S-a considerat $r/h > 10$ ceea ce a permis neglijarea influenței curburii (r este raza și h înălțimea secțiunii inelului).

Tabelul IV.37

Formule pentru calculul inelelor circulare

Eforturile M_1, N_1, T_1, M, N, T, sînt pozitive cînd au sensurile indicate pe figura din stînga și negative cînd sînt de sens contrar. Forțele și cuplele exterioare aplicate inelelor sînt pozitive cînd au sensurile indicate pe figura din coloana din stînga și negative cînd sînt de sens contrar. Notațiile utilizate au următoarea semnificație: E=modulul de elasticitate al materialului inelului (în daN/cm²) : I = momentul de inerție al secțiunii transversale a inelului (în cm⁴) ; P sau F = forța exterioară sau reacțiune acționînd inelul (în daN) ; γ = greutatea unității de volum a lichidului din interiorul inelului (în daN/cm³) ; $z = \sin\alpha$, $u = \cos\alpha$; $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$, $v = \sin\beta$, $w = \cos\beta$. Unghiurile se exprimă în radiani, lungimile în cm, forțele în daN, momentele în daNcm. $+D_x$ sau $+D_y$ reprezintă creșteri, iar $-D_x$ și $-D_y$ descreșteri ale diametrului inelului. r = raza inelului (în cm).

Tabelul IV.37 (continuare)

Schema de încărcare a inelului	Formule pentru calculul momentului încovoietor M, al efortului inelar N și al forței tăietoare radiale T într-o secțiune corespunzătoare unui unghi măsurat de la secțiunea inferioară din axa verticală a inelului, precum și acelea pentru calculul variației mărimii diametrului
1.	$M = Pr\left(0{,}3183 - \frac{1}{2}z\right)$; $+M_{max} = 0{,}3183 \cdot Pr$ pentru $\alpha = 0$ $T = -\frac{1}{2}Pu$ $\quad -M_{min} = -0{,}1817 \cdot Pr$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $N = -\frac{1}{2}Pz$; $D_x = +0{,}137\frac{Pr^3}{EI}$; $D_y = -0{,}149\frac{Pr^3}{EI}$
2.	$(0 < \alpha < \theta)$ $\quad M = Pr\,[0{,}3183\,(s - c\theta + u\theta - usc) - u + c]$ $N = P\,[0{,}3183\,u(\theta - sc) - u]$ $T = P\,[0{,}3183z\,(sc - \theta) + z]$ $(\theta < \alpha < \pi)$ $\quad M = Pr\,[0{,}3183\,(s - c\theta + u\theta - usc)]$ $N = P\,[0{,}3183\,u(\theta - sc)]$ $T = P\,[0{,}3183\,z(sc - \theta)]$ $D_x = \frac{Pr^3}{EI}\left[0{,}6366\,(s - c\theta) + \frac{1}{2}(sc - \theta)\right]$; $D_y = \frac{Pr^3}{EI}\left[0{,}6366\,(s - c\theta) + c + \frac{1}{2}s^2 - 1\right]$
3.	$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; $M = M_0\left(0{,}6366\,u - \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$; $M = M_0\left(0{,}6366\,u + \frac{1}{2}\right)$ $(0 < \alpha < \pi)$ $N = 0{,}6366\frac{M_0}{r}u$; $T = -0{,}6366\frac{M_0}{r}z$; $D_x = 0$, $D_y = 0$ $+M_{max} = \frac{M_0}{2}$; $M_{min} = -\frac{M_0}{2}$
4.	$(0 < \alpha < \theta)$ $\quad (\theta < \alpha < \pi)$ $M = M_0\,[0{,}3183\,(2us + \theta) - 1]$ $\quad M = M_0\,[0{,}3183\,(2us + \theta)]$ $N = \frac{M_0}{r}0{,}6366\,us$ $\quad N = \frac{M_0}{r}0{,}6366\,us$ $T = +\frac{M_0}{r}0{,}6366\,zs$ $\quad T = -\frac{M_0}{r}0{,}6366\,zs$ $D_x = \frac{M_0r^2}{EI}(0{,}6366\,\theta - s)$ $\quad D_y = \frac{M_0r^2}{EI}(0{,}6366\,\theta + c - 1)$

Tabelul IV.37 (continuare)

Schema de încărcare a inelului	Formule pentru calculul momentului încovoietor M, al efortului inelar N și al forței tăietoare radiale T într-o secțiune corespunzătoare unui unghi măsurat de la secțiunea inferioară din axa verticală a inelului, precum și acelea pentru calculul variației mărimii diametrului
5. P P 2P	$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ $M = Pr\,(0{,}3183u + z - 0{,}8183)$; $N = P\,(0{,}3183\,u + z)$ $T = P\,(u - 0{,}3183\,z)$ $D_x = -\,0{,}1366\frac{Pr^3}{EI}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ $M = Pr\,(0{,}1817 + 0{,}3183\,u)$ $N = 0{,}3183\,Pu$ $T = -\,0{,}3183\,Pz$ $D_y = 0{,}1488\,\frac{Pr^3}{EI}$
6. θ θ P P 2P	$(0 < \alpha < \theta)$ $M = Pr\,[0{,}3183\,(s\theta + c + us^2 - 1) - s + z]$ $N = P\,(0{,}3183\,us^2 + z)$ $T = P\,(u - 0{,}3183\,zs^2)$ $(\theta < \alpha < \pi)$ $M = Pr\,[0{,}3183\,(s\theta + c + us^2 - 1)]$ $N = 0{,}3183\,us^2P$ $T = -\,0{,}3183\,zs^2P$ $D_x = \frac{Pr^3}{EI}\left[\frac{1}{2}\,(s^2 + 2) + 0{,}6366\,(s\theta + c - 1) - 2s\right]$ pentru $\theta > 90°$ $D_y = \frac{Pr^3}{EI}\left[\frac{1}{2}\,(sc + \theta) + 0{,}6366\,(s\theta + c - 1) - s\right]$
7. p θ θ 2pr sin θ	$M_1 = pr^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,s^2 + 0{,}3183\left(s - \frac{\theta}{2}\,s^2 - \frac{1}{3}\,s^3 - \frac{3}{4}\,sc - \frac{\theta}{4}\right)\right]$ $N_1 = -\,0{,}1061\,prs^3$ $(0 < \alpha < \theta)$ $M = M_1 - pr^2\,[sz - 0{,}1061\,s^3\,(1 - u)]$ $N = -pr\,(0{,}1061s^3u + sz)$ $T = pr\,(0{,}1061s^3z - su)$ $(\theta < \alpha < \pi)$ $M = M_1 + pr^2\left[0{,}1061s^3\,(1 - u) - \frac{1}{2}\,(s^2 + z^2)\right]$ $N = -\,pr\,(0{,}1061s^3u + z^2)$ $T = pr\,(0{,}1061s^3z - zu)$ $D_x = \frac{2\,pr^4}{EI}\left[\frac{1}{4} - \frac{s}{2} + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{12} - 0{,}3183\left(\frac{\theta}{4} + \frac{3}{4}\,sc + \frac{1}{2}\,\theta s^2 - s\right)\right]$ $D_y = \frac{2pr^4}{EI}\left[\frac{1}{12} + \frac{s^2}{4} - \frac{s^2c}{12} - \frac{\theta s}{4} - \frac{c}{6} - 0{,}3183\left(\frac{\theta s^2}{2} + \frac{3}{4}\,sc + \frac{\theta}{4} - s\right)\right]$

Tabelul IV.37 (continuare)

Schema de încărcare a inelului	Formule pentru calculul momentului încovoietor M, al efortului inelar N și al forței tăietoare radiale T într-o secțiune corespunzătoare unui unghi măsurat de la secțiunea inferioară din axa verticală a inelului, precum și acelea pentru calculul variației mărimii diametrului
8.	$M_1 = pr^2\left[0{,}3183\left(\frac{1}{2}\theta + \theta s^2 + \frac{3}{2}sc\right) - \frac{1}{2}s^2\right]$; $N_1 = 0$ $(0 < \alpha < \theta)$: $M = M_1 - pr^2\frac{1}{2}z^2$ $N = -prz^2$ $T = -przu$ $(\theta < \alpha < \pi - \theta)$: $M = M_1 - pr^2\left(sz - \frac{1}{2}s^2\right)$ $N = -prsz$ $T = -prsu$ $D_x = -\frac{pr^4}{EI}\left[s + \frac{1}{3}s^3 - 0{,}3183(\theta + 3sc + 2\theta s^2)\right]$ $D_y = -\frac{pr^4}{EI}\left[s^2 - \theta s + \frac{1}{2}\pi s + \frac{1}{3}c^3 + \frac{2}{3} - c - 0{,}3183(2\theta s^2 + 3sc + \theta)\right]$
9.	$M_1 = pr^2\left[0{,}3183\left(\frac{2}{3}s - \theta c + \frac{1}{3}sc^2 + \frac{1}{2}\theta c^2 - \frac{3}{4}sc + \frac{1}{4}\theta\right) - \frac{1}{2} + c - \frac{c^2}{2}\right]$ $N_1 = pr\left[0{,}3183\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}sc^2 - \theta c\right) + c - 1\right]$ $(0 < \alpha < \theta)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) - \frac{1}{2}pr^2(1-u^2)$ $N = N_1 u + pr(1-u)u$ $T = -N_1 z - pr(1-u)z$ $(\theta < \alpha < \pi)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) - \frac{1}{2}pr^2(1-c)(1+c-2u)$ $N = N_1 u + pr(1-c)u$ $T = -N_1 z - pr(1-c)z$
10.	$M_1 = pr^3\left[0{,}3183\left(\frac{\theta}{8} + \frac{s}{9} - \frac{\theta c}{4} - \frac{13}{24}sc + \frac{11}{36}sc^2 + \frac{\theta c^2}{2} - \frac{1}{12}sc^3 - \frac{\theta c^3}{6}\right) - \frac{1}{6}(1-c)^3\right]$ $N_1 = pr^2\left[0{,}3183\left(\frac{\theta}{8} + \frac{\theta c^2}{2} - \frac{13}{24}sc - \frac{sc^3}{12}\right) - \frac{1}{2}(1-c)^2\right]$ $(0 < \alpha < \theta)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) + pr^3\left[\frac{1}{6}(1-u)^3 - \frac{1}{2}(1-c)(1-u)\right]$ $N = N_1 u + pr^2\left[\frac{1}{2}(1-2c+u)(1-u)u\right]$; $T = -N_1 z - pr^2\left[\frac{1}{2}(1-2c+u)(1-u)z\right]$ $(\theta < \alpha < \pi)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) + pr^3\left[\frac{1}{2}(1-c)^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}c - u\right)\right]$ $N = N_1 u + pr^2\left[\frac{1}{2}u(1-c)^2\right]$ $T = -N_1 z - pr^2\left[\frac{1}{2}z(1-c)^2\right]$

Tabelul IV.37 (continuare)

Schema de încărcare a inelului	Formule pentru calculul momentului încovoietor M, al efortului inelar N și al forței tăietoare radiale T într-o secțiune corespunzătoare unui unghi măsurat de la secțiunea inferioară din axa verticală a inelului, precum și acelea pentru calculul variației mărimii diametrului
11.	$M_1 = pr^2[c - 0{,}3183(\theta c - \theta) - 1]$ $\qquad N_1 = pr[0{,}3183(s - \theta c) + c - 1]$ $(0 < \alpha < \theta)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) - pr^2(1-u-sz)$; $N = N_1 u + pr(sz + u - 1)$ $T = -N_1 z + pr(su - z)$ $(\theta < \alpha < \pi)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) - pr^2(cu - u)$ $N = N_1 u + pr(u - cu)$ $T = -N_1 z + pr(cz - z)$ $D_x = \frac{2pr^4}{EI}\left[\frac{\theta c}{4} + 0{,}3183\theta - 0{,}5683\,s\right]$ pentru $\theta < \frac{\pi}{2}$ $D_y = \frac{2pr^4}{EI}\left[\frac{\theta s}{4} + 0{,}3183\theta + \frac{c}{2} - 0{,}3183\,s - \frac{1}{2}\right]$
12.	$F = \frac{1}{4}\gamma r^2(2\beta - \sin 2\beta)$ $M_1 = \gamma r^3\left[0{,}6366\left(\frac{\beta w}{2} - \frac{3}{8}\beta - \frac{v}{2} + \frac{5}{8}vw - \frac{1}{4}\beta w^2\right) + w^2 - w + \frac{1}{2}v^2\right] + 0{,}6366\,Fr$ $N_1 = \gamma r^2\left[\frac{1}{2}v^2 - w + w^2 + 0{,}3183\left(\frac{3}{4}vw - \frac{1}{2}\beta w^2 - \frac{1}{4}\beta\right)\right]$ $(0 < \alpha < \beta)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) - Frz + \gamma r^3\left(\frac{1}{2}\alpha z - w + wu\right)$ $N = N_1 u - Fz + \gamma r^2\left(\frac{1}{2}\alpha z - w + wu\right)$ $T = -N_1 z - Fu + \gamma r^2\left(\frac{1}{2}\alpha u + \frac{z}{\ } - wz\right)$ $(\beta < \alpha < \pi)$: $M = M_1 - N_1 r(1-u) - Frz + \gamma r^3\left[\frac{z}{2}(\beta - vw) + u\left(w - w^2 - \frac{v^2}{2}\right)\right]$ $N = N_1 u - Fz + \gamma r^2\left[\frac{z}{2}(\beta - vw) + u\left(w - w^2 - \frac{v^2}{2}\right)\right]$ $T = -N_1 z - Fu + \gamma r^2\left[\frac{u}{2}(\beta - vw) - z\left(w - w^2 - \frac{v^2}{2}\right)\right]$

Tabelul IV.37 (continuare)

Schema de încărcare a inelului	Formule pentru calculul momentului încovoietor M, al efortului inelar N şi al forţei tăietoare radiale T într-o secţiune corespunzătoare unui unghi măsurat de la secţiunea inferioară din axa verticală a inelului, precum şi acelea pentru calculul variaţiei mărimii diametrului
	Pentru $\beta < \frac{\pi}{2}$ $D_x = \frac{\gamma r^5}{EI}\left[\frac{2}{\pi}(\beta w - v) + 0{,}6933(\beta - wv) - \frac{1}{4}\beta v^2\right]$ Pentru $\beta > \frac{\pi}{2}$ $D_x = \frac{\gamma r^5}{EI}\left[\frac{2}{\pi}(\beta w - v) - 0{,}5567(\beta - wv) - 2w + \frac{1}{4}\beta v^2 + \frac{1}{4}\pi w^2 + \frac{3}{8}\pi\right]$ $D_y = \frac{\gamma r^5}{EI}\left[\frac{1}{\pi}(2\beta w + \beta - wv - 2v) - \frac{5}{8}v^2 - w + \frac{1}{4}\beta v w - \frac{1}{8}\beta^2 + 1\right]$

BIBLIOGRAFIE

1. Agent, R. şi Popovici, M. *Calculul prin aproximaţii succesive al grinzilor continue cu metoda „momentelor la noduri"*. În : Ind. construcţiilor şi a materialelor de construcţii nr. 6/1954.
2. Agent, R. *Metoda aproximaţiilor succesive*. Bucureşti, E. S. A. C. 1955.
3. Agent, R. *Procedeu simplificat pentru considerarea conlucrării spaţiale în calculul la forţe orizontale al structurilor cu cadre principale longitudinale*. În : Rev. construcţiilor şi a materialelor de construcţii nr. 4/1969.
4. Agent, R. *Sisteme reticulare nedeterminate*. Bucureşti, Editura tehnică, 1970.
5. Argyris, J. *Matrix Methods in Structural Mechanics*. Pergamon Press, 1964.
6. Asplund, S. O. *Structural Mechanics. Classical and Matrix Methods*. Prentice Hall Series in Structure Analysis and Design, 1966.
7. Avram, C. *La généralisation de la méthode Cross*. În : Bull. de science et technique de la Polytechnique de Timişoara, vol. XIII, fasc. 2—3, 1949.
8. Avram, C. *Grinzi continue*. Ed. II. Bucureşti, Editura tehnică, 1965.
9. Bălan, Şt. *Lecţii complementare de mecanică teoretică*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1969.
10. Beleş, A. A. şi Voinea, R. P. *Rezistenţa materialelor*, vol. II. Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
11. Belluzzi, O. *Scienza delle costruzioni*. Vol. II. Bologna, Zanichelli Ed., 1951.
12. Beyer, K. *Die Statik im Stahlbetonbau*. Berlin, Springer, 1948.
13. Beyer, K. *Die Statik im Stahlbetonbau* (2. Auflage). Berlin, 1956.
14. Caracostea, A., Petruşcu, A. şi Ilie, Gh. *Statica construcţiilor în exemple şi probleme*. Vol. I. (litografiat), Bucureşti, 1957.
15. Caracostea, A. şi alţii. *Manual pentru calculul construcţiilor*, Bucureşti, Editura tehnică, 1959.
16. Charon, P. *La méthode de Cross*. Paris, 1953.
17. Charon, P. *Simplifications et améliorations à la méthode de Cross*. Paris, Eyrolles, 1966.
18. Chwalla, E. *Einführung in die Baustatik*. Köln, 1954.
19. Cornelis, A., Deprez, G., Fonder, G., Massonnet, Ch., Maquoi, R. şi Muller, R. *Application des ordinateurs au calcul des structures*. Liège, Sciences et Lettres, 1968.
20. Courbon, J. *Calcul des structures*. Dunod, Paris, 1972.
21. Cross, H. *Analysis of Continous Frames by Distributing Fixed End Moments*. În : Proc. A. S. C. E. nr. 5/1930 şi nr. 5/1932.
22. Csonka, P. *Une contribution à la simplification de la méthode de Hardy Cross*. În : Techn. mod. — Construction nr. 3/1952.
23. Darkov, A. V. şi Kuzneţov, V. I, *Statica soorujenii*. Moscova, 1951.
24. Dašek, V. *Výpocet rámových konstrukci rozdelováním sil a momentu*. Praga, 1951.
25. Davies, J. D., Somervaille, I. J., şi Zienkiewicz, O. C. *Analysis of Various Types of Bridges by the Finite Element Method*. În: Developments in Bridge Design and Construction. Londra, Crosby Lockwood şi Son. LTD, 1971.
26. Dubin, Ch. *Calcul des réseaux maillés par calculateur digital*. În : Mem. congr. intern. pentru distribuţia apei, Stockholm, 1964.
27. Feng, Ch. C. *Matrix Solution of Force Relaxation Method*. În : Proc. A. S. C. E., Journal of the struct. div., iunie 1963.

28. Ferry Borges, J. şi Castanheta, M. *Siguranţa structurilor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1974.
29. Filin, A. P. *Matriţi v statike sterjnevih sistem*. Izd. Lit. po Stroitelstvu, Moscova, Leningrad, 1966.
30. Filipescu, Gh. Em. *Statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor*, Bucureşti, 1940.
31. Gheorghiu, Al. *Statica construcţiilor*. Vol. I şi II. Bucureşti, Editura tehnică, 1960 1965.
32. Gheorghiu, Al. *Statica, stabilitatea şi dinamica construcţiilor*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.
33. Gheorghiu, Al. *Concepţii moderne în calculul structurilor*. Bucureşti, Editura tehnică, 1975.
34. Grinter, L. E. *Wind Stress Analysis Simplified*. În: Transactions A. S. C. E., 1934, paper, 1870.
35. Grinter, L. E. *Theory of Modern Steel Structures*. Vol. II. New York, Macmillan Company, 1953.
36. Guldan, R. *Rahmentragwerke und Durchlaufträger*, 5. Auflage, Viena, 1952.
37. Guldan, R. *Die Cross-Methode und ihre praktische Anwendung*. Viena, 1955.
38. Gurfinkel, G. *Simple Method of Analysis of Vierendeel Structures*. În Proc. A. S. C. E. Journal of the struct. div., iunie, 1967.
39. Habel, A. *Knickberechnung freistehender schrägstieligen Rahmen mit dem Cross-Ausgleich*. În: Bauingenieur, nr. 5/1962.
40. Von Halász, R. *Verfahren zur Berechnung von Stockwerkrahmen nach Cross, Zaytzew und Csonka*. În: Baupl. u. Bautechnik, nr. 3/1953.
41. Hupfer, P. *Optimierung von Baukonstruktionen*. Berlin, VEB Verlag für Bauwesen, 1970.
42. Ilie, Gh. *Posibilităţi de simplificare a calculului unor structuri spaţiale particulare în vederea utilizării raţionale a calculatorului electronic*. Comunicare la Sesiunea Ştiinţifică a Institutului de construcţii Bucureşti, 1969.
43. Ilie, Gh., Fierbinţeanu, V. şi Stănilă, N. *Îmbunătăţirea metodelor de calcul ale podurilor. Conlucrarea grinzilor principale cu elementele căii la tipuri uzuale de poduri*. Temă de cercetare, Catedra de Statica construcţiilor, Bucureşti, 1972.
44. Ilie, Gh. Fierbinţeanu, V. Stănilă, N. şi Petrescu, I. *Conlucrarea arcelor cu tablierul căii*. Comunicare la Sesiunea Ştiinţifică a Institutului de Construcţii, Bucureşti, 1973.
45. Ivanov, Gh. *Neprekisnati gredi i proizvolni ramki s promenlivo naprecino secenie po Kani*. În: Stroitelstvo, Sofia nr. 9/1966.
46. Jelinek, O. *A Generalized Distribution Method for Use with Electronic Computers*. În: Struct. eng. nr. 7/1966.
47. Jordan, M. *Constant Shear Moment Distribution*. În: Proc. A. S. C. E. Journal of the Struct. div., dec. 1963, separate 6.
48. Kani, G. *Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen*. Stuttgart. Konrad Wittwer, 1949.
49. Kirchhof, R. *Die Statik der Bauwerke*, Band I, II, und III, 5 Auflage. Berlin, 1951—1953.
50. Kleinlogel, A. *Rahmenformeln*. 12 Auflage. Berlin, 1956.
51. Kleinlogel, A. *Belastungslieder*. 8 Auflage. Berlin, 1956.
52. Kolousek, V. *Stavebná dynamika spojitých nosniku a rámových soustav*. Praga, Vedecko-techn. naklad. 1950.
53. Krynicki, E. J. şi Mazurkiewicz, Z. E. *Frames of Solid Bars of Varying Cross-Sections*. În: Proc. A. S. C. E., Journal of the struct. div. aug. 1964.

54. Krynicki, E. J. şi Mazurkiewicz, Z. E. *Das Knicken und Beigen der aus Stäben mit veränderlichen Querschnitten bestehenden Rahmentragwerke.* În : Bauingenieur nr. 9/1965.
55. Lee, S. L., Harwell, R. S. şi Wiesinger, F. P. *Intermediate Hinges in Moment Distribution Méthod.* În : Struct. eng. nr. 5/1964.
56. Liveley, R. K. *Matrix Methods of Structural Analysis.* Oxford, Pergamon Press, 1964.
57. Massonnet, Ch. şi Bares, R. *Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes, selon la méthode Guyon-Massonnet-Bares.* Paris, Dunod, 1966.
58. Massonnet, Ch. şi alţii. *Calculul structurilor la calculatoare electronice.* (trad. din l. franceză). Bucureşti, Editura tehnică, 1974.
59. Mazilu, P. *Calculul cadrelor. Deplasări şi lucru mecanic virtual în metoda Cross.* Bucureşti, 1946.
60. Mazilu, P. *Statica construcţiilor.* Vol. I şi II, Bucureşti, Editura tehnică, 1955, 1959.
61. Mazilu, P. şi Posea, N. *Asupra sistematizării rezolvării ecuaţiilor cu matrice Iakobi şi aplicaţiile corespunzătoare în statica construcţiilor.* Sesiunea cadrelor didactice din Inst. de construcţii Bucureşti — Comunicare, dec. 1958.
62. Meek, J. L. *Matrix Structural Analysis.* New York, Mc. Graw-Hill Book, 1971.
63. Mörsch, E. *Statik der Gewälben und Rahmen.* Berlin, 1953.
64. Müller, Breslau, H. *Die graphische Statik der Baukonstruktionen.* Band, II, III, Berlin, 1951.
65. Petcu, V. *Asupra calculului la temperatură al construcţiilor de beton armat alcătuite din bare de secţiune variabilă.* În : Bul. Inst. Polit. Bucureşti, nr. 1—2/1957.
66. Petrescu, M. şi Ilie, Gh. *Aspecte privind conlucrarea spaţială a elementelor unei structuri cu zăbrele.* În : Buletinul Ştiinţific al Institutului de Construcţii nr. 11 Bucureşti, 1963.
67. Petrescu, M. şi Ilie, Gh. *Studiul experimental al eforturilor secundare în barele grinzilor cu zăbrele de deschidere mare.* În : Buletinul Ştiinţific al Institutului de Construcţii, nr. 11, Bucureşti, 1963.
68. Petrescu, M. şi Ilie, Gh. *Détermination expérimentale des efforts secondaires introduits par la soudure des barres aux noeuds d'un arc métallique en treillis.* În : Methodologie et technique d'essai des constructions. RILEM, Bucureşti, 1969.
69. Ping-Chun Wang. *Metode numerice şi matriceale în mecanica construcţiilor. Cu aplicaţii la calculatoare.* (trad. din l. engleză). Bucureşti, Editura tehnică, 1970.
70. Posea, N., *Calculul cadrelor prin iteraţii cu suprarelaxări.* (Disertaţie). Institutul de construcţii. Bucureşti, 1961.
71. Prokofiev, I. P. *Statica construcţiilor,* Vol. I şi II. Bucureşti, Editura tehnică, 1953.
72. Przemieniecki, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis.* New-York, Mc. Graw-Hill Book Co., 1968.
73. Rabinovici, I. M. *Osnovi stroitelnoi mehaniki sterjnevîh sistem.* Moscova, 1956.
74. Robinson, J. *Structural Matrix Analysis for the Engineer.* New York, John, Wiley and Sons, 1966.
75. Rubinstein, M. F. *Analysis by Group Interation Using Substructures.* În : Proc. A. S. C. E. Journal of the struct. div. febr. 1968.
76. Rubinstein, M. F. *Structural Systems — Statics, Dinamics and Stability.* New-Jersey, Prentice-Hall Ing., 1970.
77. Saliger, L. *Praktische Statik.* 7, Auflage, Viena, 1951.

78. Seidel, Ph. L. *Uber ein Verfahren, die Gleichungen auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie die linearen Gleichungen überhaupt durch sukzessive Annähertung zu läsen.* În : Abh. der Münch. Akad., 1873, pag. 83–108.
79. Snitko, N. K. *Rasciot ramnih soorujenii iteraționnimi metodami.* Moscova, Gosstroiizdat, 1962.
80. Spunt, L. *Optimum Structural Design.* New-Jersey, Prentice-Hall, 1971.
81. Southwell, R. V. *Relaxation Methods as Applied to Structures.* În : Struct. eng., 1948, pag. 463–506.
82. Stüssi, F. *Vorlesungen über Baustatik.* Band I, II. Basel 1953–1954.
83. Stüssi, F. *Taschenbuch für Bauingenieure. Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues.* Berlin, Gottingen, Heidelberg, Springer Verlag, 1955.
84. Stüssi, F. *Entwurf und Berechnung von Stahlbauten.* Berlin, 1958.
85. Takabeya, F. *Nouvelle méthode de calcul des cadres irrégulliers à noeuds rigides.* În : Acier-Stahl-Steel, nr. 1/1962.
86. Takabeya, F. *Multi-Story Frames.* Berlin, W. Ernst & Sohn, 1965.
87. Thadami, B. N. *Modern Methods in Structural Mechanics.* New York, Asia Publishing House, 1964.
88. Timoshenko, S. și Young D. H. *Theory of Structures.* New York, 1945.
89. Umanski, A. A. *Statica i kinematika ferm.* Moscova, 1957.
90. Weaver, W. *Computer Programs for Structural Analysis.* Princeton, N. J., D. Van Nostrand Co., Inc., 1967.
91. Willems, N. și Lucas W. M. *Matrix Analysis for Structural Engineers.* Prentice-Hall Internațional, 1968.
92. Williot, M. *Notions pratiques sur la statique graphique.* Paris, 1877.
93. Wittmeyer, H. *Über des Lösung von linearen Gleichungssystemen durch Iteration.* În : Z. A. M. M. nr. 5/1936.
94. Woods, M. W. și Warlow, – Davies, E. J. *On the Application to Tubular Frameworks of the Methode of „Systematic Relaxation of Constraints".* În : Aeron. Res. Comm., R. and M., nr. 1764/1936.
95. Wöller, G. *Berechnung des elastisch gestützten Durchlaufträgers durch Iteration.* În : Bauingenieur. nr. 5/1962.
96. Yamamoto, H. *On Slope-Deflection Equation and Moment-Distribution Method of Circular-Arc Bow Beams.* În : Civil eng. in Japan, nr. 114, febr. 1965.
97. Zaytzeff, S. *Calcul des constructions hyperstatiques par les méthodes de relaxation.* Paris, 1957.
98. Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.* Londra, Mc.Graw-Hill, 1967.
99. Zienkiewicz, O. C. Cheung, Y. K. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.* Londra, Mc.Graw-Hill, 1968.

SECȚIUNEA V

CALCULUL STRUCTURILOR ÎN DOMENIUL PLASTIC

Conf. dr. ing. VALERIU PETCU

CUPRINS

TABELELE SECŢIUNII V

1. BAZELE TEORIEI ARTICULAŢIILOR PLASTICE

1.1. Elasticitatea şi plasticitatea structurilor static nedeterminate

Mărimea şi distribuţia eforturilor şi deformaţiilor produse de încărcări în structurile static nedeterminate solicitate în principal la încovoiere depind de caracteristicile diagramei moment-curbură utilizate în calcul. Această diagramă exprimă legătura dintre momentul încovoietor care solicită secţiunea unui element de construcţie şi curbura elementului în dreptul secţiunii respective. La structurile alcătuite din materiale a căror comportare poate fi considerată ideal elasto-plastică, calculul eforturilor şi deformaţiilor se face pe baza *diagramei moment-curbură idealizate* ($M - \Phi$) reprezentate în fig. V.1 [3, 4, 6, 7, 16, 17]. Ea este formată din segmentul de dreaptă OA şi din semidreapta AB. Pentru o secţiune dată, segmentul OA exprimă proporţionalitatea dintre momentul încovoietor şi curbura corespunzătoare, comportarea elementului de construcţie în dreptul secţiunii respective fiind perfect elastică. De-a lungul semidreptei AB, care este paralelă cu axa curburilor, momentul încovoietor rămîne constant şi egal cu momentul maxim pe care îl poate suporta secţiunea, curburile putînd creşte teoretic nelimitat. Aceasta indică o comportare perfect plastică a elementului de construcţie în dreptul secţiunii respective.

Prin definiţie, momentul încovoietor maxim pe care îl poate suporta o secţiune din material ideal elasto-plastic se numeşte *moment plastic*, el corespunzînd plastificării complete a materialului secţiunii respective.

Diagrama moment-curbură din fig. V. 1 arată că după atingerea momentului plastic într-o secţiune, elementul de construcţie se comportă ca şi cum ar avea o articulaţie cu frecare în dreptul secţiunii complet plastificate, capabilă de a transmite momentul plastic al acestei secţiuni. O astfel de articulaţie poartă denumirea de *articulaţie plastică*. Mecanismul formării articulaţiilor plastice, precum şi modul lor de funcţionare, pot fi urmărite cu ochiul liber prin intermediul *Cromoplasticităţii* [2].

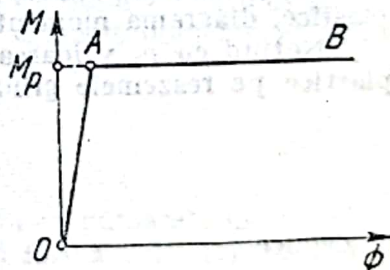


Fig. V.1

Diagrama moment-curbură idealizată indică posibilitatea determinării eforturilor şi deformaţiilor produse de încărcări în structurile static nedeterminate în două ipoteze fundamental diferite, şi anume:

— în ipoteza comportării perfect elastice a structurilor, prin considerarea numai a porţiunii OA a diagramei moment-curbură, sau

— în ipoteza comportării elasto-plastice a structurilor, prin considerarea întregii diagrame moment-curbură.

O structură static nedeterminată se comportă perfect elastic dacă, pentru fiecare schemă de încărcare, momentele încovoietoare din toate secţiunile elementelor structurii sînt mai mici decît momentele plastice ale acestor secţiuni. În acest caz, determinarea eforturilor şi deformaţiilor face obiectul *Staticii construcţiilor în domeniul elastic*, dezvoltate în secţiunea IV a acestui manual.

O structură static nedeterminată se comportă elasto-plastic sub acţiunea încărcărilor dacă, pentru una sau mai multe scheme de încărcare, pe elementele structurii se for-

mează una sau mai multe articulații plastice. Determinarea eforturilor și deformațiilor ținînd seama de comportarea elasto-plastică a structurilor formate din bare face obiectul *Staticii construcțiilor în domeniul plastic*, al cărei suport este constituit de *Teoria articulațiilor plastice* [3, 4, 5, 6, 7, 11].

Pentru evidențierea deosebirii fundamentale care există între comportarea elastică și comportarea elasto-plastică a unei structuri, se consideră o grindă de secțiune constantă,

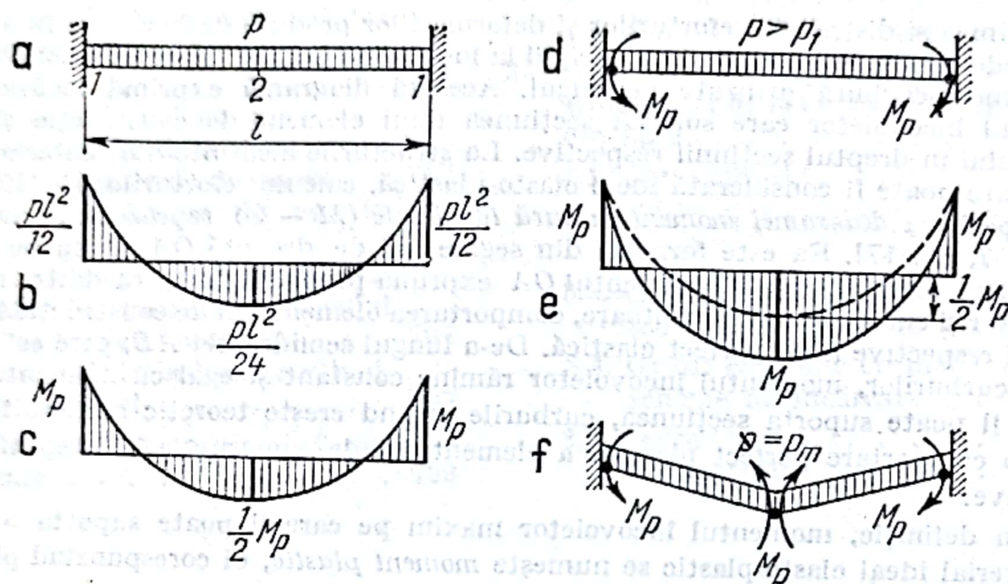


Fig. V.2

încastrată perfect la extremități, solicitată de o încărcare uniform distribuită de mărime p pe unitatea de lungime. Schema grinzii și diagrama momentelor încovoietoare în domeniul elastic sînt redate în fig. V. 2, *a*, *b*. Prin mărirea progresivă a încărcării, momentele încovoietoare cresc proporțional pînă cînd momentele de pe reazeme, care sînt de două ori mai mari decît momentul maxim din cîmp, devin egale cu momentul plastic al secțiunilor grinzii. În acest stadiu de solicitare, pe reazemele grinzii se formează două articulații plastice, diagrama momentelor încovoietoare căpătînd aspectul din fig. V.2,*c*.

Notînd cu p_1 valoarea încărcării p corespunzătoare formării celor două articulații plastice pe reazemele grinzii, din egalitatea

$$\frac{p_1 l^2}{12} = M_p$$

se deduce

$$p_1 = \frac{12 M_p}{l^2}$$

Din punctul de vedere al calculului în domeniul elastic, p_1 este încărcarea maximă pe care o poate suporta grinda. În realitate, sub acțiunea încărcării p_1 grinda nu cedează, cele două articulații plastice de pe reazeme fiind insuficiente pentru transformarea grinzii în mecanism. Aceste articulații plastice fac însă ca pentru o încărcare mai mare decît p_1, grinda să-și schimbe schema statică, ea lucrînd ca o grindă articulată la ambele capete,

în articulaţii acţionînd momente încovoietoare de sens opus sensului de rotire a capetelor grinzii, egale cu momentul plastic M_p de mărime cunoscută (fig. V.2, *d*). Pentru $p > p_1$ dispare deci proporţionalitatea dintre momentele încovoietoare, momentele de pe reazeme rămînînd constante şi egale cu momentul plastic M_p. Singurele momente care cresc sînt cele din cîmpul grinzii. Formarea articulaţiilor plastice are deci ca efect o *redistribuire a momentelor*, de la secţiunile cele mai solicitate către secţiunile mai puţin solicitate. Creşterea încărcării poate avea loc pînă cînd momentul maxim din cîmp devine egal cu momentul plastic M_p, aşa cum se arată în fig. V.2, e. În acest stadiu de solicitare, în cîmpul grinzii se formează cea de a treia articulaţie plastică, grinda cedînd ca urmare a transformării ei în mecanism.

Ecuaţia de echilibru corespunzătoare momentului de formare a mecanismului de cedare (fig.V.2,*f*) : este

$$\frac{p_m l^2}{8} = 2M_p.$$

Din această ecuaţie se deduce mărimea încărcării de cedare

$$p_m = \frac{16M_p}{l^2}.$$

Exemplul dat arată că comportarea unei structuri static nedeterminate în domeniul plastic se deosebeşte de comportarea ei în domeniul elastic prin :

— formarea de articulaţii plastice în secţiunile cele mai solicitate;

— modificarea succesivă a schemei statice a structurii prin formarea succesivă a articulaţiilor plastice, fiecare din acestea avînd ca efect eliminarea unei legături a structurii;

— redistribuirea momentelor încovoietoare, prin dispariţia proporţionalităţii acestor momente după formarea primei articulaţii plastice;

— valorificarea integrală a capacităţii de rezistenţă a structurii.

În cazul grinzii studiate, capacitatea portantă dată de calculul în domeniul elastic este reprezentată de încărcarea p_1, iar cea rezultată din calculul în domeniul plastic este reprezentată de încărcarea p_m, ultima fiind cu 33% mai mare decît prima.

În cele ce urmează se prezintă elementele de bază ale teoriei articulaţiilor plastice, extrase din lucrările cu caracter fundamental referitoare la acest domeniu al Staticii construcţiilor [3, 4, 5, 6, 7, 11].

1.2. Ipoteze de calcul

Teoria articulaţiilor plastice s-a dezvoltat în raport cu următoarele ipoteze :

— diagrama moment-curbură este biliniară, ea avînd forma celei reprezentate în fig. V.1;

— fiecare secţiune are capacitatea de a suporta un moment încovoietor maxim, denumit *moment plastic*, care corespunde plastificării complete a materialului pe întreaga înălţime a secţiunii;

— secţiunile complet plastificate, denumite *secţiuni critice*, sînt înconjurate de zone parţial plastificate, care permit dezvoltarea de rotiri teoretic nelimitate sub acţiunea momentelor plastice respective. Cu alte cuvinte, în dreptul unor astfel de secţiuni se formează *articulaţii plastice*. În calcul, articulaţiile plastice se presupun concentrate în secţiunile critice respective;

— legăturile dintre elementele structurilor sînt astfel concepute şi realizate, incit permit formarea şi funcţionarea articulaţiilor plastice la nivelul lor;

— epuizarea capacităţii de rezistenţă a structurilor corespunde transformării lor în mecanisme, ca urmare a formării numărului necesar de articulaţii plastice;

— în stadiul premergător cedării, deformaţiile structurilor sînt suficient de mici ceea ce permite scrierea ecuaţiilor de echilibru pe schemele nedeformate ale structurilor;

— valorile momentelor plastice ale secţiunilor critice nu sînt influenţate de forţele tăietoare sau de forţele axiale care acţionează în aceste secţiuni, şi nici de concentrările locale de eforturi produse de încărcările aplicate punctual în dreptul secţiunilor critice;

— în comportarea structurilor nu intervin fenomene de instabilitate locală sau generală a echilibrului înainte de formarea mecanismului de cedare;

— încărcările care acţionează asupra structurilor se aplică static şi cresc proporţional în funcţie de un singur parametru.

1.3. Teoreme fundamentale

Condiţiile calculului în domeniul plastic. Calculul în domeniul plastic al unei structuri static nedeterminate se face pe baza următoarelor trei condiţii fundamentale:

— condiţia de echilibru;

— condiţia de mecanism;

— condiţia de plastificare.

Condiţia de echilibru este îndeplinită atunci cînd echilibrul static între încărcările exterioare şi eforturile şi reacţiunile produse de acestea în elementele şi reazemele structurii se menţine pînă în momentul formării mecanismului de cedare. Conform condiţiei de mecanism, cedarea structurii se produce prin transformarea ei, în totalitate sau parţial, într-un mecanism, ca urmare a formării numărului necesar de articulaţii plastice. În sfîrşit, condiţia de plastificare impune ca, în stadiul de cedare, momentele încovoietoare să nu depăşească în nici o secţiune valoarea momentului plastic al secţiunii respective.

Sensul în care trebuie operat în vederea satisfacerii acestor trei condiţii este arătat de cele trei teoreme fundamentale ale teorei articulaţiilor plastice, cunoscute sub denumirile de *teorema statică, teorema cinematică* şi *teorema unicităţii*. Pentru prezentarea acestor teoreme se consideră o structură static nedeterminată solicitată de un grup de încărcări formînd o anumită schemă de încărcare. Încărcările fiind proporţionale, mărimile lor pot fi exprimate în funcţie de o *încărcare de referinţă*, prin intermediul unor coeficienţi numerici adecvaţi. Prin definiţie, valoarea încărcării de referinţă corespunzătoare cedării structurii se numeşte *încărcare de cedare*.

Teorema statică. *Orice încărcare de referinţă rezultată dintr-o diagramă de momente care satisface simultan condiţiile de echilibru şi de plastificare este inferioară sau cel mult egală cu încărcarea efectivă de cedare a structurii.*

Teorema cinematică. *Încărcarea efectivă de cedare a unei structuri este mai mică sau cel mult egală cu cea mai mică valoare a încărcărilor de referinţă calculate pentru toate mecanismele de cedare ce se pot imagina pentru structura respectivă.*

Teorema unicităţii. Teorema statică poate fi combinată cu teorema cinematică, obţinîndu-se în acest mod teorema unicităţii încărcării de cedare, cu următorul enunţ: *dacă pentru structura ce se calculează se poate găsi o diagramă de momente care să satisfacă*

simultan condiţiile de echilibru, de mecanism şi de plastificare, diagrama astfel obţinută este singura compatibilă cu cele trei condiţii ale calculului în domeniul plastic, iar încărcarea de referinţă corespunzătoare acestei diagrame de momente este încărcarea efectivă de cedare a structurii.

1.4. Metode generale de calcul

Încărcarea de cedare a unei structurii static nedeterminate poate fi stabilită prin două metode generale de calcul, denumite *metoda statică* şi *metoda cinematică* prima derivînd din teorema statică iar a doua din teorema cinematică.

În metoda statică, încărcarea de cedare se obţine prin corectarea succesivă a unei diagrame iniţiale de momente arbitrar alese, care satisface în permanenţă condiţiile de echilibru şi de plastificare, astfel încît diagrama finală de momente să satisfacă şi condiţia de mecanism.

În metoda cinematică, se determină încărcările de referinţă corespunzătoare tuturor mecanismelor posibile de cedare şi se reţine valoarea cea mai mică a acestor încărcări, care este încărcarea efectivă de cedare.

Din punct de vedere practic, fiecare din aceste două metode generale de calcul sînt susceptibile de a fi prezentate în variante diferite care, în funcţie de caracteristicile statice şi geometrice ale structurii ce se calculează şi de particularităţile schemei de încărcare, pot conduce la simplificări şi sistematizări de calcul de natură să uşureze substanţial efectuarea operaţiilor de determinare a încărcării efective de cedare. În cele ce urmează se prezintă şi se ilustrează metoda statică şi metoda cinematică în formele cel mai des utilizate în practică, cunoscute sub denumirile de *metoda biografică* şi *metoda combinării mecanismelor*.

1.4.1. Metoda biografică. În cadrul acestei variante a metodei statice de calcul în domeniul plastic, diagrama iniţială de momente este cea rezultată din calculul structurii în domeniul elastic. Aplicarea metodei cuprinde următoarele etape:

1) Se repereză şi se numerotează secţiunile în care este posibilă formarea de articulaţii plastice. Aceste secţiuni corespund, de regulă, punctelor de aplicaţie a încărcărilor concentrate în dreptul cărora momentele elastice au valori maxime, punctelor de anulare a forţei tăietoare în cîmpurile barelor solicitate de încărcări distribuite, precum şi punctelor de intrare a barelor în noduri sau de încastrare a barelor în fundaţii.

2) Se calculează valorile momentelor plastice ale secţiunilor critice (cînd se cunosc dimensiunile acestor secţiuni) sau se exprimă momentele plastice ale secţiunilor critice în funcţie de un moment plastic de referinţă (cînd nu se cunosc iniţial dimensiunile geometrice ale acestor secţiuni).

3) Se calculează rigidităţile la încovoiere ale secţiunilor barelor (cînd dimensiunile acestor secţiuni sînt cunoscute), sau se stabileşte relaţia prin care pot fi exprimate aceste rigidităţi în funcţie de momentele plastice ale secţiunilor respective (cînd dimensiunile acestor secţiuni sînt iniţial necunoscute).

4) Se efectuează calculul structurii în domeniul elastic pentru o valoare arbitrară P a încărcării de referinţă şi se determină apoi valoarea P_1 a acestei încărcări, corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în structură. Prima articulaţie plastică se formează în secţiunea critică în care momentul încovoietor devine egal cu momentul ei plastic, toate celelalte secţiuni critice fiind solicitate de momente încovoietoare inferioare momentelor lor plastice.

Pentru o încărcare de referinţă mai mare decît P_1, structura se comportă ca şi cum ar avea o articulaţie obişnuită în secţiunea critică în care s-a atins momentul plastic, în această articulaţie acţionînd însă o pereche de momente egale cu momentul plastic

al secţiunii critice respective şi avînd sensul de acţiune opus sensului de rotire a articulaţiei.

5) Se consideră *prima schemă auxiliară a structurii*, rezultată din introducerea unei articulaţii obişnuite în locul articulaţiei plastice formate sub acţiunea încărcării de referinţă P_1 şi se determină, prin intermediul unui calcul în domeniul elastic, momentele încovoietoare produse pe această schemă auxiliară de diferenţa $\Delta P = P - P_1 > 0$. Se adună apoi momentele încovoietoare produse de încărcarea de referinţă P_1 cu momentele încovoietoare produse de încărcarea ΔP pe prima schemă auxiliară a structurii, obţinîndu-se în acest mod momentele încovoietoare produse de încărcarea $P_1 + \Delta P$ pe structura reală. Se determină apoi valoarea cea mai mică a încărcării ΔP, care se notează cu ΔP_1, corespunzătoare formării celei de a doua articulaţii plastice în structură. Cea de a doua articulaţie plastică se formează în cea de a doua secţiune critică în care momentul încovoietor devine egal cu momentul plastic al secţiunii critice respective, toate celelalte secţiuni critice, cu excepţia celei în care s-a format prima articulaţie plastică, fiind solicitate de momente încovoietoare inferioare momentelor lor plastice. Încărcarea de referinţă corespunzătoare formării celei de a doua articulaţii plastice se notează cu P_2, valoarea ei fiind egală cu suma $P_1 + \Delta P_1$.

Pentru o încărcare de referinţă mai mare decît P_2, structura se va comporta ca şi cum ar avea două articulaţii obişnuite în locul celor două articulaţii plastice deja formate, în aceste articulaţii acţionînd cîte o pereche de momente egale cu momentele plastice ale secţiunilor critice respective şi avînd sensul de acţiune opus sensului de rotire a articulaţiilor în care acţionează.

6) Se consideră cea de *a doua schemă auxiliară a structurii*, rezultată din introducerea a două articulaţii obişnuite în locul celor două articulaţii plastice formate sub acţiunea încărcării de referinţă P_2 şi se determină, prin intermediul unui calcul în domeniul elastic, momentele încovoietoare produse pe această schemă auxiliară de diferenţa $\Delta P = P - P_2 > 0$. Se adună apoi momentele încovoietoare produse de încărcarea de referinţă P_2 cu momentele încovoietoare produse de încărcarea ΔP pe cea de a doua schemă auxiliară a structurii, obţinîndu-se în acest mod momentele încovoietoare produse de încărcarea $P_2 + \Delta P$ pe structura reală. Se determină apoi valoarea cea mai mică a încărcării ΔP, care se notează cu ΔP_2, corespunzătoare formării celei de a treia articulaţii plastice în structură. Cea de a treia articulaţie plastică se formează în cea de a treia secţiune critică în care momentul încovoietor devine egal cu momentul plastic al secţiunii critice respective, toate celelalte secţiuni critice, cu excepţia celor în care s-au format primele două articulaţii plastice, fiind solicitate de momente încovoietoare inferioare momentelor lor plastice. Încărcarea de referinţă corespunzătoare formării celei de a treia articulaţii plastice se notează cu P_3, valoarea ei fiind egală cu suma $P_2 + \Delta P_2$.

7) Operaţia de determinare a ordinii de apariţie a articulaţiilor plastice se continuă după modelul de la pct. 6, obţinîndu-se în acest mod următoarea serie de valori ale încărcării de referinţă:

$$P_1,$$

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1,$$

$$P_3 = P_2 + \Delta P_2,$$

$$\dots\dots$$

$$P_n = P_{n-1} + \Delta P_{n-1},$$

$$P_{n+1} = P_n + \Delta P_n.$$

În această serie, $n+1$ este numărul de articulații plastice necesar pentru transformarea structurii, în totalitate sau parțial, într-un mecanism, încărcarea de referință P_{n+1} fiind, prin urmare, încărcarea de cedare P_m a structurii.

Exemplul de calcul V.1. Se consideră un cadru portal încastrat perfect în fundații, avînd barele de secțiune constantă. Deschiderea cadrului este $2l$ iar înălțimea lui este l. Cadrul este solicitat de o încărcare verticală de mărime $2P$, aplicată concentrat în mijlocul riglei, și de o încărcare orizontală de mărime P, aplicată la nivelul riglei. Momentul plastic al secțiunilor stîlpilor este M_p iar momentul plastic al secțiunilor riglei este $2M_p$. Schema generală a cadrului este reprezentată în fig. V.3.

În cele ce urmează se calculează cadrul în domeniul plastic prin metoda biografică, parcurgîndu-se în acest scop etapele acestei metode.

1) Secțiunile în care este posibilă formarea de articulații plastice sînt în număr de cinci, ele fiind numerotate de la 1 la 5 (fig. V. 3). Secțiunile critice *2* și *4* sînt situate pe stîlpi, deoarece momentul plastic al secțiunilor stîlpilor este mai mic decît momentul plastic al secțiunilor riglei.

2) Momentul plastic de referință este M_p.

3) Se consideră că barele cadrului sînt alcătuite din profile I laminate [21]. Legătura dintre rigiditățile la încovoiere și momentele plastice ale secțiunilor a și b a două profile oarecare poate fi exprimată prin relația [9]:

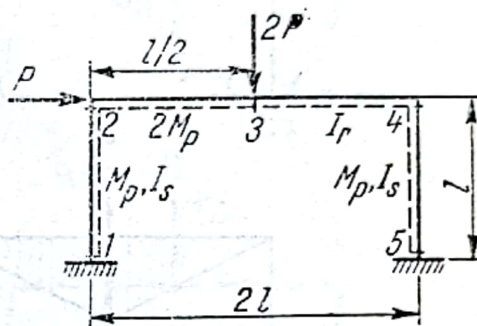


Fig. V.3

$$\frac{EI_a}{EI_b} = \left(\frac{M_{pa}}{M_{pb}}\right)^{1,385},$$

în care: E este modulul de elasticitate al oțelului; I_a, M_{pa} — momentul de inerție și momentul plastic ale secțiunii a; I_b, M_{pb} — momentul de inerție și momentul plastic ale secțiunii b.

În cazul cadrului din fig. V. 3, relația anterioară devine

$$\frac{EI_r}{EI_s} = \left(\frac{2M_p}{M_p}\right)^{1,385} = 2,61,$$

unde I_r este momentul de inerție al secțiunilor riglei, iar I_s este momentul de inerție al secțiunilor stîlpilor.

4) Calculul cadrului în domeniul elastic se face prin metoda eforturilor, expusă în cap 3 al secțiunii IV din acest manual. Schema static determinată de bază este trasată în fig. V. 4, *a*, ea fiind obținută prin introducerea de articulații obișnuite în secțiunile critice *1*, *4* și *5*. Necunoscutele static nedeterminate sînt deci momentele încovoietoare X_1, X_4 și X_5 din secțiunile critice în care s-au introdus articulații obișnuite. Convenția de semne este cea conform căreia momentele pozitive sînt cele care întind fețele barelor de-a lungul cărora, în fig. V. 3, s-au trasat linii întrerupte. Diagramele de momente produse pe sistemul static determinat de bază de încărcările exterioare și de valorile unitare ale necunoscutelor static nedeterminate sînt reprezentate în fig. V. 4, *b*-*f*.

Rezultatele calculului static arată că prima articulație plastică se formează în secțiunea critică *4*, expresia încărcării de referință P_1 fiind

$$P_1 = 1,908\,\frac{M_p}{l}.$$

Diagrama momentelor încovoietoare pentru $P = P_1$ este trasată în fig. V. 5, *a*.

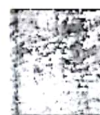
5) Pentru $\Delta P = P - P_1 > 0$, în fig. V. 5, *b* este reprezentată prima schemă auxiliară a cadrului, care conține o articulație obișnuită în secțiunea critică *4*. Schema static determinată de bază corespunzătoare primei scheme auxiliare a cadrului este tot cea din fig. V. 4, *a*. În urma sumării momentelor încovoietoare produse de încărcarea de referință P_1 (fig. V. 5, *a*) cu momentele încovoietoare produse de diferența $\Delta P = P - P_1$ pe schema auxiliară din fig. V. 5, *b*, se ajunge la concluzia că a doua articulație plastică se formează în secțiunea critică *5*, pentru diferența ΔP_1 rezultînd valoarea

$$\Delta P_1 = 0,408\,\frac{M_p}{l}.$$

Încărcarea de referință corespunzătoare formării celei de a doua articulații plastice este deci

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 = 2,316\,\frac{M_p}{l},$$

diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare acestei încărcări fiind redată în fig.V.5, *c*.



6) Pentru $\Delta P = P - P_2 > 0$, în fig. V. 5, *d* este reprezentată cea de a doua schemă auxiliară a cadrului, care conține două articulații obișnuite în secțiunile critice *4* și *5*. Schema static determinată de bază corespunzătoare celei de a doua scheme auxiliare rămîne tot cea din fig. V. 4, *a*.

În urma sumării momentelor încovoietoare produse de încărcarea de referință P_2 (fig. V. 5, *c*) cu momentele încovoietoare produse de diferența $\Delta P = P - P_2$ pe schema auxiliară din fig. V. 5, *d*, se constată că a treia articu-

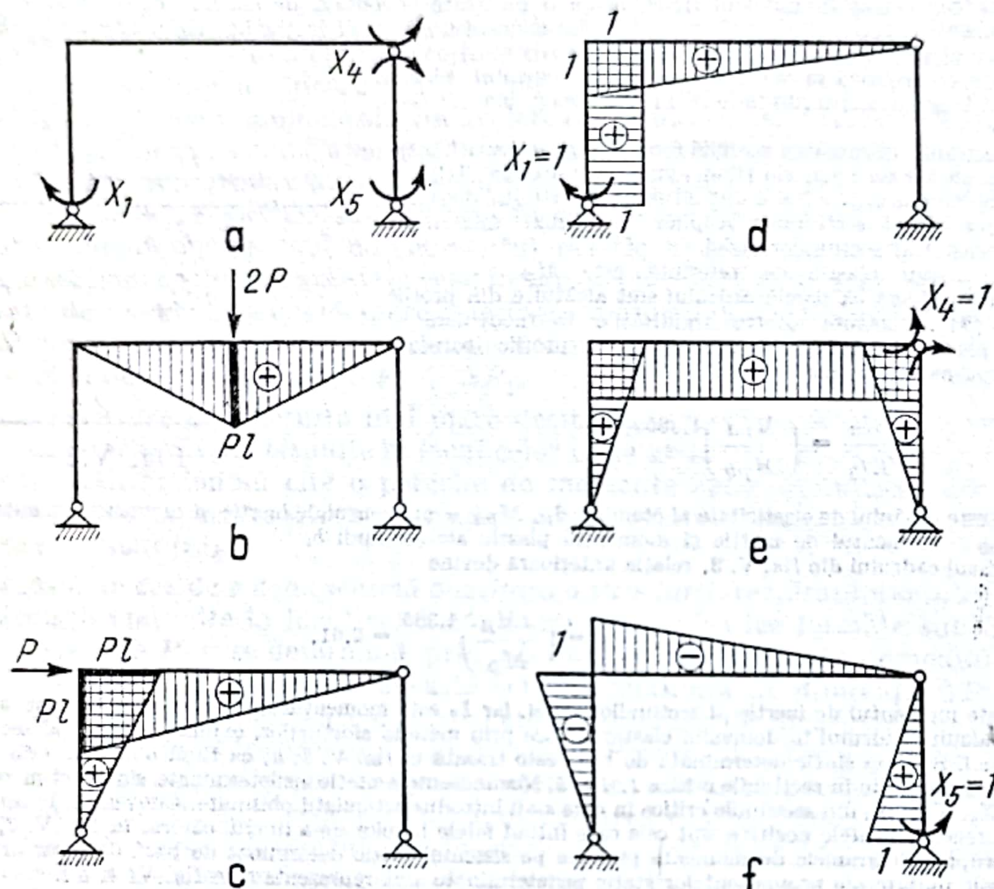


Fig. V.4

lație plastică se formează în secțiunea critică *3*, pentru diferența ΔP_2 rezultînd valoarea

$$\Delta P_2 = 0{,}222\,\frac{M_p}{l}.$$

Încărcarea de referință corespunzătoare formării celei de a treia articulații plastice este deci

$$P_3 = P_2 + \Delta P_2 = 2{,}538\,\frac{M_p}{l},$$

diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare acestei încărcări fiind redată în fig. V.5, *e*.

7) Pentru $\Delta P = P - P_3 > 0$, în fig. V. 5, *f* este reprezentată cea de a treia schemă auxiliară a cadrului care conține trei articulații obișnuite în secțiunile critice *3*, *4* și *5*. Această schemă este static determinată.

Prin sumarea momentelor încovoietoare produse de încărcarea de referință P_3 (fig. V. 5, *e*) cu momentele încovoietoare produse de diferența $\Delta P = P - P_3$ pe schema auxiliară din fig. V. 5, *f*, se constată că a patra articulație plastică se formează în secțiunea critică *1*, pentru diferența ΔP_3 obținîndu-se valoarea

$$\Delta P_3 = 0{,}129\,\frac{M_p}{l}.$$

Încărcarea de referință corespunzătoare formării celei de a patra articulații plastice este deci

$$P_4 = P_3 + \Delta P_3 = 2{,}667\,\frac{M_p}{l},$$

diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare acestei încărcări fiind reprezentată în fig. V.5, *g*.

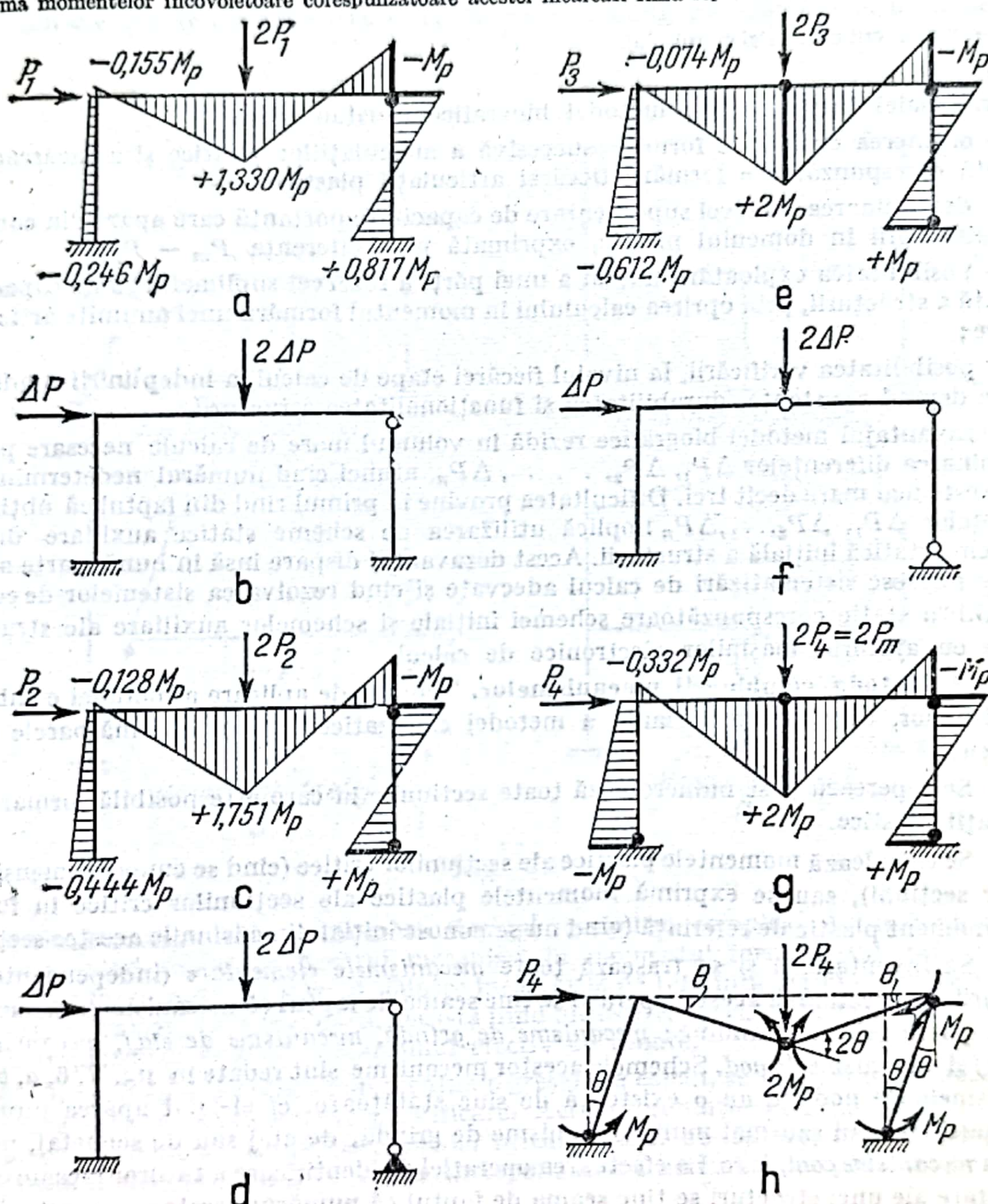


Fig.V.5

Formarea celor patru articulații plastice în secțiunile critice *1, 3, 4* și *5* conduce la transformarea cadrului într-un mecanism, a cărui schemă este reprezentată în fig. V.5,*h*. În consecință, încărcarea P_4 este încărcarea de cedare P_m a cadrului.

Din expresia încărcării $P_4 = P_m$ se deduce

$$M_p = \frac{P_m l}{2{,}667}$$

pentru secțiunile critice ale stîlpilor și respectiv

$$2M_p = \frac{P_m l}{1{,}333}$$

pentru secțiunea critică a riglei cadrului.

Principalele avantaje ale metodei biografice constau în:

— obținerea ordinii de formare succesivă a articulațiilor plastice și a încărcării de referință corespunzătoare formării fiecărei articulații plastice;

— determinarea rezervei suplimentare de capacitate portantă care apare din comportarea structurii în domeniul plastic, exprimată prin diferența $P_m - P_1$;

— posibilitatea exploatării numai a unei părți a rezervei suplimentare de capacitate portantă a structurii, prin oprirea calculului în momentul formării unei anumite articulații plastice;

— posibilitatea verificării, la nivelul fiecărei etape de calcul, a îndeplinirii condițiilor de care depind rezistența, durabilitatea și funcționalitatea structurii.

Dezavantajul metodei biografice rezidă în volumul mare de calcule necesare pentru determinarea diferențelor $\Delta P_1, \Delta P_2, \ldots, \Delta P_n$, atunci cînd numărul nedeterminărilor statice este mai mare decît trei. Dificultatea provine în primul rînd din faptul că obținerea diferențelor $\Delta P_1, \Delta P_2, \ldots, \Delta P_n$ implică utilizarea de scheme statice auxiliare diferite de schema statică inițială a structurii. Acest dezavantaj dispare însă în bună parte atunci cînd se folosesc sistematizări de calcul adecvate și cînd rezolvarea sistemelor de ecuații de echilibru static corespunzătoare schemei inițiale și schemelor auxiliare ale structurii se face cu ajutorul mașinilor electronice de calcul.

1.4.2. Metoda combinării mecanismelor. Tehnica de aplicare a metodei combinări mecanismelor, care este o variantă a metodei cinematice, cuprinde următoarele etape de calcul:

1) Se reperează și se numerotează toate secțiunile în care este posibilă formarea de articulații plastice.

2) Se calculează momentele plastice ale secțiunilor critice (cînd se cunosc dimensiunile acestor secțiuni), sau se exprimă momentele plastice ale secțiunilor critice în funcție de un moment plastic de referință (cînd nu se cunosc inițial dimensiunile acestor secțiuni)

3) Se inventariază și se trasează toate *mecanismele elementare* (independente) ale structurii. La efectuarea acestei operații se ține seama de faptul că mecanismele elementare sînt de patru feluri, și anume: *mecanisme de grindă, mecanisme de etaj, mecanisme de semietaj* și *mecanisme de nod*. Schemele acestor mecanisme sînt redate în fig. V. 6, *a, b, c, d*. Mecanismele de nod nu au o existență de sine stătătoare, ci ele pot apărea numai în combinații cu unul sau mai multe mecanisme de grindă, de etaj sau de semietaj, pentru a forma *mecanisme complexe*. La efectuarea operației de identificare a tuturor mecanismelor elementare ale unei structuri se ține seama de faptul că numărul acestora, m, este dat de relația

$$m = s - x \tag{V.1}$$

unde s este numărul tuturor secțiunilor în care este posibilă formarea de articulații plastice, iar x este numărul nedeterminărilor statice ale structurii.

4) Se construiesc toate mecanismele complexe ale structurii, rezultate din toate combinațiile posibile ale mecanismelor elementare.

5) Se determină mărimea încărcării de referință corespunzătoare formării fiecărui mecanism elementar (cu excepția mecanismelor de nod), precum și mărimea încărcării

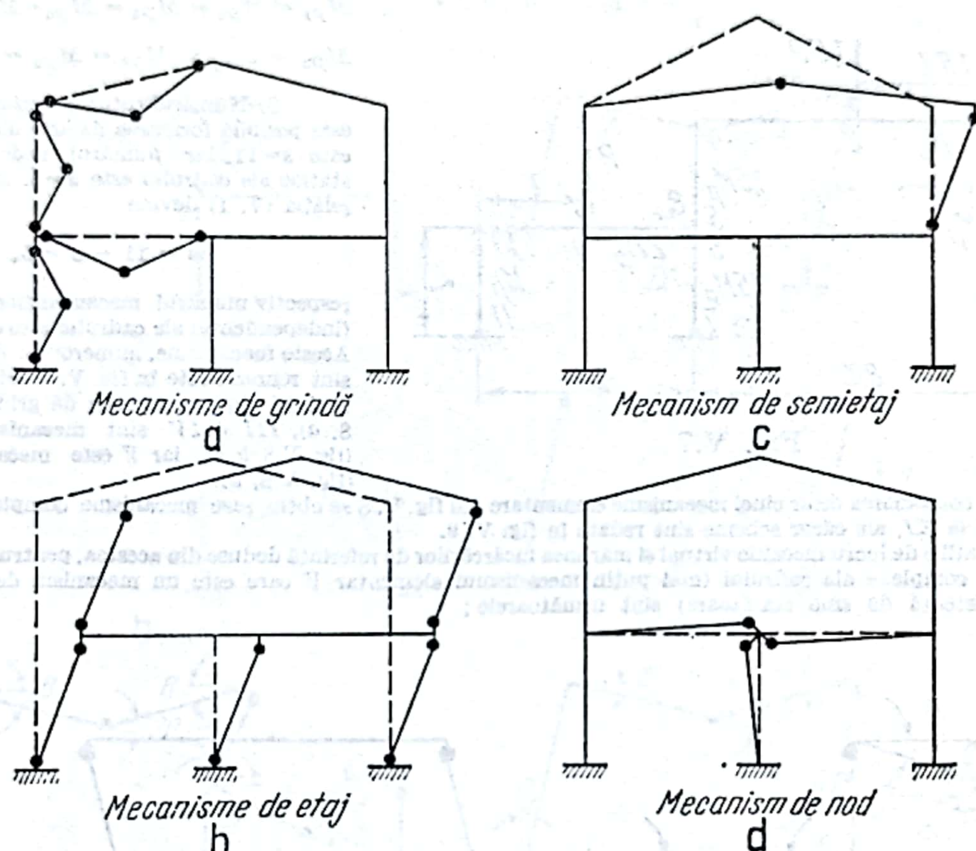


Fig. V.6

de referință corespunzătoare formării fiecărui mecanism complex. Această operație se face exprimînd echilibrul fiecărui mecanism în momentul formării lui, prin folosirea ecuației de lucru mecanic virtual. Dintre încărcările de referință astfel obținute se reține cea care are valoarea cea mai mică, aceasta fiind încărcarea efectivă de cedare, iar mecanismul corespunzător ei fiind mecanismul efectiv de cedare.

6) În vederea depistării unor eventuale greșeli de calcul, se verifică dacă mecanismul de cedare satisface condiția de plastificare. Această condiție este îndeplinită dacă în diagrama de momente trasată pe schema mecanismului de cedare, momentele plastice sînt atinse numai în secțiunile critice corespunzătoare articulațiilor plastice ale acestui mecanism.

Exemplul de calcul V.2. Se consideră cadrul cu două deschideri din fig.V. 7, avînd barele de secțiune constantă și stîlpii încastrați în fundații. Deschiderile au lungimile $3l$ și $2l$, iar înălțimile stîlpilor sînt $2l$ și respectiv l. Cadrul este solicitat de trei încărcări aplicate concentrat, dintre care primele două, de mărime $1{,}5P$ și P, se aplică vertical în mijlocul riglelor, iar cea de a treia încărcare, de mărime P, se aplică orizontal la nivelul riglei din prima deschidere a cadrului.

În cele ce urmează se determină încărcarea de cedare a cadrului prin metoda combinării mecanismelor, parcurgîndu-se în acest scop etapele acestei metode.

1) Secțiunile în care este posibilă formarea de articulații plastice sînt în număr de unsprezece, ele fiind numerotate de la 1 la 11 (fig. V. 7). Secțiunile critice *2*, *4* și *10* sînt situate pe stîlpi, deoarece momentele plastice ale secțiunilor stîlpilor sînt mai mici decît momentele plastice ale secțiunilor riglelor cu care vin în contact.

2) Momentul plastic al secțiunilor critice *10* și *11*, notat cu M_p, este ales ca moment plastic de referință. Pentru celelalte secțiuni critice se consideră următoarele valori ale momentelor plastice (fig. V.7):

$$M_{p1}=M_{p2}=M_{p4}=M_{p6}=M_{p7}=1{,}5M_p;$$

$$M_{p3}=3M_p;\quad M_{p8}=M_{p9}=2M_p.$$

Fig. V.7

3) Numărul tuturor secțiunilor în care este posibilă formarea de articulații plastice este $s=11$, iar numărul nedeterminărilor statice ale cadrului este $x=6$. În consecință, relația (V. 1) devine

$$m=11-6=5,$$

respectiv numărul mecanismelor elementare (independente) ale cadrului este egal cu cinci. Aceste mecanisme, numerotate de la *I* la *V*, sînt reprezentate în fig. V. 8. Dintre acestea, *I* și *II* sînt mecanisme de grindă (fig. V. 8, *a*), *III* și *IV* sînt mecanisme de etaj (fig. V.8, *b*, *c*), iar *V* este mecanism de nod (fig. V.8, *d*).

4) Din combinarea celor cinci mecanisme elementare din fig. V. 8 se obțin șase mecanisme complexe, numerotate de la *VI* la *XI*, ale căror scheme sînt redate în fig. V. 9.

5) Ecuațiile de lucru mecanic virtual și mărimea încărcărilor de referință deduse din acestea, pentru mecanismele elementare și complexe ale cadrului (mai puțin mecanismul elementar *V* care este un mecanism de nod și deci nu are o existență de sine stătătoare) sînt următoarele:

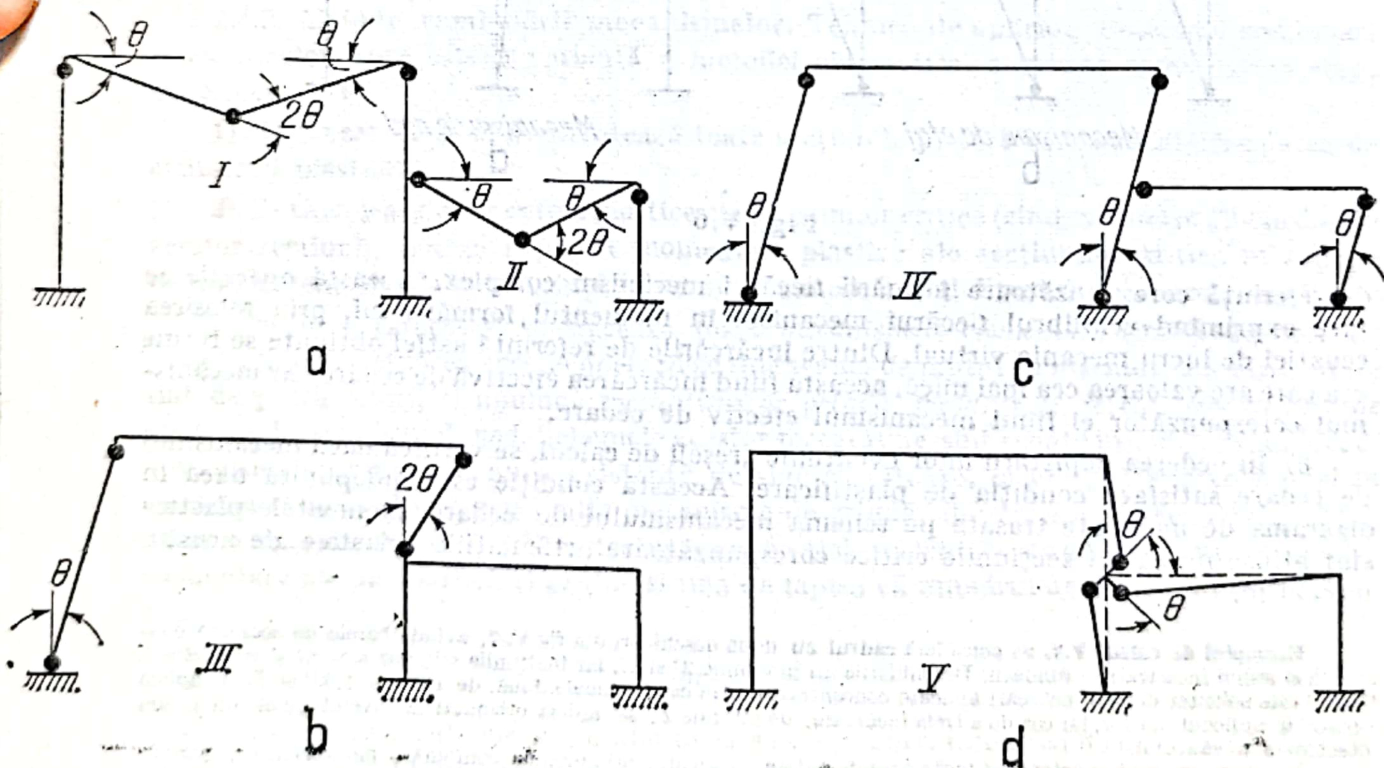


Fig. V. 8

Mecanismul I (fig.V. 8, *a*)

$$1,5P_m \cdot 1,5l \cdot \theta = 2 \cdot 1,5M_p \cdot \theta + 3M_p \cdot 2\theta; \quad P_m = \frac{4M_p}{l}.$$

Mecanismul II (fig.V. 8, *a*)

$$P_m \cdot l \cdot \theta = 2M_p \cdot \theta + 2M_p \cdot 2\theta; \quad P_m = \frac{7M_p}{l}.$$

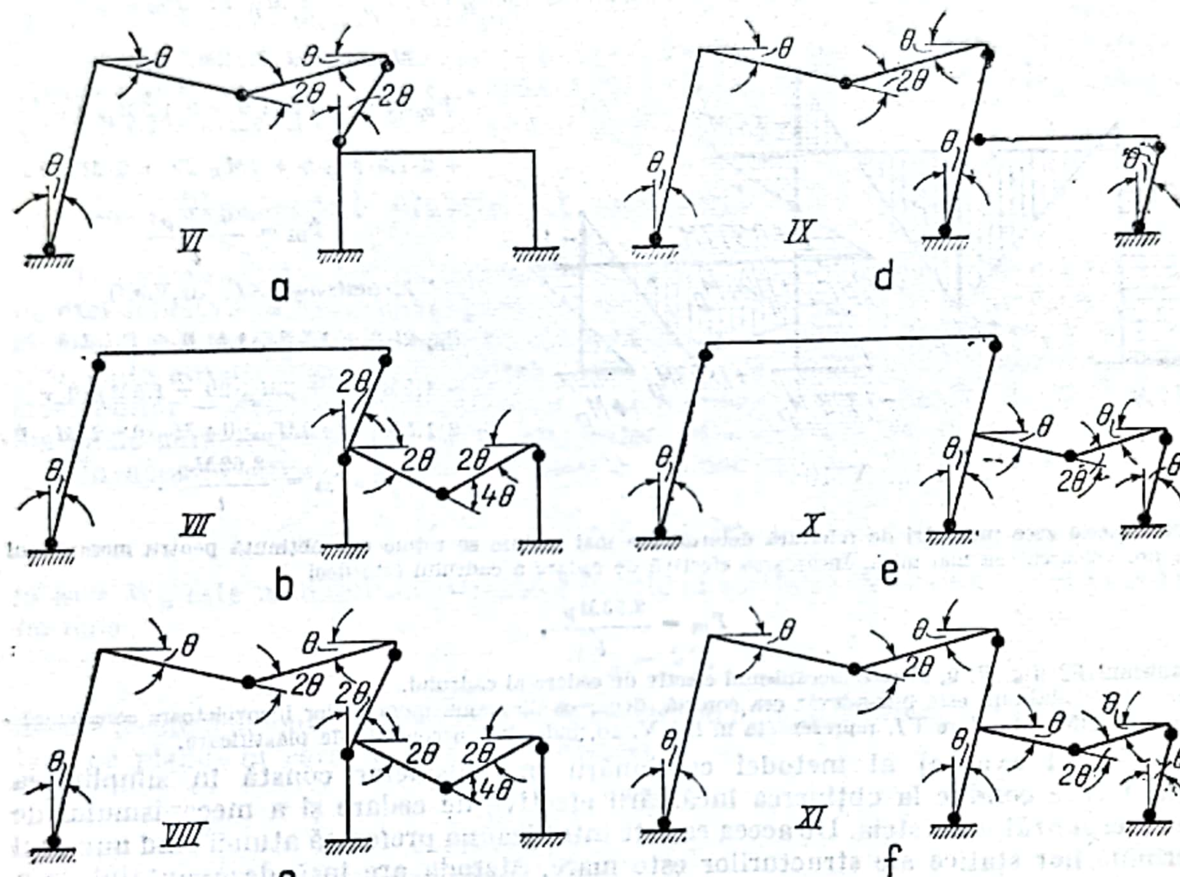


Fig. V.9

Mecanismul III (fig.V. 8, *b*)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta = 2 \cdot 1,5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1,5M_p \cdot 2\theta; \quad P_m \frac{4,5M_p}{l}.$$

Mecanismul IV (fig.V. 8, *c*)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta = 4 \cdot 1,5M_p \cdot \theta + 2 \cdot M_p \cdot \theta + 2M_p \cdot \theta; \quad P_m = \frac{5M_p}{l}.$$

Mecanismul VI (fig.V. 9, *a*)

$$1,5P_m \cdot 1,5l \cdot \theta + P_m \cdot 2l \cdot \theta = 1,5M_p \cdot \theta + 3M_p \cdot 2\theta + 1,5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1,5M_p \cdot 2\theta; \quad P_m = \frac{3,53M_p}{l}.$$

Mecanismul VII (fig.V. 9, *b*)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta + P_m \cdot l \cdot 2\theta = 2 \cdot 1,5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1,5M_p \cdot 2\theta + 2M_p \cdot 4\theta + M_p \cdot 2\theta; \quad P_m = \frac{4,75M_p}{l}.$$

Mecanismul VIII (fig.V. 9, c)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta + 1{,}5P_m \cdot 1{,}5l \cdot \theta + P_m \cdot l \cdot 2\theta = 1{,}5M_p \cdot \theta + 3M_p \cdot 2\theta + 1{,}5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1{,}5M_p \cdot 2\theta + 2M_p \cdot 4\theta; \quad P_m = \frac{4M_p}{l}.$$

Mecanismul IX (fig.V. 9, d)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta + 1{,}5P_m \cdot 1{,}5l \cdot \theta = 1{,}5M_p \cdot \theta + 3M_p \cdot 2\theta + 1{,}5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1{,}5M_p \cdot \theta + 2M_p \cdot \theta + 2 \cdot M_p \cdot \theta; \quad P_m = \frac{3{,}76M_p}{l}.$$

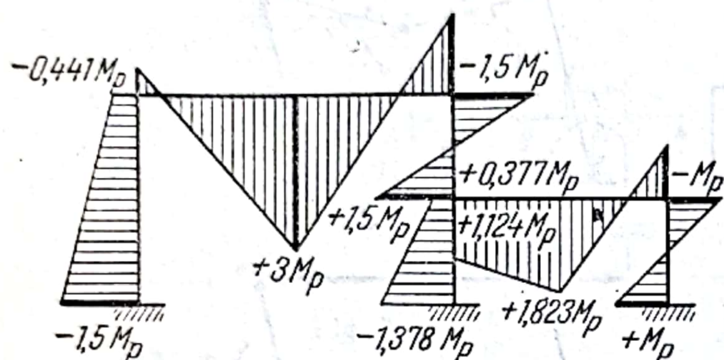


Fig. V.10

Mecanismul X (fig.V.9,e)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta + P_m \cdot l \cdot \theta = 2 \cdot 1{,}5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1{,}5 \cdot M_p \cdot \theta + 2M_p \cdot 2\theta + 2 \cdot M_p \cdot \theta;$$

$$P_m = \frac{6{,}5M_p}{l}$$

Mecanismul XI (fig.V.9,f)

$$P_m \cdot 2l \cdot \theta + 1{,}5P_m \cdot 1{,}5l \cdot \theta + P_m \cdot l \cdot \theta = 1{,}5M_p \cdot \theta + 3M_p \cdot 2\theta + 1{,}5M_p \cdot \theta + 2 \cdot 1{,}5M_p \cdot \theta + 2M_p \cdot 2\theta + M_p \cdot \theta + 2 \cdot M_p \cdot \theta;$$

$$P_m = \frac{3{,}62M_p}{l}.$$

Dintre cele zece încărcări de referinţă determinate mai înainte se reţine cea obţinută pentru mecanismul *VI*, care are valoarea cea mai mică. Încărcarea efectivă de cedare a cadrului este deci

$$P_m = \frac{3{,}53M_p}{l},$$

iar mecanismul *VI* (fig. V. 9, *a*) este mecanismul efectiv de cedare al cadrului.

6) Soluţia obţinută este într-adevăr cea corectă, deoarece diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare mecanismului de cedare *VI*, reprezentată în fig. V. 10, îndeplineşte condiţia de plastificare.

Principalul avantaj al metodei combinării mecanismelor constă în simplitatea operaţiilor care conduc la obţinerea încărcării efective de cedare şi a mecanismului de cedare corespunzător acesteia. De aceea ea este întotdeauna preferată atunci cînd numărul nedeterminărilor statice ale structurilor este mare. Metoda are însă dezavantajul de a nu putea oferi elementele necesare pentru verificarea modului de comportare a structurilor pentru încărcări de referinţă inferioare încărcării de cedare.

2. CALCULUL STRUCTURILOR DE OŢEL ÎN DOMENIUL PLASTIC

2.1. Aria de aplicare a teoriei articulaţiilor plastice la calculul structurilor de oţel

Teoria articulaţiilor plastice se aplică în prezent la calculul următoarelor tipuri de structuri static nedeterminate de oţel;

— grinzi continue;
— cadre cu unul sau două niveluri şi una sau mai multe deschideri;
— cadre multietajate la care forţele orizontale sînt preluate de contravîntuiri verticale speciale.

Aceste structuri trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

— să fie alcătuite din elemente de oţel cu inimă plină;

— secţiunile elementelor componente să admită două axe de simetrie şi să fie solicitate la încovoiere în planul corespunzător momentului principal de inerţie celui mai mare;

— elementele componente să fie alcătuite din produse laminate de oţel de uz general pentru construcţii avînd marca OL 37, conform STAS 500/2—68 [19];

— să fie solicitate de încărcări aplicate static, excepţie făcînd încărcările provenind din vînt şi din acţiuni seismice.

Îmbinările structurilor de oţel calculate în domeniul plastic pot fi realizate prin sudare, nituire sau bulonare, ele fiind dimensionate astfel încît să asigure transmiterea integrală a eforturilor între elementele pe care le leagă [14, 16].

2.2. Momentul plastic al secţiunilor de oţel

Diagrama eforturilor unitare corespunzătoare plastificării complete a unei secţiuni de oţel solicitate la încovoiere pură are forma birectangulară din fig. V.11, ordonatele ei fiind egale cu limita de curgere. Această formă a diagramei eforturilor unitare este consecinţa admiterii în calcul, pentru oţelul carbon de construcţii, a curbei caracteristice efort unitar — deformaţie specifică ($\sigma - \varepsilon$) reprezentate în fig. V.12, în care σ_c este limita de curgere a oţelului iar ε_c este deformaţia specifică de curgere.

În această situaţie, momentul plastic al unei secţiuni de oţel este dat de relaţia

$$M_p = W_p \sigma_c, \tag{V.2}$$

în care W_p este modulul de rezistenţă plastic al secţiunii. Valoarea lui se calculează cu formula

$$W_p = 2S, \tag{V.3}$$

în care S este momentul static al jumătăţii secţiunii în raport cu axa de simetrie perpendiculară pe planul în care se produce încovoierea.

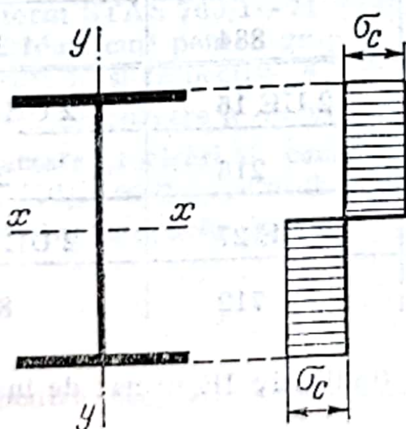


Fig. V.11

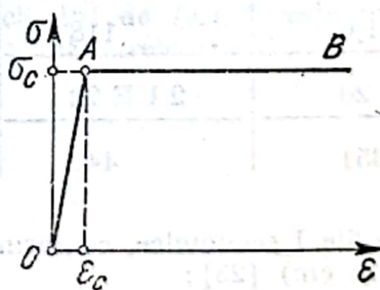


Fig. V.12

Tabelele V.1 şi V.2 cuprind valorile, în cm³, ale modulilor de rezistenţă plastici ai secţiunilor următoarelor profile laminate:

— profile I obişnuite, conform STAS 565—71 (indicativ I urmat de înălţimea secţiunii în cm) [21];

Tabelul V.1

Modulii de rezistență plastici ai profilelor I laminate (în cm³)

I 10	I 12	I 14	I 16	I18	I 20	I 22
39,8	63,6	95,4	136	187	250	324
I 24	I 26	I 28	I 30	I 32	I 36	I 40
412	514	632	762	914	1 276	1 714
IE 10	IE 12	IE 14	IE 16	IE 18	IE 20	IE 22
46,0	67,4	93,6	125	163	208	262
IE 24	IE 27	IE 30	IE 33	IE 36	IE 40	
326	420	536	678	846	1 080	

Tabelul V.2

Modulii de rezistență plastici ai profilelor U laminate (în cm³)

2 U 10	2 U 12	2 U 14	2 U 16	2 U 18
98,0	145	206	275	358
2 U 20	2 U 22	2 U 24	2 U 26	2 U 30
456	584	716	884	1 264
2 UE 10	2 UE 12	2 UE 14	2 UE 16	2 UE 18
81,6	118	163	216	279
2 UE 20	2 UE 22	2 UE 24	2 UE 27	2 UE 30
351	440	556	712	896

— profile I economice, conform STAS 7550—66 (indicativ IE urmat de înălțimea secțiunii în cm) [23];

— secțiuni formate din două profile U obișnuite, conform STAS 654—71 (indicativ 2Uurmat de înălțimea secțiunii în cm) [20];

— secțiuni formate din două profile U economice, conform STAS 7551—66 (indicativ 2UE urmat de înălțimea secțiunii în cm) [24].

Celelalte caracteristici ale acestor profile sînt date în tabelele din secțiunea XV a acestui manual.

2.3. Conceptul factorului de încărcare

În actuala concepție a proiectării structurilor static nedeterminate, fiecare încărcare are două valori caracteristice, și anume: *valoarea normată* și *valoarea de calcul*. Valorile normate ale încărcărilor sînt precizate prin standardele referitoare la încărcări, ele fiind utilizate în calcul pentru caracterizarea stadiului de exploatare al structurilor. Valorile de calcul ale încărcărilor se obțin din valorile normate ale acestora, prin înmulțirea lor cu *coeficienți de supraîncărcare* adecvați, stabiliți prin standarde sau normative.

Cînd calculul eforturilor produse de încărcări se face în domeniul plastic, proiectarea structurilor se efectuează astfel încît capacitatea lor portantă să fie cel puțin egală cu cea rezultată din condiția ca structurile să se transforme în întregime sau numai parțial în mecanisme sub acțiunea încărcărilor de calcul.

În cazul structurilor static nedeterminate de oțel calculate în domeniul plastic, încărcările de calcul se obțin din încărcările normate prin înmulțirea acestora din urmă cu un coeficient unic de supraîncărcare, denumit *factor de încărcare* [3, 16]. Valoarea lui se ia egală cu cea a raportului dintre încărcarea de cedare și încărcarea normată a grinzii de oțel simplu rezemate la ambele capete, dimensionate prin metoda rezistențelor admisibile [3, 16]. Ținînd seama de faptul că la o astfel de grindă raportul dintre încărcarea de cedare și încărcarea normată este egal cu raportul dintre momentul plastic și momentul produs de încărcarea normată în secțiunea cea mai solicitată, pentru factorul de încărcare se obține expresia

$$k = \frac{W_p \, \sigma_c}{W_e \, \sigma_a} = f \cdot \frac{\sigma_c}{\sigma_a}, \tag{V.4}$$

în care: W_p este modulul de rezistență plastic al secțiunii; W_e — modulul de rezistență elastic al secțiunii; σ_c — limita de curgere a oțelului; σ_a — rezistența admisibilă a oțelului; f — coeficientul de formă al secțiunii.

Conform STAS 763/1—71 [22], rezistențele admisibile ale oțelului OL 37 sînt: σ_a=1 500 daN/cm² pentru grupările de încărcări I, σ_a=1 700 daN/cm² pentru grupările de încărcări II și respectiv σ_a = 1 950 daN/cm² pentru grupările de încărcări III.

Limita de curgere a oțelului OL 37 este 2 400 daN/cm² [19].

Cu aceste precizări și considerînd pentru coeficientul de formă valoarea medie f = 1,17 [10], pentru factorul de încărcare se obțin următoarele valori:

— pentru grupările de încărcări I,

$$k = 1{,}85; \tag{V.5}$$

— pentru grupările de încărcări II,

$$k = 1{,}65; \tag{V.6}$$

— pentru grupările de încărcări III,

$$k = 1{,}45. \tag{V.7}$$

2.4. Efecte secundare

Proiectarea în domeniul plastic a structurilor de oțel se face ținîndu-se seama de efectele forțelor tăietoare și axiale și de fenomenele de instabilitate generală sau locală asupra capacității portante a unor astfel de structuri.

2.4.1. Efectul forțelor tăietoare. Secțiunile solicitate la încovoiere simplă se dimensionează astfel încît să fie îndeplinită condiția

$$T_c \leqslant 0{,}55\, gh\, \sigma_c, \tag{V.8}$$

în care: T_c este forța tăietoare produsă de încărcările de calcul; g — grosimea inimii secțiunii; h — înălțimea totală a secțiunii; σ_c — limita de curgere a oțelului.

Condiția (V. 8) face ca momentele plastice ale secțiunilor critice să nu fie influențate sensibil de forțele tăietoare din aceste secțiuni, valorile lor luîndu-se egale cu cele corespunzătoare solicitării secțiunilor la încovoiere pură [14].

2.4.2. Efectul forțelor axiale. Fie M_{pn} momentul plastic al unei secțiuni critice solicitate la compresiune excentrică. Valoarea acestui moment se ia după cum urmează [16]:

— pentru $0 < N_c \leqslant 0{,}15\ N_p$,

$$M_{pn} = M_p; \tag{V.9}$$

— pentru $0{,}15\ N_p < N_c \leqslant N_p$,

$$M_{pn} = 1{,}18\left(1 - \frac{N_c}{N_p}\right) M_p; \tag{V.10}$$

În aceste relații,

$$N_p = A\sigma_c, \tag{V.11}$$

A este aria secțiunii; N_c — forța axială produsă în secțiune de încărcările de calcul; N_p — forța capabilă a secțiunii, în ipoteza solicitării acesteia la compresiune centrică; M_p — momentul plastic al secțiunii în ipoteza solicitării acesteia la încovoiere pură; σ_c — limita de curgere a oțelului.

2.4.3. Flambajul local. Prevenirea flambajului local al tălpii comprimate în dreptul unei secțiuni critice se realizează prin îndeplinirea condițiilor [16, 17]:

$$\frac{b}{t} \leqslant 8{,}5 \tag{V.12}$$

și

$$43 \geqslant \frac{h}{g} \leqslant 70 - 100\,\frac{N_c}{N_p}, \tag{V.13}$$

în care: b este lățimea porțiunii de talpă care iese în consolă de fiecare parte a inimii secțiunii; t — grosimea medie a tălpii comprimate a secțiunii; h — înălțimea totală a secțiunii; g — grosimea inimii secțiunii; N_c — forța axială produsă în secțiune de încărcările de calcul; N_p — forța axială capabilă a secțiunii dată de relația (V.11)

Condițiile (V.12) și (V.13) se adaugă la verificările și măsurile constructive referitoare la flambajul local, reieșite din teoria generală a proiectării structurilor de oțel prin metoda rezistențelor admisibile.

2.4.4. **Flambajul lateral.** Evitarea producerii flambajului lateral la elementele solicitate la încovoiere simplă sau la compresiune excentrică se face prin prevederea de contravîntuiri perpendiculare pe planul de încovoiere în zonele de formare a articulațiilor plastice. Aceste contravîntuiri se așază în dreptul fiecărei secțiuni critice și la o distanță e de aceasta egală cu cea mai mare dintre distanțele e_1 și e_2 calculate cu relațiile [16, 17]:

$$e_1 = \left(60 - 40\,\frac{M_e}{M_p}\right) i_y \tag{V.14}$$

și

$$e_2 = 35\; i_y, \tag{V.15}$$

în care: M_p este momentul plastic al secțiuni critice respective, determinat în ipoteza solicitării ei la încovoiere pură; M_e — momentul încovoietor la distanța e de secțiunea critică, luat din diagrama momentelor încovoietoare produse de încărcările de calcul; i_y— raza de girație în raport cu axa de simetrie a secțiunii cuprinsă în planul de încovoiere.

Raportul M_e/M_p este pozitiv cînd momentele M_e și M_p au același semn și negativ cînd aceste momente sînt de semne contrare.

În afara zonelor de formare a articulațiilor plastice, distanța dintre contravîntuirile transversale prevăzute pentru împiedicarea flambajului lateral este cea rezultată din teoria generală a proiectării structurilor de oțel prin metoda rezistențelor admisibile.

2.4.5. **Flambajul individual al stîlpilor.** Pentru prevenirea flambajului fiecărui stîlp, este necesară îndeplinirea următoarelor condiții:

— coeficientul de zveltețǎ λ_x corespunzător planului în care se produce încovoierea trebuie să fie cel mult egal cu 120;

— forța axială produsă de încărcările de calcul trebuie să satisfacă inegalitatea $N_c \leqslant 0{,}6 N_p$, în care forța N_p se calculează cu relația (V.11);

— distanțele dintre contravîntuirile laterale trebuie să fie cel mult egale cu cele stabilite pentru flambajul lateral.

Momentele plastice, M_{pf}, din secțiunile critice ale stîlpilor care îndeplinesc condițiile arătate mai înainte, se calculează cu relațiile [16, 17]:

— cînd raportul momentelor de la capetele stîlpului este -1,

$$M_p \geqslant M_{pf} \leqslant 1{,}18 \left(1 - \frac{N_c}{N_p}\right) M_p; \tag{V.16}$$

Tabelul V.3

Valorile coeficienţilor B şi G

$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	B	G	$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	B	G
21	1,142	1,184	61	1,173	1,330
22	1,143	1,187	62	1,174	1,337
23	1,143	1,189	63	1,175	1,344
24	1,144	1,191	64	1,176	1,352
25	1,145	1,194	65	1,177	1,360
26	1,145	1,196	66	1,178	1,369
27	1,146	1,198	67	1,179	1,377
28	1,146	1,200	68	1,180	1,386
29	1,147	1,203	69	1,181	1,396
30	1,148	1,205	70	1,182	1,406
31	1,148	1,207	71	1,183	1,416
32	1,149	1,209	72	1,184	1,426
33	1,150	1,212	73	1,186	1,437
34	1,150	1,215	74	1,187	1,448
35	1,151	1,217	75	1,188	1,460
36	1,152	1,220	76	1,189	1,472
37	1,152	1,222	77	1,190	1,485
38	1,153	1,225	78	1,191	1,497
39	1,154	1,228	79	1,192	1,511
40	1,155	1,231	80	1,194	1,524
41	1,155	1,234	81	1,195	1,539
42	1,156	1,237	82	1,196	1,553
43	1,157	1,240	83	1,197	1,568
44	1,158	1,243	84	1,198	1,584
45	1,159	1,247	85	1,200	1,600
46	1,159	1,251	86	1,201	1,616
47	1,160	1,254	87	1,202	1,633
48	1,161	1,258	88	1,204	1,651
49	1,162	1,263	89	1,205	1,669
50	1,163	1,267	90	1,206	1,688
51	1,164	1,271	91	1,207	1,707
52	1,165	1,276	92	1,209	1,726
53	1,165	1,281	93	1,210	1,746
54	1,166	1,286	94	1,211	1,767
55	1,167	1,292	95	1,213	1,788
56	1,168	1,297	96	1,214	1,810
57	1,169	1,303	97	1,215	1,832
58	1,170	1,310	98	1,217	1,855
59	1,171	1,316	99	1,219	1,879
60	1,172	1,323	100	1,220	1,903

Tabelul V.3 (continuare)

$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	B	G	$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	B	G
101	1,221	1,928	111	1,236	2,211
102	1,222	1,953	112	1,237	2,243
103	1,224	1,979	113	1,239	2,275
104	1,225	2,006	114	1,240	2,309
105	1,227	2,033	115	1,242	2,343
106	1,228	2,061	116	1,243	2,378
107	1,230	2,090	117	1,245	2,414
108	1,231	2,119	118	1,247	2,450
109	1,233	2,149	119	1,248	2,487
110	1,234	2,179	120	1,250	2,525

— cînd raportul momentelor de la capetele stîlpului este cuprins între −1 și 0,

$$M_p \geqslant M_{pf} \leqslant \left(B - G \frac{N_c}{N_p} \right) M_p; \qquad \text{(V.17)}$$

— cînd raportul momentelor de la capetele stîlpului este cuprins între 0 și +1

$$M_{pf} \leqslant \left[1 - K \frac{N_c}{N_p} - J \left(\frac{N_c}{N_p} \right)^2 \right] M_p, \qquad \text{(V.18)}$$

în care: M_p este momentul plastic la încovoeiere pură; N_c — forța de compresiune produsă de încărcările de calcul; N_p — forța capabilă la compresiune axială calculată cu relația (V. 11); B, G, K, J — coeficienți numerici adimensionali.

Valorile coeficienților B, G, K și J sînt date în tabelele V. 3 și V. 4 [13, 17] în funcție de coeficientul de zveltețǎ $\lambda_x = \frac{l}{i_x}$, unde l este lungimea stîlpului între axele nodurilor de la capetele lui iar i_x este raza de girație corespunzătoare planului în care se produce încovoierea.

2.4.6. Flambajul general. Cadrele a căror deplasare laterală nu este împiedicată își pot pierde capacitatea de rezistență prin flambaj general, înainte de atingerea stadiului de mecanism. Pentru evitarea flambajului general, fiecare stîlp de cadru trebuie să îndeplinească condiția [16, 17]:

$$\frac{2N_c}{N_p} + \frac{l}{70\ i_x} \leqslant 1, \qquad \text{(V.19)}$$

Tabelul V.4

Valorile coeficienților K și J

$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	K	J	$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	K	J
21	0,717	0,447	61	1,371	0,220
22	0,731	0,432	62	1,391	0,241
23	0,746	0,418	63	1,411	0,263
24	0,760	0,403	64	1,432	0,286
25	0,774	0,389	65	1,452	0,309
26	0,789	0,374	66	1,473	0,332
27	0,803	0,360	67	1,495	0,356
28	0,818	0,345	68	1,516	0,380
29	0,832	0,331	69	1,538	0,404
30	0,847	0,316	70	1,560	0,429
31	0,862	0,301	71	1,583	0,455
32	0,877	0,287	72	1,605	0,481
33	0,892	0,272	73	1,628	0,507
34	0,907	0,257	74	1,652	0,534
35	0,922	0,242	75	1,675	0,562
36	0,937	0,227	76	1,699	0,590
37	0,953	0,211	77	1,724	0,618
38	0,968	0,196	78	1,748	0,647
39	0,984	0,180	79	1,773	0,677
40	1,000	0,165	80	1,799	0,707
41	1,015	0,149	81	1,824	0,738
42	1,032	0,133	82	1,850	0,769
43	1,048	0,116	83	1,877	0,801
44	1,064	0,0998	84	1,903	0,833
45	1,081	0,0832	85	1,930	0,866
46	1,097	0,0663	86	1,958	0,900
47	1,114	0,0495	87	1,986	0,934
48	1,131	0,0318	88	2,014	0,969
49	1,148	0,0143	89	2,042	1,004
50	1,166	0,0036	90	2,071	1,041
51	1,183	0,0217	91	2,101	1,077
52	1,201	0,0401	92	2,130	1,115
53	1,219	0,0588	93	2,161	1,153
54	1,237	0,0777	94	2,191	1,192
55	1,256	0,0970	95	2,222	1,231
56	1,274	0,117	96	2,254	1,272
57	1,293	0,137	97	2,286	1,313
58	1,312	0,157	98	2,318	1,354
59	1,332	0,177	99	2,350	1,397
60	1,351	0,198	100	2,384	1,440

Tabelul V.4 (continuare)

$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	K	J	$\lambda_x = \frac{l}{i_x}$	K	J
101	2,417	1,484	111	2,779	1,968
102	2,451	1,529	112	2,818	2,021
103	2,486	1,575	113	2,857	2,057
104	2,521	1,621	114	2,897	2,123
105	2,556	1,668	115	2,937	2,185
106	2,592	1,716	116	2,987	2,242
107	2,628	1,765	117	3,020	2,300
108	2,665	1,814	118	3,062	2,358
109	2,703	1,865	119	3,104	2,417
110	2,741	1,916	120	3,147	2,478

notațiile folosite avînd semnificațiile date la pct. 2.4.5.

2.5. Condiții suplimentare

Proiectarea în domeniul plastic a structurilor de oțel trebuie să se facă astfel încît deformațiile produse de încărcările normate și cele produse de încărcările de calcul să fie inferioare valorilor maxime admise, iar eforturile unitare produse de încărcările normate să fie inferioare limitei de curgere minime în toate secțiunile critice.

2.5.1. **Deformațiile produse de încărcările normate.** Săgețile grinzilor static nedeterminate și cadrelor de oțel calculate în domeniul plastic, produse de încărcările normate, trebuie să fie mai mici decît valorile maxime admise specificate în STAS 763/1—71 [22]. Calculul săgeților se face în acest caz după regulile Staticii construcțiilor în domeniul elastic, structurile comportîndu-se în întregime elastic sub acțiunea încărcărilor normate.

2.5.2. **Deformațiile produse de încărcările de calcul.** Săgețile grinzilor static nedeterminate și riglelor cadrelor de oțel calculate în domeniul plastic, produse de încărcările de calcul, trebuie să fie mai mici decît 2% din lungimea deschiderilor respective [6]. La cadrele multietajate se adaugă condiția ca sub acțiunea încărcărilor de calcul, deplasarea relativă, pe orizontală, a capetelor fiecărui stîlp să fie mai mică decît 4‰ [15]. Determinarea acestor săgeți se face, de asemenea, după regulile Staticii construcțiilor în domeniul elastic, ținîndu-se însă seama de efectul articulațiilor plastice formate sub acțiunea încărcărilor de calcul. Cînd calculul în domeniul plastic se face prin metoda biografică, pozițiile articulațiilor plastice rezultă din însăși parcurgerea etapelor acestei metode. În acest caz, săgețile se determină considerînd că sub acțiunea încărcărilor de calcul se formează doar cele n articulații plastice care transformă structura respectivă, în totalitate sau numai parțial, într-un sistem static nedeterminat.

La structurile calculate în domeniul plastic prin metoda combinării mecanismelor, calculul săgeților se face, de asemenea, în ipoteza formării, sub acțiunea încărcărilor de calcul, a primelor n articulații plastice care transformă structura, în totalitate sau numai parțial, într-un sistem static determinat. În acest caz apare însă necesitatea precizării pozițiilor acestor articulații plastice. Pentru aceasta se procedează la excluderea, pe rînd, a cîte unei articulații plastice a mecanismului efectiv de cedare, calculîndu-se apoi săgeata căutată prin utilizarea, pe rînd, a fiecăreia din schemele static determinate ale structurii obținute în acest mod. Dintre săgețile astfel obținute se reține cea care are

valoarea cea mai mare, care este săgeata reală căutată. Operaţia este relativ simplă la structurile care, prin excluderea uneia din articulaţiile plastice ale mecanismului efectiv de cedare, devin în întregime static determinate. În cazul structurilor a căror cedare se caracterizează prin transformarea în mecanism numai a unei părţi a lor, cealaltă parte rămînînd static nedeterminată, stabilirea ultimei articulaţii plastice a mecanismului şi apoi a mărimii săgeţilor se face la fel ca la structurile care se transformă în întregime în mecanism, pe porţiunea care rămîne static nedeterminată adoptîndu-se o diagramă de momente arbitrară satisfăcînd însă condiţiile de echilibru şi de plastificare. Acest procedeu simplificat de calcul este acoperitor, întrucît conduce întotdeauna la săgeţi mai mari decît cele efective dar suficient de apropiate de acestea. [17].

2.5.3. **Eforturile unitare produse de încărcările normate.** În ipoteza că eforturile reziduale sînt nule, întregul material al structurilor de oţel calculate în domeniul plastic trebuie să se comporte elastic sub acţiunea încărcărilor normate [12]. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca în fiecare secţiune critică, efortul unitar maxim produs de *momentul normat* respectiv să fie cel mult egal cu limita de curgere minimă a oţelului.

Prin definiţie, *momentul normat* al unei secţiuni critice este egal cu momentul elastic maxim (în valoare absolută) produs de încărcările normate în secţiunea critică respectivă.

Condiţia comportării elastice a materialului structurilor sub acţiunea încărcărilor normate conduce la următoarele inegalităţi:

— pentru grupările de încărcări I,

$$M_p \geqslant 1{,}35\ M_n; \qquad \text{(V.20)}$$

— pentru grupările de încărcări II,

$$M_p \geqslant 1{,}20\ M_n. \qquad \text{(V.21)}$$

în care: M_p este momentul plastic; M_n — momentul normat al secţiunii critice respective.

Coeficientul 1,35 din relaţia (V.20) a fost stabilit considerîndu-se valoarea acoperitoare 1,20 pentru coeficientul de formă al secţiunilor critice şi valoarea 0,89 pentru coeficientul de omogenitate al oţelului. În inegalitatea (V.21), coeficientul numeric este egal cu valoarea maximă a coeficientului de formă al secţiunilor critice, probabilitatea de simultaneitate a încărcărilor în cadrul grupărilor de încărcări II permiţînd admiterea în calcul a unui coeficient de omogenitate al oţelului egal cu unitatea.

Exemplul de calcul V.3. Se consideră o grindă continuă cu cinci deschideri egale şi cu secţiunea constantă pe toată lungimea ei, simplu rezemată la ambele extremităţi. Grinda este solicitată de o încărcare permanentă distribuită uniform în toate deschiderile şi de o încărcare utilă de asemenea distribuită uniform, care poate fi aplicată în una sau în mai multe deschideri. Schema generală a grinzii este redată în fig. V.13,*a*, secţiunile critice fiind numerotate de la 1 la 5.

Date de calcul. Lungimea fiecărei deschideri, l = 6,00 m; încărcarea permanentă normată, g_n = 4 kN/m; încărcarea utilă normată, p_n = 10 kN/m; factorul de încărcare, k = 1,85 (ipoteza de încărcare I); limita de curgere a oţelului, σ_c = 2 400 daN/cm².

Dimensionarea grinzii se face pe baza calculului în domeniul plastic.

Încărcările de calcul

$$g_c = kg_n = 7{,}4\ \text{kN/m}; \quad p_c = kp_n = 18{,}5\ \text{kN/m}.$$

Momentul plastic. Stadiul de mecanism al uneia dintre cele două deschideri marginale ale grinzii este arătat în fig. V.13, *b*, în care cu M_p s-a notat momentul plastic al secțiunilor critice și cu x distanța dintre reazemul marginal și secțiunea critică *1* din cîmp. Pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a articulației plastice din cîmp, ecuația de echilibru plastic în stadiul de formare a mecanismului de cedare sub acțiunea încărcărilor de calcul, scrisă pe baza principiului lucrului mecanic virtual, este

$$-\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{l-x}\right)M_p+\frac{1}{2}(g_c+p_c)l\cdot 1=0,$$

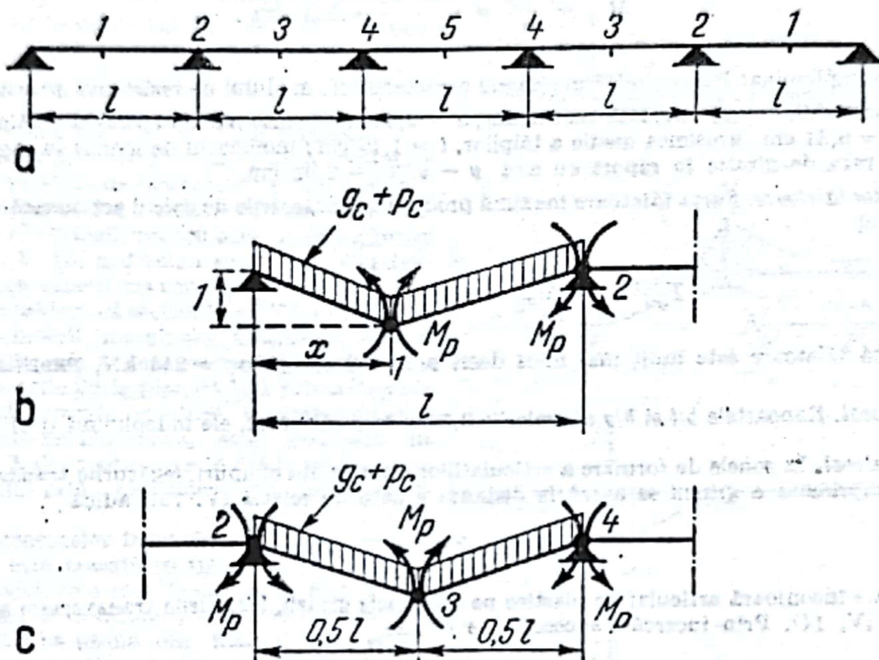


Fig. V.13

din care se deduce

$$M_p=\frac{x(l-x)(g_c+p_c)l}{2(l+x)}.$$

Pentru determinarea distanței x se face apel la reciproca teoremei cinematice din teoria generală a calculului în domeniul plastic. Conform acestei reciproce, dacă încărcările de cedare sînt date, mecanismul efectiv de cedare este cel căruia îi corespunde valoarea cea mai mare a momentului plastic de referință.

Pentru grinda considerată, condiția de maximum a momentului plastic este

$$\frac{dM_p}{dx}=x^2+2lx-l^2=0,$$

din care se deduce

$$x=(\sqrt{2}-1)l=0{,}414\ l.$$

Momentul plastic calculat ținînd seama de distanța x determinată mai înainte are valoarea

$$M_p=0{,}0858(g_c+p_c)\,l^2=80{,}0\ \text{kNm}.$$

Pe de altă parte, stadiul de mecanism al uneia din cele trei deschideri intermediare ale grinzii este arătat în fig. V.13, *c*. Ecuația de echilibru corespunzătoare formării acestui mecanism sub acțiunea încărcărilor de calcul este

$$4M_p\cdot\frac{1}{\frac{l}{2}}+\frac{1}{2}(g_c+p_c)l\cdot 1=0,$$

din care se deduce

$$M_p = 0{,}0625(g_c + p_c)\, l^2 = 58{,}3 \text{ kNm}.$$

Dintre cele două momente plastice determinate mai înainte se reține numai primul, deoarece acesta are valoarea cea mai mare.

Modulul de rezistență plastic

$$M_p = \frac{M_p}{\sigma_c} = \frac{800\,000}{2\,400} = 333 \text{ cm}.$$

Se alege profilul laminat I 22 avînd următoarele caracteristici: modulul de rezistență plastic, $W_p = 324$ cm³; înălțimea totală a secțiunii, $h = 22$ cm; lățimea tălpilor, $a = 9{,}8$ cm; lățimea părții în consolă a tălpilor, $b = 4{,}5$ cm; grosimea inimii, $g = 0{,}81$ cm; grosimea medie a tălpilor, $t = 1{,}19$ cm; momentul de inerție în raport cu axa $x - x$, $I_x = 3\,060$ cm⁴; raza de girație în raport cu axa $y - y$, $i_y = 2{,}02$ cm.

Efectul forțelor tăietoare. Forța tăietoare maximă produsă de încărcările de calcul acționează în secțiunea critică 2, valoarea ei fiind

$$T_c^{max} = 0{,}5(g_c + p_c)\, l + \frac{M_p}{l} = 91{,}0 \text{ kN}.$$

Această forță tăietoare este mult mai mică decît produsul $0{,}55gh\,\sigma_c = 245$ kN, condiția (V. 8) fiind deci îndeplinită.

Flambajul local. Rapoartele b/t și h/g au valorile 3,78 și respectiv 27,2, ele îndeplinind deci condițiile (V. 12) și (V. 13).

Flambajul lateral. În zonele de formare a articulațiilor plastice din cîmpuri, legăturile transversale care contravîntuiesc talpa comprimată a grinzii se așază la distanța e dată de relația (V. 15), adică

$$e = e_2 = 35 i_y = 70 \text{ cm}.$$

În zonele care înconjoară articulațiile plastice pe reazemele grinzii, legăturile transversale se așază la distanța e dată de relația (V. 14). Prin încercări succesive se obține

$$e = 70\, i_y = 140 \text{ cm}.$$

Săgeata produsă de încărcările normate. Săgeata maximă produsă de încărcările normate se obține în deschiderea marginală a grinzii, pentru schema de încărcare din fig. V. 14, *a*. Diagrama momentelor elastice produse de încărcările normate în deschiderea marginală a grinzii continue precum și diagrama momentelor produse de o încărcare unitară aplicată în mijlocul deschiderii marginale (unde se presupune, pentru simplitatea calculului, că este localizată săgeata maximă), în ipoteza simplei rezemări a acestei deschideri la ambele capete, sînt reprezentate în fig. V. 14, *b*, *c*.

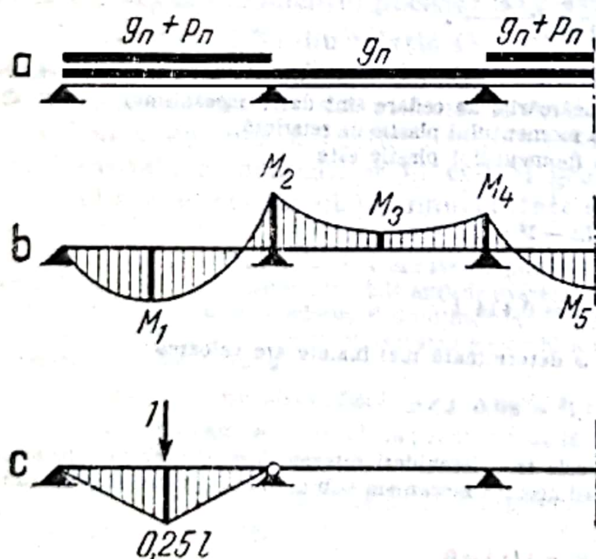


Fig. V.14

Valorile absolute ale momentelor M_1 și M_2 din prima deschidere (fig. V. 14, *b*) sînt

$$M_1 = (0{,}078\; g_n + 0{,}100\; p_n)\, l^2$$

și

$$M_2 = (0{,}105\; g_n + 0{,}053\; p_n)\, l^2.$$

Expresia săgeții maxime produse de încărcările normate este

$$f_n^{max} = \frac{5(g_n + p_n)\, l^4}{384EI} - \frac{M_2 l^2}{16EI} = \frac{(0{,}00646\; g_n + 0{,}00971\; p_n)\, l^4}{EI}.$$

După efectuarea înlocuirilor se obține.

$$f_n^{max} = 2{,}47 \text{ cm}.$$

Considerînd că grinda ce se proiectează este secundară și face parte dintr-un planșeu situat între etaje, din STAS 763–71 rezultă o săgeată maximă admisă egală cu $l/300 = 2{,}00$ cm. Întrucît săgeata efectivă depășește cu 23,5% săgeata maximă admisă, apare necesitatea de a se adopta profilul I 24 în locul profilului I 22, avînd momentul de inerție $I_x = 4\,250$ cm³. Mărimea săgeții produse de încărcările normate devine în acest caz

$$f_n^{max} = 1{,}79,$$

ea fiind mai mică decît valoarea maximă admisă.

Săgeata produsă de încărcările de calcul. Valoarea maximă a săgeților produse de încărcările de calcul se obține în dreptul secțiunii critice *1* situate în una din deschiderile marginale ale grinzii, pentru schema de încărcare reprezentată în fig. V. 15, *a*. Pentru simplificarea calculului, la determinarea săgeții maxime produse de încărcările de calcul se consideră că secțiunea critică *1* este situată în mijlocul deschiderii marginale. Obținerea acestei săgeți impune considerarea a două situații. În prima situație, cea de a doua articulație plastică din prima deschidere a grinzii a cărei formare conduce la transformarea acestei deschideri într-un mecanism, este localizată în secțiunea critică *1*. A doua situație este cea în care a doua articulație plastică din prima deschidere este localizată în secțiunea critică *2*.

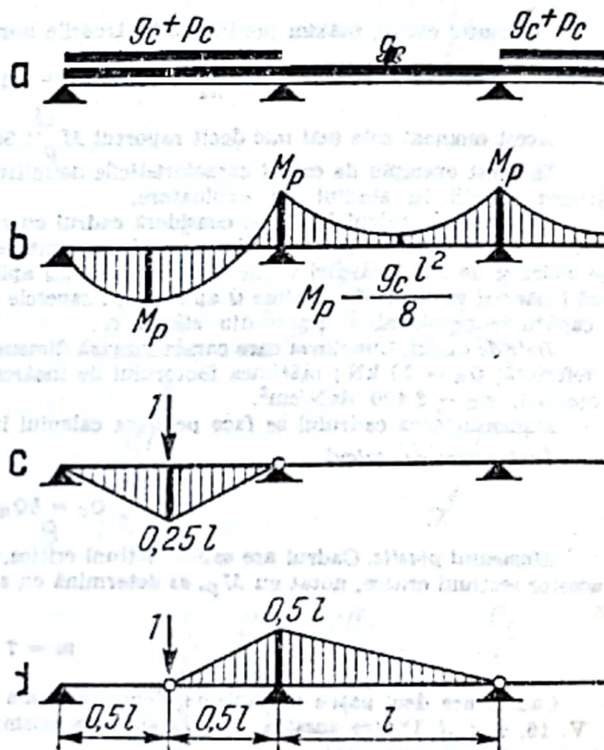


Fig. V.15

Diagrama momentelor încovoietoare produse de încărcările de calcul este trasată în fig. V.15, *b*. Ea este exactă numai în deschiderea marginală, care este static determinată. În celelalte deschideri, diagrama momentelor a fost fixată încît să aibă forma cea mai simplă și să asigure îndeplinirea condițiilor de echilibru și de plastificare.

În situația cînd a doua articulație plastică se formează în secțiunea critică *1*, schema static determinată a grinzii și diagrama momentelor încovoietoare produse de o încărcare unitară aplicată în mijlocul deschiderii marginale sînt reprezentate în fig. V. 15, *c*. Mărimea săgeții în mijlocul deschiderii marginale este

$$f_{c1} = \frac{5\,(g_c + p_c)\,l^4}{384EI_x} - \frac{M_p l^2}{16EI_x} = \frac{0{,}00762(g_c + p_c)\,l^4}{EI_x}.$$

Pentru situația în care a doua articulație plastică se formează în secțiunea critică *2*, schema static determinată a grinzii și diagrama momentelor încovoietoare produse de o încărcare unitară aplicată în mijlocul deschiderii marginale sînt reprezentate în fig. V. 15, *d*. Mărimea săgeții în mijlocul deschiderii marginale este în acest caz

$$f_{c2} = \frac{17M_p l^2}{48EI_x} - \frac{(3p_c - 5g_c)\,l^4}{384EI_x} = \frac{(0{,}00175\,g_c + 0{,}02258p_c)\,l^4}{EI_x}.$$

Dintre săgețile f_{c1} și f_{c2} determinate mai înainte se reține numai ultima, care are valoarea cea mai mare adică

$$f_c^{max} = f_{c2} = \frac{(0{,}00175\,g_c + 0{,}02258p_c)\,l^4}{EI_x}.$$

După efectuarea înlocuirilor se obține în final

$$f_c^{max} = 8,22 \text{ cm},$$

săgeată care este mai mică decît valoarea maximă admisă $l/50 = 12$ cm.

Comportarea elastică a materialului în stadiul de exploatare. Momentul plastic efectiv al secțiunilor critice ale grinzii este

$$M_p = W_{px}\sigma_c = 412 \cdot 2400 = 989\,000 \text{ daNcm}.$$

Momentul elastic maxim produs de încărcările normate se obține în secțiunea critică 2, valoarea lui fiind

$$M_{n2} = (0,105g_n + 0,120\,p_n)\,l^2 = 69,7 \text{ kNm}.$$

Acest moment este mai mic decît raportul $M_p/1,35 = 73,3$ kNm, condiția (V. 20) fiind deci îndeplinită.

În acest exemplu de calcul caracteristicile definitive ale secțiunii grinzii au fost hotărîte de condiția privind mărimea săgeții în stadiul de exploatare.

Exemplul de calcul V.4. Se consideră cadrul cu rigla frîntă din fig. V. 16, *a*, format din bare avînd toate aceeași secțiune. Deschiderea cadrului este $6l$, înălțimea stîlpilor este $3l$, iar săgeata cadrului la vîrf este l. Cadrul este solicitat de trei încărcări verticale de mărime $2Q$ aplicate în vîrful cadrului și la mijlocul celor două rigle, de două încărcări verticale de mărime Q aplicate pe capetele stîlpilor și de o încărcare orizontală de mărime Q aplicată al capătul superior al stîlpului din stînga.

Date de calcul. Lungimea care caracterizează dimensiunile cadrului, $l = 2,00$ m; valoarea normată a încărcării de referință, $Q_n = 20$ kN; mărimea factorului de încărcare, $k = 1,65$ (ipoteza de încărcare II); limita de curgere a oțelului, $\sigma_n = 2\,400$ daN/cm².

Dimensionarea cadrului se face pe baza calcului în domeniul plastic.

Încărcarea de calcul

$$Q_c = kQ_n = 33,0 \text{ kN}$$

Momentul plastic. Cadrul are șapte secțiuni critice, numerotate de la 1 la 7 (fig. V. 16, *a*). Momentul plastic al acestor secțiuni critice, notat cu M_p, se determină cu ajutorul metodei cinematice. Relația (V. 1) devine în acest caz

$$m = 7 - 3 = 4$$

Cadrul are deci patru mecanisme elementare, ale căror scheme, numerotate de la I la IV, sînt trasate în fig. V. 16, *b*, *c*, *d*. Dintre acestea, *I* și *II* sînt mecanisme de grindă identice, *III* este mecanism de etaj, iar *IV* este mecanism de semietaj.

Din combinațiile mecanismelor elementare rezultă cele două mecanisme complexe reprezentate în fig. V. 16, *e*, *f*, numerotate cu *V* și *VI*.

Ecuațiile de echilibru plastic și momentele plastice rezultate din acestea sînt următoarele

Mecanismele I și II (fig.V.16,*b*)

$$4M_p^{\mathrm{I}}\,\theta = 2Q_c \cdot \frac{3}{2}\,l\theta; \quad M_p^{\mathrm{I}} = \frac{3Q_cl}{4}.$$

Mecanismul III (fig.V.16,*c*)

$$4M_p^{\mathrm{III}}\theta = Q_c \cdot 3l\theta; \quad M_p^{\mathrm{III}} = \frac{3Q_cl}{4}.$$

Mecanismul IV (fig.V.16,*d*)

$$\frac{16}{3}\,M_p^{\mathrm{IV}}\,\theta = 2Q_c \cdot 6l\theta; \quad M_p^{\mathrm{IV}} = \frac{9Q_cl}{4}.$$

Mecanismul V (fig.V.16,*e*)

$$\frac{46}{9}\,M_p^{\mathrm{V}}\,\theta = Q_c \cdot 3l\theta + 2Q_c \cdot 3l\theta; \quad M_p^{\mathrm{V}} = \frac{81Q_cl}{46}.$$

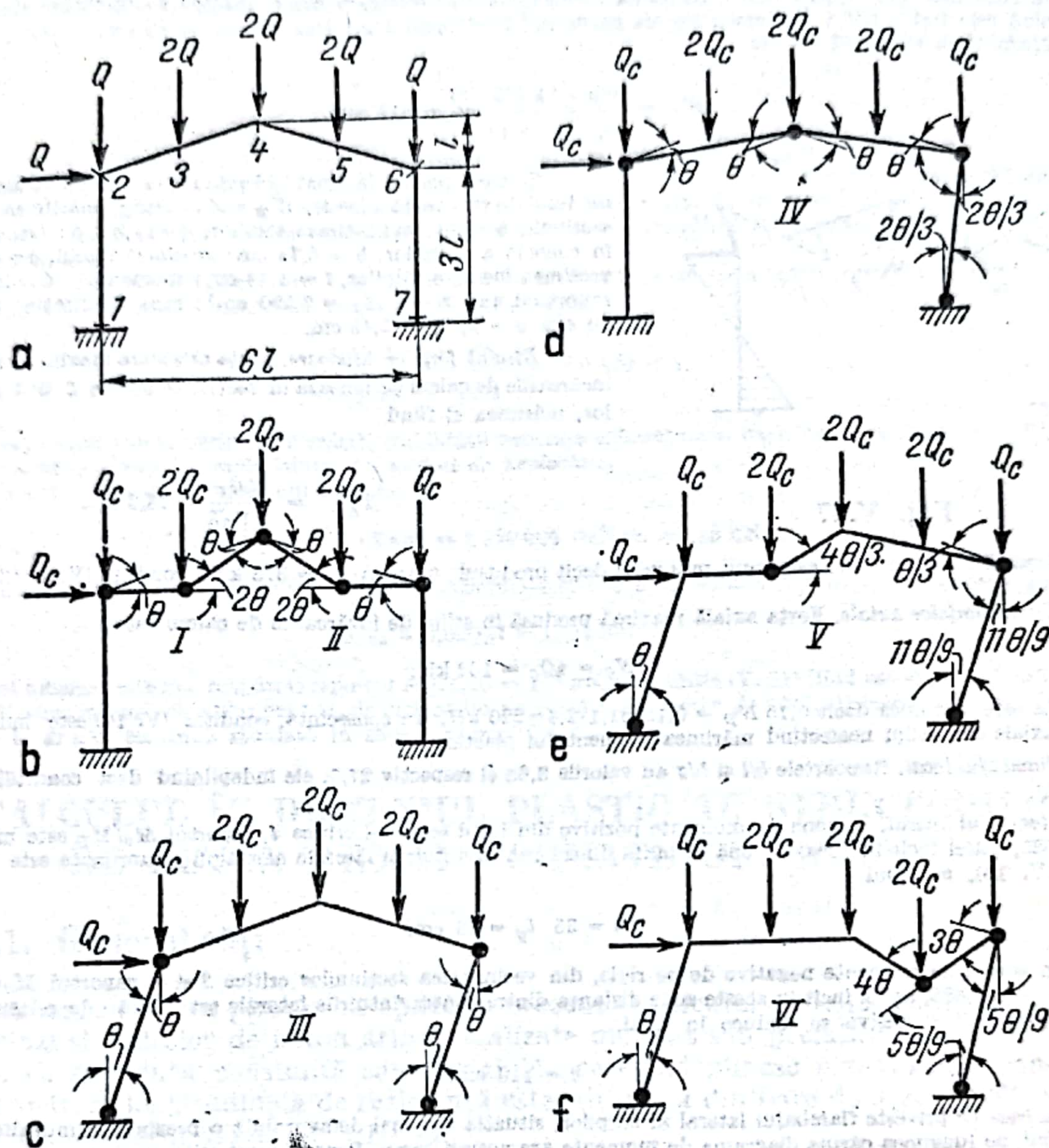


Fig. V. 16

Mecanismul VI (fig.V.16, *f*)

$$\frac{82}{9} M_p^{VI}\,\theta = Q_c \cdot 3l\theta + 2Q_c \cdot 8l\theta\,;\quad M_p^{VI} = \frac{171 Q_c l}{82}\,.$$

Conform reciprocei teoremei cinematice, mecanismul efectiv de cedare este cel notat cu *IV* (fig.V.16, *d*) întrucît acesta furnizează cea mai mare valoare pentru momentul plastic. În consecință,

$$M_p = M_p^{IV} = \frac{9 Q_c l}{4} = 148{,}5 \text{ kNm}$$

În fig.V.17 este reprezentată diagrama momentelor încovoietoare corespunzătoare mecanismului *IV*, ea îndeplinind cele trei condiții fundamentale ale calculului în domeniul plastic.

Modulul de rezistență plastic

$$W_p = \frac{M_p}{\sigma_c} = \frac{1\,485\,000}{2\,400} = 618 \text{ cm}^3.$$

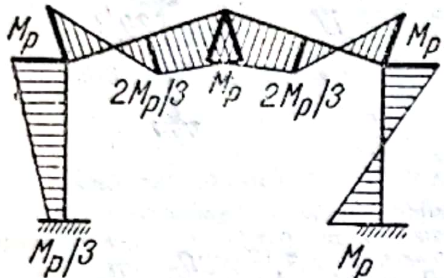


Fig. V.17

Se alege profilul laminat I 28 având următoarele caracteristici: modulul de rezistență plastic, $W_p = 632$ cm³; înălțimea totală a secțiunii, $h = 28$ cm; lățimea tălpilor, $a = 11,9$ cm; lățimea părții în consolă a tălpilor, $b = 5,45$ cm; grosimea inimii, $g = 1,01$ cm; grosimea medie a tălpilor, $t = 1,48$ cm; momentul de inerție în raport cu axa $x - x$, $I_x = 7\,590$ cm⁴; raza de girație în raport cu axa $y - y$, $i_y = 2,45$ cm.

Efectul forțelor tăietoare. Forța tăietoare maximă produsă de încărcările de calcul acționează în secțiunile critice *2* și *6* ale riglelor, mărimea ei fiind

$$T_c^{max} = \frac{15Q_c}{2\sqrt{10}} = 78,3 \text{ kN}.$$

Această forță tăietoare este mult mai mică decît produsul $0,55g \cdot h \cdot \sigma_c = 373$ kN, condiția (V.8) fiind deci îndeplinită.

Efectul forțelor axiale. Forța axială maximă produsă în stîlpi de încărcările de calcul este

$$N_c = 4Q_c = 132 \text{ kN}.$$

Ea este mai mică decît 0,15 N_p = 0,15·61,1·2,4=220 kN. În consecință, condiția (V. 10) este îndeplinită, forțele axiale din stîlpi neafectînd mărimea momentului plastic.

Flambajul local. Rapoartele b/t și h/g au valorile 3,68 și respectiv 27,7, ele îndeplinind deci condițiile (V.12) și (V.13).

Flambajul lateral. În zona de momente pozitive din jurul secțiunii critice *4*, raportul M_e/M_p este mai mare decît 0,625, astfel încît în această zonă distanța dintre contravîntuirile laterale ale tălpii comprimate este dată de relația (V. 15), ea fiind

$$e = 35 \ i_y = 85 \text{ cm}.$$

În zonele de momente negative de pe rigle, din vecinătatea secțiunilor critice *2* și *6*, raportul M_e/M_p este mai mic decît 0,625, astfel încît în aceste zone distanța dintre contravîntuirile laterale este dată de relația (V.14). Prin aproximații succesive se deduce în final,

$$e = 110 \text{ cm}.$$

În ceea ce privește flambajul lateral al stîlpilor, situația cea mai defavorabilă o prezintă stîlpul din stînga al cadrului, pe lungimea căruia diagrama de momente are același semn. Pentru acest stîlp se obține $e_2 > e_1$, astfel încît distanța dintre contravîntuirile laterale se ia

$$e = e_2 = 35 i_y = 85 \text{ cm}$$

Flambajul individual al stîlpilor. Diagrama de momente din fig. V. 17 arată că stîlpul *1 — 2* are situația cea mai defavorabilă din punctul de vedere al flambajului, raportul momentelor de la capetele lui fiind +1/3. Acestui stîlp i se aplică deci relația (V.18).

Pentru $\lambda_x = l/i_x = 600/11,1 = 54$, din tabelul V.4 se deduce $K = 1,237$ și $J = 0,0777$.

Pe de altă parte, raportul N_c/N_p are valoarea

$$N_c/N_p = \frac{132}{611 \cdot 24} = 0,090.$$

Cu valorile numerice precizate mai înainte relația (V.18) devine

$$M_{pf} = (1 - 1,237 \cdot 0,090 - 0,078 \cdot 0,090^2)\, M_p = 0,888 M_p$$

Punînd condiția ca momentul plastic obținut prin aplicarea teoriei articulațiilor plastice să fie egal cu momentul plastic care ține seama de efectul flambajului individual al stîlpilor, se obține

$$M_p = \frac{148{,}5}{0{,}888} = 167{,}2 \text{ kNm}.$$

Acestui nou moment plastic necesar îi corespunde un modul de rezistență plastic de 700 cm³.

Deoarece modulul de rezistență plastic al profilului I 28 este cu 10% mai mic decît valoarea determinată mai înainte, se înlocuiește acest profil prin profilul I 30, al cărui modul de rezistență plastic efectiv este egal cu 762 cm³. Pentru noul profil rămîn valabile concluziile la care s-a ajuns anterior referitor la flambajul local și la flambajul lateral.

Flambajul general. Raza de girație i_x a profilului I 30 este de 11,9 cm, aria acestui profil fiind de 69,1 cm². Pentru aceste valori, primul membru al condiției (V. 19) se scrie

$$\frac{2 \cdot 13{,}2}{69{,}1 \cdot 24} + \frac{600}{70 \cdot 11{,}9} = 0{,}879 < 1,$$

ceea ce arată că nu există pericolul pierderii stabilității generale sub acțiunea încărcărilor de calcul.

Comportarea elastică a materialului în stadiul de exploatare.

Momentul plastic efectiv al profilului I30 este

$$M_p = 762 \cdot 2\,400 = 1\,830\,000 \text{ daNcm} = 183 \text{ kNm}.$$

Momentul elastic maxim produs de încărcările normate se obține în secțiunea critică *6*, valoarea lui fiind

$$M_{ns} = 3{,}02 Q_n l = 133 \text{ kNm}.$$

Acest moment este mai mic decît raportul $M_p/1{,}20 = 153$ kNm, condiția (V. 21) fiind astfel îndeplinită.

Verificarea mărimii săgeților produse de încărcările normate și respectiv de încărcările de calcul se face întocmai ca la grinda continuă studiată în cadrul exemplului 1.

3. CALCULUL ÎN DOMENIUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE BETON ARMAT FORMATE DIN BARE *)

3.1. Generalități

Teoria articulațiilor plastice se aplică în prezent la calculul grinzilor continue, rețelelor de grinzi și cadrelor de beton armat realizate monolit sau prefabricat, alcătuite din elemente cu secțiunea constantă sau variabilă, care îndeplinesc următoarele condiții:

— armătura longitudinală de rezistență este alcătuită din bare de oțel OB 37, PC 52 sau PC 60, conform STAS 438/1—74;

— toate încărcările temporare verticale se aplică static;

— deschiderea maximă admisă a fisurilor în stadiul de exploatare este de 0,2 mm sau 0,3 mm.

La dimensionarea secțiunilor critice, momentele de calcul ale acestor secțiuni se iau egale cu momentele plastice obținute din calculul în domeniul plastic al structurii respective.

Elementele practice de calcul cuprinse în acest capitol corespund situației în care:

— clasificarea încărcărilor, valorile coeficienților de supraîncărcare precum și caracteristicile de calcul ale betonului și armăturii sînt cele specificate în STAS 10101—75 [25, 26, 27, 28, 29, 30] și în STAS 10107/0—76 [31].

---

*) Calculul în domeniul plastic al structurilor formate din plăci plane este tratat în secțiunea VI a acestui manual.

— dimensionarea secţiunilor critice la momentele lor de calcul, verificarea rezistenţei elementelor în secţiuni înclinate, precum şi verificările privind mărimea săgeţilor şi a deschiderii fisurilor în stadiul de exploatare se fac în conformitate cu prevederile cuprinse în STAS 10107/0—76 [31], aşa cum se arată în secţiunea XVI a acestui manual.

Ca şi în cazul structurilor de oţel, încărcările care solicită structurile în stadiul de exploatare, ale căror valori sînt date în standardele de specialitate, se numesc încărcări normate, iar prin înmulţirea acestora cu coeficienţii respectivi de supraîncărcare se obţin încărcările de calcul.

3.2. Principii şi relaţii generale de calcul

Proiectarea grinzilor continue, reţelelor de grinzi şi cadrelor de beton armat pe baza eforturilor obţinute prin efectuarea calculului în domeniul plastic trebuie să asigure:

— capacitatea de rezistenţă a structurilor sub acţiunea încărcărilor de calcul pentru toate schemele posibile de încărcare;

— comportarea elastică a armăturii întinse din toate secţiunile critice ale structurilor sub acţiunea momentelor elastice maxime (în valoare absolută) produse de încărcările normate, denumite momente normate;

— deschideri ale fisurilor şi mărimi ale săgeţilor în stadiul de exploatare inferioare valorilor admise prin STAS 10107/0—76.

Pentru realizarea primelor două obiective este necesar ca:

— elementele pe care se formează articulaţii plastice să fie solicitate în principal la încovoiere;

— rotirile articulaţiilor plastice sub acţiunea încărcărilor de calcul să fie inferioare capacităţii de rotire a acestor articulaţii;

— armarea elementelor să se facă pe baza înfăşurătoarelor momentelor pozitive şi negative;

— armătura transversală să confere elementelor de beton armat rezistenţa necesară împotriva ruperii prin secţiuni înclinate.

Regulile practice de calcul cuprinse în acest capitol ţin seama în mod implicit de toate condiţiile enumerate mai înainte [8].

La cadrele de beton armat, calculul în domeniul plastic se face numai în raport cu schemele de încărcare formate de încărcările permanente şi temporare aplicate vertical. Pentru schemele de încărcare în care apar şi încărcări orizontale, determinarea eforturilor se face pe baza calculului în domeniul elastic. Ca urmare a acestei limitări, comportarea în domeniul plastic a cadrelor este permisă numai în măsura în care aceasta are loc prin formarea de articulaţii plastice exclusiv în cîmpurile şi pe reazemele riglelor, cedarea cadrelor avînd loc în acest caz prin formarea de mecanisme de grindă.

Momentele de calcul ale secţiunilor critice se determină cu relaţiile:

— în secţiunile critice din cîmpurile şi de pe reazemele grinzilor continue şi riglelor cadrelor realizate monolit,

$$M_c = \nu M_e; \qquad (V.\ 22)$$

— în secţiunile critice de pe reazemele grinzilor continue şi riglelor cadrelor realizate din elemente prefabricate monolitizate pe reazeme,

$$M_c = \nu(M'_e + M''_e); \qquad (V.\ 23)$$

— în secţiunile critice din cîmpurile grinzilor continue şi riglelor cadrelor realizate din elemente prefabricate monolitizate pe reazeme,

$$M_c = \nu(M'_e + M''_e) + M'''_e \qquad \text{(V.24)}$$

în care : M_c este momentul de calcul în valoare absolută ; M_e — momentul elastic maxim (în valoare absolută) produs de încărcările permanente şi temporare de calcul ; M'_e — momentul elastic maxim (în valoare absolută) produs de încărcările temporare de calcul aplicate după realizarea continuităţii pe reazeme ; M''_e — momentul elastic (în valoare absolută) produs de încărcările permanente de calcul aplicate după realizarea continuităţii pe reazeme ; M'''_e — momentul elastic produs de încărcările permanente de calcul aplicate înainte de realizarea continuităţii pe reazeme ; ν — coeficientul plastic al secţiunii critice respective.

La structurile la care efectele variaţiei temperaturii exterioare şi ale contracţiei sînt neglijabile, momentele de calcul trebuie să îndeplinească condiţia

$$M_c \geqslant 1{,}0\, M_n, \qquad \text{(V.25)}$$

în care M_n este momentul elastic maxim (în valoare absolută) produs în secţiunea critică respectivă de încărcările permanente şi temporare luate cu valorile lor normate.

Considerînd valorile coeficienţilor de supraîncărcare cuprinse în STAS 10101—75 [26, 27, 28, 29], condiţia (V.25) poate fi înlocuită în calculele practice prin

$$\nu \geqslant 0{,}85. \qquad \text{(V.26)}$$

Cînd acţiunea temperaturii exterioare sau a contracţiei conduce la momente încovoietoare M_t mai mari decît 5% din momentele M_n, momentele de calcul trebuie să îndeplinească condiţia

$$M_c \geqslant M_n + M_t. \qquad \text{(V.27)}$$

În calculele practice, condiţia (V. 27) poate fi înlocuită prin

$$M_c \geqslant 0{,}8\, M_e + M_t. \qquad \text{(V.28)}$$

Condiţiile (V. 27) şi (V.28) se referă numai la secţiunile critice pentru care momentele M_n şi M_t au acelaşi sens de acţiune.

La efectuarea calculului în domeniul plastic al structurilor de beton armat, mărimile care apar în acest calcul se prevăd cu indici exprimînd numărul de ordine pe care îl are secţiunea critică la care se referă mărimile respective.

3.3. Grinzi continue cu o singură schemă de încărcare

La grinzile continue de beton armat ale căror încărcări permanente şi temporare formează o singură schemă de încărcare, redistribuirea plastică a momentelor de pe reazeme se face de regulă atunci cînd aceasta conduce la avantaje de natură structurală, economică sau constructivă. În astfel de cazuri, momentele de calcul ale secţiunilor critice de pe reazeme sînt date de relaţia (V. 22) în cazul grinzilor monolite şi respectiv de relaţia (V.23) în cazul grinzilor realizate din elemente prefabricate monolitizate pe reazeme.

Valorile coeficientului ν din relațiile (V. 22) și (V. 23) se iau din tabelul V.5, în funcție de diferența coeficienților ξ și ξ' dați de relațiile

$$\xi = \frac{A_a R_a}{bh_0 R_c}; \qquad \xi' = \frac{A'_a R_a}{bh_0 R_c}, \tag{V.29}$$

în care: A_a este aria armăturii întinse; A'_a — aria armăturii comprimate; R_a—rezistența de calcul a armăturii; R_c — rezistența de calcul la compresiune a betonului; b— lățimea secțiunii critice; h_0 — înălțimea utilă a secțiunii critice.

Tabelul V.5

Coeficientul ν pentru secțiunile critice de pe reazeme

$\xi-\xi'$	Marca armăturii		
	OB 37	PC 52	PC 60
0,05	0,85	0,85	0,85
0,10	0,85	0,85	0,85
0,15	0,85	0,85	0,85
0,20	0,85	0,85	0,87
0,25	0,85	0,88	0,90
0,30	0,87	0,91	0,92
0,35	0,90	0,93	0,94
0,40	0,92	0,95	0,96

Observație. În a doua relație (V.29), A'_a reprezintă aria armăturii comprimate trecute peste reazem pe o lungime cel puțin egală cu cea specificată în STAS 10107/0–76 pentru ancorarea în zona comprimată a betonului, chiar dacă această armătură nu se ia în considerație la dimensionarea secțiunilor critice respective.

Diagrama momentelor de calcul dintr-o deschidere se obține din condiția cu deschiderea respectivă să fie în echilibru sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul și a momentelor de calcul de pe reazemele ei.

Forțele tăietoare de calcul se iau egale cu valorile majorate cu 10% ale forțelor tăietoare determinate din condiția ca deschiderea respectivă să fie în echilibru sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul și a momentelor de calcul de pe reazemele ei.

Regulile de calcul prezentate mai înainte sînt aplicabile, de asemenea, grinzilor static nedeterminate de beton armat cu o singură deschidere.

Un caz special îl constituie grinzile secundare monolite de secțiune constantă, cu trei sau mai multe deschideri egale, simplu rezemate la extremități, solicitate de încărcări permanente și temporare distribuite uniform pe lungimea tuturor deschiderilor, ale căror secțiuni critice de pe reazeme îndeplinesc condițiile:

— la grinzile cu armătura longitudinală din oțel OB 37,

$$\xi - \xi' \leqslant 0,30; \tag{V.30}$$

— la grinzile cu armătura longitudinală din oțel PC 52,

$$\xi - \xi' \leqslant 0,25; \tag{V.31}$$

— la grinzile cu armătura longitudinală din oțel PC 60,

$$\xi - \xi' \leqslant 0,20, \tag{V.32}$$

în care coeficienții ξ și ξ' sînt dați de relațiile (V.29).

La astfel de grinzi, momentele de calcul pot fi determinate cu relaţiile:
— în primul cîmp şi pe primul reazem intermediar,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{11}; \tag{V.33}$$

— în celelalte cîmpuri şi pe celelalte reazeme intermediare,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{16}, \tag{V.34}$$

în care: g_c este încărcarea permanentă de calcul pe unitatea de lungime; p_c — încărcarea temporară de calcul pe unitatea de lungime; l — lungimea deschiderii de calcul.

Forţele tăietoare de calcul ale grinzilor continue la care momentele de calcul se determină cu relaţiile (V.33) şi (V.34) se iau după cum urmează:
— în secţiunile adiacente reazemelor marginale,

$$T_c = 0{,}44\,(g_c + p_c)l; \tag{V.35}$$

— în secţiunea din primul cîmp, adiacentă primului reazem intermediar,

$$T_c = 0{,}66\,(g_c + p_c)l; \tag{V.36}$$

— în celelalte secţiuni adiacente reazemelor intermediare,

$$T_c = 0{,}55\,(g_c + p_c)l. \tag{V.37}$$

Observaţie. Relaţiile (V.33) şi (V.34) se aplică şi plăcilor continue armate pe o direcţie, cu deschideri egale solicitate de încărcări permanente şi temporare uniform distribuite formînd o singură schemă de încărcare, care îndeplinesc condiţiile (V. 30), (V. 31) şi respectiv (V.32), în care coeficientul ξ' se ia egal cu zero. În acest caz, momentele de calcul acţionează pe unitatea de lăţime, g_c şi p_c fiind încărcările permanentă şi temporară de calcul pe unitatea de suprafaţă.

Exemplul de calcul V.5. Se consideră o grindă continuă monolită cu cinci deschideri egale, simplu rezemată la extremităţi, cu secţiunea în formă de T (fig. V. 18). Grinda este solicitată de încărcări permanente şi temporare uniform distribuite pe toată lungimea ei.

Date de calcul. Încărcarea permanentă de calcul, g_c = 15 kN/m; încărcarea temporară de calcul p_c = 20 kN/m; lungimea de calcul a fiecărei deschideri, l = 5,70 m; lăţimea activă a plăcii la secţiunile cele mai solicitate din cîmpuri, b_p = 120 cm; grosimea plăcii, h_p = 7 cm; rezistenţa de calcul la compresiune a betonului, R_c = 80 daN/cm² (B150); rezistenţa de calcul a armăturii longitudinale, R_a = 2 100 daN/cm² (OB 37).

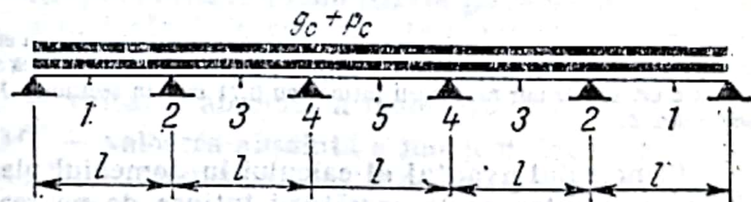


Fig. V.18

Calculul grinzii în domeniul plastic constă în redistribuirea momentelor de pe reazeme. Pentru efectuarea acestei operaţii, secţiunile critice de pe reazeme şi secţiunile cele mai solicitate din cîmpuri se numerotează de la 1 la 5, ca în fig. V.18.

Momentele elastice (în valoare absolută) produse de încărcările permanente şi temporare de calcul în secţiunile 1 – 5 au valorile:

$$M_{e1} = 0{,}078\,(g_c + p_c)\,l^2 = 88{,}7 \text{ kNm},$$

$$M_{e2} = 0{,}105\,(g_c + p_c)\,l^2 = 119{,}4 \text{ kNm},$$

$$M_{e3} = 0{,}033\,(g_c + p_c)\,l^2 = 37{,}5 \text{ kNm},$$

$$M_{e4} = 0{,}079\,(g_c + p_c)\,l^2 = 89{,}8 \text{ kNm},$$

$$M_{e5} = 0{,}046\,(g_c + p_c)\,l^2 = 52{,}3 \text{ kNm}$$

Pentru dimensionarea grinzii se consideră că secțiunea critică 2, care este cea mai solicitată, îndeplinește condiția (V. 30). Ca urmare, coeficientul plastic al acestei secțiuni, dedus din tabelul V. 5, este $\nu_2 = 0,85$, momentul de calcul al secțiunii critice 2 fiind deci

$$M_{C2} = \nu_2 M_{e2} = 101,5 \text{ kNm}.$$

Pentru $\xi_2 = 0,30$ și $\xi_2' = 0$ se ajunge în final la următoarele dimensiuni ale inimii secțiunilor grinzii:

$$b = 20 \text{ cm}; \; h = 55 \text{ cm}; \; h_0 = 51 \text{ cm}.$$

Coeficientul plastic al secțiunii critice 4 va avea tot valoarea 0,85, ea fiind mai slab solicitată decît secțiunea critică 2. Momentul de calcul al acestei secțiuni va fi deci

$$M_{C4} = \nu_4 M_{e4} = 76,3 \text{ kNm}.$$

Secțiunea 1 se consideră situată la o distanță egală cu $0,4l$ de reazemul marginal, iar secțiunile 3 și 5 sînt situate în mijlocul deschiderilor respective. Momentele de calcul ale secțiunilor 1, 3 și 5, determinate din condiția de echilibru a deschiderilor respective sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul și a momentelor de calcul de pe reazemele lor, au următoarele valori:

$$M_{C1} = 0,120 \, (g_C + p_C) \, l^2 - 0,4 \, M_{C2} = 95,9 \text{ kNm},$$

$$M_{C3} = 0,125 \, (g_C + p_C) \, l^2 - 0,5 \, (M_{C2} + M_{C4}) = 53,2 \text{ kNm},$$

$$M_{C5} = 0,125 \, (g_C + p_C) \, l^2 - M_{C4} = 65,8 \text{ kNm}.$$

Ariile armăturii întinse din secțiunile critice 1–5, corespunzătoare momentelor de calcul stabilite mai înainte sînt următoarele:

$$A_{a1} = 9,18 \text{ cm}^2; \; A_{a2} = 11,04 \text{ cm}^2; \; A_{a3} = 5,03 \text{ cm}^2;$$

$$A_{a4} = 7,93 \text{ cm}^2; \; A_{a5} = 6,24 \text{ cm}^2.$$

Pentru comparație, în continuare se dau ariile armăturii întinse din secțiunile 1–5 corespunzătoare momentelor $M_{e1} \ldots M_{e5}$:

$$A_{a1} = 8,47 \text{ m}^2; \; A_{a2} = 13,49 \text{ cm}^2; \; A_{a3} = 3,53 \text{ cm}^2;$$

$$A_{a4} = 9,56 \text{ cm}^2; \; A_{a5} = 4,95 \text{ cm}^2.$$

Rezultatele obținute în cadrul acestui exemplu arată că prin efectuarea calculului în domeniul plastic se ajunge la reducerea ariilor armăturii întinse cu 2,45 cm² în secțiunea critică 2 și cu 1,63 cm² în secțiunea critică 4 și respectiv la creșterea ariilor armăturii întinse cu 0,71 cm² în secțiunea 1, cu 1,50 cm² în secțiunea 3 și cu 1,29 cm² în secțiunea 5.

Principalul avantaj al calculului în domeniul plastic constă în acest caz în reducerea diferenței dintre ariile armăturii întinse de pe reazeme și ariile armăturii întinse din cîmpuri, ceea ce contribuie la realizarea unei armări mai raționale a grinzii din punct de vedere constructiv.

Se menționează că momentele de calcul din secțiunile 1–5 ale grinzii considerate în acest exemplu puteau fi determinate, de asemenea, cu relațiile (V.33) și (V.34).

3.4. Grinzi continue cu mai multe scheme de încărcare

La grinzile continue ale căror încărcări permanente și temporare formează mai multe scheme de încărcare, momentele de calcul ale secțiunilor critice de pe reazeme și din cîmpuri sînt date de relația (V.22) în cazul grinzilor monolite și de relațiile (V. 23) și (V.24) în cazul grinzilor realizate din elemente prefabricate monolitizate pe reazeme.

Pentru secţiunile critice de pe reazeme, valorile coeficienţilor plastici se iau în toate cazurile din tabelul V. 5 în funcţie de diferenţa coeficienţilor ξ ţi ξ', daţi de relaţiile (V. 29).

În calculele practice, coeficienţii plastici corespunzători secţiunilor critice de pe reazeme se stabilesc astfel. Se aleg valorile coeficienţilor ξ_j şi ξ'_j pentru cea ma solicitată secţiune critică de pe reazeme, notată cu j, şi se face diferenţa $\xi_j - \xi'_j$. Pentru o altă secţiune critică de pe reazeme, notată cu k, diferenţa $\xi_k - \xi'_k$ se determină cu relaţia

$$\xi_k - \xi'_k = \frac{M_{ek}}{M_{ej}} (\xi_j - \xi'_j), \tag{V.38}$$

în care M_{ej} şi M_{ek} sînt momentele elastice maxime (în valoare absolută) produse de încărcările permanente şi temporare de calcul în secţiunile critice j şi k.

Din tabelul V.5 se deduc apoi valorile coeficienţilor plastici ai secţiunilor critice de pe reazeme în funcţie de diferenţele $\xi_j - \xi'_j$ şi $\xi_k - \xi'_j$ astfel obţinute.

Pentru secţiunile critice din cîmpuri, valorile coeficienţilor plastici se determină după cum urmează:

— dacă secţiunile critice din cîmpuri sînt în formă de T, coeficienţii plastici se iau egali cu 0,85, fără a fi însă mai mici decît cei calculaţi cu relaţia

$$\nu = \frac{\overline{M}_c - (1 - \eta) M_c^{st} - \eta M_c^{dr}}{M_e} \tag{V.39}$$

dacă grinzile sînt monolite şi respectiv cu relaţia

$$\nu = \frac{\overline{M}_c - (1 - \eta) M_c^{st} - \eta M_c^{dr} - M'''_e}{M'_e + \overline{M}''_e} \tag{V.40}$$

dacă grinzile sînt realizate din elemente prefabricate monolitizate pe reazeme, în care: $\overline{M}_c$ este momentul încovoietor produs de încărcările permanente şi temporare de calcul în secţiunea critică din deschiderea respectivă, determinat în ipoteza simplei rezemări a deschiderii la ambele capete; M_c^{st} — valoarea absolută a momentului de calcul de pe reazemul din stînga al deschiderii; M_c^{dr} — valoarea absolută a momentului de calcul de pe reazemul din dreapta al deschiderii; M_e — momentul elastic maxim produs de încărcările permanente şi temporare de calcul în secţiunea critică din deschiderea respectivă a grinzii continue realizate monolit; M'_e — momentul elastic maxim produs în secţiunea critică din deschiderea respectivă de încărcările temporare de calcul aplicate după monolitizarea pe reazeme a elementelor prefabricate; M''_e — momentul elastic produs în secţiunea critică din deschiderea respectivă de încărcările permanente de calcul aplicate după monolitizarea pe reazeme a elementelor prefabricate; M'''_e — momentul elastic produs în secţiunea critică din deschiderea respectivă de încărcările permanente de calcul aplicate înainte de monolitizarea pe reazeme a elementelor prefabricate; η — raportul dintre distanţa la care se găseşte secţiunea critică din deschiderea respectivă faţă de reazemul ei din stînga şi lungimea întregii deschideri;

— dacă secţiunile critice din cîmpuri sînt dreptunghiulare, coeficienţii plastici se iau din tabelul V.6, fără a fi însă mai mici decît cei calculaţi cu relaţia (V.39) în cazul

grinzilor monolite şi respectiv cu relaţia (V.40) în cazul grinzilor realizate din elemente prefabricate monolitizate pe reazeme.

Distribuţia armăturii longitudinale de rezistenţă pe lungimea grinzilor se face pe baza înfăşurătoarelor momentelor pozitive şi negative de calcul. Înfăşurătoarea momente-

Tabelul V.6

Coeficientul ν pentru secţiunile critice de formă dreptunghiulară din cîmpuri

$\xi-\xi'$	Marca armăturii		
	OB 37	PC 52	PC 60
0,05	0,85	0,85	0,85
0,10	0,85	0,85	0,87
0,15	0,85	0,90	0,92
0,20	0,90	0,93	0,95
0,25	0,93	0,95	0,96
0,30	0,95	0,96	0,97
0,35	0,96	0,97	0,98
0,40	0,97	0,98	0,99

lor pozitive dintr-o deschidere se obţine din înfăşurătoarea trasată în ipoteza comportării elastice a grinzii sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul, prin înmulţirea ordonatelor acesteia cu coeficientul plastic al secţiunii critice din zona centrală a deschiderii respective. Înfăşurătoarea momentelor negative dintr-o deschidere se obţine din condiţia ca deschiderea respectivă să fie în echilibru sub acţiunea încărcărilor permanente de calcul, a unui sfert din încărcările temporare de calcul şi a momentelor de calcul de pe reazeme.

Forţele tăietoare de calcul se iau egale cu valorile majorate cu 10% ale forţelor tăietoare maxime (în valoare absolută) determinate în ipoteza comportării elastice a grinzilor sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul.

Un caz special îl reprezintă grinzile secundare monolite cu secţiunea în formă de T, cu trei sau mai multe deschideri egale, simplu rezemate la extremităţi, solicitate de încărcări permanente şi temporare distribuite uniform care pot forma toate schemele posibile de încărcare, la care secţiunile critice de pe reazeme îndeplinesc condiţiile (V. 30), (V.31) şi respectiv (V.32). La astfel de grinzi, momentele de calcul pot fi determinate cu relaţiile:

— în primul cîmp,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{12}; \tag{V.41}$$

— pe primul reazem intermediar,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{11}; \tag{V.42}$$

— în celelalte cîmpuri,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{16}; \qquad (V.43)$$

— pe celelalte reazeme intermediare,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{13}. \qquad (V.44)$$

Forțele tăietoare de calcul ale grinzilor continue la care momentele de calcul sînt date de relațiile (V.41) — (V.44) se determină după cum urmează:

— în secțiunile adiacente reazemelor marginale, cu relația (V.35);

— în secțiunea din prima deschidere adiacentă primului reazem intermediar, cu relația (V.36);

— în celelalte secțiuni adiacente reazemelor intermediare, cu relația

$$T_c = 0{,}60(g_c + p_c)l. \qquad (V.45)$$

Calculul în domeniul plastic al plăcilor continue armate pe o direcție, solicitate de încărcări permanente și temporare uniform distribuite formînd mai multe scheme de încărcare, este similar celui corespunzător grinzilor continue cu mai multe scheme de încărcare, cu deosebirea că la construirea înfășurătoarei momentelor negative se ia în considerație jumătate din încărcările temporare de calcul în loc de un sfert din aceste încărcări. În acest caz, momentele de calcul se obțin pe unitatea de lățime, g_c și p_c fiind încărcările permanentă și temporară de calcul pe unitatea de suprafață.

La plăcile cu deschideri egale, simplu rezemate la extremități, care îndeplinesc condițiile (V.30), (V.31) și respectiv (V.32) în care coeficientul ξ' se ia egal cu zero, momentele de calcul pot fi determinate cu relațiile:

— în primul cîmp și pe primul reazem intermediar,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{11}; \qquad (V.46)$$

— în celelalte cîmpuri și pe celelalte reazeme intermediare,

$$M_c = \frac{(g_c + p_c)l^2}{14}. \qquad (V.47)$$

Exemplul de calcul V.6. Se consideră o grindă continuă monolită cu patru deschideri egale, simplu rezemată la extremități, cu secțiunea în formă de T (fig. V. 19). Grinda este solicitată de încărcări permanente și temporare aplicate concentrat la treimile fiecărei deschideri, ele putînd forma toate schemele posibile de încărcare (fig.V.19. *a-d*).

Date de calcul. Încărcarea permanentă de calcul aplicată concentrat într-un punct, $G_c = 50$ kN; încărcarea temporară de calcul aplicată concentrat într-un punct, $P_c = 70$ kN; lungimea de calcul a fiecărei deschideri, $l = 4{,}20$ m; lățimea activă a plăcii la secțiunile critice din cîmpuri, $b_p = 160$ cm; grosimea plăcii, $h_p = 8$ cm; rezistența de calcul la compresiune a betonului, $R_c = 100$ daN/cm² (B 200); rezistența de calcul a armăturii longitudinale, $R_a = 2\,900$ daN/cm² (PC 52).

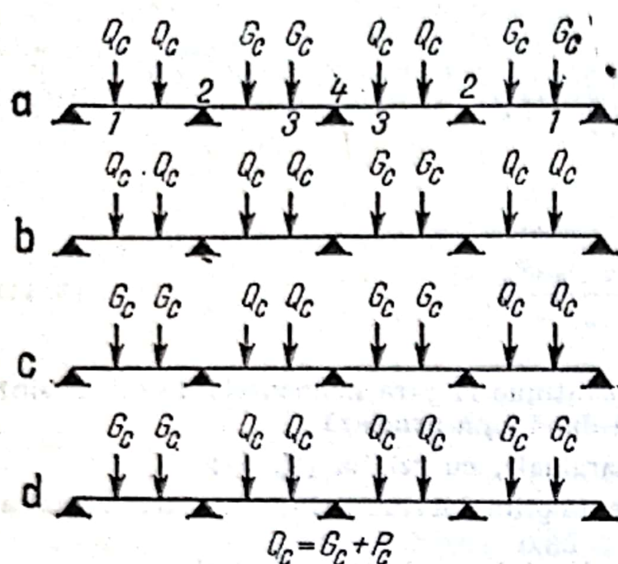


Fig. V.19

Momentele elastice maxime (în valoare absolută) produse de încărcările permanente și temporare de calcul în secțiunile critice *1*—*4* ale grinzii (fig. V.19 *a-d*) au valorile:

$$M_{e1} = (0{,}238G_C + 0{,}286P_C)l = 134{,}1 \text{ kNm},$$

$$M_{e2} = (0{,}286G_C + 0{,}321P_C)l = 154{,}4 \text{ kNm},$$

$$M_{e3} = (0{,}111G_C + 0{,}222P_C)l = 88{,}6 \text{ kNm},$$

$$M_{e4} = (0{,}190G_C + 0{,}286P_C)l = 124{,}0 \text{ kNm}.$$

Pentru dimensionarea grinzii se consideră că coeficienții ξ_2 și ξ_2' corespunzători secțiunii critice *2*, care este cea mai solicitată, au valorile 0,35 și respectiv 0,05. Pentru $\xi_2 - \xi_2' = 0{,}30$, din tabelul V. 5 se deduce $\nu_2 = 0{,}91$, momentul de calcul al secțiunii critice *2* fiind deci

$$M_{C2} = \nu_2 M_{e2} = 140{,}5 \text{ kNm}.$$

Dimensiunile inimii secțiunilor grinzii se obțin cu valorile

$$b = 22 \text{ cm}; \quad h = 50 \text{ cm}; \quad h_0 = 47 \text{ cm}.$$

Folosind relația (V.38), pentru diferența $\xi_4 - \xi_4'$ se obține valoarea

$$\xi_4 - \xi_4' = \frac{M_{e4}}{M_{e2}} (\xi_2 - \xi_2') = 0{,}24.$$

Din tabelul V.5 se deduce $\nu_4 = 0{,}87$, pentru momentul de calcul al secțiunii critice *4* rezultînd valoarea

$$M_{C4} = \nu_4 M_{e4} = 107{,}9 \text{ kNm}.$$

Pentru secțiunile critice *1* și *3*, relația (V.39) conduce la următoarele rezultate:

$$\nu_1 = \frac{0{,}333(G_C + P_C)l - 0{,}333M_{C2}}{M_{e1}} = 0{,}90$$

și

$$\nu_3 = \frac{0{,}333(G_C + P_C)l - 0{,}333M_{C2} - 0{,}667M_{C4}}{M_{e3}} = 0{,}56.$$

Ținînd seama de condiția (V. 26), valorile definitive ale coeficienților plastici corespunzători secțiunilor critic *1* și *3* sînt $\nu_1 = 0{,}90$ și $\nu_3 = 0{,}85$.

Momentele de calcul ale acestor secțiuni au deci valorile

$$M_{C1} = \nu_1 M_{e1} = 120{,}7 \text{ kNm}$$

și

$$M_{C3} = \nu_3 M_{e3} = 75{,}3 \text{ kNm}.$$

Ariile armăturii întinse din secțiunile critice *1*—*4* corespunzătoare momentelor de calcul determinate mai înainte sînt următoarele:

$$A_{a1} = 9{,}03 \text{ cm}^2; \quad A_{a2} = 12{,}50 \text{ cm}^2;$$

$$A_{a3} = 5{,}60 \text{ cm}^2; \quad A_{a4} = 9{,}03 \text{ cm}^2.$$

Pentru comparație, în continuare se dau ariile armăturii întinse din secțiunile critice *1—4* corespunzătoare momentelor $M_{e1} \ldots M_{e4}$.

$$A_{a1} = 10{,}03 \text{ cm}^2; \quad A_{a2} = 14{,}09 \text{ cm}^2;$$

$$A_{a3} = 6{,}60 \text{ cm}^2; \quad A_{a4} = 10{,}70 \text{ cm}^2$$

Rezultatele astfel obținute arată că prin efectuarea calculului în domeniul plastic se ajunge la micșorarea armăturii întinse necesare în toate secțiunile critice, și anume: cu 10,4% în secțiunea critică *1*, cu 11,5% în secțiunea critică *2*, cu 15,2% în secțiunea critică *3* și cu 15,6% în secțiunea critică *4*.

Exemplul de calcul V.7. Se consideră o grindă continuă cu două deschideri egale, realizată din două elemente prefabricate de secțiune dreptunghiulară monolitizate pe reazemul intermediar (fig. V. 20, *a*). Grinda este solicitată de încărcări permanente și temporare uniform distribuite care pot forma două scheme de încărcare (fig.V.20, *b-e*)

Date de calcul. Încărcarea permanentă de calcul aplicată înainte de monolitizarea elementelor prefabricate, $g'_c = 5$ kN/m; încărcarea permanentă de calcul aplicată după monolitizarea elementelor prefabricate, $g''_c = 15$kN/m; încărcarea temporară de calcul aplicată după monolitizarea elementelor prefabricate, $p_c = 15$ kN/m; lungimea de calcul a fiecărei deschideri, $l = 5{,}60$ m; rezistența de calcul la compresiunea a betonului, $R_c = 120$ daN/cm² (B 250); rezistența de calcul a armăturii longitudinale, $R_a = 3\,400$ daN/cm² (PC 60).

Secțiunile critice ale grinzii se notează cu *1* și *2* (fig. V. 20, *a*), secțiunile critice din cîmpuri considerîndu-se situate la o distanță egală cu $0{,}4l$ de reazemele marginale respective.

Momentele elastice maxime (în valoare absolută) produse de încărcările permanente și temporare de calcul în secțiunile critice *1* și *2* au următoarele valori:

— momentul elastic produs în secțiunea critică *1* de încărcarea permanentă de calcul aplicată înainte de monolitizarea elementelor prefabricate (fig. V.20,*b*),

$$M'''_{e1} = 0{,}120 g'_c l^2 = 18{,}8 \text{ kNm};$$

— momentul elastic produs în secțiunea critică *1* de încărcarea permanentă de calcul aplicată după monolitizarea elementelor prefabricate (fig. V. 20, *c*),

$$M''_{e1} = 0{,}070 g''_c l^2 = 32{,}9 \text{ kNm};$$

— momentul elastic maxim produs în secțiunea critică *1* de încărcarea temporară de calcul (fig. V. 20, *d*)

$$M'_{e1} = 0{,}096 p_c l^2 = 45{,}2 \text{ kNm};$$

— momentul elastic produs în secțiunea critică *2* de încărcarea permanentă de calcul aplicată după monolitizarea elementelor prefabricate (fig. V. 20, *c*),

$$M''_{e2} = 0{,}125 g''_c l^2 = 58{,}7 \text{ kNm};$$

— momentul elastic maxim produs în secțiunea critică *2* de încărcarea temporară de calcul (fig. V.20,*e*),

$$M'_{e2} = 0{,}125 p_c l^2 = 58{,}7 \text{ kNm}.$$

Momentele elastice totale din secțiunile critice *1* și *2* sînt deci

$$M_{e1} = M'_{e1} + M''_{e1} + M'''_{e1} = 96{,}9 \text{ kNm}.$$

și

$$M_{e2} = M'_{e2} + M''_{e2} = 117{,}4 \text{ kNm}.$$

Pentru dimensionarea grinzii se consideră că coeficientul ξ_2 corespunzător secțiunii critice *2*, care este cea mai solicitată, are valoarea 0,20. Coeficientul ξ'_2 este în acest caz

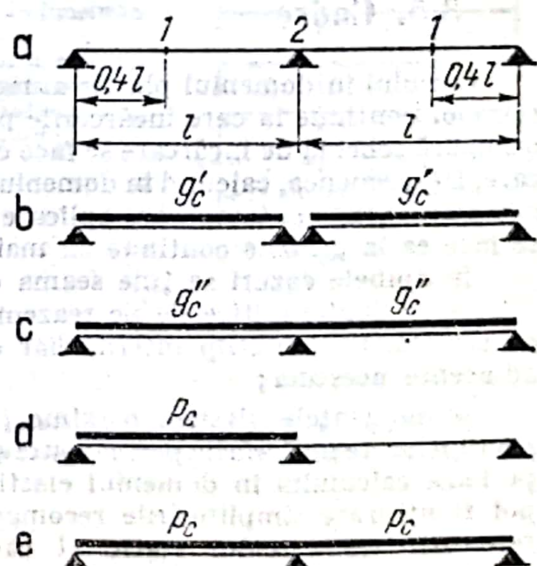


Fig. V.20

egal cu zero. Pentru $\xi_2 - \xi_2' = 0{,}20$, din tabelul V.5 se deduce $\nu_2 = 0{,}87$, momentul de calcul al secţiunii critice 2 fiind deci

$$M_{c2} = \nu_2(M_{e2}' + M_{e2}'') = 102{,}1 \text{ kNm}.$$

Pentru secţiunea critică 2 se obţin următoarele dimensiuni

$$b = 20 \text{ cm}; \; h = 50 \text{ cm}; \; h_0 = 47 \text{ cm}.$$

Folosind relaţia (V. 38), pentru diferenţa $\xi_1 - \xi_1'$ se obţine valoarea

$$\xi_1 - \xi_1' = \frac{M_{e1}}{M_{e2}}(\xi_2 - \xi_2') = 0{,}165.$$

Din tabelul V.6 se deduce $\nu_1 = 0{,}93$.
Pe de altă parte, pentru secţiunea critică 1 relaţia (V.40) devine

$$\nu_1 = \frac{0{,}120(g_c' + g_c'' + p_c)l^2 - 0{,}4M_{c2} - M_{e1}'''}{M_{e1}' + M_{e1}''} = 0{,}92.$$

Valoarea finală a coeficientului ν_1 este 0,93 întrucît aceasta este cea mai mare.
Momentul de calcul al secţiunii critice 1, determinat cu relaţia (V.24), are valoarea

$$M_{c1} = \nu_1\left(M_{e1}' + M_{e1}''\right) + M_{e1}''' = 91{,}4 \text{kNm}.$$

Ariile armăturii întinse din secţiunile critice 1 şi 2, corespunzătoare momentelor de calcul determinate mai înainte, sînt

$$A_{a1} = 6{,}32 \text{ cm}^2; \; A_{a2} = 7{,}13 \text{cm}^2.$$

Pentru comparaţie, în continuare se dau ariile armăturii întinse din secţiunile critice 1 şi 2, corespunzătoare momentelor M_{e1} şi M_{e2}:

$$A_{a1} = 6{,}75 \text{ cm}^2; \; A_{a2} = 8{,}42 \text{cm}^2.$$

Rezultatele astfel obţinute arată că prin efectuarea calculului în domeniul plastic s-a ajuns la micşorarea ariei armăturii întinse necesare cu 6,4% în secţiunea critică 1 şi cu 15,3% în secţiunea critică 2.

3.5. Cadre

Calculul în domeniul plastic al riglelor cadrelor cu o singură deschidere şi al riglelor cadrelor continue la care încărcările permanente şi temporare aplicate vertical formează o singură schemă de încărcare se face ca la grinzile continue cu o singură schemă de încărcare. De asemenea, calculul în domeniul plastic al riglelor cadrelor continue la care încărcările permanente şi temporare aplicate vertical formează mai multe scheme de încărcare se face ca la grinzile continue cu mai multe scheme de încărcare.

În ambele cazuri se ţine seama de următoarele particularităţi:

— secţiunile critice de pe reazemele riglelor sînt situate la contactul cu stîlpii; în consecinţă, fiecare stîlp intermediar este încadrat de două secţiuni critice ale riglelor adiacente acestuia;

— momentele elastice maxime (în valoare absolută) produse în secţiunile critice ale riglelor de încărcările permanente şi temporare de calcul aplicate vertical se determină pe baza calculului în domeniul elastic al întregului cadru; la efectuarea acestui calcul pot fi utilizate simplificările recomandate de manualele pentru calculul construcţiilor referitoare la calculul static al cadrelor;

— calculul static se efectuează pe baza deschiderilor riglelor măsurate între axele stîlpilor, momentele în secţiunile critice de pe reazemele riglelor obţinîndu-se prin reducerea

la marginea stîlpilor a momentelor din axele acestora; la efectuarea acestei operaţii se va ţine seama de condiţia ca reducerea valorilor momentelor să nu fie mai mare decît 15%.

Pentru schemele de încărcare formate de încărcările permanente şi temporare aplicate vertical, momentele de calcul în secţiunile cele mai solicitate ale stîlpilor sînt egale cu momentele încovoietoare determinate în ipoteza comportării elastice a cadrelor sub acţiunea acestor încărcări, luate cu valorile lor de calcul.

Pentru schemele de încărcare care cuprind şi încărcări orizontale, determinarea eforturilor în secţiunile critice ale riglelor şi în secţiunile cele mai solicitate ale stîlpilor se face în ipoteza comportării elastice a cadrelor sub acţiunea încărcărilor care formează schemele respective.

Exemplul de calcul V.8. Se consideră un cadru multietajat monolit cu trei deschideri egale, riglele avînd secţiunea în formă de T iar stîlpii de la fiecare nivel avînd aceeaşi secţiune (fig. V.21). În cadrul grupărilor fundamentale de încărcări, riglele cadrului sînt solicitate de încărcări permanente şi temporare aplicate concentrat în punctele care împart fiecare deschidere în patru părţi egale, ele putînd forma toate schemele posibile de încărcare. În cele ce urmează se calculează în domeniul plastic una dintre riglele curente ale cadrului.

Date de calcul. Încărcarea permanentă de calcul aplicată concentrat într-un punct, $G_c = 40$ kN; încărcarea temporară de calcul aplicată concentrat într-un punct, $P_c = 60$ kN; lungimea fiecărei deschideri măsurată între axele stîlpilor, $l = 6{,}00$ m; lăţimea activă a plăcii la secţiunile critice din cîmpurile riglelor, $b_p = 180$ cm; grosimea plăcii, $h_p = 8$ cm; rezistenţa de calcul la compresiune a betonului, $R_c = 100$ daN/cm² (B 200); rezistenţa de calcul a armăturii longitudinale, $R_a = 2\,900$ daN/cm² (PC 52).

La cadrele de tipul celui din fig. V.21, manualele pentru calculul construcţiilor (de exemplu: *Spravocinik proektirovscika. Rascetno-teoreticeskii*, Moscova, 1960) arată că solicitările produse de încărcările verticale la nivelul fiecărei rigle pot fi calculate pe o schemă statică simplificată, obţinută prin considerarea încastrării perfecte a capetelor stîlpilor situaţi deasupra şi dedesubtul riglei respective, ca în fig. V. 22. În această situaţie, coeficienţii necesari pentru calculul în domeniul elastic al momentelor încovoietoare din secţiunile cele mai solicitate ale riglelor sînt daţi în tabele în funcţie de parametrul

$$k = \frac{\dfrac{I_i}{h_i} + \dfrac{I_s}{h_s}}{\dfrac{I_r}{l}},$$

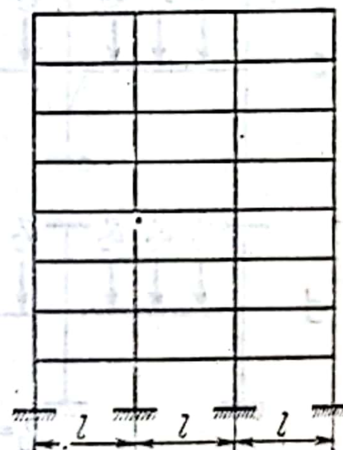


Fig. V.21

în care: I_i este momentul de inerţie al secţiunii stîlpilor de la nivelul inferior al riglei; I_s — momentul de inerţie al secţiunii stîlpilor de la nivelul superior al riglei; I_r — momentul de inerţie al secţiunii riglei; h_i — înălţimea stîlpilor de la nivelul inferior; h_s — înălţimea stîlpilor de la nivelul superior; l — lungimea fiecărei deschideri a riglei.

Considerînd, de exemplu, că parametrul k are valoarea 2, pentru momentele elastice maxime (în valoare absolută) produse de încărcările permanente şi temporare de calcul în secţiunile critice *1–5* ale riglei curente a cadrului (fig. V. 22, *a-d*) se obţin din manualul citat mai înainte următoarele valori:

$$M_{e1} = (0{,}195G_c + 0{,}223P_c)l = 127{,}1 \text{ kNm},$$

$$M_{e2} = (0{,}225G_c + 0{,}258P_c)l = 146{,}9 \text{ kNm},$$

$$M_{e3} = (0{,}354G_c + 0{,}369P_c)l = 217{,}8 \text{ kNm},$$

$$M_{e4} = (0{,}324G_c + 0{,}363P_c)l = 208{,}4 \text{ kNm},$$

$$M_{e5} = (0{,}176G_c + 0{,}242P_c)l = 129{,}4 \text{ kNm}.$$

Se presupune că momentele încovoietoare la marginile stîlpilor sînt cu 15% mai mici decît momentele corespunzătoare din axele stîlpilor. În această situaţie, momentele maxime în secţiunile critice *1*, *3* şi *4*, notate cu $\overline{M}_{e1}$, $\overline{M}_{e3}$ şi $\overline{M}_{e4}$, au valorile

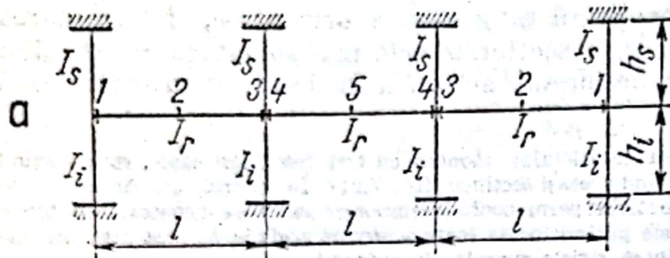
$$\overline{M}_{e1} = 0{,}85M_{e1} = 108{,}0 \text{ kNm},$$

$$\overline{M}_{e3} = 0{,}85M_{e3} = 185{,}1 \text{ kNm},$$

$$\overline{M}_{e4} = 0{,}85M_{e4} = 177{,}1 \text{ kNm}.$$

Pentru dimensionarea riglei se consideră că coeficienţii ξ_3 şi ξ_3' corespunzători secţiunii critice *3*, care este cea mai solicitată, au valorile 0,40 şi respectiv 0,10. Pentru $\xi_3 - \xi_3' = 0{,}30$, din tabelul V.5 se deduce $\nu_3 = 0{,}91$ momentul de calcul al secţiunii critice *3* fiind deci

$$M_{c3} = \nu_3 \overline{M}_{e3} = 168{,}4 \text{ kNm.}$$



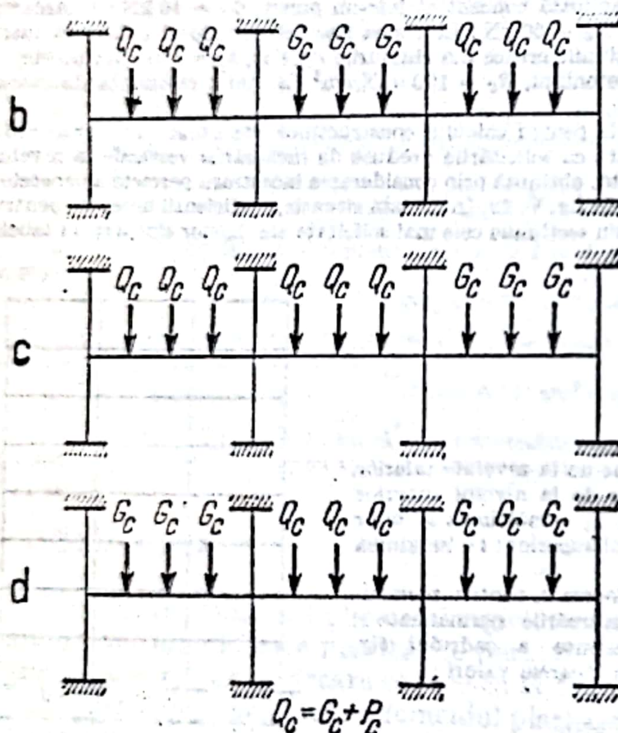


Fig. V.22

Dimensiunile inimii secţiunilor riglei se obţin cu valorile

$$b = 20 \text{ cm}; \quad h = 55 \text{ cm}; \quad h_0 = 51{,}5 \text{ cm.}$$

Folosind relaţia (V.38), pentru diferenţele $\xi_1 - \xi_1'$ şi $\xi_4 - \xi_4'$ se obţin următoarele valori

$$\xi_1 - \xi_1' = \frac{\overline{M}_{e1}}{\overline{M}_{e3}}(\xi_3 - \xi_3') = 0{,}175$$

şi

$$\xi_4 - \xi_4' = \frac{\overline{M}_{e4}}{\overline{M}_{e3}}(\xi_3 - \xi_3') = 0{,}287.$$

Din tabelul V.5 se deduce $\nu_1 = 0{,}85$ şi $\nu_4 = 0{,}90$, momentele de calcul ale secţiunilor critice *1* şi *4* avînd deci valorile

$$M_{c1} = \nu_1 \overline{M}_{e1} = 91{,}8 \text{ kNm}$$

şi

$$M_{c4} = \nu_4 \overline{M}_{e4} = 150{,}4 \text{ kNm.}$$

Pentru secţiunile critice *2* şi *5*, relaţia (V.39) conduce la următoarele rezultate:

$$\nu_2 = \frac{0{,}500(G_c + P_c)l - 0{,}5\left(\frac{M_{c1}}{0{,}85} + \frac{M_{c3}}{0{,}85}\right)}{M_{e2}} = 1{,}00$$

şi

$$\nu_5 = \frac{0{,}500(G_c + P_c)l - \frac{M_{c4}}{0{,}85}}{M_{e5}} = 0{,}87$$

În aceste relaţii, $\frac{M_{c1}}{0{,}85}$, $\frac{M_{c3}}{0{,}85}$ şi $\frac{M_{c4}}{0{,}85}$ reprezintă momentele de calcul în secţiunile riglei situate în dreptul axelor stîlpilor, provenind din momentele de calcul ale secţiunilor critice *1*, *3*, şi *4* situate la contactul riglei cu stîlpii.

Ţinînd seama de condiţia (V. 26), valorile definitive ale coeficienţilor plastici corespunzători secţiunilor critice *2* şi *5* sînt chiar cele obţinute mai înainte. Momentele de calcul ale secţiunilor critice *2* şi *5* au în acest caz următoarele valori

$$M_{c2} = \nu_2 M_{e2} = 146{,}9 \text{ kNm}$$

şi

$$M_{c5} = \nu_5 M_{e5} = 112{,}6 \text{ kNm.}$$

Ariile armăturii întinse în secțiunile critice *1–5*, corespunzătoare momentelor de calcul stabilite mai înainte, sînt următoarel

$$A_{a1} = 6{,}79\ \text{cm}^2;\ A_{a2} = 10{,}03\ \text{cm}^2;\ A_{a3} = 14{,}08\ \text{cm}^2;$$

$$A_{a4} = 13{,}10\ \text{cm}^2;\ A_{a5} = 7{,}64\ \text{cm}^2.$$

Pentru comparație, în continuare se dau ariile armăturii întinse din secțiunile critice *1–5*, corespunzătoare momentelor $\overline{M}_{e1} \ldots \overline{M}_{e5}$.

$$A_{a1} = 8{,}17\ \text{cm}^2;\ A_{a2} = 10{,}03\ \text{cm}^2;\ A_{a3} = 16{,}06\ \text{cm}^2;$$

$$A_{a4} = 15{,}05\ \text{cm}^2;\ A_{a5} = 8{,}82\ \text{cm}^2.$$

Rezultatele astfel obținute arată că prin efectuarea calculului cadrului în domeniul plastic se ajunge la micșorarea ariei armăturii întinse necesare cu 16,9% în secțiunea critică *1*, cu 11,7% în secțiunea critică *3*, cu 13,6% în secțiunea critică *4* și cu 13,4% în secțiunea critică *5*.

BIBLIOGRAFIE

1. A v r a m, C. N. *Grinzi continue.* București, Editura tehnică, 1965.
2. B ă l a n, Șt., R ă u t u, S., P e t c u, V. *Cromoplasticitatea.* București, Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1963.
3. B a k e r, J. F., H o r n e, M. R., H e y m a n, J. *The steel skeleton,* Vol. 2: *Plastic behaviour and design.* Cambridge University Press, 1956.
4. B e e d l e, L. S. *Plastic design of steel frames.* New York, John Wiley and Sons, Inc., 1958.
5. H o d g e, P. G. *Plastic analysis of structures.* New York, Mc. Graw Hill Book Company, 1959.
6. M a s s o n n e t, Ch., S a v e, M. *Calcul plastique des constructions.* Vol. I, ed. 2, Bruxelles, Centre Belgo—Luxembourgeois d'Information de l'Acier (A.S.B.L.), 1967.
7. N e a l B. G. *The plastic methods of structural analysis.* Londra, Chapman and Hall Ltd., 1963.
8. P e t c u, V. *Calculul structurilor de beton armat in domeniul plastic.* București, Editura tehnică, 1972.
9. P e t c u, V. *Calculul structurilor de oțel pe baza concepției stărilor limită.* În: Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 5, 1966.
10. P e t c u, V. *Caracteristicile profilelor laminate I și U necesare in calculul plastic al structurilor de oțel.* În: Standardizarea, nr. 5, 1963.
11. R j a n i ț î n, A. R. *Rascet soorujenii s ucetom plasticeskih svoistv materialov.* Moscova Gosstroiizdat, 1954.
12. S a w y e r, H. A. Jr. *An elastic criterion for plastic design.* În: Journal of the Structural Division, Proceedings ASCE, nr. ST-2, 1958.
13. *Plastic design in steel.* New York, American Institute of Steel Construction, 1959.
14. *Structural steel design.* New York, The Ronald Press Company, 1964.
15. *Plastic design of braced multistory steel frames.* New York, American Iron and Steel Institute, 1968.
16. *Commentary on plastic design in steel.* În: Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE, nr. EM-3, EM-4, 1959, nr. EM-1, EM-2, 1960.
17. Addenda à NBN 1f/1961. *Charpentes en acier. Calcul élasto-plastique des charpentes en acier doux.*
18. STAS 438/1—74. *Oțel-beton laminat la cald. Condiții tehnice generale de calitate.*
19. STAS 500/2—68. *Oțeluri de uz general pentru construcții. Mărci.*
20. STAS 564—71. *Oțel laminat la cald Oțel U.*
21. STAS 565—71. *Oțel laminat la cald. Oțel I.*
22. STAS 763/1—71 *Construcții civile, industriale și agricole. Prescripții pentru proiectarea construcțiilor metalice.*
23. STAS 7550—66. *Oțel laminat la cald. Oțel I economic. Dimensiuni și toleranțe.*
24. STAS 7551—66. *Oțel laminat la cald. Oțel U economic. Dimensiuni și toleranțe.*
25. STAS 10101/0—75. *Acțiuni in construcții. Clasificarea și gruparea acțiunilor.*
26. STAS 10101/1—75. *Acțiuni in construcții. Greutăți tehnice și încărcări permanente.*
27. STAS 10101/2—75. *Acțiuni in construcții. Acțiuni datorită procesului de exploatare.*
28. STAS 10101/20—75. *Acțiuni in construcții. Acțiunea vintului.*
29. STAS 10101/21—75. *Acțiuni in construcții. Încărcarea dată de zăpadă.*
30. STAS 10101/23—75. *Acțiuni in construcții. Încărcarea dată de temperatura exterioară.*
31. STAS 10107/0—76. *Construcții civile și industriale. Calculul și alcătuirea elementelor din beton, beton armat și beton precomprimat.*

SECȚIUNEA VI

PLĂCI PLANE

Prof. dr. doc. ing. MIRCEA V. SOARE

VI

CUPRINS

TABELELE SECŢIUNII VI

1. INTRODUCERE

1.1. Definiţii. Caracteristici geometrice

Prin placă se înţelege un corp la care una dintre dimensiuni (grosimea) poate fi considerată mică în raport cu celelalte două dimensiuni.

O placă este unic determinată, din punct de vedere geometric, dacă se precizează conturul planului median şi grosimea în orice punct.

Planul median este locul geometric al punctelor care împart grosimea plăcii în două părţi egale. Grosimea, notată cu $\delta = 2\,h$, se măsoară după normala în fiecare punct la planul median. Prin ipoteză grosimea se consideră mică (orientativ $\delta \lhd l/10$, unde l este dimensiunea minimă în planul median).

Diferenţierea faţă de şaibe constă în faptul că, la plăci, sarcinile se aplică normal la placă, în timp ce la şaibe, sarcinile sînt reduse în planul median.

1.2. Obiectul lucrării

În activitatea sa de zi de zi, inginerul proiectant este pus în faţa unor probleme concrete complexe, cărora trebuie să le dea o soluţie practică. Or, este foarte rar cazul cînd, în literatura de specialitate, el poate găsi exact soluţia de care are nevoie.

Cineva care ar dori să abordeze teoria plăcilor plane este izbit de literatura imensă scrisă pe această temă.

Publicaţiile diferă între ele, unele după însăşi principiile de calcul adoptate, altele prin variate ipoteze simplificatoare, care fac ca domeniul de aplicabilitate al fiecărei teorii sau metode să fie limitat.

Chiar modul de rezolvare a aceloraşi probleme variază de la autor la autor, astfel încît o inventariere şi ordonare a rezolvărilor cunoscute pînă în prezent apar necesare.

Metodele de calcul necesitînd, cu rare excepţii, cunoştinţe de matematici superioare şi efectuarea unui volum mare de calcule numerice, ne-am limitat la a semnala posibilităţile de rezolvare şi indicarea de valori numerice tabelate, formule, diagrame etc., pentru cazurile cele mai frecvente în practică.

Secţiunea a fost concepută ca o sinteză selectivă, pusă la îndemîna inginerului proiectant; pentru demonstraţii, detalii şi alte tabele, diagrame etc., s-a făcut trimiterea la referinţele bibliografice.

1.3. Principii de calcul al plăcilor plane

Plăcile plane pot fi dimensionate sau verificate prin metode de calcul care iau în considerare:

a) comportarea elastică (cu exprimarea condiţiilor de echilibru şi de compatibilitate a deformaţiilor).

b) comportarea elasto-plastică (cu exprimarea condiţiilor de echilibru sau de compatibilitate a deformaţiilor).

Cazul a) va fi studiat în cap. 2, fiind denumit, în cele ce urmează, calculul în domeniul elastic.

Cazul b), cu considerarea condiţiilor de echilibru, este studiat în paragrafele 13.1—13.3 fiind denumit, în cele ce urmează, calculul în domeniul plastic.

Cazul b), cu considerarea condiţiilor de compatibilitate a deformaţiilor, este studiat în paragraful 13.4 (metoda benzilor).

2. CALCULUL ÎN DOMENIUL ELASTIC

2.1. Ipoteze de calcul

Pentru plăcile din orice material se fac o serie de ipoteze simplificatoare, reprezentînd o extindere a acelora de la studiul grinzilor, şi anume:

a) materialul este un mediu continuu, omogen şi izotrop;

b) materialul lucrează numai în domeniul elastic, avînd acelaşi modul de elasticitate E la întindere şi la compresiune (aceasta permite aplicarea principiului suprapunerii efectelor);

c) eforturile unitare normale pe planul median (σ_z) sînt neglijabile (aceasta înseamnă că grosimea de placă nu se modifică prin deformare);

d) punctele situate pe o normală la suprafaţa mediană înainte de deformare rămîn pe o dreaptă şi după deformare (echivalenta ipotezei secţiunilor plane de la grinzi):

e) normala la planul median, înainte de deformare, rămîne normală la suprafaţa mediană deformată (revine la neglijarea influenţei deformaţiilor datorite forţelor tăietoare);

f) deformaţiile elastice ale plăcii sînt mici în raport cu grosimea, astfel încît ecuaţiile de echilibru se pot exprima pentru starea nedeformată (rezultă că se poate aplica principiul suprapunerii efectelor şi pentru deformaţii);

g) deformaţiile sînt funcţii liniare de eforturile unitare şi reciproc (legea lui Hooke generalizată).

2.2. Relaţii generale în coordonate carteziene

2.2.1. Eforturi unitare şi mărimi secţionale. Sistemul de axe de coordonate se alege astfel încît axele Ox, Oy, sînt situate în planul median al plăcii, iar axa Oz este normală la acesta.

Datorită ipotezelor de calcul admise, eforturile unitare se distribuie pe grosime după legile din rezistenţa materialelor (fig. VI.1); eforturile unitare τ_{xy} şi τ_{yz} se distribuie după legea lui Navier, ca şi eforturile unitare normale σ_x şi σ_y.

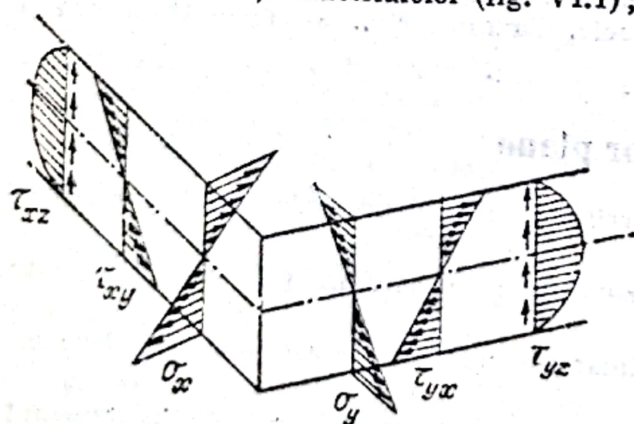


Fig. VI.1

Prin însumarea eforturilor unitare pe grosimea plăcii rezultă mărimile secţionale, raportate la unitatea de lăţime; în secţiunile x, respectiv y apar:

— momentele încovoietoare M_x, M_y;

— momentele de torsiune $M_{xy}=M_{yx}$;

— forţele tăietoare T_x, T_y,

cu sensul pozitiv de acţiune indicat în fig. VI.2, *a*. În fig. VI.2, *b* au fost re-

prezentați vectorii-moment cu săgeata dublă îndreptată spre direcția în care, privind momentul rotește în sensul acelor unui ceasornic.

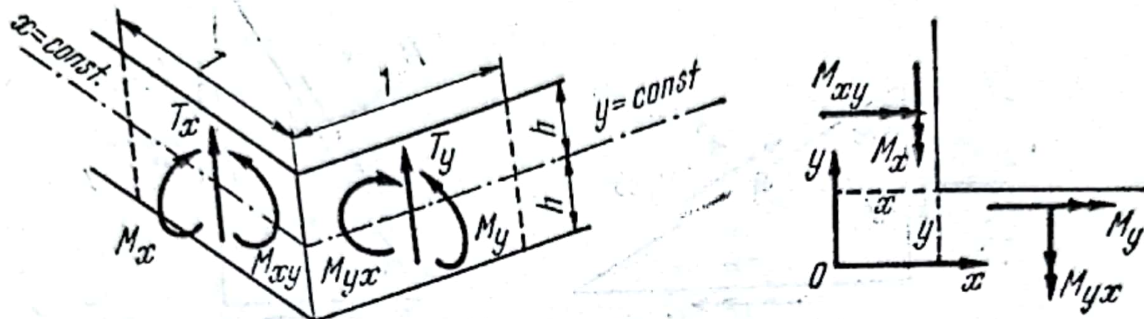


Fig. VI.2

Mărimile secționale se deduc din eforturile unitare cu ajutorul relațiilor:

În secțiunea $x = \text{const.}$

$$M_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_x z \, dz; \qquad M_{xy} = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} z \, dz; \qquad T_x = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \, dz;$$

În secțiunea $y = \text{const.}$

$$M_y = \int_{-h}^{+h} \sigma_y z \, dz; \qquad M_{yx} = \int_{-h}^{+h} \tau_{yx} z \, dz; \qquad T_y = \int_{-h}^{+h} \tau_{yz} \, dz.$$

Odată cunoscute mărimile secționale, eforturile unitare maxime într-un punct (x, y), sînt:

$$\sigma_{x,max} = \pm \frac{6M_x}{\delta^2}; \quad \tau_{xy,max} = \pm \frac{6M_{xy}}{\delta^2}; \quad \tau_{xz,max} = \frac{3T_x}{2\delta};$$

$$\sigma_{y,max} = \pm \frac{6M_y}{\delta^2}; \quad \tau_{yx,max} = \pm \frac{6M_{yx}}{\delta^2}; \quad \tau_{yz,max} = \frac{3T_y}{2\delta}.$$

2.2.2. Eforturi în secțiuni înclinate față de axe. În secțiuni înclinate cu unghiul α, respectiv $\beta = \alpha + \pi/2$, față de axa Oy, apar momentele și forțele tăietoare (fig. VI.3a, b,c):

$$M_n = M_x \cos^2\alpha + M_y \sin^2\alpha + 2M_{xy} \sin\alpha\cos\alpha,$$

$$M_{ns} = (M_x - M_y)\sin\alpha\cos\alpha - M_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \qquad \text{(VI.1)}$$

$$T_n = T_x \cos\alpha + T_y \sin\alpha;$$

$$M_s = M_x \sin^2\alpha + M_y \cos^2\alpha - 2M_{xy}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$M_{sn} = -M_{ns}, \qquad \text{(VI.2)}$$

$$T_s = -T_x \sin\alpha + T_y \cos\alpha.$$

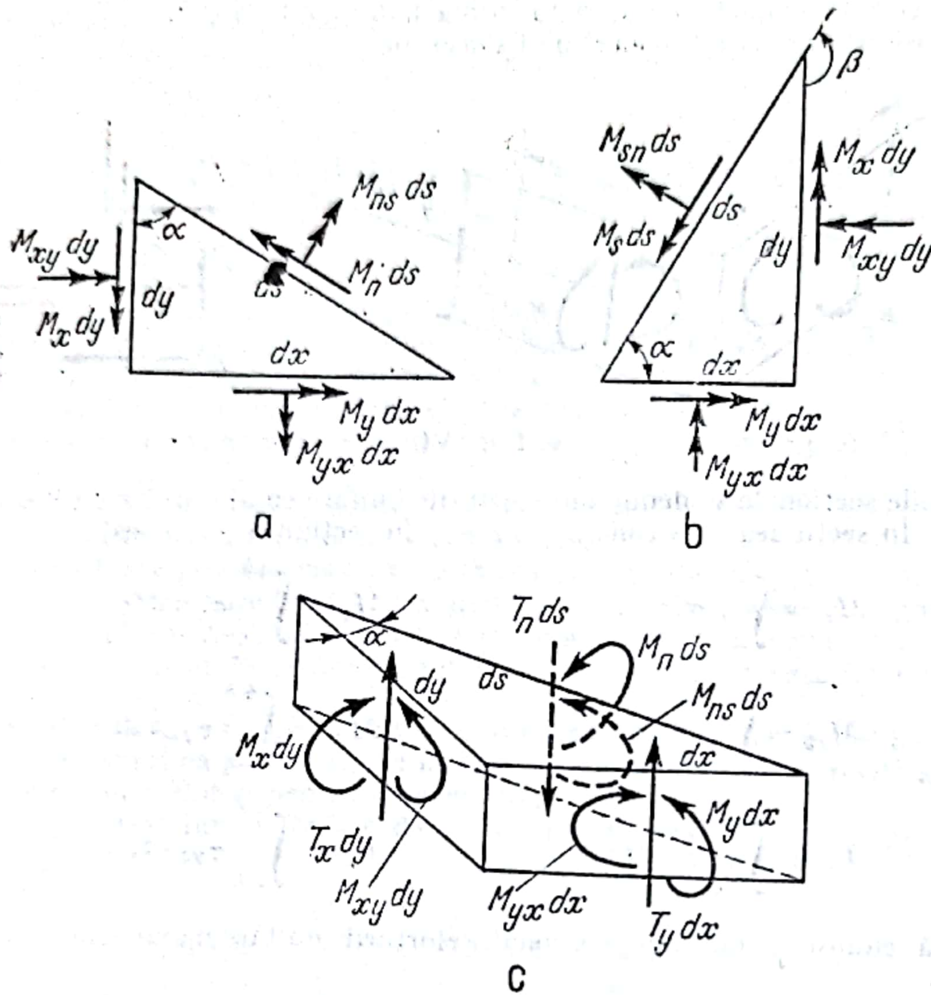


Fig. VI.3

Momente încovoietoare principale și direcțiile corespunzătoare:

$$M_1,\ M_2 = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{M_{1,2} - M_x}{M_{xy}}. \tag{VI.3}$$

Momente de torsiune principale și direcțiile corespunzătoare:

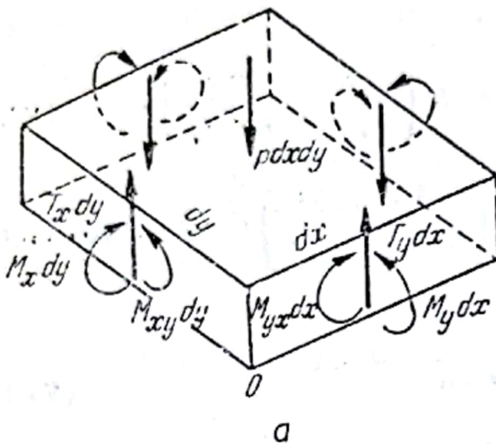
$$M_{12},\ M_{21} = \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} = \pm \frac{M_1 - M_2}{2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_{1,2} = -\frac{M_x - M_y}{2M_{xy}}, \qquad \left(\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{VI.4}$$

Direcţiile care determină momentele de torsiune principale sînt bisectoarele unghiurilor care determină direcţiile momentelor încovoietoare principale.

În cazul coordonatelor carteziene oblice, momentele şi forţele tăietoare în secţiuni înclinate au expresii mai complicate.

2.2.3. Ecuaţiile de echilibru (fig.VI.4,*a*,*b*)



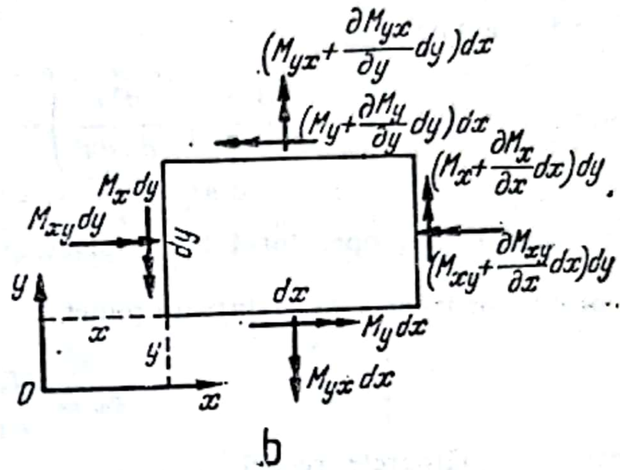


Fig. VI.4

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = T_x,$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = T_y, \qquad \text{(VI.5)}$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -Z.$$

Din eliminarea forţelor tăietoare, se obţine:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -Z. \qquad \text{(VI.6)}$$

2.2.4. Relaţiile dintre mărimile secţionale şi săgeţi. Se notează:

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — modulul de rigiditate la încovoiere a plăcii;

μ — coeficientul de contracţie transversală.

Momente încovoietoare

$$M_x = m_x + \mu m_y, \qquad M_y = m_y + \mu m_x, \qquad \text{(VI.7a)}$$

în care

$$m_x = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad m_y = -K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \text{(VI.7b)}$$

reprezintă momentele încovoietoare cînd $\mu = 0$.

Momente de torsiune

$$M_{xy} = M_{yx} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{VI.8}$$

Forțe tăietoare

$$T_x = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right), \quad T_y = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right). \tag{VI.9}$$

Introducînd operatorul lui Laplace $\Delta(\cdots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)$ și invariantul momentelor încovoietoare într-un punct

$$\mathfrak{M} = \frac{M_x + M_y}{1+\mu}, \tag{VI.10}$$

rezultă următoarele relații

$$\Delta w = -\frac{\mathfrak{M}}{K}, \quad \Delta\mathfrak{M} = -Z; \tag{VI.11}$$

$$T_x = -K\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w), \quad T_y = -K\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w). \tag{VI.12}$$

2.2.5. **Ecuația cu derivate parțiale a săgeților.** Introducînd valorile momentelor din relațiile (VI.7), (VI. 8) în (VI. 6), se obține:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K} \tag{VI.13a}$$

sau scrisă concentrat,

$$\Delta\Delta w = \frac{Z}{K}. \tag{VI.13b}$$

Aceasta este ecuația de bază a plăcilor plane de grosime constantă. Pentru grosime variabilă, vezi cap. 8.

2.2.6. **Energia potențială a plăcii.** Energia potențială de deformație a întregii plăci:

$$W = \frac{K}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{K}{2}\iint\left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{VI.14a}$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare:

$$2L_e = \iint Zw\,dx\,dy \tag{VI.14b}$$

integralele fiind extinse la întreaga arie a plăcii.

Energia potenţială totală se scrie sub forma generală:

$$\Pi = W - 2L_e = \min. \tag{VI.14c}$$

2.2.7. **Condiţii la limită (condiţii marginale).** În fiecare punct de contur, forţa tăietoare şi variaţia momentului de torsiune se însumează algebric, avînd ca rezultantă forţa tăietoare generalizată. Luînd ca axe de coordonate tangenta la contur s şi normala n, rezultă (fig. VI. 5):

$$T_n^* = T_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial n\,\partial s^2}\right]. \tag{VI.15}$$

Fiecare mod de rezemare comportă două condiţii (în lungul unei porţiuni sau laturi de contur sau chiar numai în puncte), şi anume:

— Simplă rezemare: $w = 0$ şi $M_n = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)$.

Condiţia de moment încovoietor nul este echivalentă cu una din condiţiile

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \Delta w = 0.$$

— Încastrare perfectă: $w = 0$ şi $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$.

La un contur încastrat perfect, momentele de torsiune sînt nule.

— Latură liberă: $M_n = 0$ şi $T_n^* = 0$.

Condiţia de forţă tăietoare generalizată nulă este echivalentă cu două condiţii statice în sensul lui Kirchhoff).

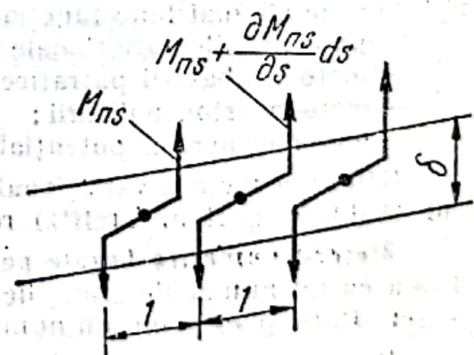


Fig. VI.5

Dacă pe o latură liberă sau simplu rezemată se aplică forţe exterioare de natura forţelor tăietoare sau momentelor încovoietoare, condiţiile la limită se modifică în consecinţă.

— Rezemarea elastică pe o centură, grindă, şaibă etc.: se exprimă egalitatea de săgeţi şi de rotiri între marginea plăcii şi elementul de construcţie respectiv.

— Colţurile plăcii: În cazul laturilor simplu rezemate, la colţuri apar reacţiuni concentrate care pot duce, în unele cazuri, la ridicarea plăcii de pe reazem. Dacă laturile care formează colţul plăcii se întîlnesc sub un unghi drept, reacţiunea concentrată are mărimea $R_{1,2} = \pm 2M_{xy}$.

Condiţiile la limită se exprimă sub o formă mai simplă dacă tangenta la contur s este paralelă cu axa Ox sau Oy şi de asemenea în cazul laturilor drepte.

2.3. Metode generale de soluţionare

La o placă de formă, mod de rezemare şi încărcare date, soluţia riguroasă pentru săgeţile w şi mărimile secţionale trebuie să satisfacă atît ecuaţia de bază (VI.13), cît şi condiţiile de rezemare pe întreg conturul.

Metodele de rezolvare pot fi grupate astfel:

Metode exacte. Se caută soluţia ecuaţiei (VI. 13) sub forma $w = w_p + \overline{w}$, în care w_p este o soluţie particulară funcţie de sarcinile exterioare, care verifică ecuaţia $\Delta\Delta\, w_p = Z/K$; $\overline{w}$ este soluţia ecuaţiei omogene $\Delta\Delta\, \overline{w} = 0$, corespunzînd plăcii solicitate numai pe contur.

Metode variaţionale. Se înlocuieşte funcţia necunoscută w care satisface riguros atît ecuaţia (VI. 13), cît şi condiţiile la limită prescrise, cu o expresie analitică aproximativă, aleasă astfel încît să aproximeze cît mai bine funcţia căutată, adică abaterile de la valorile reale ale funcţiei să fie minime.

Forma funcţiei de aproximare w se alege obişnuit ca o funcţie liniară de un număr finit k de constante c_i

$$w^* = \sum_{1}^{k} c_i \varphi_i(x, y), \tag{VI.16}$$

în care $\varphi_i(x, y)$ sînt funcţii „potrivite" care aproximează cel mai bine funcţia căutată; constantele c_i se determină prin una din metodele variaţionale adoptate.

Se disting trei moduri de alcătuire a soluţiei (VI.16).

1) Funcţiile $\varphi_i(x, y)$ sînt alese astfel încît fiecare din ele să satisfacă o parte din condiţiile la limită. Ecuaţia cu derivate parţiale (VI.13) nefiind satisfăcută, se determină parametrii c_i din condiţia ca soluţia totală (VI.16) să aproximeze cît mai bine funcţia atît în interiorul domeniului (ariei plăcii), cît şi pe contur.

2) Funcţiile $\varphi_i(x, y)$ sînt alese astfel încît fiecare din ele să satisfacă toate condiţiile la limită. Parametrii c_i se determină din condiţia ca soluţia totală (VI.16) să aproximeze cît mai bine ecuaţia cu derivate parţiale (VI.13).

3) Funcţiile $\varphi_i(x, y)$ sînt alese astfel încît fiecare din ele să satisfacă ecuaţia cu derivate parţiale (VI.13), adică să fie o integrală particulară a ecuaţiei. Condiţiile pe contur nefiind satisfăcute, se determină parametrii c_i din condiţia ca soluţia totală (VI.16) să aproximeze cît mai bine funcţia pe contur.

După condiţiile variaţionale impuse pentru determinarea parametrilor c_i, se disting:

— metoda abaterii pătratice minime;
— metoda ortogonalizării;
— metoda energiei potenţiale minime.

Diferitele metode variaţionale apărute în literatura tehnică şi purtînd numele autorilor (Ritz, Galiorkin, Trefftz) reprezintă procedee particulare ale metodelor generale.

Metode numerice bazate pe discretizarea plăcii. Placa, reprezentînd un mediu continuu cu un număr de grade de libertate infinit, este discretizată, fiind înlocuită cu un sistem static plan avînd un număr de grade de libertate finit.

În metoda diferenţelor finite se alege o reţea de puncte (noduri) şi se exprimă derivatele în funcţie de valorile funcţiei necunoscute în nodurile reţelei. Problema este redusă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice liniare care poate fi rezolvat prin algoritmul lui Gauss, iteraţie, relaxare etc.

Transcrierea relaţiilor diferenţiale în diferenţe finite se poate face prin metoda trapezului, metoda parabolei, metoda parabolelor de grad superior, metoda plurilocală, meto-

da poligonului funicular etc. Pentru detalii vezi monografiile lui Salvadori și Baron [13] și Soare [14].

Metoda elementelor finite este în esență un procedeu prin care placa poate fi aproximată printr-un ansamblu de subregiuni (sau elemente), fiecare cu un număr specificat dar finit de necunoscute. Pe baza exprimării condițiilor de echilibru și a continuității deformațiilor în nodurile elementelor, se ajunge la un sistem de ecuații algebrice care determină valorile necunoscute în punctele nodale.

Metoda colocației. Această metodă ocupă un loc special, fiind situată între metodele variaționale și metoda diferențelor finite.

În prima variantă, se presupune că o soluție de forma (VI. 16) satisface toate condițiile la limită, însă nu satisface ecuația cu derivate parțiale (VI.13). Parametrii $c_i (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ sînt determinați astfel încît soluția (VI.16) să satisfacă ecuația cel puțin în k puncte (distribuite oarecum uniform în interiorul plăcii).

În varianta a doua, se presupune că, în soluția de forma (VI.16), toate funcțiile $\varphi_i(x, y)$ satisfac ecuația (VI.13), însă nu satisfac condițiile pe contur. De aceea se caută să se determine parametrii c_i astfel încît soluția (VI.16) să satisfacă condițiile pe contur în k puncte (distribuite oarecum uniform în lungul conturului).

Metode aproximative. Se bazează pe introducerea unor ipoteze simplificatoare, cum ar fi, de exemplu, împărțirea plăcii în fîșii de grinzi încrucișate și neglijarea influenței momentelor de torsiune (vezi, de exemplu, metodele lui Grashof, Marcus, Guidi, Bach etc.).

Prin apariția calculatoarelor electronice, au devenit posibile calcule oricît de complicate, rezultînd din aplicarea metodelor analitice exacte sau a metodelor numerice. Atunci cînd nu au fost stabilite tabele de valori numerice la dispoziția proiectantului, sînt stabilite programe de calcul la centre specializate.

În paragraful următor sînt exemplificate soluții analitice exacte pentru cazul plăcilor dreptunghiulare, care prezintă interesul cel mai mare.

2.4. Exemple de soluții analitice pentru plăcile dreptunghiulare

2.4.1. Soluții prin polinoame. În continuare se dau trei cazuri particulare.

Încovoierea cilindrică. La plăci de lungime foarte mare (teoretic infinită), la care sarcinile sînt variabile doar pe lățimea plăcii, suprafața mediană deformată este un cilindru. Săgețile și eforturile secționale sînt funcție numai de variabila x (fig. VI.6). Problema se tratează elementar, placa fiind echivalentă cu o serie de fîșii de grinzi. Datorită contracției transversale apar momente M_y.

Ecuația săgeților: $$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{Z(x)}{K}.$$

Momente: $$M_x = -K\frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$M_y = \mu M_x, \quad M_{xy} = M_{yx} \equiv 0.$$

Forțe tăietoare: $$T_x = \frac{dM_x}{dx}, \quad T_y \equiv 0.$$

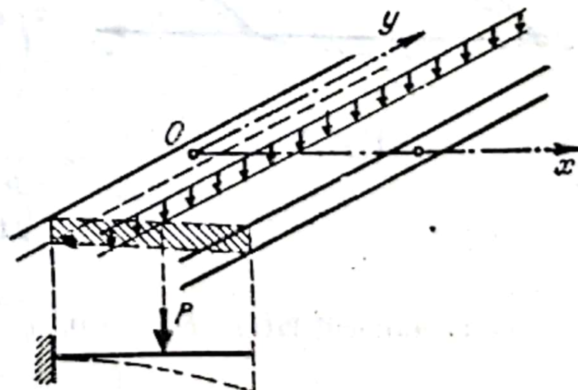


Fig. VI.6

Încovoierea şi torsiunea pură. Dacă pe contur se aplică momente încovoietoare M_1, M_2 şi momente de torsiune $M_{12} = M_{21}$ constante, în orice punct al plăcii se produc doar momente M_1, M_2 şi M_{12}. Suprafaţa mediană deformată este un paraboloid de ecuaţie

$$w(x, y) = -\frac{(M_1 - \mu M_2)\, x^2 + 2M_{12}xy + (M_2 - \mu M_1)\, y^2}{2K(1 - \mu^2)} + 2Dx + 2Ey + F.$$

De remarcat că placa nu poate fi rezemată complet pe cele patru laturi.

Încastrarea elastică în grinzi pe contur. Soluţia

$$w(x, y) = \frac{p}{24\,K} \cdot \frac{a^3b^3}{a^3 + b^3}\left[\frac{x^2(x - a)^2}{a^3} + \frac{y^2(y - b)^2}{b^3}\right]$$

corespunde încărcării plăcii cu sarcina uniform distribuită p (fig.VI.7) în următoarele condiţii [27]:

— tangentele sînt orizontale pe contur;

— momentele de torsiune sînt nule în orice punct al plăcii;

— forţele tăietoare generalizate pe două laturi vecine sînt invers proporţionale cu pătratele laturilor, iar reacţiunile la colţuri invers proporţionale cu cuburile lor, adică:

$$\frac{T_x^*}{T_y^*} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \frac{R_x}{R_y} = \frac{b^3}{a^3};$$

— momentele de inerţie ale grinzilor sînt proporţionale cu puterea a 5-a a lungimii grinzilor, iar săgeţile lor, direct proporţionale cu aceste laturi, adică:

$$\frac{I_a}{I_b} = \frac{a^5}{b^5}; \quad \frac{w_a}{w_b} = \frac{a}{b}.$$

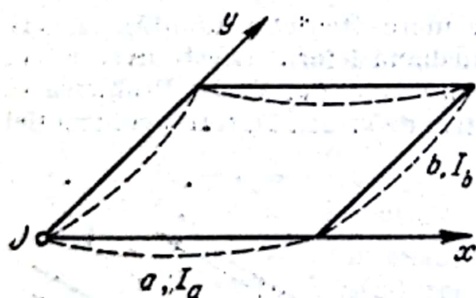


Fig. VI.7

Valori particulare:

— la centru ($x = a/2$, $y = b/2$):

$$w_c = \frac{p}{384\,K} \cdot \frac{a^3b^3(a + b)}{a^3 + b^3}$$

$$M_{xc} = \frac{p}{24} \cdot \frac{a^2b^2(a + \mu b)}{a^3 + b^3},$$

$$M_{yc} = \frac{p}{24} \cdot \frac{a^2b^2(b + \mu a)}{a^3 + b^3};$$

— la mijlocul laturii b ($x = 0$; $y = b/2$): $M_x = -\dfrac{p}{24}\,\dfrac{a^2b^2(2b - \mu a)}{a^3 + b^3}$;

— la mijlocul laturii a ($x = a/2$, $y = 0$): $M_y = -\dfrac{p}{24}\,\dfrac{a^2b^2(2a - \mu b)}{a^3 + b^3}$.

De menționat că o asemenea placă este asimilabilă cu o serie de grinzi încrucișate, fiecare dintre fîșii suportînd o sarcină

$$p_x = p(1-\mu^2)\frac{b^3}{a^3+b^3}, \qquad p_y = p(1-\mu^2)\frac{a^3}{a^3+b^3}.$$

2.4.2. Soluții prin serii duble trigonometrice. Această metodă, datorită lui Navier, se bazează pe faptul că liniile trigonometrice sin, cos se reproduc prin derivare de două ori (mai puțin un factor constant). Metoda este aplicabilă în cazul plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate pe cele patru laturi, cînd condițiile de rezemare sînt satisfăcute prin însăși structura soluției. Axele se aleg ca în fig. VI. 8. Datorită condițiilor de rezemare, soluția omogenă nu intervine.

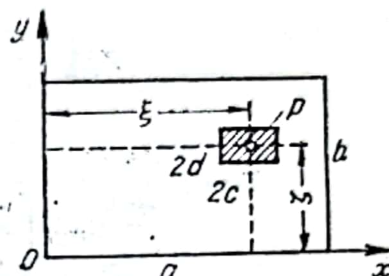


Fig. VI.8

Considerînd încărcarea plăcii $Z(x, y)$ sub formă de serie dublă trigonometrică

$$Z(x,y) = \sum_m \sum_n Z_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{VI.17a}$$

în care

$$Z_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b Z(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy, \tag{VI.17b}$$

se caută o soluție de aceeași formă

$$w(x,y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{VI.18a}$$

Punînd condiția că (VI. 18a) satisface ecuația (VI.13a), se obține

$$w_{mn} = \frac{Z_{mn}}{\pi^4 K}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \tag{VI.18b}$$

Formulele generale pentru mărimile secționale sînt:

$$m_x = \frac{1}{\pi^2 a^2}\sum_m\sum_n Z_{mn}\frac{m^2}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$m_y = \frac{1}{\pi^2 b^2}\sum_m\sum_n Z_{mn}\frac{n^2}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{VI.19}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{1-\mu}{\pi^2 ab}\sum_m\sum_n \frac{Z_{mn}mn}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

și expresii similare pentru T_x, T_y.

Seriile duble trigonometrice sînt slab convergente, în special în cazul sarcinilor distribuite parțial.

Exemple de aplicare

1) Sarcină uniform distribuită parțial (fig. VI.8)

$$Z_{mn} = \frac{16p}{\pi^2} \frac{1}{mn} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi\zeta}{b} \sin\frac{n\pi d}{b}; \qquad \text{(VI.20a)}$$

$$w_{mn} = \frac{16p}{\pi^6 K} \frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi\zeta}{b} \sin\frac{n\pi d}{b}. \qquad \text{(VI.20b)}$$

2) Din cazul precedent se pot deduce expresiile corespunzătoare sarcinii uniform distribuite pe toată placa :

$$\xi = c = \frac{a}{2}, \qquad \zeta = d = \frac{b}{2},$$

$$Z_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \quad (m, n = 1, 3, 5, \ldots). \qquad \text{(VI.21)}$$

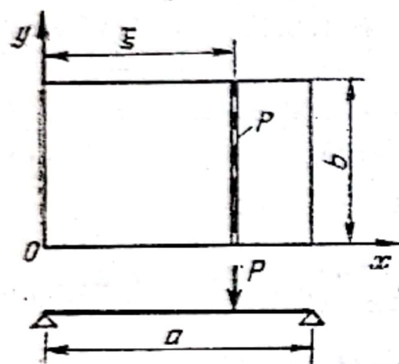


Fig. VI.9

3) Sarcină uniform distribuită liniar paralel cu una din laturi (fig. VI.9).

Se trece la limită în relația (VI.20); de exemplu, pentru sarcina liniară paralelă cu axa Oy la distanța ξ, rezultă :

$$\zeta = d = \frac{b}{2}; \qquad c \to 0; \qquad 2pc \to P;$$

$$w_{mn} = \frac{8P}{\pi^5 Ka} \frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}}{n\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (m = 1, 2, 3, 4, \ldots; n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(VI.22)}$$

Pentru cazul forțelor concentrate vezi cap. 10.

2.4.3. Soluții prin serii simple trigonometrice.

1) Soluția generală este $w = w_p + w_1 + w_2$, în care ca soluție particulară se ia, în cazul absolut general, soluția prin serii duble trigonometrice.

Soluția omogenă constă din suma $\overline{w} = w_1 + w_2$, în care

$$w_1 = \sum_m Y_m \sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{și} \quad w_2 = \sum_n X_n \sin\frac{n\pi y}{b},$$

Y_m și X_n fiind funcții numai de y, respectiv x, care se deduc din condițiile $\Delta\Delta\, w_1 = 0$ și $\Delta\,\Delta\, w_2 = 0$. Rezultă ecuațiile diferențiale

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2\alpha_m^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \alpha_m^4 Y_m = 0, \qquad \left(\alpha_m = \frac{m\pi}{a}\right)$$

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - 2\beta_n^2 \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \beta_n^2 X_n = 0 \qquad \left(\beta_n = \frac{n\pi}{b}\right),$$

cu soluțiile

$$Y_m = w_{mn}[(A_m + B_m\alpha_m y)\,\mathrm{ch}\,\alpha_m y + (C_m + D_m\alpha_m y)\,\mathrm{sh}\,\alpha_m y],$$

$$X_n = w_{mn}[(A'_n + B'_n\beta_n x)\,\mathrm{ch}\,\beta_n x + (C'_n + D'_n\beta_n x)\,\mathrm{sh}\,\beta_n x].$$

$A_m, B_m, C_m, D_m, A'_n, B'_n, C'_n, D'_n$ sînt constante de integrare (pentru fiecare armonică m, respectiv n) iar w_{mn} constanta săgeților din relația (VI. 18).

Soluția totală este:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \sum_m w_{mn}[(A_m + B_m\alpha_m y)\,\mathrm{ch}\,\alpha_m y +$$

$$+ (C_m + D_m\alpha_m y)\,\mathrm{sh}\,\alpha_m y] \sin \alpha_m x + \sum_n w_{mn}[(A'_n + B'_n\beta_n y)\,\mathrm{ch}\,\beta_n x +$$

$$+ (C'_n + D'_n \beta_n x)\,\mathrm{sh}\,\beta_n x] \sin \beta_n y.$$

Fiecare din cele patru laturi impun cîte două condiții pentru determinarea celor opt constante (corespunzător fiecărei armonici m și n).

În cazul în care marginile nu sînt simplu rezemate, problema se complică prin faptul că funcțiile hiperbolice trebuie dezvoltate în serii trigonometrice [9].

În unele cazuri particulare, cele mai interesante în practică, expresiile precedente se simplifică esențial.

2) Dacă două laturi opuse sînt simplu rezemate, unul din termenii soluției omogene dispare; de exemplu, pentru laturile paralele cu axa Oy simplu rezemate, $w_2 = 0$.

3) Dacă sarcinile sînt uniforme pe direcția unei axe, de exemplu Oy, atunci soluția particulară se poate lua ca la încovoierea cilindrică a plăcilor.

4) Dacă două laturi opuse sînt simplu rezemate (de exemplu $x = 0$ și $x = a$), iar sarcinile sînt uniforme după direcția paralelă cu aceste laturi, soluția pentru săgeți se scrie:

$$w(x, y) = w_p(x) + \sum_m w_{mn}[(A_m + B_m\alpha_m y)\,\mathrm{ch}\,\alpha_m y +$$

$$+ (C_m + D_m\alpha_m y)\,\mathrm{sh}\,\alpha_m y] \sin \alpha_m x. \qquad \text{(VI.23)}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare, soluția particulară este pusă sub formă de serie simplă trigonometrică:

$$w_p(x) = \sum_m w_{pm} \sin \alpha_m x = \frac{1}{K} \sum_m \frac{Z_m}{\alpha_m^4} \sin \alpha_m x.$$

Cele patru constante A_m, B_m, C_m, D_m se determină din condițiile de rezemare pe laturile paralele cu axa Ox.

b) Dacă în cazul precedent (4) cele două laturi paralele cu axa Ox au rezemări identice, soluția are forma mai simplă (originea axelor este aleasă la mijlocul unei laturi b, așa cum este exemplificat în fig. VI.10):

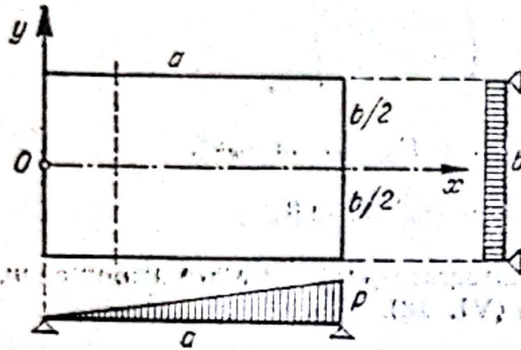


Fig. VI.10

$$B_m = C_m = 0.$$

$$w(x, y) = w_p(x) + \sum_m w_{pm}(A_m \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y) \sin \alpha_m x = \sum_m w_{pm}(1 + A_m \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y) \sin \alpha_m x. \tag{VI.24}$$

Introducînd notația

$$u_m = \frac{\alpha_m b}{2} = \frac{\pi b}{2a} m, \tag{VI. 25}$$

constantele de integrare A_m și D_m au următoarele valori:

— laturile $y = \pm b/2$ simplu rezemate

$$D_m = \frac{1}{2 \operatorname{ch} u_m}; \quad A_m = -2 D_m - \frac{u_m \operatorname{th} u_m}{2 \operatorname{ch} u_m}; \tag{VI. 26a}$$

— laturile $y = \pm b/2$ încastrate perfect

$$D_m = \frac{2 \operatorname{sh} u_m}{2 u_m + \operatorname{sh} 2 u_m}; \quad A_m = -D_m - \frac{2 u_m \operatorname{ch} u_m}{2 u_m + \operatorname{sh} 2 u_m}; \tag{VI.26b}$$

— laturile $y = \pm b/2$ libere

$$D_m = \frac{2\mu \operatorname{sh} u_m}{(3+\mu) \operatorname{sh} 2 u_m - 2(1-\mu) u_m}, \tag{VI.26c}$$

$$A_m = \frac{1+\mu}{1-\mu} D_m - \frac{2\mu\, u_m \operatorname{ch} u_m}{(3+\mu) \operatorname{sh} 2 u_m - 2(1-\mu) u_m}.$$

Momentele încovoietoare şi de torsiune au expresiile :

$$m_x = -K \frac{d^2 w_p}{dx^2} + K \sum_m w_{pm} \alpha_m^2 (A_m \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y) \sin \alpha_m x,$$

$$m_y = -K \sum_m w_{pm} \alpha_m^2 [(A_m + 2D_m) \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y] \sin \alpha_m y, \qquad \text{(VI.27)}$$

$$M_{xy} = -K(1-\mu) \sum_m w_{pm} \alpha_m [(A_m + D_m) \operatorname{sh} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y] \cos \alpha_m x,$$

în care A_m, D_m au valorile determinate de relaţia (VI. 26).

2.3.4. **Soluţii prin serii de funcţii fundamentale.** Se pot căuta soluţii de forma :

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} U(\alpha_m x) \cdot V(\beta_n y),$$

în care U, V reprezintă funcţii fundamentale, de forma

$$U(\alpha x) = C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x;$$

α_m, β_n $(m, n) = 1, 2, 3, \ldots)$ sînt valori proprii rezultînd dintr-o ecuaţie caracteristică, corespunzător modului de rezemare la două capete opuse.

P. Lardy [26] a demonstrat pentru cazul plăcii încastrate perfect pe contur că determinarea constantelor c_{mn} revine la rezolvarea unui sistem de ecuaţii infinit, însă rapid convergent.

2.4.5. **Soluţii prin serii simple hiperbolice.** Soluţia omogenă se ia, ca şi în cazul seriilor simple trigonometrice, tot de forma $\overline{w} = w_1 + w_2$, în care

$$w_1 = \sum_m Y_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{a} \quad \text{şi} \quad w_2 = \sum_n X_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{b},$$

Y_m şi X_n fiind funcţii numai de y, respectiv x, care se deduc din condiţiile $\Delta\Delta\, w_1 = 0$ şi $\Delta\Delta\, w_2 = 0$. Soluţiile sînt :

$$Y_m = w_{mn} [(A_m + B_m \alpha_m y) \cos \alpha_m y + (C_m + D_m \alpha_m y) \sin \alpha_m y],$$

$$X_n = w_{mn} [(A_n' + B_n' \beta_n x) \cos \beta_n x + (C_n' + D_n' \beta_n x) \sin \beta_n x].$$

Problema prezintă greutăţi de aplicare la scrierea condiţiilor marginale.

2.5. Metode variaţionale şi metode numerice

2.5.1. **Metoda abaterii pătratice minime.** Considerind pentru săgeţile w o expresie de forma (VI. 16), ecuaţia (VI. 13) nu mai este satisfăcută riguros ; se notează cu Φ^* abaterea de la zero a operatorului diferenţial

$$\Phi^* = \Delta\Delta\, w^* - \frac{Z}{K} = \sum c_i \Delta\Delta\, \varphi_i - \frac{Z}{K}. \qquad \text{(VI.28)}$$

Condiţia abaterii minime pătratice a operatorului Φ^* se scrie

$$\iint \Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial c_i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k). \tag{VI.29}$$

Parametrii c_i rezultă din sistemul de ecuaţii canonice

$$\sum_{j=1}^{k} c_i \delta_{ij} + \Delta_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k), \tag{VI.30}$$

în care

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \iint \Delta\Delta \varphi_i \cdot \Delta\Delta\varphi_j \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Delta_{ip} = \iint Z \varphi_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{VI.31}$$

2.5.2. **Metoda ortogonalizării (metoda Galiorkin).** Dacă se exprimă că funcţiile φ_i din relaţia (VI.16) sînt ortogonale operatorului Φ^* dat de relaţia (VI. 28), adică

$$\iint \Phi^* \varphi_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{VI.32}$$

parametrii c_i sînt daţi de acelaşi sistem (VI.30), în care însă coeficienţii au expresiile

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \iint \varphi_i \cdot \Delta\Delta\varphi_j \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\Delta_{ip} = \int Z \varphi_i \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{VI.33}$$

Observînd că operatorul Φ^*, ca parte stîngă a ecuaţiei de echilibru, reprezintă rezultanta tuturor forţelor exterioare şi ale eforturilor interioare aplicate unui element şi considerînd că $\varphi_i(x, y)$ reprezintă deplasarea virtuală a acestui element, condiţia (VI.32) exprimă în mod aproximativ faptul că lucrul mecanic al întregii structuri care efectuează deplasările virtuale φ_i este egal cu zero.

2.5.3. **Metoda energiei potenţiale minime.** Luînd aproximativ pentru săgeţi expresia (VI.16) şi exprimînd că parametrii c_i iau valori care minimează energia potenţială totală a plăcii

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0, \tag{VI.34}$$

rezultă sistemul de ecuaţii canonice (VI. 30), în care coeficienţii sînt daţi de relaţiile

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = K \iint \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy, \qquad \text{(VI.35)}$$

$$\Delta_{ip} = - \iint Z \varphi_i \, dx \cdot dy.$$

2.5.4. **Metoda Trefftz.** În această metodă care dă aproximaţii prin lipsă, expresia săgeţilor se ia de forma

$$w^* = \varphi_p(x, y) + \sum c_i \overline{\varphi}_i(x, y), \qquad \text{(VI.36)}$$

în care φ_p este o soluţie particulară, iar $\overline{\varphi}_i$ soluţii ale ecuaţiei omogene.

Utilizînd procedeul ortogonalizării, se impune ca derivatele parţiale ale lui Φ^* în raport cu fiecare variabilă independentă x şi y să fie ortogonale la ele înşile în interiorul domeniului plăcii şi adunînd apoi cele două relaţii, rezultă

$$\iint \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Diferenţiind în raport cu parametrul c_i rezultă

$$\iint \left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0; \qquad \text{(VI.37)}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots k$, ecuaţiile (VI. 37) constituie sistemul de ecuaţii canonice (VI.30) în care însă coeficienţii au următoarele expresii:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \iint \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

(VI.38)

$$\Delta_{ip} = \iint \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

2.5.5. **Metoda diferențelor finite.** În planul median se trasează o rețea de puncte cu ochiuri dreptunghiulare $\Delta x \cdot \Delta y$, numerotarea nodurilor făcîndu-se ca în fig. VI.11, *a*. Derivatele de diferite ordine sînt înlocuite prin diferențe finite. Admițînd că, între trei

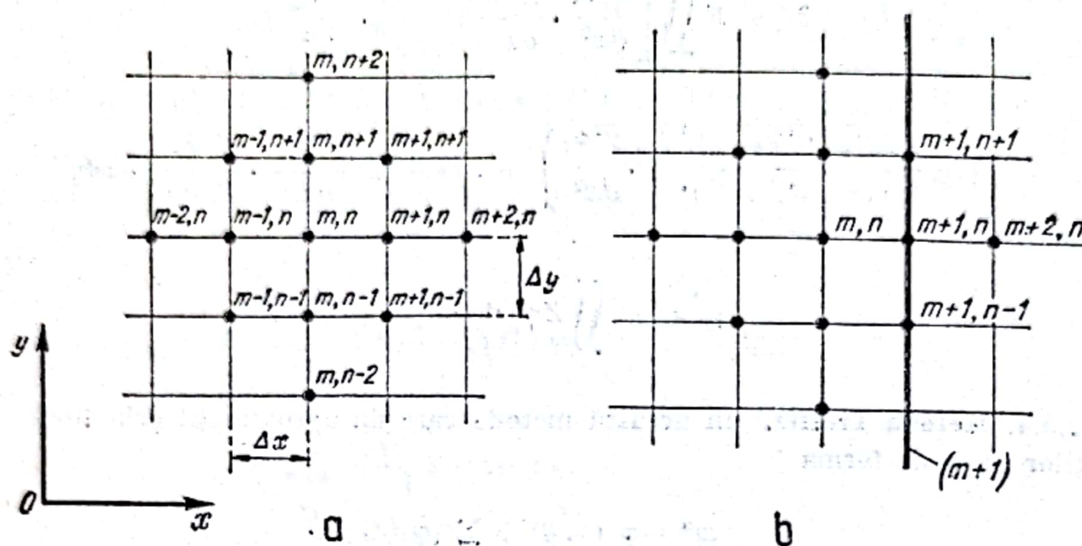


Fig. VI.11

puncte consecutive, funcția necunoscută are o variație parabolică, derivatele pînă la ordinul patru se scriu:

$$\frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x}(w_{m+1,n} - w_{m-1,n}),$$

$$\frac{\partial w_{m,n}}{\partial y} \approx \frac{1}{2\Delta y}(w_{m,n+1} - w_{m,n-1});$$

$$\frac{\partial^2 w_{m,n}}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}),$$

$$\frac{\partial^2 w_{m,n}}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}),$$

$$\frac{\partial^2 w_{m,n}}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta y}(w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1})$$

$$\frac{\partial^4 w_{m,n}}{\partial x^4} \approx \frac{1}{(\Delta x)^4}(w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}),$$

$$\frac{\partial^4 w_{m,n}}{\partial y^4} \approx \frac{1}{(\Delta y)^4}(w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}),$$

$$\frac{\partial^4 w_{m,n}}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta x\, \Delta y)^2}\, [w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1} -$$

$$- 2(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) + 4w_{m,n}].$$

Transcrind în diferenţe finite ecuaţia (VI. 13a), pentru nodul m, n şi cu notaţia

$$\varkappa = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2,$$

se obţine ecuaţia algebrică liniară

$$\left[6\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) + 8\right] w_{m,n} - 4\left[(1+\varkappa)(w_{m+1,n} + w_{m-1,n}) + \left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right)(w_{m,n+1} +\right.$$

$$\left. + w_{m,n-1})\right] + 2(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}) +$$

$$+ \varkappa(w_{m+2,n} + w_{m-2,n}) + \frac{1}{\varkappa}(w_{m,n+2} + w_{m,n-2}) =$$

$$= \frac{\varkappa Z_{m,n}(\Delta x)^4}{K} = \frac{Z_{m,n}(\Delta y)^4}{\varkappa K}. \qquad \text{(VI.39a)}$$

Dacă ochiurile reţelei sînt pătrate ($\Delta x = \Delta y = \Delta$, $\varkappa = 1$) şi ecuaţia (VI.39 a) devine:

$$20w_{m,n} - 8(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} +$$

$$+ w_{m,n-1}) - 2(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} +$$

$$+ w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}) + w_{m+2,n} + w_{m-2,n} +$$

$$+ w_{m,n+2} + w_{m,n-2} = \frac{Z_{m,n}\Delta^4}{K}. \qquad \text{(VI.39b)}$$

Coeficienţii necunoscutelor w din ecuaţia (VI.39 b) sînt reprezentanţi în fig. VI.12.

Ecuaţia de tipul (VI.39) este scrisă pentru toate punctele interioare ale reţelei. În aceste ecuaţii intervin şi valori ale lui w în puncte situate pe contur sau din exteriorul plăcii. Acestea se deduc din condiţiile la limită (fig. VI.11, *b*); de exemplu;

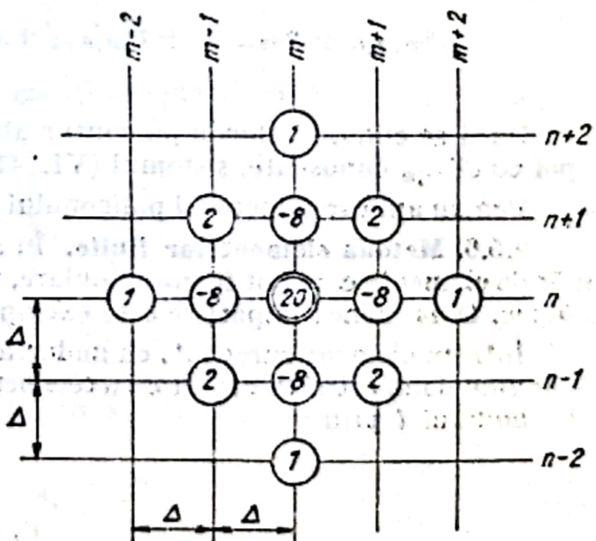


Fig. VI.12

— pentru latura $m+1$ simplu rezemată

$$w_{m+1,n}=0,\qquad w_{m+2,n}=-w_{m,n}\qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

— pentru latura $m+1$ încastrată perfect

$$w_{m+1,n}=0,\qquad w_{m+2,n}=+w_{m,n}\qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

— pentru latura $m+1$ liberă se exprimă că $M_{x,m+1,n}$ şi $T_{x,m+1,n}$ sînt nuli.

Se obţine astfel un sistem de ecuaţii liniare cu necunoscutele $w_{m,n}$ în punctele interioare.

Mărimile secţionale relative la nodul m, n se deduc tot prin aplicarea diferenţelor, presupunînd cunoscute valorile $w_{m,n}$. De exemplu:

$$M_{x,m,n}\approx-\frac{K}{(\Delta x)^2}\left[2\left(1+\frac{\mu}{\varkappa}\right)w_{m,n}+(w_{m+1,n}+w_{m-1,n})+\frac{\mu}{\varkappa}(w_{m,n+1}+w_{m,n-1})\right].$$

Sistemul de ecuaţii poate fi rezolvat prin iteraţie, relaxare etc. (vezi de exemplu Salvadori şi Baron [13]).

Un alt procedeu constă în a pleca de la sistemul (VI.11), care se scrie prin aplicarea diferenţelor finite:

$$2(1+\varkappa)\,\mathfrak{M}_{m,n}-\varkappa(\mathfrak{M}_{m+1,n}+\mathfrak{M}_{m-1,n})-(\mathfrak{M}_{m,n+1}+\mathfrak{M}_{m,n-1})=\varkappa Z_{m,n}(\Delta x)^2,\qquad\text{(VI.40a)}$$

$$2(1+\varkappa)\,w_{m,n}-\varkappa(w_{m+1,n}+w_{m-1,n})-(w_{m,n+1}+w_{m,n-1})=\frac{\varkappa(\Delta x)^2}{K}\,\mathfrak{M}_{m,n}.\qquad\text{(VI.40b)}$$

Dacă ochiurile reţelei sînt pătrate ($\Delta x=\Delta y=\Delta,\ \varkappa=1$), ecuaţiile (VI. 36) devin:

$$\mathfrak{M}_{m+1,n}+\mathfrak{M}_{m-1,n}+\mathfrak{M}_{m,n+1}+\mathfrak{M}_{m,n-1}-4\mathfrak{M}_{m,n}=-Z_{m,n}\Delta^2,\qquad\text{(VI.41a)}$$

$$w_{m+1,n}+w_{m-1,n}+w_{m,n+1}+w_{m,n-1}-4w_{m,n}=\frac{\mathfrak{M}_{m,n}\Delta^2}{K}.\qquad\text{(VI.41b)}$$

Dacă se cunosc valorile pe contur ale lui $\mathfrak{M}$, se studiază separat sistemul (IV. 41a) apoi cu $\mathfrak{M}_{m,n}$ cunoscute, sistemul (VI. 41b).

Pentru aplicarea metodei poligonului funicular, şi metodei plurilocale, vezi Soare [14].

2.5.6. Metoda elementelor finite. În această metodă, placa este separată într-un număr de elemente care pot fi triunghiulare, patrulatere etc., legate între ele doar în punctele nodale. O asemenea împărţire este exemplificată în fig. VI. 13 [16].

Într-un element curent A, cu nodurile i, j, k, l, fiecare nod are trei grade de libertate, şi anume două rotiri în raport cu axele perpendiculare x şi y şi săgeata w. Notînd deplasările nodului i prin

$$u_i=\begin{bmatrix}\theta_{xi}\\ \theta_{yi}\\ w_i\end{bmatrix},$$

deplasările celor patru noduri ale elementelui finit A constituie matricea

$$u^A = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_i \end{bmatrix}.$$

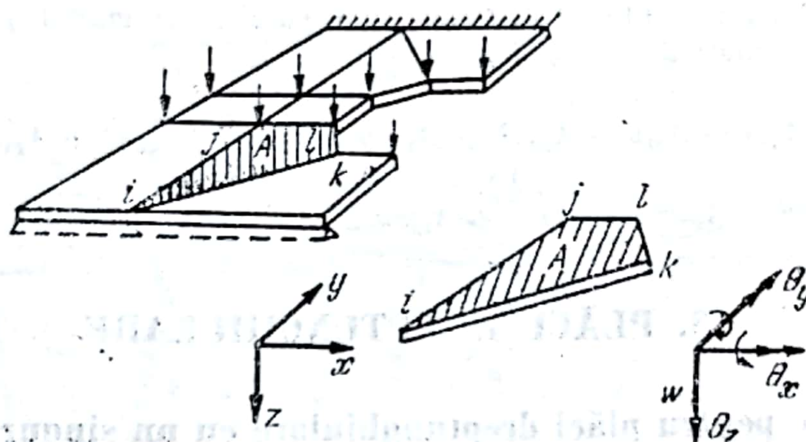


Fig. VI.13

În mod analog, forțele de legătură în fiecare nod sînt două momente concentrate și o forță concentrată dirijată în jos

$$F_i = \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ P_i \end{bmatrix};$$

pentru elementul finit considerat, forțele nodale constituie matricea

$$\mathbf{F}^A = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_l \end{bmatrix}.$$

Forțele nodale sînt niște concepte matematice, reprezentînd cîte un echivalent static al momentelor și forțelor tăietoare acționînd în lungul laturilor fiecărui element. Se poate scrie

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{K}^A \mathbf{u}^A,$$

în care $\mathbf{K}^A$ reprezintă o matrice de rigiditate a elementului A (compusă din 12×12 elemente).

Mai departe se scrie matricea tuturor forțelor nodale exterioare **N** și matricea deplasărilor **u**; ele sînt legate prin relația

$$\mathbf{N} = \mathbf{S}\mathbf{u}$$

în care **S** este matricea de rigiditate a întregii plăci.

Procedura descrisă sumar mai înainte comportă o serie de operații care se pretează la programare la un calculator electronic. Pentru detalii a se vedea [16].

Săgețile w sînt reprezentate sub forma unui polinom de gradul patru, avînd 12 coeficienți nedeterminați:

$$w = A_0 + A_{10}x + A_{01}y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 + A_{30}x^3 + A_{21}x^2y +$$
$$+ A_{12}xy^2 + A_{03}y^3 + A_{31}x^3y + A_{13}xy^3.$$

3. PLĂCI DREPTUNGHIULARE

3.1. Tabele pentru plăci dreptunghiulare cu un singur cîmp

În tabelele VI.1—VI.43 se dau valori numerice pentru calculul momentelor încovoietoare, momentelor de torsiune, forțelor tăietoare și săgeților, la plăci dreptunghiulare cu diferite condiții de rezemare și cazuri de încărcare.

Structura formulelor este următoarea:

$$M_x = m_x + \mu m_y; \quad M_y = m_y + \mu m_x,$$

$$m_x = \frac{1}{k_1} pa^2; \quad m_y = \frac{1}{k_2} pa^2;$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{1}{k_3}(1 - \mu)\, pa^2;$$

$$T_x, T_x^* = \frac{1}{k_4} pa, \quad T_y, T_y^* = \frac{1}{k_5} pa,$$

$$R_{1,2} = \frac{2}{k_3}(1 - \mu)\, pa; \quad w = k_0(1 - \mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3};$$

Coeficienţii numerici se citesc în tabele în funcţie de raportul laturilor $b/a = 1{,}00 \ldots 2{,}00$ (a = latura scurtă, b = latura lungă a plăcii); coeficienţii k_0, k_1, k_2, k_3 sînt independenţi de coeficientul de contracţie transversală, astfel încît mărimile corespunzătoare pot fi calculate pentru orice valoare a lui μ. Pentru k_4, k_5 s-a considerat $\mu = 0$, ceea ce introduce o eroare neglijabilă a mărimilor corespunzătoare, în cazul cînd $\mu \neq 0$.

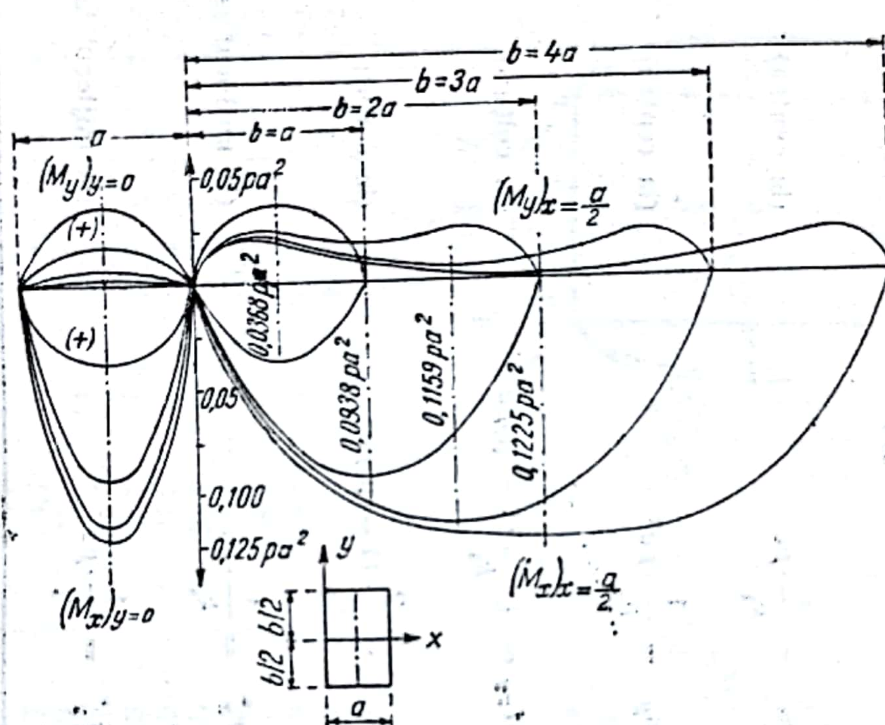


Fig. VI.14

Punctele în care sînt calculate mărimile statice sînt reprezentate în figurile care însoţesc fiecare tabel, iar coeficientul numeric citit capătă un indice corespunzător.

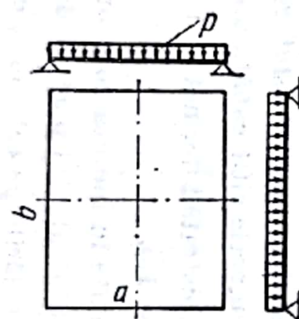
Variaţia mărimilor secţionale este ilustrată informativ în figurile din tabelele VI.1 — — VI. 12 pentru cazul particular $b/a = 1{,}5$.

Tabelele VI.1 — VI.43 sînt calculate în ipoteza comportării perfect elastice a unui material izotrop; ele pot fi utilizate şi la calculul plăcilor de beton armat (aşa-numitele plăci armate cruciş), atîta vreme cît armările pe cele două direcţii nu sînt prea diferite, astfel încît să fie necesară considerarea anizotropiei sau ortotropiei (v. cap. 9).

Teoria exactă trebuie aplicată pentru rapoarte ale laturilor $0{,}50 \leqslant b/a \leqslant 2{,}0$. În afara acestui interval, placa — dacă este rezemată convenabil — lucrează aproape exclusiv după direcţia laturii scurte (fig. VI.14).

Tabelul VI.1

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd patru laturi simplu rezemate



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3} \qquad \text{(la centru)}$$

$$m_x = \frac{1}{k_1}\cdot pa^2 \qquad \text{(la centru)}$$

$$m_y = \frac{1}{k_2}\cdot pa^2 \qquad \text{(la centru)}$$

$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1-\mu)pa^2 \qquad \text{(la colţuri)}$$

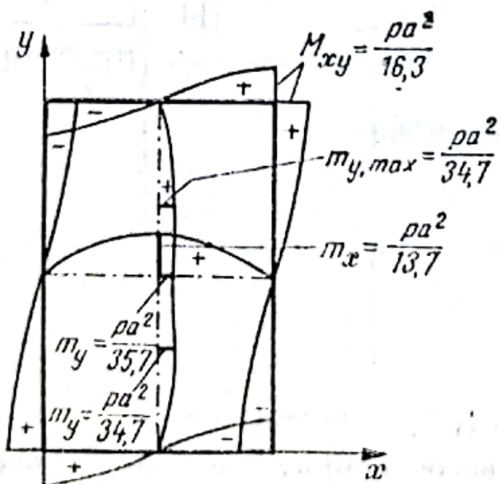
$$R = \frac{2}{k_3}(1-\mu)pa^2 \qquad \text{(la colţuri)}$$

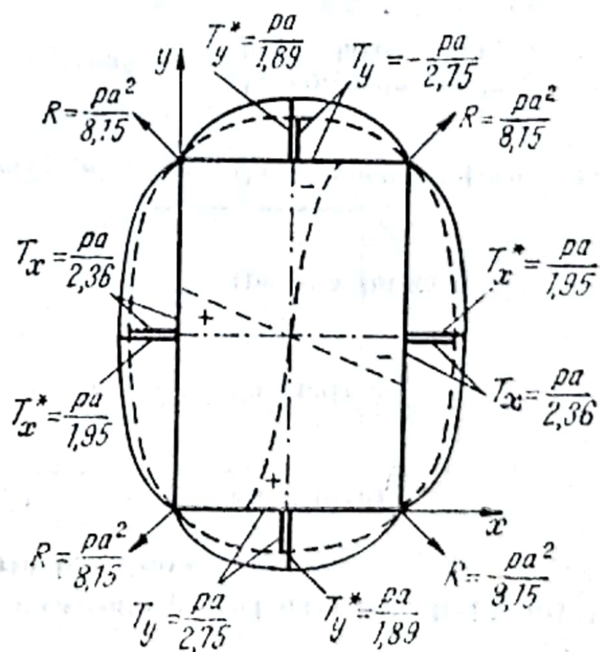
$$T_x^* = \frac{1}{k_4}\cdot pa \qquad \text{(la mijlocul laturilor } b\text{)}$$

$$T_y^* = \frac{1}{k_5}\cdot pa \qquad \text{(la mijlocul laturilor } a\text{)}$$

b/a	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1,00	0,0487	27,2	27,2	21,6	2,19	2,19
1,05	0,0536	24,5	27,5	20,6	2,15	2,14
1,10	0,0584	22,4	27,9	19,7	2,11	2,09

1,15	0,0631	20,7	28,4	19,0	2,07	2,05
1,20	0,0678	19,1	29,1	18,4	2,04	2,02
1,25	0,0728	17,8	29,9	17,9	2,02	1,99
1,30	0,0767	16,8	30,9	17,5	2,00	1,96
1,35	0,0809	15,8	31,8	17,1	1,98	1,94
1,40	0,0850	15,0	32,8	16,8	1,97	1,92
1,45	0,0890	14,3	33,8	16,5	1,96	1,90
1,50	0,0927	13,7	34,7	16,3	1,95	1,89
1,55	0,0963	13,2	35,4	16,1	1,94	1,88
1,60	0,0997	12,7	36,1	15,9	1,93	1,87
1,65	0,1029	12,3	36,7	15,7	1,92	1,86
1,70	0,1060	11,9	37,3	15,6	1,92	1,85
1,75	0,1093	11,5	37,9	15,5	1,92	1,84
1,80	0,1118	11,3	38,5	15,4	1,92	1,83
1,85	0,1145	11,0	38,9	15,3	1,92	1,82
1,90	0,1169	10,8	39,4	15,3	1,92	1,82
1,95	0,1195	10,6	39,8	15,2	1,92	1,82
2,00	0,1215	10,4	40,3	15,1	1,92	1,82

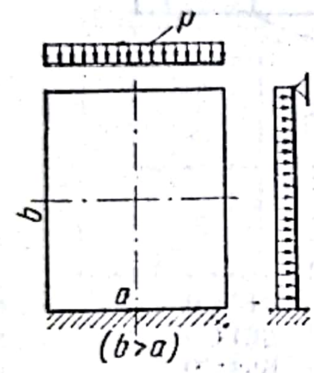




Tabelul VI.2

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd o latură încastrată perfect şi celelalte trei laturi simplu rezemate

A. O latură scurtă încastrată



$w = k_0(1-\mu^2)\dfrac{pa^4}{E\delta^3}$ (la centru)

$m_x = \dfrac{1}{k_1}\cdot pa^2$ (la centru)

$m_{y,\,max} = \dfrac{1}{k_2}\cdot pa^2$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$m_y = -\dfrac{1}{k_2'}\cdot pa^2$ (la mijlocul laturii încastrate)

$M_{xy} = \pm\dfrac{1}{k_3}(1-\mu)pa^2$ (la colţurile unde se întîlnesc două laturi simplu rezemate)

$R = \dfrac{2}{k_3}(1-\mu)pa^2$ (la colţurile unde se întîlnesc două laturi simplu rezemate)

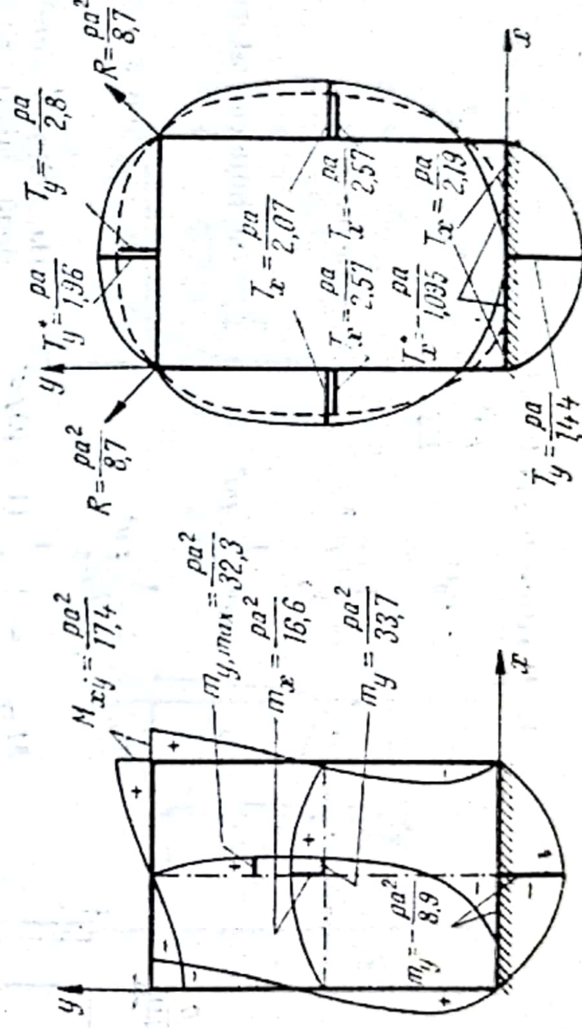
$T_x^* = \dfrac{1}{k_4}\cdot pa$ (la mijlocul laturilor b)

$T_y^* = \dfrac{1}{k_5}\cdot pa$ (la mijlocul laturii a simplu rezemate)

$T_y = \dfrac{1}{k_5'}\cdot pa$ (la mijlocul laturii încastrate)

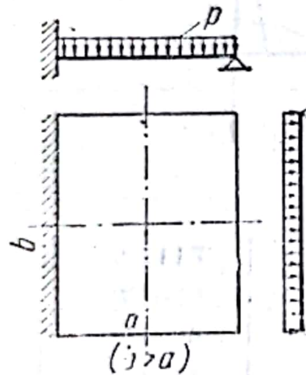
b/a	k_0	k_1	k_2	k_2'	k_3	k_4	k_5	k_5'
1,00	0,0334	41,2	29,4	11,9	26,2	2,59	2,47	1,72
1,05	0,0378	36,5	29,0	11,3	24,5	2,49	2,38	1,67
1,10	0,0422	31,9	28,8	10,9	23,2	2,42	2,29	1,63

1,15	0,0467	28,3	28,8	10,4	21,9	2,34	2,23	1,59
1,20	0,0512	25,9	28,9	10,1	21,0	2,29	2,17	1,56
1,25	0,0557	23,4	29,2	9,8	20,1	2,23	2,12	1,53
1,30	0,0602	21,7	29,7	9,6	19,4	2,19	2,08	1,51
1,35	0,0645	20,1	30,2	9,3	18,7	2,15	2,04	1,49
1,40	0,0689	18,8	30,8	9,2	18,3	2,12	2,01	1,47
1,45	0,0731	17,5	31,6	9,0	17,7	2,09	1,98	1,45
1,50	0,0773	16,6	32,3	8,9	17,4	2,07	1,96	1,44
1,55	0,0815	15,7	33,0	8,8	17,0	2,05	1,94	1,43
1,60	0,0852	15,0	33,6	8,7	16,8	2,03	1,92	1,42
1,65	0,0892	14,3	34,3	8,6	16,5	2,01	1,90	1,41
1,70	0,0926	13,8	34,9	8,5	16,3	1,99	1,89	1,40
1,75	0,0962	13,2	35,6	8,45	16,1	1,98	1,88	1,39
1,80	0,0994	12,8	36,2	8,4	15,9	1,97	1,87	1,39
1,85	0,1027	12,3	36,9	8,35	15,7	1,96	1,86	1,38
1,90	0,1056	12,0	37,5	8,3	15,6	1,96	1,85	1,38
1,95	0,1085	11,6	38,2	8,25	15,5	1,95	1,84	1,37
2,00	0,1112	11,4	38,8	8,2	15,4	1,95	1,84	1,37



Tabelul VI.2 (continuare)

B. O latură lungă încastrată



$w = k_0(1-\mu^2)\dfrac{pa^4}{E\delta^3}$ (la centru)

$m_x = \dfrac{1}{k_1}\cdot pa^2$ (la centru)

$m_x = -\dfrac{1}{k_1'}\cdot pa^2$ (la mijlocul laturii încastrate)

$m_{y,\,max} = \dfrac{1}{k_2}\, pa^2$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$M_{xy} = \pm\dfrac{1}{k_3}(1-\mu)pa^2$ (la colțurile unde se întîlnesc două laturi simplu rezemate)

$R = \dfrac{2}{k_3}(1-\mu)pa^2$ (la colțurile unde se întîlnesc două laturi simplu rezemate)

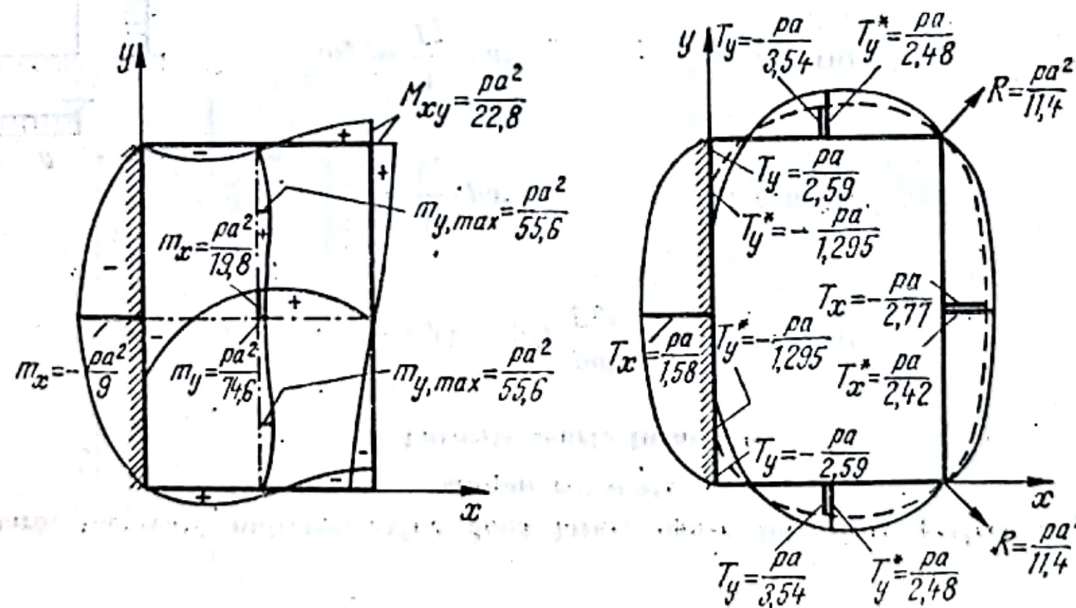
$T_x = \dfrac{1}{k_4}\, pa$ (la mijlocul laturii încastrate)

$T_x^* = \dfrac{1}{k_4'}\cdot pa$ (la mijlocul laturii b simplu rezemate)

$T_y^* = \dfrac{1}{k_5}\, pa$ (la mijlocul laturilor a)

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_3	k_4	k_4'	k_5
1,00	0,0334	31,4	11,9	41,2	26,2	1,72	2,47	2,59
1,05	0,0357	29,2	11,3	43,2	25,4	1,69	2,44	2,56
1,10	0,0380	27,3	10,9	45,1	24,9	1,67	2,42	2,54

1,15	0,0401	25,8	10,5	47,1	24,4	1,65	2,41	2,52
1,20	0,0420	24,5	10,2	48,8	24,0	1,63	2,41	2,51
1,25	0,0438	23,4	9,9	50,3	23,7	1,62	2,40	2,50
1,30	0,0455	22,4	9,7	51,8	23,5	1,61	2,40	2,50
1,35	0,0472	21,6	9,4	53,2	23,2	1,60	2,40	2,49
1,40	0,0485	21,0	9,3	54,3	23,0	1,59	2,41	2,49
1,45	0,0498	20,3	9,1	55,0	22,9	1,58	2,41	2,48
1,50	0,0510	19,8	9,0	55,6	22,8	1,58	2,42	2,48
1,55	0,0521	19,4	8,9	56,2	22,7	1,57	2,42	2,47
1,60	0,0531	19,0	8,8	56,8	22,6	1,57	2,43	2,47
1,65	0,0541	18,6	8,7	57,3	22,5	1,57	2,43	2,47
1,70	0,0549	18,3	8,6	57,8	22,5	1,57	2,44	2,47
1,75	0,0556	18,0	8,5	58,2	22,4	1,57	2,45	2,47
1,80	0,0562	17,8	8,4	58,6	22,4	1,57	2,46	2,47
1,85	0,0569	17,5	8,3	58,8	22,4	1,57	2,47	2,47
1,90	0,0575	17,4	8,3	59,0	22,4	1,57	2,49	2,47
1,95	0,0580	17,2	8,3	59,1	22,4	1,57	2,49	2,47
2,00	0,0585	17,1	8,3	59,2	22,4	1,57	2,50	2,47



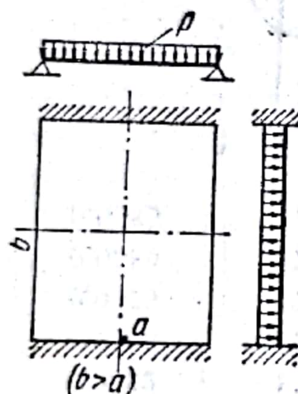
Tabelul VI.3

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd două laturi opuse încastrate perfect și celelalte două laturi simplu rezemate

A. Laturile scurte încastrate

$$w = k_0(1 - \mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}\cdot pa^2$$ (la centru)



$$m_y = \frac{1}{k_2}\cdot pa^2$$ (la centru)

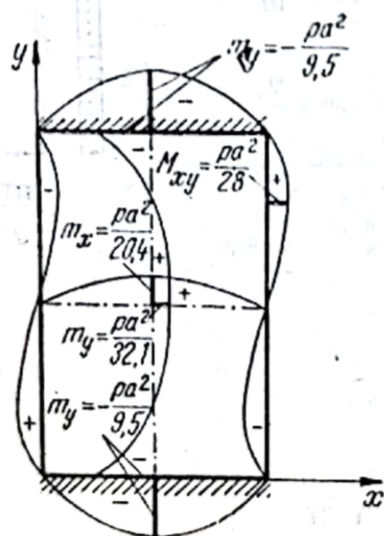
$$m_y' = -\frac{1}{k_2'}\cdot pa^2$$ (la mijlocul laturilor încastrate)

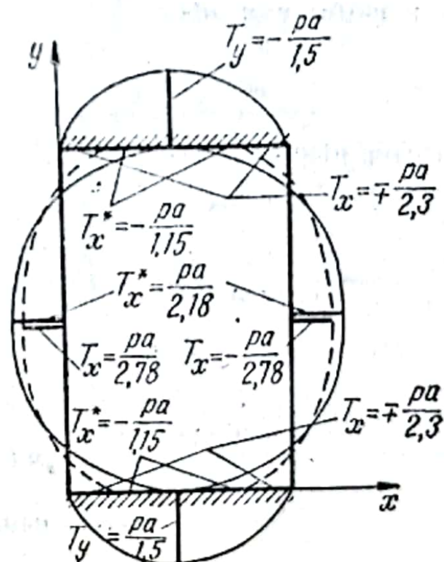
$$T_x^* = \frac{1}{k_4}\,pa$$ (la mijlocul laturilor simplu rezemate)

$$T_y^* = \pm\frac{1}{k_5}\cdot pa$$ (la mijlocul laturilor încastrate)

b/a	k_0	k_1	k_2	k_2'	k_4	k_5
1,00	0,0230	63,3	35,1	14,3	2,95	1,94
1,05	0,0266	52,2	33,7	13,4	2,82	1,86
1,10	0,0303	46,1	32,9	12,7	2,71	1,80
1,15	0,0343	39,8	32,2	12,0	2,60	1,74

1,20	0,0383	35,5	31,7	11,5	2,52	1,69
1,25	0,0425	31,5	31,3	11,1	2,44	1,65
1,30	0,0467	28,5	31,2	10,7	2,38	1,61
1,35	0,0510	25,8	31,2	10,3	2,32	1,58
1,40	0,0553	23,7	31,4	10,0	2,27	1,55
1,45	0,0596	22,0	31,7	9,75	2,22	1,52
1,50	0,0639	20,4	32,1	9,5	2,18	1,50
1,55	0,0681	19,0	32,7	9,3	2,14	1,47
1,60	0,0722	17,9	33,3	9,2	2,11	1,46
1,65	0,0762	16,9	34,0	9,05	2,09	1,44
1,70	0,0802	16,0	34,9	8,9	2,07	1,43
1,75	0,0840	15,2	35,9	8,8	2,05	1,42
1,80	0,0878	14,6	37,1	8,7	2,03	1,41
1,85	0,0914	13,9	38,3	8,6	2,01	1,40
1,90	0,0949	13,4	39,7	8,5	2,00	1,40
1,95	0,0982	12,9	41,1	8,4	1,99	1,39
2,00	0,1013	12,5	42,4	8,4	1,98	1,39





Tabelul VI.3 (continuare)

B. Laturile lungi încastrate

$$w = k_0(1-\mu^2)\cdot\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

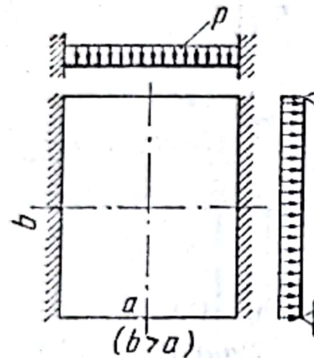
$$m_x = \frac{1}{k_1}\cdot pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}\cdot pa^2$$ (la mijlocul laturilor încastrate)

$$m_{y,\,max} = \frac{1}{k_2}\cdot pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

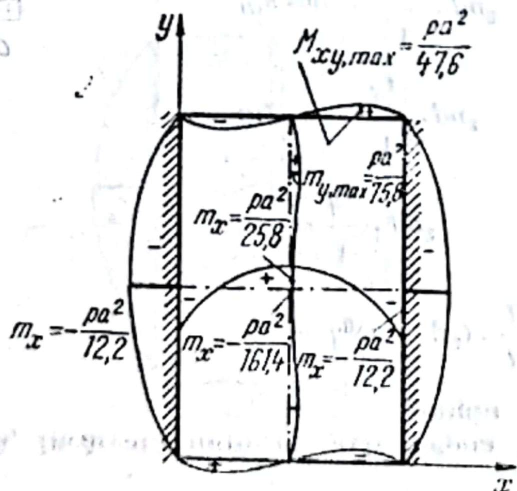
$$T_x = \pm\frac{1}{k_4}\cdot pa$$ (la mijlocul laturilor încastrate)

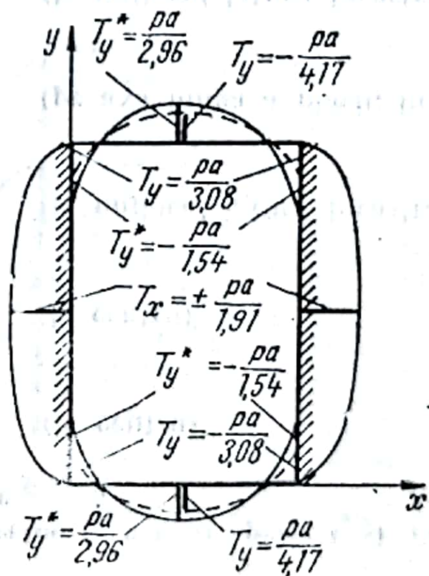
$$T_x^* = \frac{1}{k_5}\cdot pa$$ (la mijlocul laturilor simplu rezemate)



b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_4	k_5
1,00	0,0230	35,1	14,3	61,7	1,94	2,95
1,05	0,0241	33,0	13,8	64,5	1,92	2,95
1,10	0,0251	31,7	13,5	67,2	1,91	2,95
1,15	0,0260	30,4	13,2	69,6	1,90	2,95
1,20	0,0267	29,4	13,0	71,5	1,90	2,95
1,25	0,0275	28,5	12,7	72,8	1,90	2,95
1,30	0,0280	27,8	12,6	73,5	1,90	2,95

1,35	0,0285	27,1	12,4	74,1	1,90	2,95
1,40	0,0289	26,6	12,3	74,6	1,90	2,95
1,45	0,0293	26,1	12,2	75,3	1,90	2,95
1,50	0,0297	25,8	12,2	75,8	1,91	2,96
1,55	0,0300	25,4	12,1	76,5	1,91	2,96
1,60	0,0302	25,2	12,0	77,0	1,92	2,96
1,65	0,0305	24,9	12,0	77,0	1,92	2,96
1,70	0,0307	24,7	12,0	77,0	1,93	2,96
1,75	0,0308	24,5	12,0	77,0	1,93	2,96
1,80	0,0309	24,4	12,0	77,0	1,94	2,97
1,85	0,0310	24,3	12,0	77,0	1,94	2,97
1,90	0,0311	24,3	12,0	77,0	1,95	2,97
1,95	0,0312	24,2	12,0	77,0	1,95	2,97
2,00	0.0313	24,1	12,0	77,0	1,95	2,97





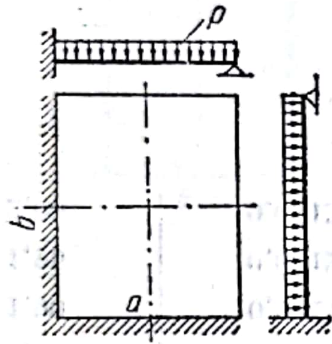
Tabelul VI.4

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd două laturi vecine încastrate perfect și celelalte două laturi simplu rezemate

$$w = k_0(1 - \mu^2) \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1} \cdot pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'} \cdot pa^2$$ (la mijlocul laturii încastrate *b*)



$$m_{y,max} = \frac{1}{k_2} \cdot pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'} pa^2$$ (la mijlocul laturii încastrate *a*)

$$T_x = \frac{1}{k_4} \cdot pa$$ (la mijlocul laturii încastrate *b*)

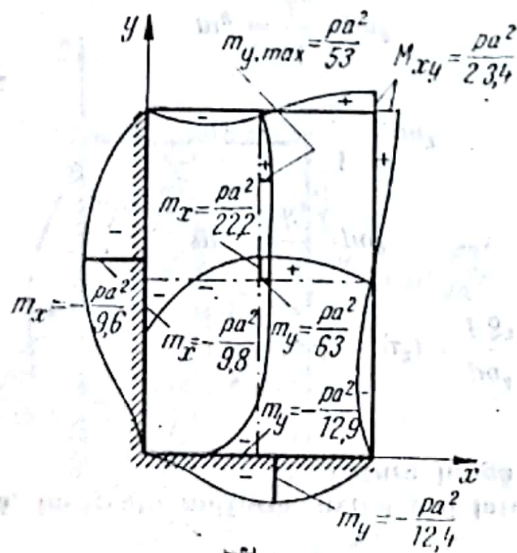
$$T_x^* = \frac{1}{k_4'} \cdot pa$$ (la mijlocul laturii simplu rezemate *b*)

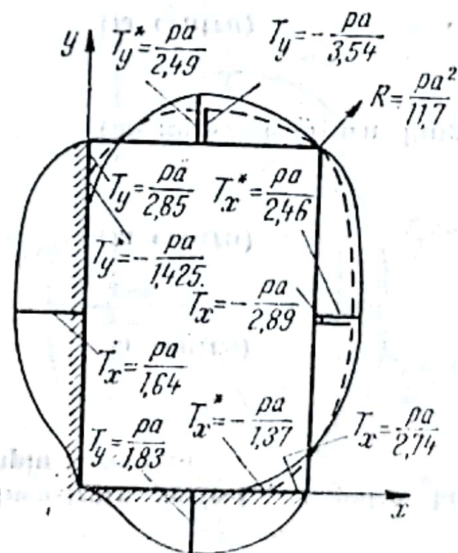
$$T_y = \frac{1}{k_5} pa$$ (la mijlocul laturii încastrate *a*)

$$T_y^* = \frac{1}{k_5'} \cdot pa$$ (la mijlocul laturii simplu rezemate *a*)

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_4	k_4'	k_5	k_5'
1,00	0,0252	42,7	14,3	40,2	14,3	1,96	2,76	1,96	2,76
1,05	0,0281	38,0	13,3	41,0	13,8	1,89	2,69	1,93	2,69
1,10	0,0302	35,1	12,7	42,0	13,6	1,83	2,64	1,90	2,65

1,15	0,0329	32,2	12,0	42,9	13,3	1,78	2,58	1,88	2,61
1,20	0,0348	30,0	11,5	44,0	13,1	1,75	2,55	1,87	2,59
1,25	0,0369	28,0	11,1	45,6	12,9	1,72	2,53	1,86	2,56
1,30	0,0389	26,5	10,7	47,6	12,8	1,69	2,51	1,85	2,54
1,35	0,0408	25,2	10,3	49,6	12,7	1,67	2,49	1,84	2,52
1,40	0,0426	24,1	10,0	51,0	12,6	1,65	2,47	1,84	2,51
1,45	0,0443	23,1	9,8	52,1	12,5	1,64	2,46	1,83	2,50
1,50	0,0459	22,2	9,6	53,0	12,4	1,64	2,46	1,83	2,49
1,55	0,0472	21,6	9,4	54,1	12,3	1,63	2,46	1,82	2,49
1,60	0,0484	21,0	9,2	54,8	12,3	1,63	2,46	1,82	2,49
1,65	0,0496	20,4	9,1	55,6	12,2	1,62	2,47	1,82	2,49
1,70	0,0508	19,9	8,9	56,3	12,2	1,62	2,47	1,82	2,48
1,75	0,0519	19,5	8,8	57,0	12,2	1,61	2,47	1,82	2,48
1,80	0,0529	19,1	8,7	57,7	12,2	1,60	2,48	1,82	2,48
1,85	0,0538	18,7	8,6	58,3	12,2	1,60	2,48	1,82	2,48
1,90	0,0547	18,4	8,5	59,0	12,2	1,59	2,48	1,82	2,47
1,95	0,0554	18,1	8,4	59,6	12,2	1,59	2,49	1,82	2,47
2,00	0,0562	17,9	8,4	60,2	12,2	1,58	2,49	1,82	2,47

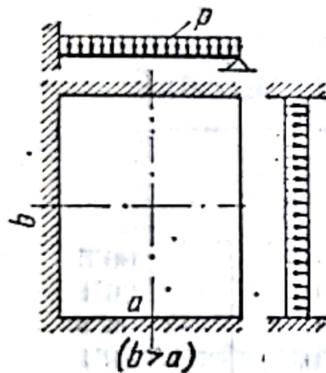




Tabelul VI.5

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, având trei laturi încastrate perfect și a patra latură simplu rezemată

A. Latura lungă simplu rezemată



$$w = k_0(1-\mu^2)\cdot\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}\cdot pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}\cdot pa^2$$ (la mijlocul laturii lungi încastrate)

$$m_y = \frac{1}{k_2}\cdot pa^2$$ (la centru)

$$m_{y,\,max} = -\frac{1}{k_2'}\,pa^2$$ (pe latura încastrată perfect a)

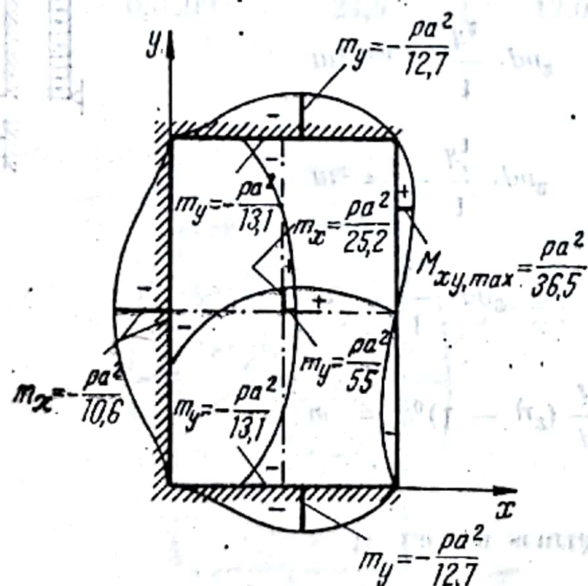
$$T_x = \frac{1}{k_4}\,pa$$ (la mijlocul laturii lungi încastrate)

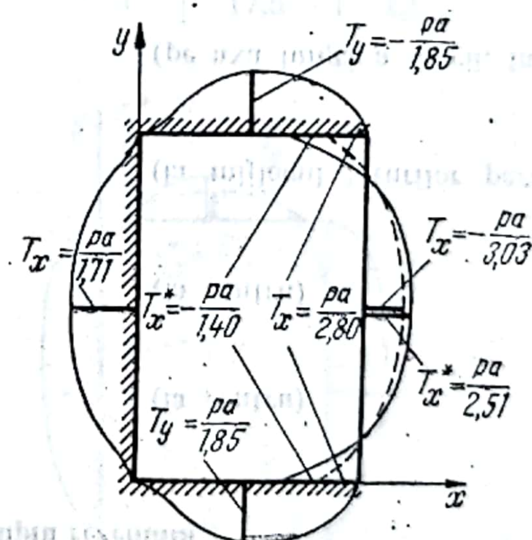
$$T' = -\frac{1}{k_4'}\cdot pa$$ (la mijlocul laturii simplu rezemate)

$$T_y = \frac{1}{k_5}\,pa$$ (la mijlocul laturilor încastrate perfect a).

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_4	k_4'	k_5
1,00	0,0188	59,5	18,3	44,1	16,2	2,21	3,04	2,11
1,05	0,0212	51,6	16,6	43,6	15,4	2,10	2,92	2,05
1,10	0,0236	46,1	15,4	43,7	14,8	2,01	2,84	2,00

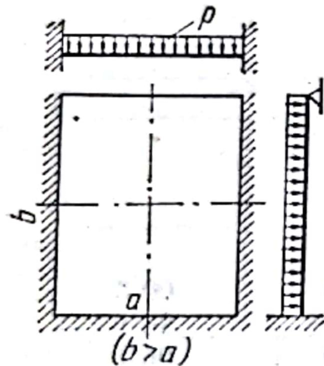
1,15	0,0260	41,4	14,4	44,2	14,3	1,95	2,77	1,97
1,20	0,0284	37,5	13,5	44,8	13,9	1,89	2,70	1,94
1,25	0,0308	34,2	12,7	45,8	13,5	1,85	2,65	1,91
1,30	0,0329	31,8	12,2	46,9	13,3	1,81	2,61	1,89
1,35	0,0351	29,6	11,6	48,6	13,1	1,78	2,57	1,87
1,40	0,0371	28,0	11,2	50,3	13,0	1,76	2,54	1,86
1,45	0,0391	26,4	10,9	52,3	12,8	1,73	2,52	1,85
1,50	0,0409	25,2	10,6	55,0	12,7	1,71	2,51	1,85
1,55	0,0426	24,2	10,3	58,2	12,6	1,70	2,50	1,84
1,60	0,0442	23,3	10,1	61,6	12,6	1,69	2,50	1,84
1,65	0,0457	22,5	9,9	65,6	12,5	1,68	2,49	1,84
1,70	0,0471	21,7	9,7	70,4	12,5	1,67	2,49	1,84
1,75	0,0484	21,1	9,5	75,0	12,4	1,66	2,48	1,83
1,80	0,0495	20,5	9,4	79,6	12,4	1,65	2,48	1,83
1,85	0,0507	20,0	9,2	84,7	12,3	1,64	2,48	1,83
1,90	0,0518	19,5	9,0	89,8	12,3	1,63	2,47	1,83
1,95	0,0529	19,1	8,9	95,4	12,3	1,62	2,47	1,82
2,00	0,0539	18,7	8,8	101,0	12,3	1,61	2,47	1,82





Tabelul VI.5 (continuare)

B. Latura scurtă simplu rezemată



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}\cdot pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}\cdot pa^2$$ (la mijlocul laturilor paralele încastrate)

$$m_{y,max} = \frac{1}{k_2}\cdot pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'}\cdot pa^2$$ (la mijlocul laturii scurte încastrate)

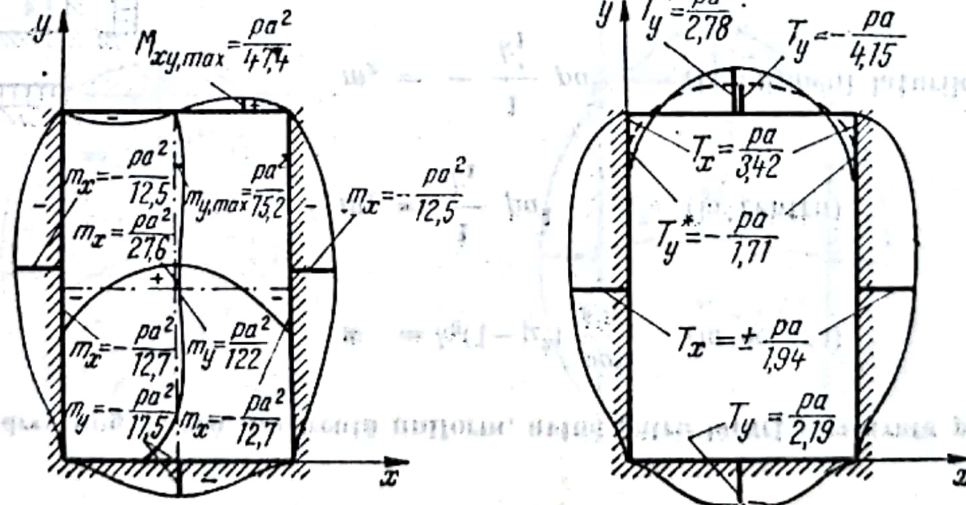
$$T_x = \pm\frac{1}{k_4}\cdot pa$$ (la mijlocul laturilor paralele încastrate)

$$T_y = \frac{1}{k_5}\cdot pa$$ (la mijlocul laturii scurte încastrate)

$$T_y^* = \frac{1}{k_5'}\cdot pa$$ (la mijlocul laturii simplu rezemate)

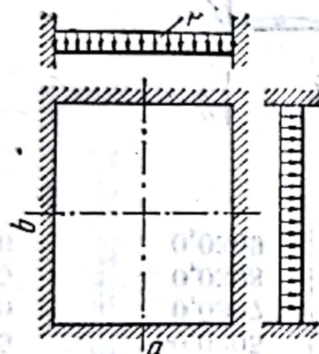
b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_4	k_5	k_5'
1,00	0,0188	44,1	16,2	55,9	18,3	2,11	2,21	3,04
1,05	0,0202	40,5	15,3	57,5	17,9	2,05	2,14	2,93
1,10	0,0214	37,9	14,8	60,3	17,7	2,01	2,10	2,87

1,15	0,0226	35,5	14,2	64,2	17,6	1,97	2,09	2,83
1,20	0,0236	33,8	13,9	66,2	17,5	1,96	2,09	2,81
1,25	0,0245	32,3	13,5	67,7	17,5	1,94	2,10	2,79
1,30	0,0253	31,0	13,2	69,0	17,5	1,93	2,11	2,79
1,35	0,0261	29,9	12,9	70,5	17,5	1,92	2,12	2,78
1,40	0,0268	29,0	12,7	72,0	17,5	1,92	2,13	2,78
1,45	0,0274	28,2	12,6	73,4	17,5	1,93	2,16	2,78
1,50	0,0280	27,6	12,5	75,2	17,5	1,94	2,19	2,78
1,55	0,0285	27,0	12,4	76,9	17,5	1,94	2,19	2,78
1,60	0,0289	26,5	12,3	78,7	17,5	1,94	2,19	2,78
1,65	0,0294	26,1	12,2	80,5	17,5	1,94	2,19	2,78
1,70	0,0298	25,7	12,2	82,5	17,5	1,94	2,19	2,78
1,75	0,0301	25,3	12,1	84,6	17,5	1,94	2,20	2,78
1,80	0,0303	25,1	12,1	86,8	17,5	1,94	2,20	2,78
1,85	0,0305	24,9	12,0	89,2	17,5	1,94	2,20	2,78
1,90	0,0307	24,7	12,0	91,7	17,5	1,95	2,21	2,78
1,95	0,0308	24,6	12,0	94,3	17,5	1,95	2,21	2,78
2,00	0,0309	24,5	12,0	97,0	17,5	1,95	2,21	2,78



Tabelul VI.6

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd patru laturi încastrate perfect



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3} \quad \text{(la centru)}$$

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2 \quad \text{(la centru)}$$

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2 \quad \text{(la mijlocul laturilor lungi } b\text{)}$$

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2 \quad \text{(la centru)}$$

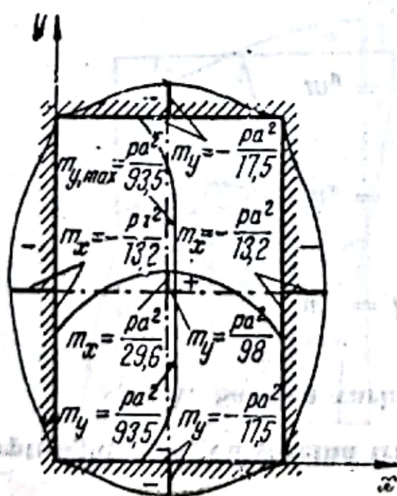
$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2 \quad \text{(la mijlocul laturilor scurte } a\text{)}$$

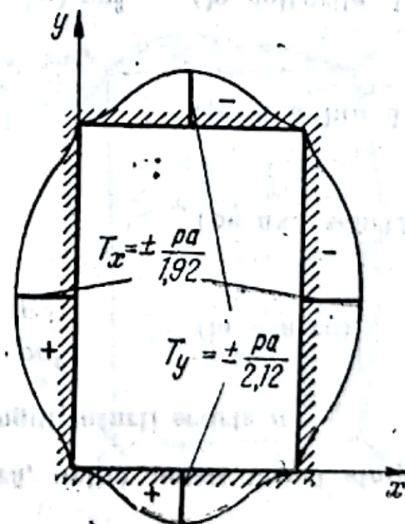
$$T_x = \pm\frac{1}{k_4}pa \quad \text{(la mijlocul laturilor lungi } b\text{)}$$

$$T_y = \pm\frac{1}{k_5}pa \quad \text{(la mijlocul laturilor scurte } a\text{)}$$

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_4	k_5
1,00	0,0152	56,8	19,4	56,8	19,4	2,24	2,24
1,05	0,0167	50,6	18,2	58,2	18,8	2,17	2,20
1,10	0,0181	46,1	17,1	60,3	18,4	2,10	2,16
1,15	0,0195	42,4	16,3	62,6	18,1	2,05	2,14

1,20	0,0207	39,4	15,5	65,8	17,9	2,01	2,12
1,25	0,0219	37,0	14,9	69,4	17,7	1,98	2,11
1,30	0,0230	34,8	14,5	73,6	17,6	1,96	2,10
1,35	0,0240	33,3	14,0	78,4	17,5	1,94	2,09
1,40	0,0248	31,9	13,7	83,4	17,5	1,92	2,09
1,45	0,0257	30,6	13,4	89,4	17,5	1,92	2,10
1,50	0,0264	29,6	13,2	93,5	17,5	1,92	2,12
1,55	0,0271	28,8	13,0	96,1	17,5	1,92	2,12
1,60	0,0277	28,1	12,8	98,1	17,5	1,92	2,12
1,65	0,0282	27,5	12,7	99,9	17,5	1,92	2,12
1,70	0,0287	26,9	12,5	101,3	17,5	1,91	2,12
1,75	0,0291	26,4	12,4	102,4	17,5	1,91	2,12
1,80	0,0294	26,0	12,3	103,3	17,5	1,91	2,12
1,85	0,0297	25,7	12,2	104,0	17,5	1,91	2,12
1,90	0,0300	25,4	12,1	104,6	17,5	1,91	2,13
1,95	0,0302	25,2	12,0	104,9	17,5	1,91	2,13
2,00	0,0304	25,0	12,0	105,0	17,5	1,91	2,13

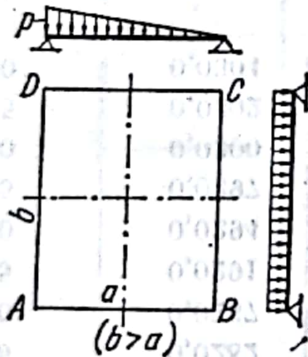




Tabelul VI.7

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd patru laturi simplu rezemate

A. Sarcina variază în lungul laturii scurte *a*



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}\cdot pa^2$$ (pe axa scurtă a plăcii, în cîmp)

$$m_y = \frac{1}{k_2}\cdot pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$$ (la colțurile A și D)

$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3'}(1-\mu)\,pa^2$$ (la colțurile B și C)

$$R = \frac{2}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$$ (la colțurile A și D)

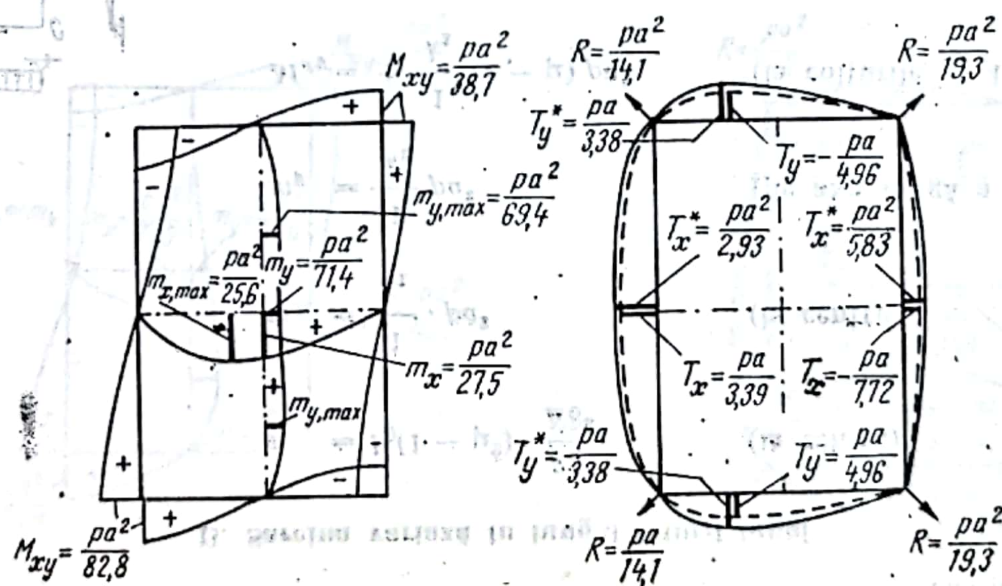
$$R = \frac{2}{k_3'}(1-\mu)\,pa^2$$ (la colțurile B și C)

$$T_x^* = \frac{1}{k_4}\,pa$$ (la mijlocul laturii AD)

$$T_x^* = \frac{1}{k_4'}\,pa$$ (la mijlocul laturii BC)

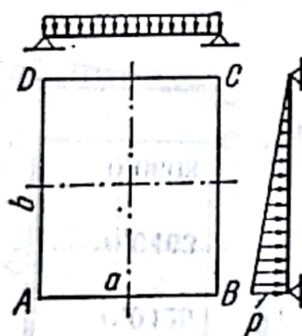
$$T_{y,\,max}^* = \frac{1}{k_5}\,pa$$ (pe laturile AB și CD).

b/a	k_0	k_1	k_2	k_3	k'_3	k_4	k'_4	k_5
1,0	0,0244	45,5	54,3	35,8	54,0	3,18	7,04	3,77
1,1	0,0292	38,9	55,9	33,3	48,5	3,10	6,60	3,64
1,2	0,0339	34,2	58,1	31,4	44,8	3,03	6,30	3,55
1,3	0,0383	30,8	61,7	30,0	42,2	2,99	6,08	3,47
1,4	0,0425	27,9	65,8	29,1	40,2	2,95	5,93	3,42
1,5	0,0463	25,6	69,4	28,2	38,7	2,93	5,83	3,38
2,0	0,0608	19,8	80,6	26,6	35,5	2,91	5,67	3,29



Tabelul VI.7 (continuare)

B. Sarcina variază în lungul laturii lungi



$w = k_0(1-\mu^2)\cdot\dfrac{pa^4}{E\delta^3}$ (la centru)

$m_x = \dfrac{1}{k_1}\cdot pa^2$ (la centru)

$m_y = \dfrac{1}{k_2}pa^2$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$M_{xy} = \pm\dfrac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$ (la colţurile A şi B)

$M_{xy} = \pm\dfrac{1}{k_3'}(1-\mu)\,pa^2$ (la colţurile C şi D)

$R = \dfrac{2}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$ (la colţurile A şi B)

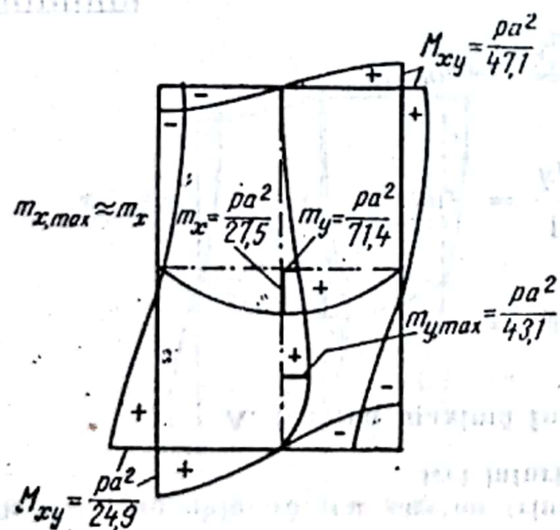
$R = \dfrac{2}{k_3'}(1-\mu)\,pa^2$ (la colţurile C şi D)

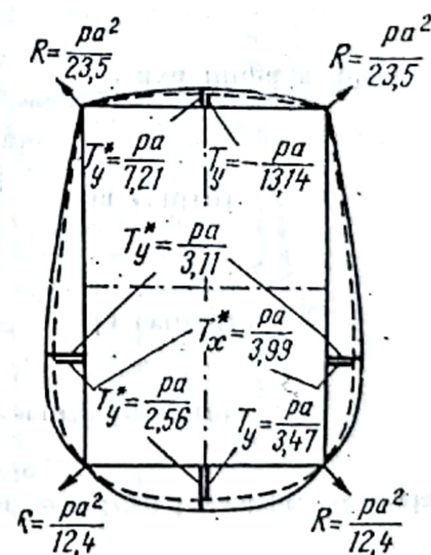
$T_x^* = \dfrac{1}{k_4}pa$ (pe laturile lungi ale plăcii)

$T_y^* = \dfrac{1}{k_5}pa$ (la mijlocul laturii AB)

$T_y^* = \dfrac{1}{k_5'}pa$ (la mijlocul laturii CD).

b/a	k_0	k_1	k_2	k_3	k'_3	k_4	k_5	k'_5
1,0	0,0244	54,3	45,5	35,8	54,0	3,77	3,18	7,04
1,1	0,0292	44,6	44,2	32,4	50,7	3,57	3,00	6,92
1,2	0,0339	38,2	43,5	29,8	48,8	3,41	2,85	6,90
1,3	0,0383	33,5	42,9	27,7	47,6	3,29	2,73	6,95
1,4	0,0425	30,1	42,7	26,2	47,1	3,19	2,64	7,06
1,5	0,0463	27,5	43,1	24,9	47,1	3,11	2,56	7,21
2,0	0,0608	20,7	43,1	21,3	52,4	2,79	2,32	8,47

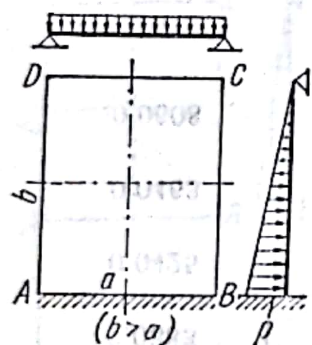




Tabelul VI.8

Placa dreptunghiulară, cu sarcina triunghiulară, avînd o latură încastrată și celelalte trei laturi simplu rezemate

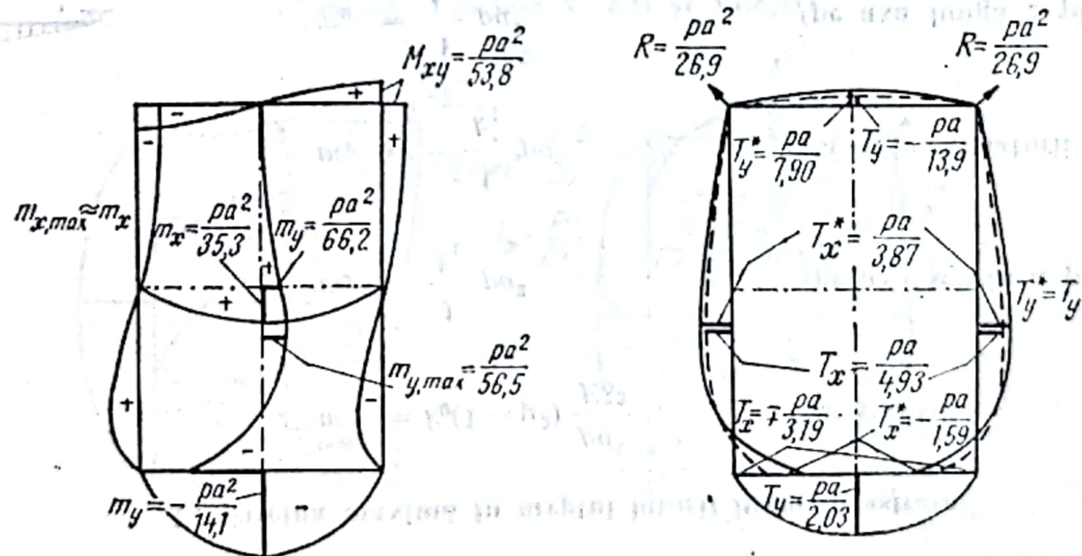
A. Sarcina maximă în dreptul laturii scurte încastrate



w	$= k_0(1-\mu^2)\dfrac{pa^4}{E\delta^3}$	(la centru)
m_x	$= \dfrac{1}{k_1}pa^2$	(la centru)
$m_{y,max}$	$= \dfrac{1}{k_2}pa^2$	(pe axa lungă a plăcii, în cîmp)
m_y	$= -\dfrac{1}{k_2'}pa^2$	(la mijlocul laturii încastrate)
M_{xy}	$= \pm\dfrac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$	(în colțurile C și D)
R	$= \dfrac{2}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$	(în colțurile C și D)
T_x^*	$= \dfrac{1}{k_4}pa$	(la mijlocul laturilor AD și BC)
T_y	$= \dfrac{1}{k_5}pa$	(la mijlocul laturii încastrate)
T_y^*	$= \dfrac{1}{k_5'}pa$	(la mijlocul laturii CD)

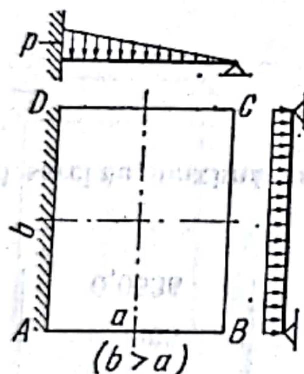
b/a	k_0	k_1	k_2	k_2'	k_3	k_4	k_5	k_5'
1,0	0,0154	90,1	63,6	20,7	73,0	5,23	2,61	8,85
1,1	0,0195	69,5	60,6	18,6	65,4	4,82	2,43	8,38
1,2	0,0238	55,8	59,2	17,0	60,6	4,49	2,29	8,10
1,3	0,0281	46,7	57,8	15,8	57,2	4,23	2,19	7,94
1,4	0,0324	40,2	56,8	14,8	54,9	4,03	2,10	7,90
1,5	0,0365	35,3	56,5	14,1	53,8	3,87	2,03	7,90
2,0	0,0536	23,6	56,5	11,8	54,9	3,31	1,80	8,75

Cazul cînd sarcina maximă este în dreptul laturii *CD* (opuse celei încastrate) se tratează prin suprapunerea efectelor (tabelele VI.2,A și VI.8,A).



Tabelul VI.8 (continuare)

B. Sarcina maximă în dreptul laturii lungi încastrate



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (pe axa scurtă a plăcii, în cîmp)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2$$ (la mijlocul laturii încastrate)

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1-\mu)pa^2$$ (la colțurile B și C)

$$R = \frac{2}{k_3}(1-\mu)pa^2$$ (la colțurile B și C)

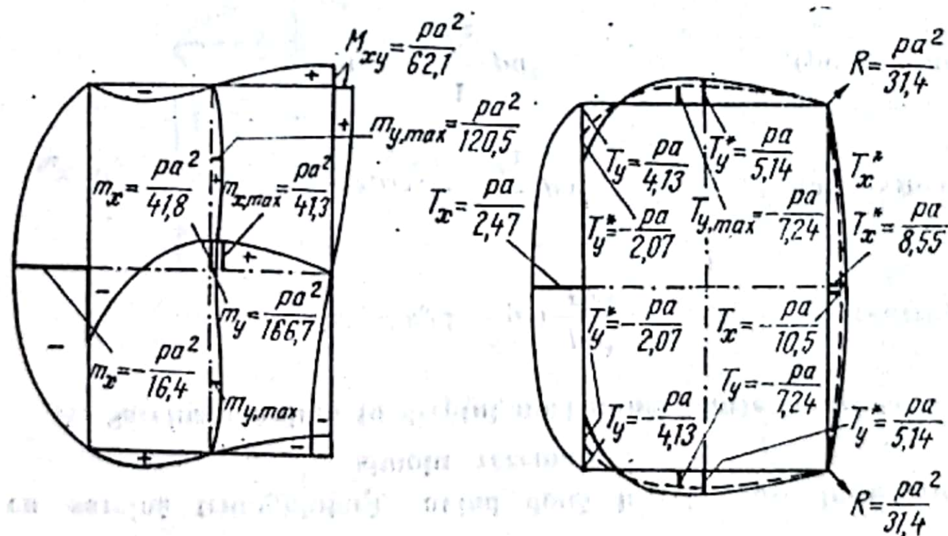
$$T_x = \frac{1}{k_4}pa$$ (la mijlocul laturii încastrate)

$$T_x^* = \frac{1}{k_4'}pa$$ (la mijlocul laturii BC)

$$T_y^* = \frac{1}{k_5}pa$$ (la mijlocul laturii CD)

b/a	k_0	k_1	k'_1	k_2	k_3	k_4	k'_4	k_5
1,0	0,0154	63,6	20,7	90,1	73,0	2,61	8,85	5,23
1,1	0,0174	56,2	19,1	99,0	69,0	2,54	8,63	5,21
1,2	0,0192	51,0	18,2	108,8	65,8	2,52	8,50	5,17
1,3	0,0208	46,7	17,4	112,3	64,2	2,49	8,47	5,17
1,4	0,0221	43,8	16,8	116,2	62,9	2,48	8,50	5,16
1,5	0,0231	41,3	16,4	120,5	62,1	2,47	8,55	5,14
2,0	0,0264	35,7	15,3	128,2	61,0	2,46	9,07	5,14

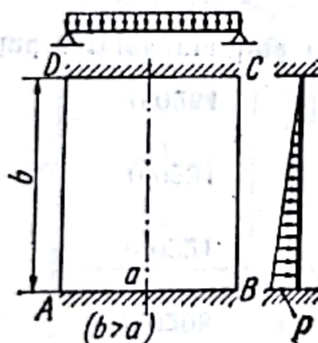
Cazul cînd sarcina maximă este în dreptul laturii *BC* (opuse celei încastrate) se tratează prin suprapunerea efectelor (tabelele VI.2,B şi VI.8,B).



Tabelul VI.9

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd două laturi opuse încastrate și celelalte două laturi simplu rezemate

A. Sarcina maximă în dreptul unei laturi scurte încastrate



$$w = k_0(1 - \mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_{x,max} = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (aproximativ la centru)

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2$$ (la mijlocul laturii AB)

$$m_y = -\frac{1}{k_2''}pa^2$$ (la mijlocul laturii CD)

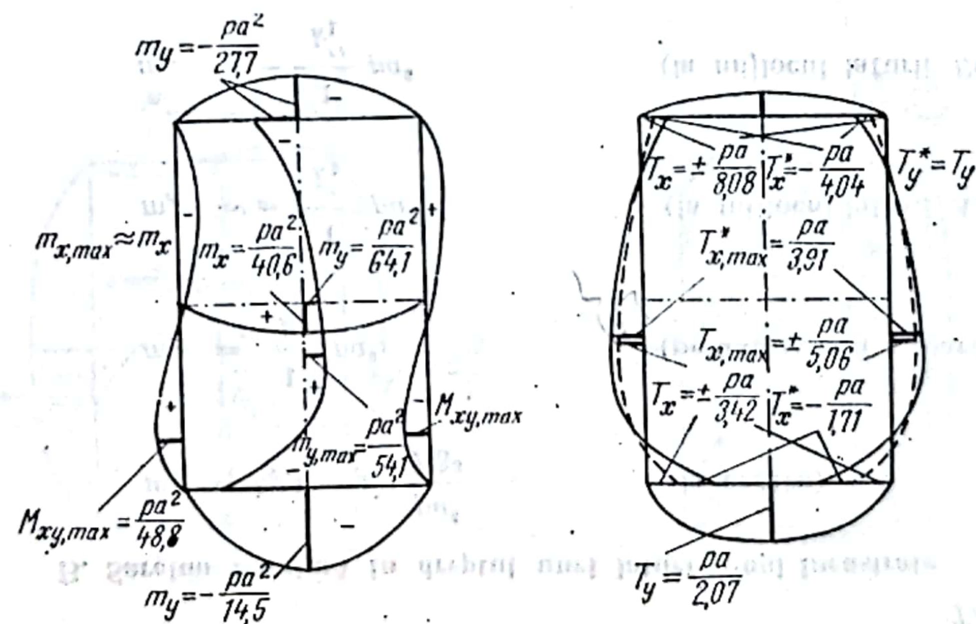
$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1 - \mu)\,pa^2$$ (pe laturile simplu rezemate, în vecinătatea colțurilor A și B)

$$T_x^* = \frac{1}{k_4}pa$$ (pe latura AD)

$$T_y = \frac{1}{k_5}pa$$ (pe latura AB)

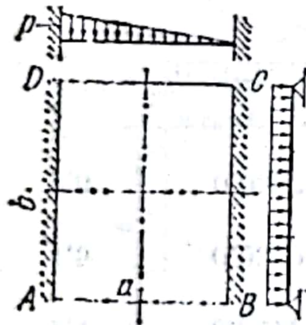
$$T_y = \frac{1}{k_5'}pa$$ (pe latura CD)

b/a	k_0	k_1	k_2	k'_2	k''_2	k_3	k_4	k_5	k'_5
1,0	0,0115	123,5	65,8	23,2	37,6	85,5	5,45	2,77	6,45
1,1	0,0152	91,7	61,3	20,4	33,7	71,9	4,99	2,57	5,96
1,2	0,0192	70,9	57,5	18,3	31,2	62,9	4,62	2,40	5,71
1,3	0,0234	56,8	55,5	16,7	29,5	56,8	4,32	2,27	5,53
1,4	0,0277	47,6	54,3	15,5	28,3	51,6	4,10	2,16	5,47
1,5	0,0319	40,6	54,1	14,5	27,7	48,8	3,91	2,07	5,45
2,0	0,0507	25,0	55,2	11,9	28,5	36,3	3,31	1,81	5,92



Tabelul VI.9 (continuare)

B. Sarcina maximă în dreptul unei laturi lungi încastrate



$$w = k_0(1 - \mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (pe axa scurtă a plăcii, în cîmp)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2$$ (la mijlocul laturii AD)

$$m_x = -\frac{1}{k_1''}pa^2$$ (la mijlocul laturii BC)

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

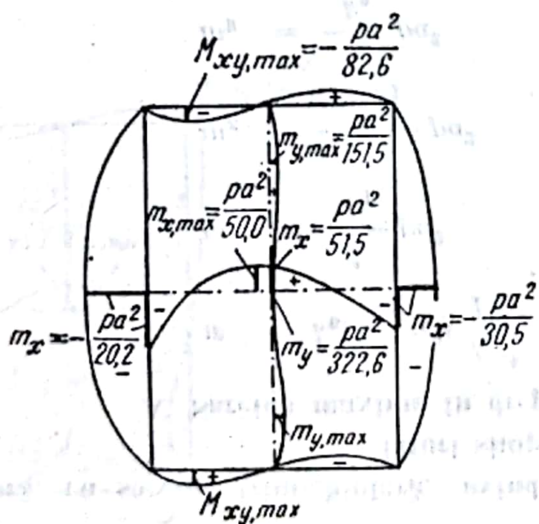
$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1 - \mu)\,pa^2$$ (pe laturile scurte)

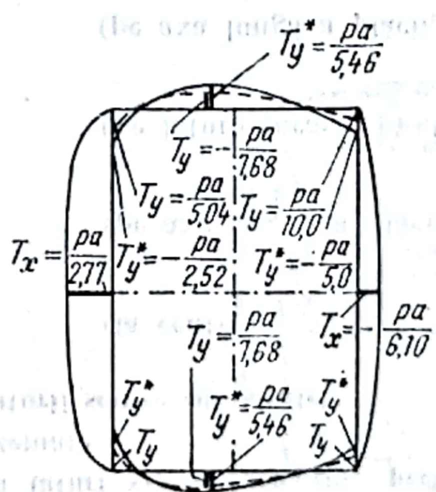
$$T_x = \frac{1}{k_4}pa$$ (la mijlocul laturii AD)

$$T_x = -\frac{1}{k_4'}pa$$ (la mijlocul laturii BC)

$$T_y^* = \frac{1}{k_5}pa$$ (pe laturile simplu rezemate, în vecinătatea mijloacelor laturilor)

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_1''	k_2	k_3	k_4	k_4'	k_5
1,0	0,0115	65,8	23,2	37,6	123,5	85,5	2,77	6,45	5,45
1,1	0,0125	60,6	22,2	34,9	133,3	83,4	2,76	6,20	5,44
1,2	0,0133	56,8	21,5	33,1	142,9	82,7	2,75	6,11	5,44
1,3	0,0140	54,1	20,9	31,9	147,0	82,7	2,75	6,09	5,45
1,4	0,0145	51,3	20,6	31,2	149,3	82,7	2,76	6,09	5,46
1,5	0,0148	50,0	20,2	30,5	151,5	82,6	2,77	6,10	5,46
2,0	0,0157	46,7	20,0	30,0	154,0	83,4	2,83	6,29	5,46

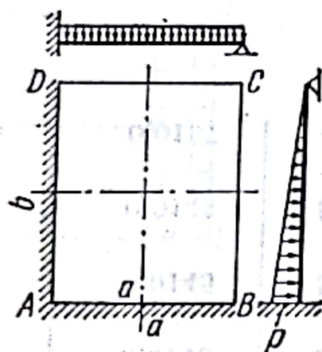




Tabelul VI.10

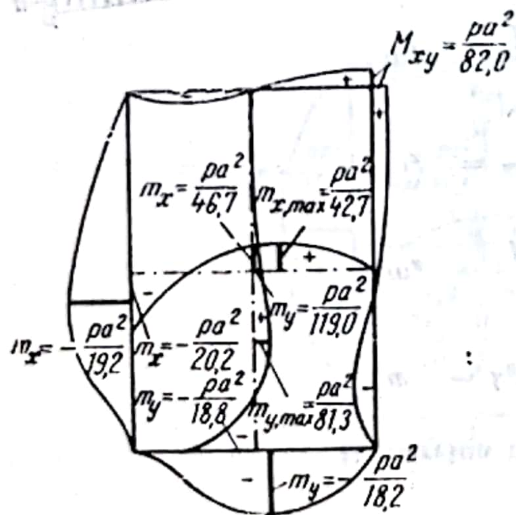
Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd două laturi vecine încastrate perfect și celelalte două laturi simplu rezemate

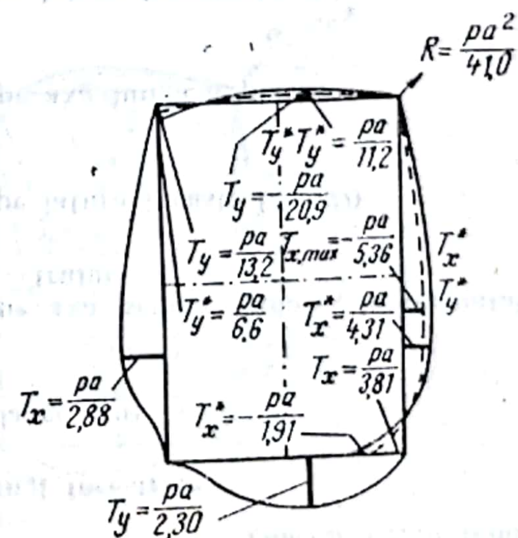
A. Sarcina maximă în dreptul laturii scurte încastrate



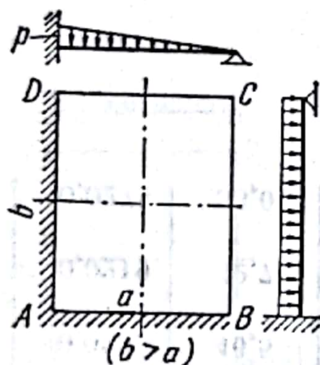
$w = k_0(1-\mu^2)\dfrac{pa^4}{E\delta^3}$	(la centru)
$m_x = \dfrac{1}{k_1}pa^2$	(pe axa scurtă a plăcii, în cîmp)
$m_x = -\dfrac{1}{k_1'}pa^2$	(pe latura încastrată AD)
$m_y = \dfrac{1}{k_2}pa^2$	(pe axa lungă a plăcii, în cîmp)
$m_y = -\dfrac{1}{k_2'}pa^2$	(pe latura încastrată AB)
$M_{xy} = \dfrac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$	(în colțul C)
$R = \dfrac{2}{k_3}(1-\mu)pa^2$	(în colțul C)
$T_x = \dfrac{1}{k_4}pa$	(pe latura încastrată AD)
$T_x^* = \dfrac{1}{k_4'}pa$	(pe latura simplu rezemată BC)
$T_y = \dfrac{1}{k_5}pa$	(pe latura simplu rezemată CD)
$T_y^* = \dfrac{1}{k_5'}pa$	(pe latura încastrată AB)

b/a	k_0	k_1	k'_1	k_2	k'_2	k_3	k_4	k'_4	k_5	k'_5
1,0	0,0117	86,3	31,0	83,3	24,1	85,5	3,94	5,43	2,77	10,1
1,1	0,0141	70,5	27,1	82,0	22,0	80,6	3,66	5,08	2,62	10,0
1,2	0,0163	59,5	24,3	81,3	20,7	77,7	3,41	4,81	2,51	10,1
1,3	0,0184	51,6	22,2	81,3	19,6	77,6	3,20	4,65	2,43	10,4
1,4	0,0203	46,5	20,7	81,3	18,8	78,7	3,02	4,48	2,36	10,7
1,5	0,0219	42,7	19,2	81,3	18,2	82,0	2,88	4,31	2,30	11,2
2,0	0,0275	33,0	15,4	81,3	16,2	96,2	2,47	3,78	2,12	14,2





B. Sarcina maximă în dreptul laturii lungi încastrate



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (pe axa scurtă a plăcii, în vecinătatea centrului)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2$$ (pe latura încastrată AD)

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2$$ (pe latura încastrată AB)

$$M_{xy} = \frac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$$ (în colțul C)

$$R = \frac{2}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$$ (în colțul C)

$$T_x = \frac{1}{k_4}pa$$ (pe latura încastrată AD)

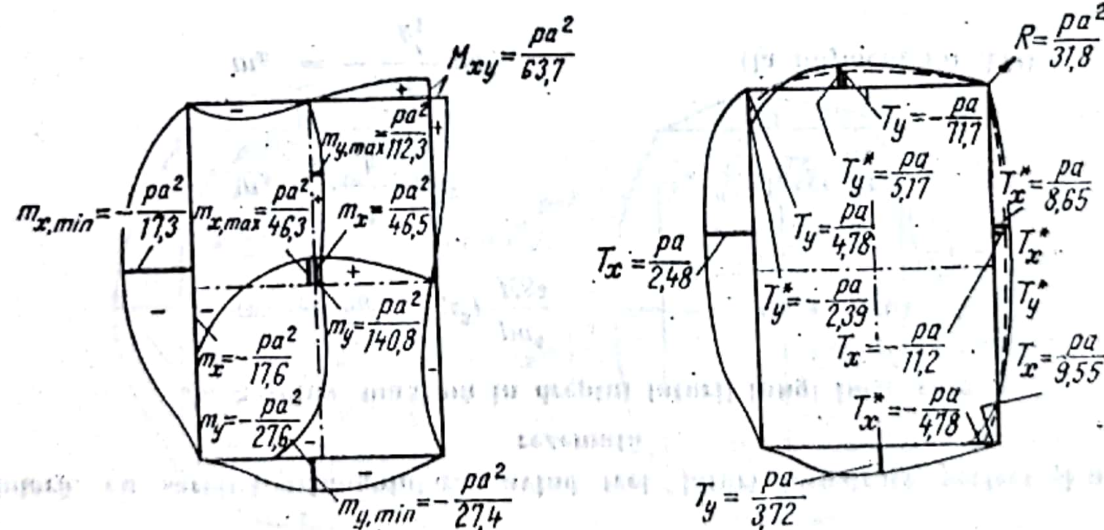
$$T_x^* = \frac{1}{k_4'}pa$$ (pe latura simplu rezemată BC)

$$T_y = \frac{1}{k_5}pa$$ (pe latura încastrată AB)

$$T_y^* = \frac{1}{k_5'}pa$$ (pe latura simplu rezemată CD)

b/a	k_0	k_1	k'_1	k_2	k'_2	k_3	k_4	k'_4	k_5	k'_5
1,0	0,0117	83,3	24,1	86,3	31,0	85,5	2,77	10,1	3,94	5,43
1,1	0,0139	70,9	21,7	90,9	29,4	77,5	2,67	9,47	3,86	5,33
1,2	0,0160	61,0	20,0	97,1	28,6	71,9	2,60	9,02	3,79	5,27
1,3	0,0178	54,6	18,9	103,2	27,9	68,1	2,54	8,83	3,75	5,22
1,4	0,0195	50,0	17,9	107,6	27,5	65,4	2,51	8,70	3,73	5,19
1,5	0,0208	46,3	17,3	112,3	27,4	63,7	2,48	8,65	3,72	5,17
2,0	0,0254	37,7	15,6	126,6	27,1	61,0	2,43	8,91	3,70	5,13

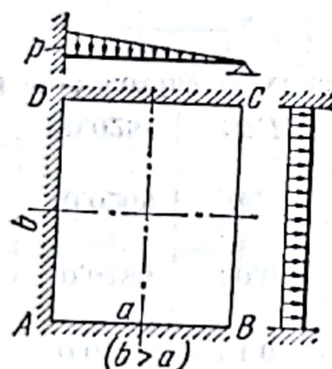
Cazul cînd sarcina maximă este în dreptul laturii *BC* se tratează prin suprapunerea efectelor (tabelele VI.4 şi VI.10, B).



Tabelul VI.11

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd trei laturi încastrate perfect și a patra latură simplu rezemată

A. Sarcina maximă în dreptul laturii lungi încastrate



$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2$$ (la mijlocul lui AD)

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (la centru)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2$$ (la mijlocul laturilor paralele încastrate)

$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$$ (pe latura simplu rezemată)

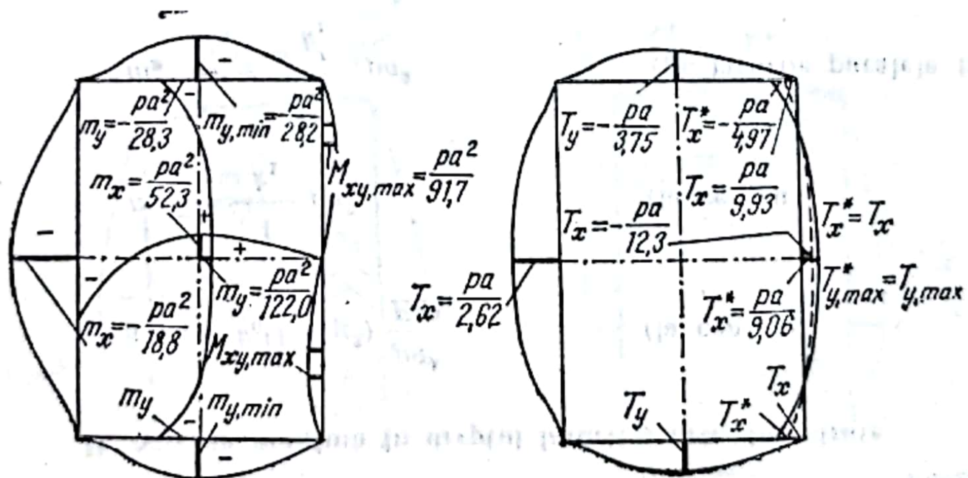
$$T_x = \frac{1}{k_4}pa$$ (la mijlocul laturii AD)

$$T_x^* = \frac{1}{k_4'}pa$$ (la mijlocul laturii simplu rezemate)

$$T_y = \pm\frac{1}{k_5}pa$$ (la mijlocul laturii simplu rezemate)

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_3	k_4	k_4'	k_5
1,0	0,0088	104,2	29,0	95,2	34,5	149,2	3,10	12,7	4,11
1,1	0,0110	86,9	25,3	95,2	32,1	128,2	2,93	11,2	4,01
1,2	0,0131	75,2	22,9	98,0	30,3	113,7	2,82	10,3	3,93
1,3	0,0151	64,9	21,1	103,1	29,2	103,1	2,73	9,72	3,85
1,4	0,0170	57,8	19,6	112,2	28,5	97,2	2,67	9,32	3,79
1,5	0,0187	52,3	18,8	122,0	28,2	91,7	2,62	9,06	3,75
2,0	0,0242	39,4	16,6	181,9	27,3	85,5	2,52	8,89	3,70

Cazul cînd sarcina maximă este în dreptul laturii simplu rezemate se tratează prin suprapunerea efectelor (tabelele VI.5, A și VI.11, A.)



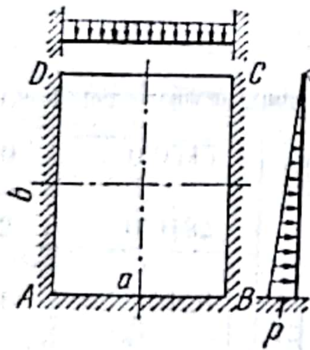
Tabelul VI.11 (continuare)

B. Sarcina maximă în dreptul laturii scurte încastrate

$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}\cdot pa^2$$ (pe laturile paralele încastrate)



$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2$$ (la mijlocul laturii încastrate AB)

$$M_{xy} = \pm\frac{1}{k_3}(1-\mu)\,pa^2$$ (pe latura simplu rezemată)

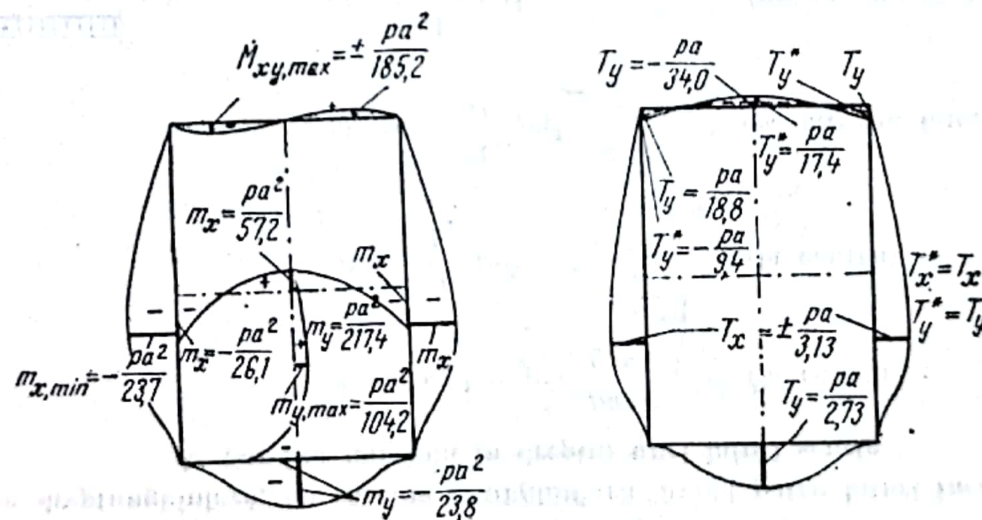
$$T_x = \pm\frac{1}{k_4}pa$$ (pe laturile lungi încastrate)

$$T_y = \frac{1}{k_5}pa$$ (la mijlocul laturii AB)

$$T_y^* = \frac{1}{k_5'}pa$$ (la mijlocul laturii CD)

b/a	k_0	k_1	k'_1	k_2	k'_2	k_3	k_4	k_5	k'_5
1,0	0,0088	95,2	34,5	104,2	29,0	149,2	4,11	3,10	12,7
1,1	0,0101	81,3	31,1	104,2	26,9	153,9	3,80	2,99	13,2
1,2	0,0113	71,4	28,7	104,2	25,8	158,8	3,57	2,90	14,1
1,3	0,0122	64,9	26,7	104,2	24,9	166,6	3,38	2,83	15,1
1,4	0,0130	60,6	25,3	104,2	24,1	175,5	3,24	2,77	16,2
1,5	0,0136	57,2	23,7	104,2	23,8	185,2	3,13	2,73	17,4
2,0	0,0147	49,5	20,2	104,2	21,9	243,9	2,82	2,60	23,8

Cazul cînd sarcina maximă este în dreptul laturii simplu rezemate se tratează prin suprapunerea efectelor (tabelele VI.5,B şi VI.11,B)



Tabelul VI.12

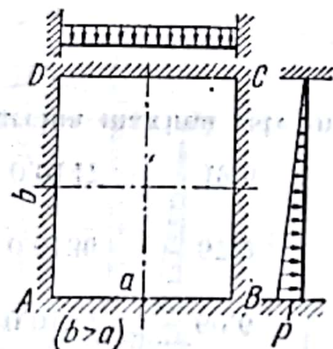
Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd patru laturi încastrate

A. Sarcina maximă în dreptul unei laturi scurte

$$w = k_0(1-\mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (la centru)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2$$ (pe laturile lungi)



$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă, în cîmp)

$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2$$ (pe latura AD)

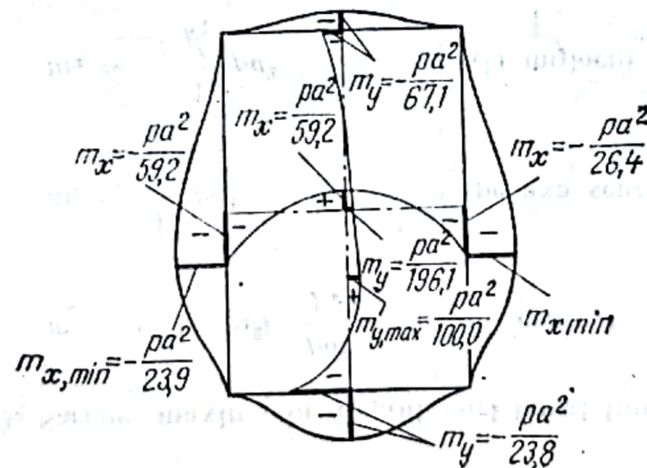
$$m_y = -\frac{1}{k_2''}pa^2$$ (pe latura BC)

$$T_x = \pm\frac{1}{k_4}pa$$ (pe laturile lungi)

$$T_y = \frac{1}{k_5}pa$$ (pe latura AB)

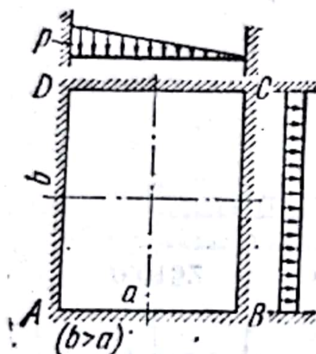
$$T_y = -\frac{1}{k_5'}pa$$ (pe latura CD)

b/a	k_0	k_1	k'_1	k_2	k'_2	k''_2	k_4	k_4	k'_5
1,0	0,0076	113,6	36,9	98,0	30,0	56,2	4,14	3,07	8,25
1,1	0,0091	91,7	33,1	98,0	27,5	55,5	3,86	2,90	8,40
1,2	0,0104	78,7	29,8	98,0	26,1	57,2	3,59	2,80	8,77
1,3	0,0115	69,9	27,5	99,0	25,0	59,5	3,39	2,74	9,40
1,4	0,0124	63,7	25,6	99,0	24,1	62,9	3,25	2,70	9,69
1,5	0,0132	59,2	23,9	100,0	23,8	67,1	3,13	2,64	10,70
2,0	0,0152	50,0	20,2	100,0	21,9	92,5	2,83	2,49	14,29



Tabelul VI.12 (continuare)

B. Sarcina maximă în dreptul unei laturi lungi



$$w = k_0(1 - \mu^2)\frac{pa^4}{E\delta^3}$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1}pa^2$$ (pe axa scurtă a plăcii, în cîmp)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'}pa^2$$ (la mijlocul laturilor AD)

$$m_x = -\frac{1}{k_1''}pa^2$$ (la mijlocul laturii BC)

$$m_y = \frac{1}{k_2}pa^2$$ (pe axa lungă a plăcii, în cîmp)

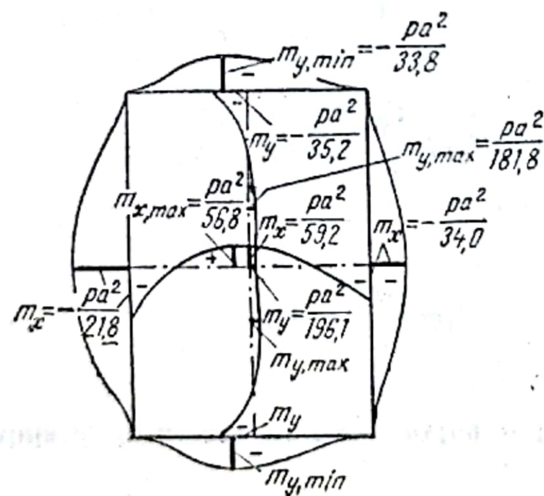
$$m_y = -\frac{1}{k_2'}pa^2$$ (pe laturile scurte)

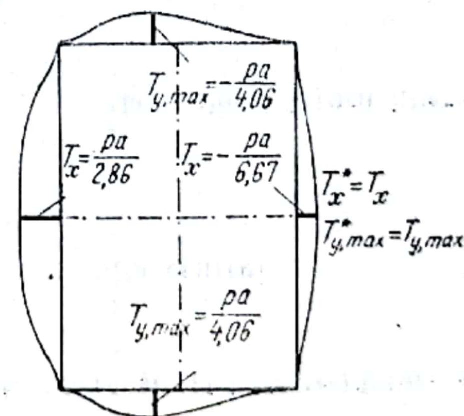
$$T_x = \frac{1}{k_4}pa$$ (la mijlocul laturii AD)

$$T_x = \frac{1}{k_4'}pa$$ (la mijlocul laturii BC)

$$T_y = \frac{1}{k_5}pa$$ (pe laturile AB și CD)

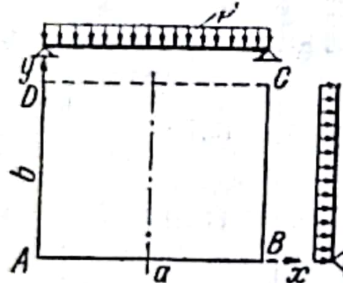
b/a	k_0	k_1	k'_1	k''_1	k_2	k'_2	k_4	k'_4	k_5
1,0	0,0076	98,0	30,0	56,2	113,6	36,9	3,07	8,25	4,14
1,1	0,0091	82,6	26,7	47,1	120,4	36,0	2,93	7,35	4,12
1,2	0,0104	73,0	24,7	41,7	131,5	35,1	2,86	6,67	4,08
1,3	0,0115	65,8	23,3	38,1	147,0	34,6	2,86	6,67	4,07
1,4	0,0124	60,6	22,2	35,5	166,6	34,4	2,86	6,67	4,07
1,5	0,0132	56,8	21,8	34,0	181,8	33,8	2,86	6,67	4,06
2,0	0,0152	48,5	20,2	30,4	212,6	33,8	2,86	6,67	4,08





Tabelul VI.13

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd o latură liberă și celelalte trei laturi simplu rezemate



$$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$$ (la mijlocul laturii libere)

$$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$$ (la centru)

$$m_y = \frac{1}{k_2'} pb^2$$ (pe axa paralelă cu b, la cota $y = \beta b$)

$$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3} (1 - \mu)\, pb^2$$ (în colțurile A și B)

$$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3'} (1 - \mu)\, pb^2$$ (la mijlocul laturilor AD și BC)

$$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3''} (1 - \mu)\, pb^2$$ (în colțurile C și D)

b/a	k	k'_1	k_2	k'_2	β	k_3	k'_3	k''_3
0,25			8,43	8,43	0,50	2,23	2,55	2,90
0,3	7,88	4,12	8,92	8,92	0,50	2,74	3,24	3,83
0,4	8,04	4,41	10,51	10,51	0,50	3,84	4,89	6,32
0,5	8,46	4,89	12,99	12,95	0,48	5,10	7,03	10,07
0,6	9,11	5,53	16,51	16,44	0,45	6,58	9,81	15,79
0,7	9,97	6,34	21,27	20,94	0,42	8,31	13,42	24,47
0,8	11,04	7,32	27,56	26,58	0,40	10,32	18,10	37,57
0,9	12,26	8,46	35,72	33,47	0,38	12,65	24,11	57,22
1,0	13,67	9,77	46,15	41,67	0,33	15,30	31,78	86,46
1,1	15,24	11,25	59,35	50,42	0,28	18,27	41,51	129,72
1,2	16,96	12,90	75,90	59,99	0,26	21,56	53,78	193,27
1,3	18,83	14,73	96,51	70,42	0,25	25,17	69,19	286,29
1,4	20,86	16,73	122,04	81,67	0,24	29,10	88,44	421,76
1,5	23,04	18,90	153,54	93,75	0,22	33,34	112,41	618,43

$M_{xy}=\frac{pb^2}{86,46}$ $m_x=\frac{pb^2}{9,77}$ $M_{xy}=-\frac{pb^2}{86,46}$

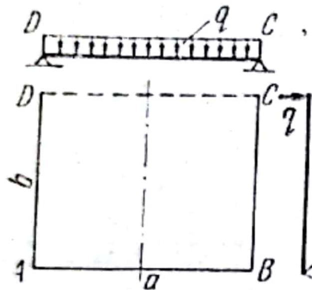
$M_{xy}=\frac{pb^2}{31,78}$ $m_y=\frac{pb^2}{46,15}$ $M_{xy}=-\frac{pb^2}{31,78}$

$m_{y,max}=\frac{pb^2}{41,67}$ $m_x=\frac{pb^2}{13,67}$

$M_{xy}=\frac{pb^2}{15,30}$ $b/a=1,0$ $M_{xy}=-\frac{pb^2}{15,30}$

Tabelul VI.14

Placa dreptunghiulară avînd o latură liberă și celelalte trei laturi simplu rezemate, încărcată cu sarcină liniară q la marginea $y = b$



$$w = k_0 (1 - \mu^2) \frac{qa^3}{E\delta^3}$$ (la mijlocul laturii libere)

$$m_x = \frac{1}{k_1} qa$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1'} qa$$ (la mijlocul laturii libere)

$$m_x' = \frac{1}{k_1''} qa$$ (în punctele $x = 0{,}3\ a,\ y = 0{,}5\ b$ și $x = 0{,}7\ a,\ y = 0{,}5\ b$)

$$m_y = -\frac{1}{k_2} qa$$ (la centru)

$$R_A = -\frac{qa}{k_3}$$ (în colțurile A și B)

$$m_{y,min} = -\frac{1}{k_2'} qa$$ (în punctul $x = 0{,}5\ a;\ y = \beta_1\ b$)

$$R_D = \frac{qa}{k_4}$$ (în colțurile C și D)

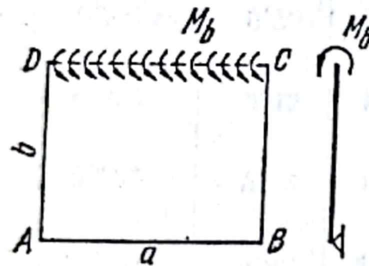
$$m_y' = -\frac{1}{k_2''} qa$$ (în punctele $x = 0{,}3\ a;\ y = 0{,}5\ b$ și $x = 0{,}7\ a;\ y = 0{,}5\ b$)

$$m_{y,min}' = -\frac{1}{k_2'''} qa$$ (în punctele $x = 0{,}3\ a$ și $x = 0{,}7\ a, y = \beta_2 b$)

b/a	k_0	k_1	k_1'	k_1''	k_2	k_2'	β_1	k_2''	k_2'''	β_2	k_3	k_4
0,25	0,1714	16,1	8,16	17,0	465	460	0,55	250	245	0,57	2,64	2,50
0,30	0,1905	13,7	6,89	14,7	200	195	0,55	155	145	0,58	2,80	2,59
0,40	0,2400	11,0	5,60	12,4	89,2	87,8	0,56	82	78,1	0,59	3,21	2,76
0,50	0,2727	9,85	4,91	11,4	52,9	51,5	0,58	55,3	52,5	0,60	3,75	2,94
0,60	0,2927	9,42	4,55	11,1	38,7	37,3	0,60	43,1	40,2	0,62	4,46	3,09
0,70	0,3077	9,45	4,35	11,3	32,3	30,2	0,62	37,1	34,0	0,64	5,38	3,21
0,80	0,3158	9,75	4,22	11,7	28,8	26,3	0,64	34,0	30,3	0,66	6,66	3,31
0,90	0,3158	10,3	4,17	12,6	27,5	24,3	0,66	32,9	28,4	0,69	8,33	3,38
1,00	0,3158	11,1	4,12	13,6	27,2	23,4	0,68	32,8	27,2	0,71	10,4	3,45
1,10	0,3243	12,1	4,11	14,8	27,7	22,7	0,70	33,7	26,3	0,73	13,0	3,51
1,20	0,3243	13,3	4,10	16,3	28,8	22,3	0,72	35,2	26,0	0,75	16,5	3,55
1,30	0,3243	14,7	4,09	18,1	30,4	22,0	0,74	37,2	25,9	0,77	21,3	3,59
1,40	0,3243	16,4	4,08	20,2	32,5	21,8	0,76	39,9	25,8	0,79	27,0	3,64
1,50	0,3243	18,4	4,08	22,6	35,1	21,7	0,78	43,1	25,8	0,81	34,7	3,67

Tabelul VI.15

Placa dreptunghiulară, avînd o latură liberă, și celelalte trei laturi simplu rezemate, încărcată cu moment M_b la marginea $y = b$



$$w = k_0 (1 - \mu^2) \frac{M_b a^2}{E\delta^3}$$

$$m_x = \frac{1}{k_1} M_b \qquad \text{(la centru)}$$

$$m_x = \frac{1}{k_1'} M_b \qquad \text{(la mijlocul laturii libere)}$$

$$m_x' = \frac{1}{k_1''} M_b \qquad \text{(în punctele } x = 0{,}3\,a \text{ și } x = 0{,}7\,a,\ y = 0{,}5\,b)$$

$$m_y = -\frac{1}{k_2} M_b \qquad \text{(la centru)}$$

$$m_y' = -\frac{1}{k_2'} M_b \qquad \text{(în punctele } x = 0{,}3\,a \text{ și } x = 0{,}7\,a,\ y = 0{,}5b)$$

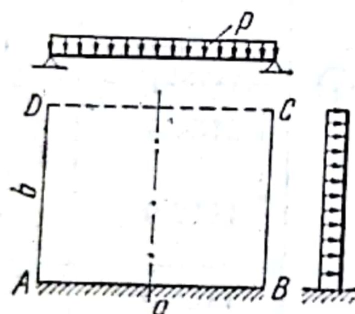
$$R_A = \frac{1}{k_3} M_b \qquad \text{(în colțurile } A \text{ și } B)$$

$$R_D = \frac{1}{k_4} M_b \qquad \text{(în colțurile } C \text{ și } D).$$

b/a	k_0	k_1	k'_1	k''_1	k_2	k'_2	k_3	k_4
0,25	0,7059	4,27	2,07	4,88	2,02	2,14	− 0,87	0,400
0,30	0,6667	4,67	2,14	5,54	2,07	2,27	− 1,21	0,442
0,40	0,6316	5,77	2,30	7,48	2,24	2,57	− 2,45	0,500
0,50	0,5714	8,10	2,47	11,2	2,55	3,03	− 5,59	0,540
0,60	0,5454	12,9	2,63	19,6	3,01	3,65	−21,1	0,572
0,70	0,5217	25,0	2,74	46,5	3,65	4,45	35,7	0,600
0,80	0,5217	110	2,84	−47,5	4,52	5,62	15,9	0,629
0,90	0,5000	−71,5	2,91	−54,0	5,68	7,15	12,8	0,656
1,00	0,5000	−33,1	2,94	−33,3	7,28	9,16	12,3	0,687
1,10	0,5000	−24,5	2,96	−27,0	9,52	11,8	12,7	0,714
1,20	0,4800	−21,1	2,97	−23,8	12,5	15,6	14,1	0,744
1,30	0,4800	−19,4	2,98	−22,7	16,3	21,2	17,2	0,775
1,40	0,4800	−18,9	2,99	−22,5	22,2	29,4	20,4	0,806
1,50	0,4800	−18,9	3,00	−22,5	32,2	41,3	23,0	0,840

Tabelul VI.16

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, având o latură liberă, latura opusă încastrată şi celelalte două laturi paralele simplu rezemate



$$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$$ (la mijlocul laturii libere)

$$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$$ (la centru)

$$m_{y,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$$ (pe axa paralelă cu b, la cota $y = \beta b$)

$$m_y = -\frac{1}{k_2''} pb^2$$ (la mijlocul laturii încastrate)

$$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3} (1-\mu) pb$$ (la mijlocul laturilor AD şi BC)

$$M_{yx} = \pm \frac{1}{k_3'} (1-\mu)$$ (în colţurile C şi D).

b/a	k_1	k'_1	k_2	k'_2	β	k''_2	k_3	k'_3
0,25	73,19	26,43	−12,69			2,26	8,00	8,68
0,3	52,29	18,09	−17,24			2,42	8,32	9,02
0,4	31,74	11,75	−43,58			2,85	9,11	10,48
0,5	24,03	9,75	−4716,98	35,71	0,75	3,41	10,38	13,06
0,6	20,57	9,09	+82,03			4,11	12,21	17,10
0,7	18,92	9,13	56,95			4,94	14,66	23,18
0,8	18,63	9,59	52,20			5,95	17,87	32,15
0,9	18,92	10,36	53,97			7,14	21,99	45,35
1,0	19,70	11,37	59,16	54,48	0;60	8,51	27,24	64,50
1,1	20,68	12,61	67,51			10,06	33,83	92,32
1,2	21,98	14,06	78,68			11,79	42,07	132,53
1,3	23,51	15,72	92,89			13,72	52,32	190,51
1,4	26,24	17,58	110,55			15,82	65,00	273,74
1,5	27,18	19,64	132,38	126,58	0,43	18,13	80,73	393,54

$M_{xy} = \frac{pb^2}{64,50}$ $m_x = \frac{pb^2}{11,37}$ $M_{xy} = -\frac{pb^2}{64,50}$

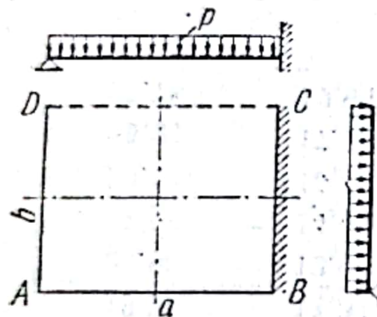
$m_{y,max} = \frac{pb^2}{54,48}$

$M_{xy} = \frac{pb^2}{27,24}$ $m_y = \frac{pb^2}{59,16}$ $m_x = \frac{pb^2}{19,70}$ $M_{xy} = -\frac{pb^2}{27,24}$

$b/a = 1,0$ $m_y = -\frac{pb^2}{8,51}$

Tabelul VI.17

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd o latură liberă, o latură vecină încastrată perfect şi celelalte două laturi simplu rezemate



$$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$$ (la mijlocul laturii libere)

$$m_{x,max} = \frac{1}{k_1''} pb^2$$ (pe latura liberă la distanţa $x = \alpha a$)

$$m_x = -\frac{1}{k_1'''} pb^2$$ (la mijlocul laturii încastrate)

$$m_x = -\frac{1}{k_1^{IV}} pb^2$$ (în colţul C)

$$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$$ (la centru)

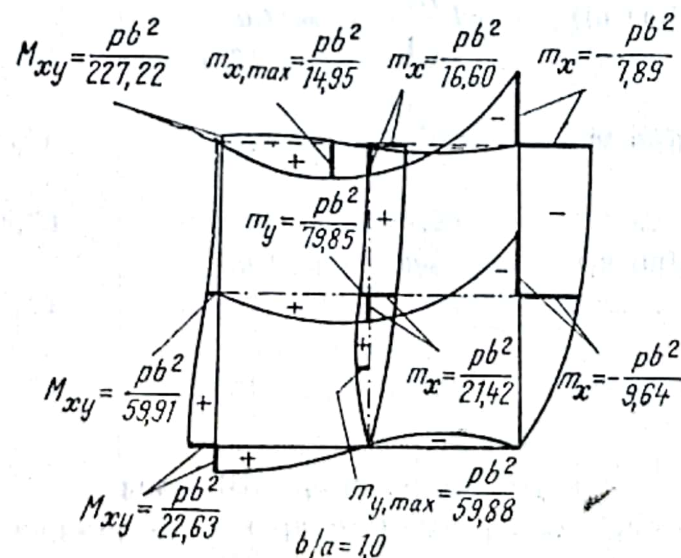
$$m_{y,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$$ (pe axa paralelă cu laturile b, la distanţa $y = \beta b$)

$$M_{xy} = \frac{1}{k_3} (1-\mu)\, pb^2$$ (în colţul A)

$$M_{xy} = \frac{1}{k_3'} (1-\mu)\, pb^2$$ (la mijlocul laturii AD)

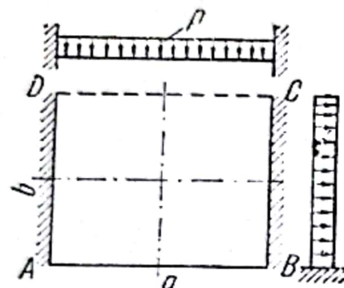
$$M_{xy} = \frac{1}{k_3''} (1-\mu)\, pb^2$$ (în colţul D)

b/a	k_1	k'_1	k''_1	α	k'''_1	k^{IV}_1	k_2	k'_2	β	k_3	k'_3	k''_3
0,25	7,99	4,18	4,18	0,50	1,94	0,80	9,10	9,05	0,49	2,48	2,89	3,35
0,3	8,21	4,41	4,13	0,48	2,31	1,02	10,08	10,05	0,48	3,12	3,78	4,61
0,4	9,04	5,14	4,88	0,44	3,07	1,53	12,97	12,95	0,46	4,61	6,14	8,34
0,5	10,30	6,19	5,91	0,42	3,87	2,18	17,32	17,06	0,44	6,46	9,49	14,82
0,6	11,91	7,58	7,23	0,41	4,77	2,98	23,47	22,64	0,40	8,74	14,24	25,90
0,7	13,85	9,30	8,75	0,40	5,79	3,94	31,98	29,69	0,37	11,44	20,90	44,88
0,8	16,09	11,38	10,49	0,39	6.93	5,08	43,56	38,43	0,32	14,71	30,11	77,29
0,9	18,61	13,81	12,60	0,38	8,22	6,40	59,11	48,50	0,28	18,42	42,74	132,63
1,0	21,42	16,60	14,95	0,38	9,64	7,89	79,85	59,88	0,26	22,63	59,91	227,22
1,1	24,52	19,76	17,85	0,38	11,22	9,56	107,35	72,45	0,24	27,31	83,12	389,56
1,2	27,91	23,29	20,94	0,38	12,95	11,40	143,64	86,22	0,22	32,45	114,37	669,76
1,3	31,57	27,17	24,31	0,38	14,83	13,41	191,39	101,19	0,19	38,06	156,29	1157,5
1,4	35,57	31,41	28,10	0,38	16,88	15,58	253,82	117,36	0,17	44,13	212,37	2016,4
1,5	39,87	35,99	32,18	0,38	19,08	17,92	336,62	134,73	0,15	50,66	287,24	3548,8



Tabelul VI.18

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd o latură liberă, latura opusă simplu rezemată şi celelalte două laturi paralele încastrate perfect



$$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2 \quad \text{(la centru)}$$

$$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2 \quad \text{(la mijlocul laturii libere)}$$

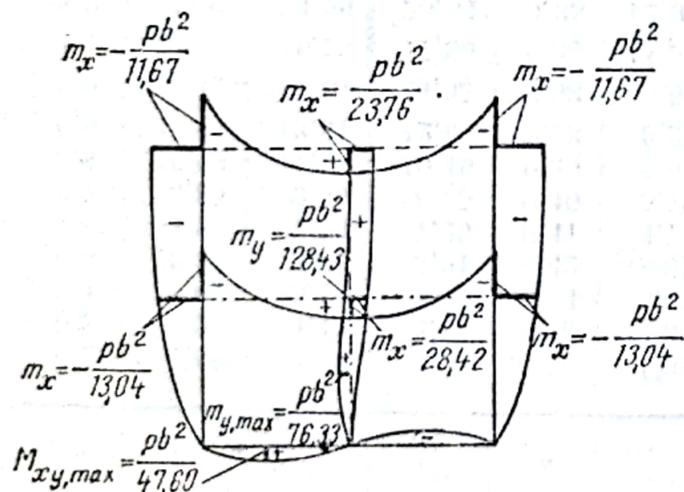
$$m_x = -\frac{1}{k_1''} pb^2 \quad \text{(la mijlocul laturilor încastrate)}$$

$$m_x = -\frac{1}{k_1'''} pb^2 \quad \text{(în colţurile } C \text{ şi } D\text{)}$$

$$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2 \quad \text{(la centru)}$$

$$m_{y\,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$$

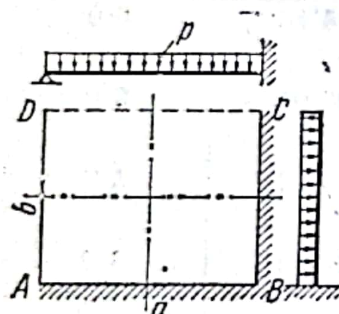
(pe axa paralelă cu laturile b, la distanţa $y = \beta b$ de AB).



b/a	k_1	k'_1	k''_1	k'''_1	k_2	k'_2	β
0,25	8,08	4,30	2,12	0,90	9,72	9,72	0,50
0,	8,48	4,67	2,63	1,20	11,20	11,11	0,48
0,4	9,86	5,80	3,55	1,89	15,55	15,38	0,45
0,5	11,88	7,42	4,65	2,83	22,11	21,36	0,42
0,6	14,34	9,58	5,92	4,04	31,53	29,03	0,37
0,7	17,25	12,27	7,39	5,53	44,96	38,58	0,32
0,8	20,56	15,53	9,06	7,30	63,94	49,61	0,29
0,9	24,28	19,35	10,94	9,35	90,71	61,83	0,25
1,0	28,42	23,76	13,04	11,67	128,43	76,33	0,23
1,1	32,98	28,73	15,39	14,25	181,62	92,36	0,21
1,2	38,00	34,22	17,98	17,07	256,82	110,76	0,20
1,3	43,48	40,24	20,81	20,13	363,36	131,00	0,18
1,4	49,46	46,76	23,90	23,43	515,11	151,93	0,17
1,5	55,91	53,74	27,24	26,96	732,42	174,41	0,15

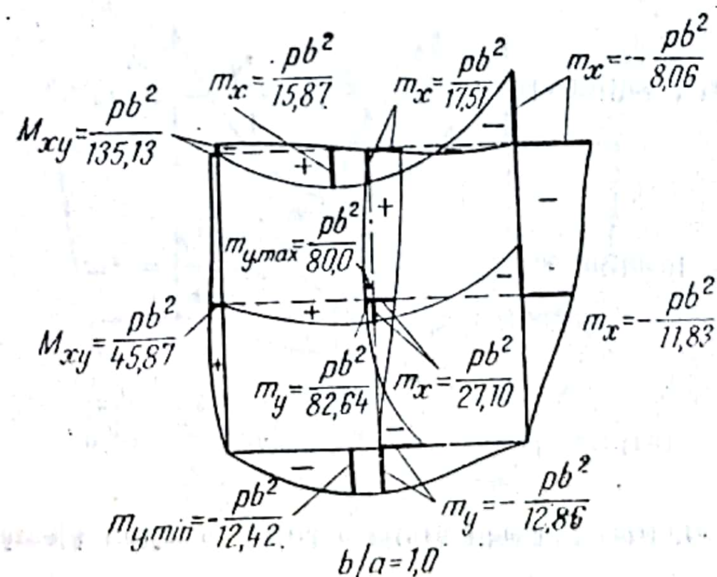
Tabelul VI.19

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, având o latură liberă, o latură vecină simplu rezemată și celelalte două laturi încastrate perfect



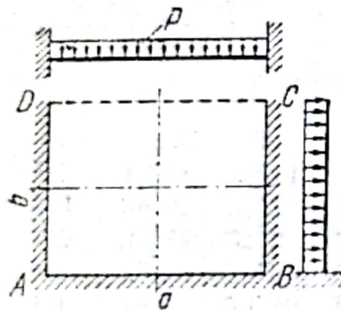
$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$	(la centru)
$m_x = \frac{1}{k'_1} pb^2$	(la mijlocul laturii libere)
$m_{x,max} = \frac{1}{k''_1} pb^2$	(pe latura liberă, la distanța $x = \alpha a$)
$m_x = -\frac{1}{k'''_1} pb^2$	(la mijlocul laturii BC)
$m_x = -\frac{1}{k^{IV}_1} pb^2$	(în colțul C)
$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$	(la centru)
$m_{y,max} = \frac{1}{k'_2} pb^2$	(pe axa paralelă cu laturile b, la distanța $y = \beta b$ de AB)
$m_y = -\frac{1}{k''_2} pb^2$	(la mijlocul laturii AB)
$m_{y,min} = -\frac{1}{k'''_2} pb^2$	(pe latura încastrată AB)
$M_{xy} = \frac{1}{k_3} (1-\mu) pb^2$	(la mijlocul laturii AD)
$M_{xy} = \frac{1}{k'_3} (1-\mu) pb^2$	(în colțul D)

b/a	k_1	k_1'	k_1''	α	k_1'''	k_1^{IV}	k_2	k_2'	β	k_2''	k_2'''	k_3	k_3'
0,25	70,06	22,97	14,08	0,15	6,76	2,11	−14,01	133,33	0,90	2,33	2,33	8,56	8,92
0,3	45,66	16,05	12,98	0,22	6,83	2,20	−20,53	76,92	0,80	2,56	2,56	8,73	9,45
0,4	28,40	11,31	10,86	0,34	7,06	2,50	−72,99	43,47	0,78	3,20	3,16	9,95	11,68
0,5	23,31	10,25	9,80	0,38	7,42	2,96	+169,49	38,40	0,74	4,11	4,02	12,07	15,92
0,6	21,92	10,52	9,80	0,38	7,94	3,60	68,96	40,00	0,70	5,28	5,14	15,29	23,14
0,7	22,12	11,52	10,63	0,38	8,65	4,43	58,82	43,47	0,66	6,74	6,53	19,84	34,96
0,8	23,25	13,07	12,04	0,38	9,53	5,45	61,34	54,05	0,60	8,48	8,20	26,10	54,34
0,9	24,93	15,08	13,69	0,38	10,60	6,66	69,44	67,56	0,58	10,53	10,18	34,60	85,47
1,0	27,10	17,51	15,87	0,38	11,83	8,06	82,64	80,00	0,52	12,86	12,42	45,87	135,13
1,1	29,67	20,36	18,59	0,38	13,23	9,66	100,00	100,00	0,49	15,47	14,97	60,60	217,39
1,2	32,57	23,64	21,27	0,38	14,79	11,44	123,45	120,48	0,45	18,35	17,77	80,00	344,82
1,3	35,84	27,24	24,39	0,38	16,52	13,40	153,84	140,84	0,41	21,51	20,82	105,26	555,55
1,4	39,37	31,25	27,77	0,38	18,40	15,53	196,07	166,66	0,40	24,93	24,13	138,88	909,09
1,5	43,29	35,71	31,25	0,38	20,45	17,84	243,90	200,00	0,40	28,61	27,71	181,81	1 428,57



Tabelul VI.20

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, având o latură liberă şi celelalte trei laturi încastrate perfect



$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$ (la centru)

$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$ (la mijlocul laturii libere)

$m_x = -\frac{1}{k_1''} pb^2$ (la mijlocul laturilor AD şi BC)

$m_x = -\frac{1}{k_1'''} pb^2$ (în colţurile C şi D)

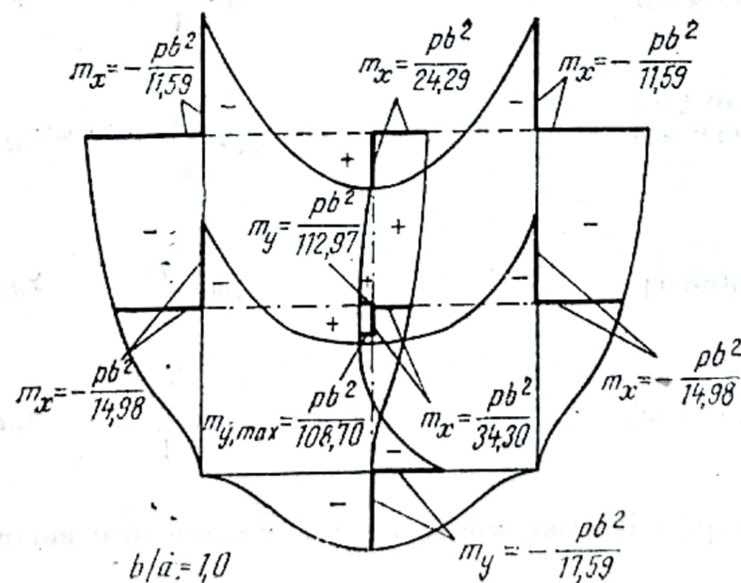
$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$ (la centru)

$m_{y,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$ (pe axa paralelă cu laturile b la distanţa $y = \beta b$ de AB)

$m_y = -\frac{1}{k_2''} pb^2$ (la mijlocul laturii AB)

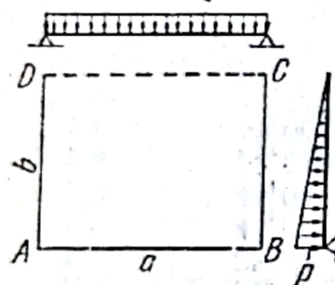
58 - c. 413

b/a	k_1	k_1'	k_1''	k_1'''	k_2	k_2'		k_3'
0,25	57,08	19,24	6,79	2,15	− 16,07	104,17	0,88	2,41
0,3	37,91	13,91	6,89	2,27	− 26,67	62,46	0,80	2,71
0,4	25,43	10,69	7,26	2,71	−267,52	43,24	0,75	3,61
0,5	22,78	10,64	7,89	3,43	+ 88,06	41,67	0,70	4,93
0,6	23,16	11,87	8,79	4,45	62,86	48,00	0,65	6,66
0,7	24,92	13,94	9,98	5,77	63,84	58,45	0,60	8,81
0,8	27,49	16,73	11,41	7,41	73,88	72,73	0,55	11,34
0,9	30,65	20,18	13,08	9,35	89,55	89,55	0,50	14,29
1,0	34,30	24,29	14,98	11,59	112,97	108,70	0,45	17,59
1,1	38,42	29,02	17,12	14,11	145,48	131,53	0,40	21,26
1,2	43,01	34,35	19,50	16,90	189,93	156,52	0,35	25,28
1,3	48,06	40,26	22,13	19,94	250,44	183,69	0,32	29,66
1,4	53,61	46,71	25,03	23,22	332,89	213,04	0,30	34,39
1,5	59,66	53,69	28,14	26,73	445,63	244,56	0,28	39,47



Tabelul VI.21

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, având o latură liberă și celelalte trei laturi simplu rezemate



$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$ (la centru)

$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$ (la mijlocul laturii libere)

$m_{x,max} = \frac{1}{k_1''} pb^2$ (pe axa paralelă cu b, la cota $y = \beta_1 b$ față de AB).

$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$ (la centru)

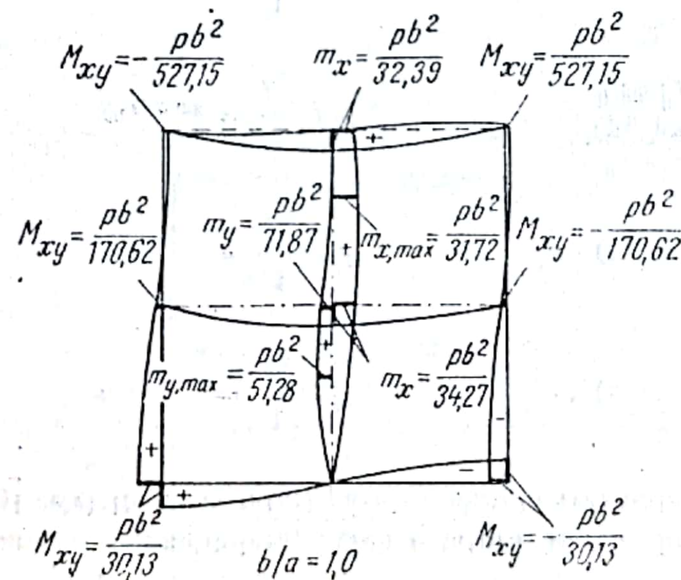
$m_{y,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$ (pe axa paralelă cu b, la cota $y = \beta_2 b$ față de AB).

$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3} (1 - \mu) pb^2$ (în colțurile A și B)

$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3'} (1 - \mu) pb^2$ (la mijlocul laturilor AD și BC)

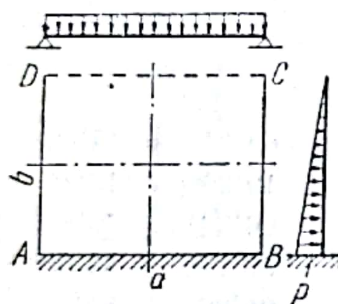
$M_{xy} \quad \pm \frac{1}{} (1 - \mu) pb$ (în colțurile C și D)

b/a	k_1	k_1'	k_1''	β_1	k_2	k_2'	β_2	k_3	k_3'	k_3''
0,25	23,50	12,07	12,07	1,0	16,65	16,22	0,4	6,41	7,90	9,43
0,3	23,24	12,29	12,29	1,0	17,45	16,89	0,4	7,46	10,10	12,70
0,4	23,17	13,17	13,17	1,0	20,04	19,13	0,4	9,97	15,57	22,68
0,5	23,78	14,67	14,67	1,0	23,99	22,45	0,4	12,64	23,11	40,67
0,6	24,99	16,79	16,79	1,0	29,45	26,67	0,35	15,54	33,81	77,29
0,7	26,71	19,56	19,56	1,0	36,62	31,61	0,32	18,74	49,37	168,38
0,8	28,87	23,03	23,03	1,0	45,83	37,63	0,30	22,24	72,74	558,97
0,9	31,40	27,28	27,28	1,0	57,43	43,78	0,28	26,04	109,37	−1677,85
1,0	34,27	32,39	31,72	0,8	71,87	51,28	0,25	30,13	170,62	− 527,15
1,1	37,44	38,46	35,91	0,65	89,69	60,50	0,23	34,49	284,50	− 394,32
1,2	40,89	45,62	40,13	0,6	111,57	70,24	0,22	39,10	544,37	− 359,97
1,3	44,62	53,95	44,47	0,55	138,31	79,82	0,20	43,96	1557,63	− 358,55
1,4	48,61	63,61	48,61	0,5	170,85	89,91	0,19	49,08	−34482,76	− 374,25
1,5	52,87	74,69	52,87	0,5	210,44	100,90	0,18	54,45	− 1273,88	− 401,61



Tabelul VI.22

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd o latură liberă, latura opusă încastrată perfect și celelalte două laturi paralele simplu rezemate



$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$ (la centru)

$m_x = \frac{1}{k'_1} pb^2$ (la mijlocul laturii libere)

$m_{x,\,max} = \frac{1}{k''_1} pb^2$ (pe axa paralelă cu b, la cota $y = \beta_1 b$ față de AB)

$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$ (la centru)

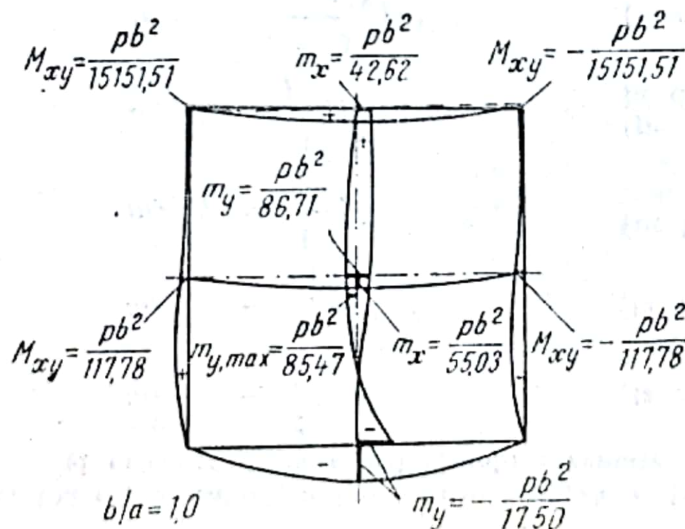
$m_{y,\,max} = \frac{1}{k'_2} pb^2$ (pe axa paralelă cu b, la cota $y = \beta_2 b$ față de AB)

$m_y = -\frac{1}{k''_2} pb^2$ (la mijlocul laturii încastrate)

$M_{xy} = \pm \frac{1}{k_3} (1 - \mu) pb^2$ (la mijlocul laturilor AD și BC)

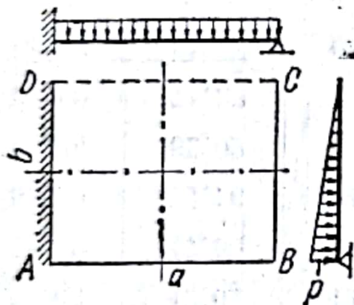
$M_{xy} = \pm \frac{1}{k'_3} (1 - \mu) pb^2$ (în colțurile C și D)

b/a	k_1	k_1'	k_1''	β_1	k_2	k_2'	β_2	k_2''	k_3	k_3'
0,25	252,02	94,69	94,69	1,0	−114,26			6,59	30,41	36,98
0,3	184,43	65,93	65,93	1,0	−299,04			6,94	31,57	39,11
0,4	109,89	42,79	42,79	1,0	175,04			7,82	34,29	47,25
0,5	80,54	35,19	35,19	1,0	87,81	68,49	0,62	8,94	39,06	63,33
0,6	66,03	32,72	32,72	1,0	71,44			10,25	46,49	90,06
0,7	59,21	32,92	32,92	1,0	68,28			11,74	56,67	142,57
0,8	55,99	34,74	34,74	1,0	70,92			13,46	70,79	257,86
0,9	54,87	37,87	37,87	1,0	77,27			15,37	90,35	617,66
1,0	55,03	42,62	42,62	1,0	86,71	85,47	0,45	17,50	117,78	
1,1	56,29	47,55	47,55	1,0	99,19			19,75	157,18	−1121,07
1,2	58,20	54,16	54,16	1,0	114,86			22,18	215,47	− 677,50
1,3	60,66	62,02			134,16			24,79	306,18	− 559,59
1,4	63,60	71,23			157,55			27,53	425,35	− 524,10
1,5	66,99	81,98	65,59	0,6	185,94	144,92	0,35	30,47	753,01	− 521,10



Tabelul VI.23

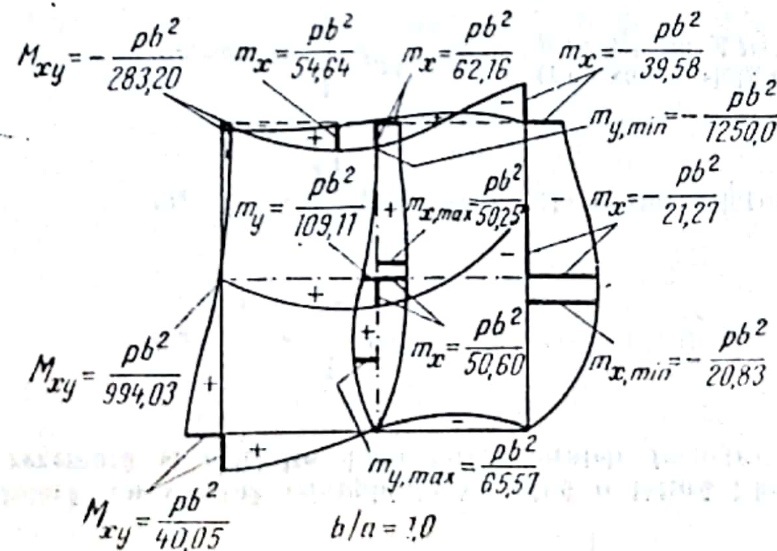
Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd o latură liberă, o latură vecină încastrată perfect și celelalte două laturi simplu rezemate



$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$	(la centru)
$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$	(la mijlocul laturii libere)
$m_{x,\,max} = \frac{1}{k_1''} pb^2$	(pe latura liberă la distanța $x = \alpha a$ de D)
$m_{x,\,max} = \frac{1}{k_1'''} pb^2$	(pe axa paralelă cu laturile b, la distanța $y = \beta_1 b$ de AB)
$m_x = -\frac{1}{k_1^{IV}} pb^2$	(la mijlocul laturii încastrate)
$m_x = -\frac{1}{k_1^{V}} pb^2$	(în colțul C)
$m_x = -\frac{1}{k_1^{VI}} pb^2$	(pe latura încastrată, la distanța $y = \beta_2 b$ de A)
$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$	(la centru)
$m_{y,\,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$	(pe axa paralelă cu laturile b, la distanța $y = \beta_3 b$ de AB)
$M_{xy} = \frac{1}{k_3}(1-\mu) pb^2$	(în colțul A)
$M_{xy} = \frac{1}{k_3'}(1-\mu) pb^2$	(la mijlocul laturii AD)
$M_{xy} = \frac{1}{k_3''}(1-\mu) pb^2$	(în colțul D)

Tabelul VI.23 (continuare)

b/a	k_1	k'_1	k''_1	α	k'''_1	β_1	k_1^{IV}	k_1^{V}	k_1^{VI}	β_2	k_2	k'_2	β_3	k_3	k'_3	k''_3
0,25	23,80	12,50	12,50	0,50	12,50	1,0	5,27	2,56	2,56	1,0	17,53	16,98	0,40	7,10	8,99	11,05
0,3	24,18	13,19	11,68	0,47	13,19	1,0	6,16	3,31	3,31	1,0	18,95	18,18	0,39	8,41	11,90	15,78
0,4	25,88	15,44	14,93	0,44	15,44	1,0	7,89	5,17	5,17	1,0	23,12	21,62	0,37	11,71	19,94	32,34
0,5	28,57	18,88	17,98	0,42	18,88	1,0	9,64	7,72	7,72	1,0	29,33	26,31	0,34	15,42	32,66	72,33
0,6	31,95	23,67	22,92	0,40	23,67	1,0	11,53	11,18	11,18	1,0	37,54	31,71	0,31	19,56	53,63	212,89
0,7	35,89	30,05	28,99	0,39	30,05	1,0	13,60	15,82	13,49	0,53	48,79	38,67	0,30	24,12	90,25	11395,3
0,8	40,32	38,51	36,05	0,39	37,20	0,77	15,91	21,91	15,80	0,49	63,72	46,54	0,27	29,08	151,76	−426,9
0,9	45,22	48,92	44,50	0,38	43,78	0,63	18,46	29,73	18,40	0,45	83,37	55,10	0,25	34,39	327,93	−303,3
1,0	50,60	62,16	54,64	0,38	50,25	0,55	21,27	39,58	20,83	0,42	109,11	65,57	0,23	40,05	994,03	−283,2
1,1	56,47	78,51	66,85	0,38	56,27	0,51	24,35	51,70	23,58	0,39	142,68	77,56	0,22	46,07	−3224,1	−293,9
1,2	62,86	98,41	81,58	0,38	62,74	0,48	27,76	66,34	26,64	0,37	186,50	90,56	0,20	52,45	−894,4	−321,7
1,3	69,80	122,29	100,00	0,38	69,54	0,45	31,38	83,71	29,28	0,35	243,51	104,32	0,19	59,22	−622,9	−362,8
1,4	77,30	150,58	122,50	0,38	75,52	0,43	35,34	103,98	32,39	0,34	317,61	119,51	0,18	66,39	−588,0	−416,3
1,5	85,40	183,65	153,58	0,38	82,26	0,41	39,62	127,31	35,43	0,33	414,28	136,36	0,17	73,98	−502,4	−481,9



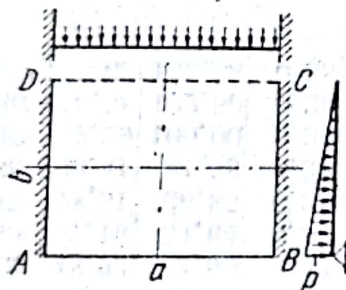
Tabelul VI.24

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd o latură liberă, latura opusă simplu rezemată şi celelalte două laturi paralele încastrate perfect

$$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$$ (la centru)

$$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$$ (la mijlocul laturii libere)

$$m_{x,max} = \frac{1}{k_1''} pb^2$$ (pe axa paralelă cu laturile b, la distanţa $y = \beta_1 b$ de AB)



$$m_x = -\frac{1}{k_1'''} pb^2$$ (la mijlocul laturilor încastrate)

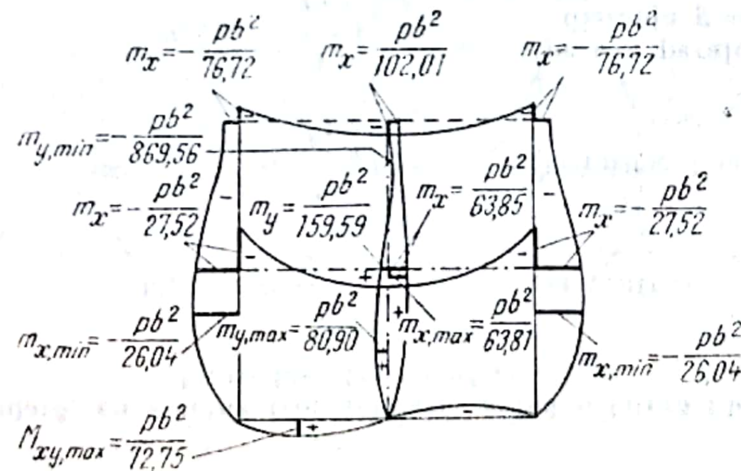
$$m_x = -\frac{1}{k_1^{IV}} pb^2$$ (în colţurile C şi D)

$$m_x = -\frac{1}{k_1^{V}} pb^2$$ (pe laturile încastrate, la distanţa $y = \beta_2 b$ de AB)

$$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$$ (la centru)

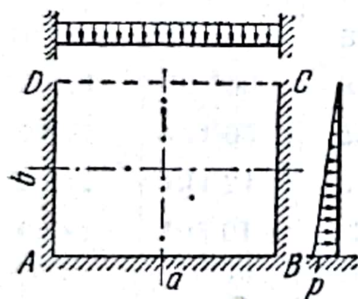
$$m_{y,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$$ (pe axa paralelă cu laturile b, la distanţa $y = \beta_3 b$ de AB)

b/a	k_1	k_1'	k_1''	β_1	k_1'''	k_1^{IV}	k_1^{V}	β_2	k_2	k_2'	β_3
0,25	24,03	12,82	12,82	1,0	5,73	2,92	2,92	1,0	18,31	17,66	0,40
0,3	24,91	13,99	13,99	1,0	6,89	3,95	3,95	1,0	20,32	19,31	0,39
0,4	28,05	17,52	17,52	1,0	8,96	6,59	6,59	1,0	26,03	23,88	0,37
0,5	32,42	22,99	22,99	1,0	11,27	10,66	10,66	1,0	34,26	29,48	0,34
0,6	37,51	31,12	31,12	1,0	13,84	16,56	13,74	0,53	45,80	36,54	0,31
0,7	43,24	41,87	40,00	0,75	16,49	25,54	16,44	0,48	61,97	45,11	0,28
0,8	49,47	56,66	48,30	0,60	19,91	37,94	19,63	0,44	84,48	55,41	0,26
0,9	56,31	76,40	56,05	0,53	23,51	54,77	22,75	0,40	115,83	67,21	0,24
1,0	63,85	102,01	63,81	0,48	27,52	76,72	26,04	0,37	159,59	80,90	0,22
1,1	72,17	134,54	71,38	0,45	31,99	104,40	29,36	0,35	220,76	95,65	0,20
1,2	81,37	174,92	79,33	0,42	36,93	137,99	33,10	0,34	306,57	112,50	0,19
1,3	91,51	223,90	87,33	0,40	42,38	177,59	37,06	0,33	427,63	131,41	0,18
1,4	102,65	282,05	95,84	0,38	48,34	223,21	41,17	0,32	598,65	151,93	0,17
1,5	114,85	349,97	104,65	0,36	54,84	274,79	45,63	0,31	842,38	173,74	0,15



Tabelul VI.25

Placa dreptunghiulară, cu sarcină triunghiulară, avînd o latură liberă și celelalte trei laturi încastrate perfect



$m_x = \frac{1}{k_1} pb^2$ (la centru)

$m_x = \frac{1}{k_1'} pb^2$ (la mijlocul laturii libere)

$m_{x,max} = \frac{1}{k_1''} pb^2$ (pe axa paralelă cu laturile b, la distanța $y = \beta_1 b$ de AB)

$m_x = -\frac{1}{k_1'''} pb^2$ (la mijlocul laturilor AD și BC)

$m_x = -\frac{1}{k_1^{IV}} pb^2$ (în colțurile C și D)

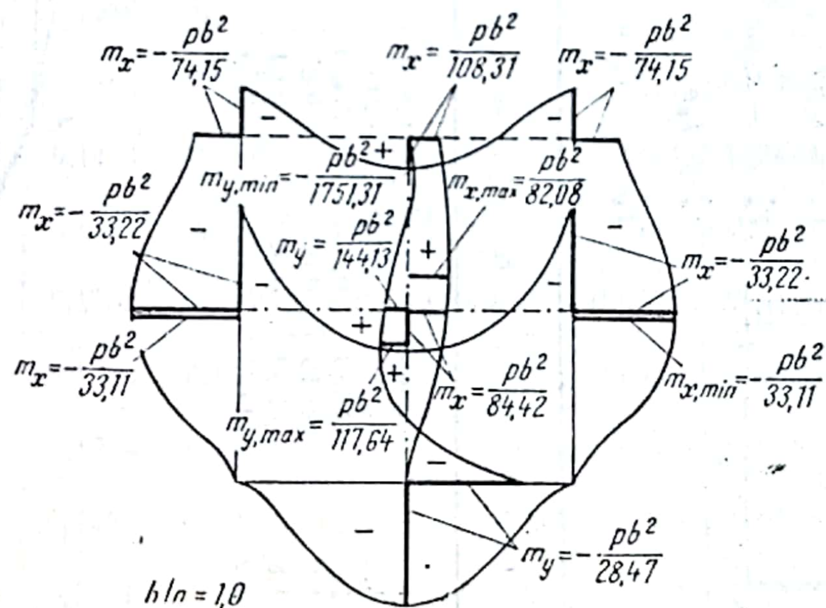
$m_{x,min} = -\frac{1}{k_1^{V}} pb^2$ (pe laturile AD și BC, la distanța $y = \beta_2 b$ de AB)

$m_y = \frac{1}{k_2} pb^2$ (la centru)

$m_{y,max} = \frac{1}{k_2'} pb^2$ (pe axa paralelă cu laturile b, la distanța $y = \beta_3 b$ de AB)

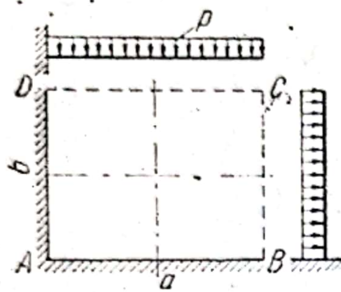
$m_y = -\frac{1}{k_2''} pb^2$ (la mijlocul laturii AB)

b/a	k_1	k_1'	k_1''	β_1	k_1'''	k_1^{IV}	k_1^{V}	β_2	k_2	k_2'	β_3	k_2''
0,25	215,52	71,51	71,51	1,0	18,24	8,84	8,84	1,0	−243,19	156,25	0,75	6,92
0,3	138,26	51,25	51,25	1,0	18,44	9,40	9,40	1,0	418,59	103,44	0,70	7,56
0,4	87,67	38,99	38,99	1,0	19,12	11,44	11,44	1,0	91,32	72,73	0,65	9,35
0,5	74,18	38,86	38,86	1,0	20,29	14,98	14,98	1,0	70,80	69,04	0,60	11,68
0,6	71,01	43,08	43,94	1,0	21,96	20,43	20,43	1,0	70,89	70,89	0,50	14,43
0,7	71,87	53,49	53,08	1,0	24,12	28,35	23,59	0,60	79,16	79,03	0,47	17,49
0,8	74,79	66,39	64,13	0,8	26,73	39,43	26,56	0,55	93,70	86,48	0,45	20,86
0,9	79,06	84,52	73,74	0,7	29,76	54,44	29,76	0,50	114,88	102,52	0,40	24,25
1,0	84,42	108,31	82,08	0,6	33,22	74,15	33,11	0,47	144,13	117,64	0,35	28,47
1,1	90,84	138,85	90,30	0,55	37,13	99,18	37,00	0,45	183,85	137,49	0,32	32,75
1,2	98,29	177,09	98,29	0,50	41,49	129,92	41,14	0,43	237,53	160,03	0,31	37,37
1,3	106,80	224,06	105,63	0,47	46,33	166,56	45,36	0,40	309,60	185,70	0,30	42,37
1,4	116,40	280,50	115,30	0,45	51,68	209,03	49,50	0,38	407,83	213,40	0,30	47,68
1,5	127,13	346,98	125,02	0,42	57,56	257,20	54,22	0,36	541,13	241,95	0,28	53,28



Tabelul VI.26

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd două laturi vecine încastrate și celelalte două laturi libere



$m_x = -k_1 pa^2$ (în colțul D)

$m_x = +k_2 pa^2$ (în lungul laturii CD)

$m_y = -k_3 pa^2$ (în colțul B)

$m_y = +k_4 pa^2$ (în lungul laturii BC)

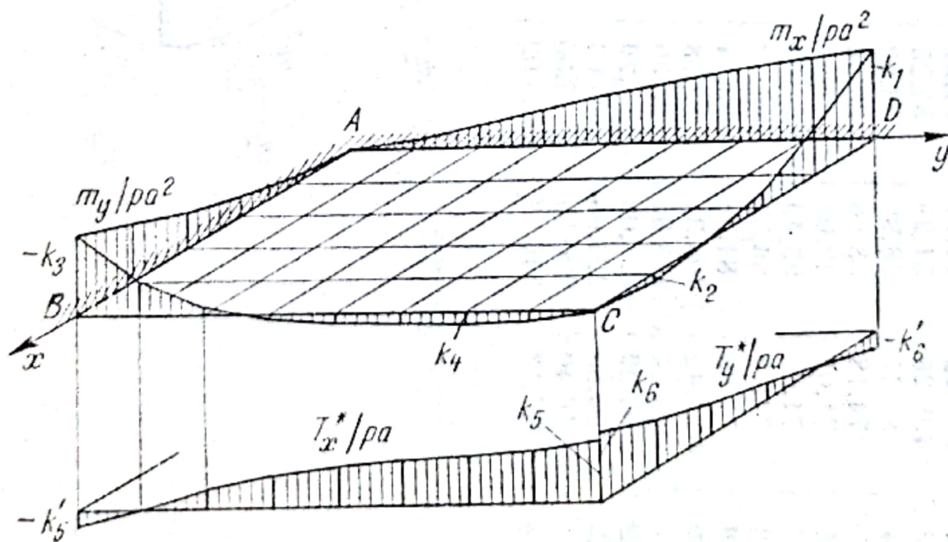
$T_x^* = k_5 pa$ (în colțul C)

$T_x^* = -k_5' pa$ (în colțul B)

$T_y^* = k_6 pa$ (în colțul C)

$T_y^* = -k_6' pa$ (în colțul D)

b/a	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_5'	k_6	k_6'
1,0	0,2660	0,0296	0,2660	0,0296	0,972	0,236	0,972	0,236
1,2	0,3236	0,0348	0,3115	0,0461	1,100	0,243	1,065	0,243
1,4	0,3683	0,0319	0,3455	0,0521	1,195	0,248	1,111	0,248
1,6	0,4016	0,0266	0,3687	0,0561	1,260	0,252	1,124	0,252
1,8	0,4260	0,0203	0,3864	0,0572	1,304	0,253	1,118	0,253
2,0	0,4438	0,0139	0,3975	0,0567	1,333	0,254	1,103	0,254



Tabelul VI.27

Placa dreptunghiulară simplu rezemată pe contur

A. Momentele încovoietoare şi săgeata în secţiunea $x=a/2$. Cazul $b \leqslant a$

$$w = k(1-\mu^2)\frac{Pa^3}{E\delta^3}$$

b/a \ y/b	m_x/Pa					m_y/Pa					$k=$
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5
1,0	0,0507	0,0782	0,0962	0,1063	0,1097	0,0351	0,0485	0,0553	0,0582	0,0592	0,0809
1,1	0,0565	0,0872	0,1075	0,1189	0,1226	0,0362	0,0487	0,0545	0,0566	0,0574	0,0962
1,2	0,0620	0,0960	0,1183	0,1304	0,1351	0,0370	0,0484	0,0503	0,0543	0,0547	0,1110
1,3	0,0674	0,1043	0,1286	0,1423	0,1468	0,0376	0,0477	0,0501	0,0513	0,0514	0,1250
1,4	0,0726	0,1122	0,1383	0,1528	0,1577	0,0380	0,0469	0,0488	0,0482	0,0479	0,1381
1,5	0,0775	0,1196	0,1472	0,1626	0,1677	0,0384	0,0458	0,0464	0,0448	0,0443	0,1501
1,6	0,0821	0,1266	0,1555	0,1719	0,1767	0,0387	0,0447	0,0440	0,0411	0,0407	0,1611
1,7	0,0866	0,1331	0,1632	0,1796	0,1850	0,0390	0,0435	0,0415	0,0382	0,0371	0,1711
1,8	0,0908	0,1392	0,1702	0,1869	0,1924	0,0392	0,0424	0,0392	0,0351	0,0338	0,1802
1,9	0,0949	0,1449	0,1766	0,1936	0,1990	0,0394	0,0412	0,0369	0,0321	0,0306	0,1882
2,0	0,0987	0,1502	0,1824	0,1995	0,2050	0,0396	0,0400	0,0346	0,0292	0,0275	0,1955
2,5	0,1160	0,1724	0,2051	0,2213	0,2263	0,0400	0,0344	0,0251	0,0178	0,0157	

Tabelul VI.27 (continuare)

B. Momentele încovoietoare în secțiunea $x=a/2$. Cazul $a \geq b$

a/b \ v/b	m_x/Pb					m_y/Pb				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1,0	0,0507	0,0782	0,0962	0,1063	0,1097	0,0351	0,0485	0,0553	0,0582	0,0592
1,1	0,0501	0,0768	0,0943	0,1041	0,1073	0,0372	0,0524	0,0607	0,0646	0,0659
1,2	0,0493	0,0755	0,0925	0,1019	0,1050	0,0389	0,0557	0,0652	0,0699	0,0715
1,3	0,0487	0,0742	0,0907	0,0999	0,1028	0,0403	0,0584	0,0689	0,0742	0,0761
1,4	0,0480	0,0731	0,0892	0,0981	0,1010	0,0415	0,0605	0,0719	0,0777	0,0797
1,5	0,0476	0,0722	0,0879	0,0966	0,0993	0,0424	0,0622	0,0743	0,0805	0,0827
1,6	0,0472	0,0713	0,0868	0,0953	0,0981	0,0431	0,0636	0,0761	0,0827	0,0850
1,7	0,0468	0,0707	0,0859	0,0942	0,0970	0,0436	0,0647	0,0776	0,0844	0,0868
1,8	0,0465	0,0702	0,0852	0,0934	0,0961	0,0441	0,0655	0,0788	0,0858	0,0882
1,9	0,0643	0,0697	0,0846	0,0927	0,0954	0,0444	0,0662	0,0796	0,0868	0,0893
2,0	0,0461	0,0695	0,0842	0,0922	0,0948	0,0447	0,6666	0,0803	0,0876	0,0901
2,5	0,0457	0,0686	0,0830	0,0908	0,0933	0,0453	0,0678	0,0820	0,0896	0,0922

Valorile precedente se referă la secţiunea $x = a/2$ (în lungul sarcinii liniare). Valorile precedente sînt valabile pentru secţiunea $x = a/2$ şi în cazul aplicării a două sarcini liniare P la sferturi (fig. VI.15, *b*).

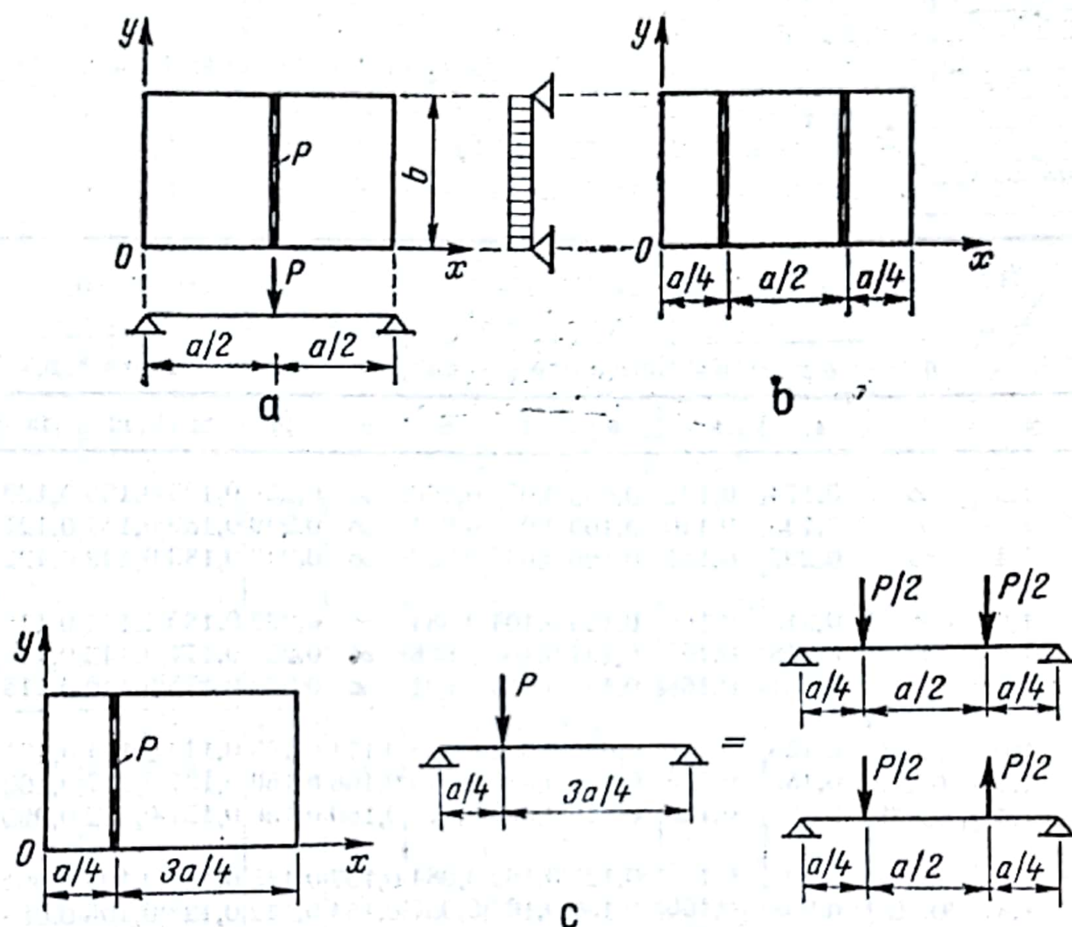


Fig. VI.15

Cazul unei singure sarcini la sfert poate fi obţinut prin suprapunerea efectelor (v. fig. VI, 15, *c*).

În cartea lui Stiglat şi Wippel [8], p. 72—86 sînt date tabele pentru :

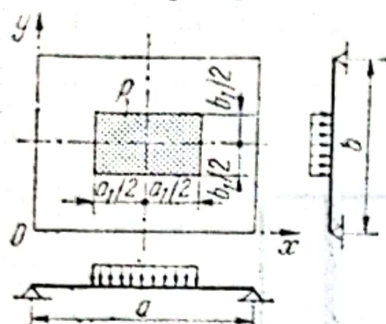
— placa cu două laturi vecine încastrate şi celelalte două laturi libere, încărcată cu sarcină liniară, cu momente uniforme în lungul unei laturi libere, cu o forţă concentrată în vîrful liber, cu sarcină triunghiulară ;

— placa cu o latură încastrată, o latură vecină simplu rezemată şi celelalte două laturi libere, încărcată cu aceleaşi tipuri de încărcări ;

— placa cu două laturi vecine simplu rezemate şi celelalte două laturi libere, încărcată cu aceleaşi tipuri de încărcări.

Tabelul VI.28

Placa dreptunghiulară, cu sarcina parțial distribuită, simplu rezemată pe contur



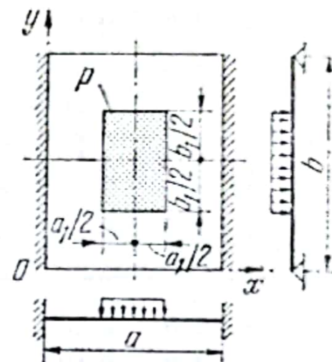
$P = pa_1b_1$ (valori la centrul plăcii)

b_1/a	a_1/a / b/a	m_x/P						m_y/P					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1,0	∞	0,174	0,122	0,093	0,073	0,060	∞	0,256	0,196	0,160	0,133	0,109
	1,2	∞	0,193	0,140	0,109	0,087	0,071	∞	0,249	0,189	0,154	0,127	0,104
	1,4	∞	0,207	0,151	0,120	0,097	0,080	∞	0,243	0,183	0,148	0,122	0,100
	1,6	∞	0,213	0,160	0,126	0,104	0,084	∞	0,232	0,180	0,144	0,119	0,098
	1,8	∞	0,218	0,165	0,131	0,108	0,088	∞	0,229	0,177	0,142	0,117	0,096
	2,0	∞	0,221	0,168	0,133	0,110	0,091	∞	0,228	0,175	0,140	0,115	0,095
0,2	1,0	0,256	0,163	0,118	0.090	0,072	0,058	0.174	0,163	0,143	0,124	0,105	0,087
	1,2	0,276	0,183	0,136	0,107	0,086	0,070	0,166	0,156	0,137	0,117	0,100	0,083
	1,4	0,289	0,195	0,148	0,118	0,096	0,079	0,160	0,150	0,131	0,112	0,095	0,079
	1,6	0,294	0,203	0,155	0,125	0,102	0,084	0,157	0,145	0,127	0,108	0,092	0,076
	1,8	0,299	0,208	0,160	0,130	0,107	0,087	0,154	0,142	0,123	0,106	0,088	0,074
	2.0	0,274	0,210	0,163	0,132	0,110	0,090	0,159	0,141	0,122	0,103	0,086	0,072
0,4	1,0	0,196	0,143	0,108	0,084	0,068	0,055	0,122	0,118	0,108	0,096	0,083	0,069
	1,2	0,216	0,163	0,127	0,101	0,082	0,068	0,115	0,111	0,102	0,090	0,078	0,065
	1,4	0,229	0,176	0,139	0,113	0,092	0,076	0,109	0,104	0,096	0,085	0,073	0,061
	1,6	0,237	0,186	0,147	0,119	0,099	0,082	0,103	0,100	0,092	0,081	0,069	0,058
	1,8	0,243	0,190	0,152	0,125	0,103	0,085	0,100	0,097	0,088	0,078	0,067	0,055
	2,0	0,245	0,193	0,156	0,127	0,106	0,086	0,098	0,095	0,086	0,077	0,066	0,054
0,6	1,0	0,160	0,124	0,096	0,076	0,061	0,050	0,093	0,090	0,084	0,076	0,066	0,056
	1,2	0,180	0,144	0,115	0,094	0,077	0,063	0,086	0,084	0,078	0,071	0,062	0,052
	1,4	0,193	0,157	0,128	0,106	0,087	0,072	0,080	0,077	0,072	0,065	0,057	0,048
	1,6	0,204	0,166	0,138	0,114	0,094	0,078	0,075	0,072	0,068	0,061	0,053	0,045
	1,8	0,209	0,172	0,142	0,118	0,098	0,081	0,070	0,069	0,065	0,059	0,050	0,043
	2,0	0,213	0,175	0,145	0,120	0,101	0,083	0,069	0,067	0,063	0,056	0,049	0,042

Tabelul VI.28 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0,8	1,0	0,133	0,105	0,083	0,066	0,054	0,044	0,073	0,072	0,068	0,061	0,054	0,045
	1,2	0,155	0,126	0,103	0,084	0,070	0,057	0,067	0,066	0,062	0,056	0,050	0,042
	1,4	0,168	0,140	0,116	0,097	0,081	0,066	0,061	0,060	0,056	0,051	0,045	0,038
	1,6	0,179	0,150	0,126	0,106	0,087	0,072	0,056	0,055	0,051	0,047	0,042	0,035
	1,8	0,183	0,156	0,131	0,110	0,093	0,076	0,053	0,051	0,048	0,045	0,039	0,032
	2,0	0,189	0,159	0,134	0,114	0,095	0,078	0,050	0,049	0,047	0,042	0,037	0,032
1,0	1,0	0,109	0,087	0,069	0,056	0,045	0,037	0,060	0,058	0,055	0,050	0,044	0,037
	1,2	0,132	0,109	0,090	0,074	0,062	0,051	0,054	0,053	0,051	0,046	0,041	0,034
	1,4	0,148	0,125	0,105	0,088	0,073	0,061	0,048	0,048	0,045	0,041	0,036	0,030
	1,6	0,158	0,134	0,114	0,097	0,081	0,067	0,044	0,043	0,040	0,037	0,033	0,028
	1,8	0,165	0,141	0,120	0,102	0,085	0,070	0,039	0,039	0,037	0,033	0,030	0,026
	2,0	0,167	0,144	0,124	0,104	0,087	0,074	0,038	0,038	0,035	0,033	0,029	0,023
1,2	1,2	0,113	0,093	0,077	0,064	0,053	0,044	0,046	0,045	0,042	0,039	0,034	0,029
	1,4	0,129	0,110	0,093	0,079	0,066	0,053	0,039	0,039	0,038	0,034	0,030	0,026
	1,6	0,141	0,120	0,102	0,087	0,074	0,062	0,035	0,035	0,033	0,030	0,027	0,021
	1,8	0,147	0,127	0,110	0,095	0,079	0,066	0,031	0,031	0,030	0,027	0,023	0,019
	2,0	0,151	0,132	0,114	0,098	0,083	0,068	0,029	0,028	0,027	0,024	0,021	0,018
1,4	1,4	0,113	0,096	0,081	0,068	0,057	0,048	0,034	0,034	0,032	0,029	0,026	0,022
	1,6	0,125	0,108	0,093	0,079	0,066	0,055	0,029	0,029	0,027	0,026	0,022	0,018
	1,8	0,132	0,116	0,110	0,085	0,072	0,060	0,026	0,026	0,024	0,021	0,019	0,016
	2,0	0,138	0,120	0,104	0,091	0,076	0,064	0,022	0,022	0,021	0,019	0,017	0,014
1,6	1,6	0,111	0,096	0,082	0,070	0,061	0,049	0,026	0,026	0,023	0,021	0,019	0,016
	1,8	0,119	0,109	0,090	0,078	0,066	0,054	0,021	0,021	0,020	0,019	0,017	0,014
	2,0	0,125	0,110	0,096	0,082	0,069	0,059	0,019	0,018	0,017	0,016	0,014	0,012
1,8	1,8	0,108	0,094	0,082	0,070	0,060	0,049	0,019	0,019	0,018	0,016	0,014	0,012
	2,0	0,113	0,100	0,087	0,076	0,064	0,053	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,010
2,0	2,0	0,102	0,091	0,079	0,068	0,059	0,048	0,014	0,014	0,014	0,012	0,011	0,010

Placa dreptunghiulară, cu sarcină parțial distribuită, avînd două
A. Laturile



b_1/a	a_1/a / b/a	m_{xc}/P							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,0	∞	0,158	0,105	0,077	0,059	0,047	0,158	0,156
	1,2	∞	0,163	0,108	0,079	0,061	0,049	0,153	0,151
	1,4	∞	0,163	0,108	0,079	0,061	0,049	0,143	0,141
	1,6	∞	0,161	0,110	0,082	0,062	0,048	0,168	0,168
	1,8	∞	0,160	0,109	0,080	0,061	0,049	0,168	0,168
	2,0	∞	0,161	0,110	0,079	0,060	0,049	0,168	0,168
0,2	1,0	0,242	0,146	0,101	0,074	0,057	0,045	0,155	0,153
	1,2	0,246	0,150	0,104	0,077	0,059	0,047	0,151	0,149
	1,4	0,246	0,151	0,105	0,077	0,059	0,047	0,141	0,139
	1,6	0,241	0,150	0,105	0,079	0,060	0,048	0,165	0,165
	1,8	0,241	0,149	0,106	0,078	0,061	0,049	0,165	0,164
	2,0	0,252	0,149	0,105	0,078	0,060	0,049	0,164	0,164
0,4	1,0	0,181	0,127	0,092	0,069	0,053	0,043	0,147	0,146
	1,2	0,185	0,132	0,096	0,072	0,056	0,045	0,145	0,144
	1,4	0,187	0,132	0,097	0,073	0,056	0,045	0,138	0,136
	1,6	0,185	0,133	0,097	0,074	0,057	0,046	0,155	0,154
	1,8	0,186	0,133	0,098	0,074	0,058	0,046	0,155	0,154
	2,0	0,185	0,133	0,098	0,073	0,057	0,046	0,155	0,154
0,6	1,0	0,146	0,109	0,082	0,062	0,048	0,039	0,135	0,134
	1,2	0,152	0,114	0,087	0,066	0,052	0,042	0,137	0,135
	1,4	0,153	0,116	0,089	0,067	0,053	0,042	0,132	0,130
	1,6	0,153	0,116	0,089	0,068	0,053	0,043	0,142	0,141
	1,8	0,153	0,116	0,087	0,068	0,053	0,043	0,141	0,140
	2,0	0,153	0,116	0,089	0,068	0,053	0,043	0,141	0,140

Tabelul VI.29

laturi opuse încastrate perfect și celelalte două laturi simplu rezemate
lungi încastrate

$P = pa_1b_1$

m_{xc} și m_{yc} la centrul plăcii,
m_{xr} la mijlocul laturilor încastrate

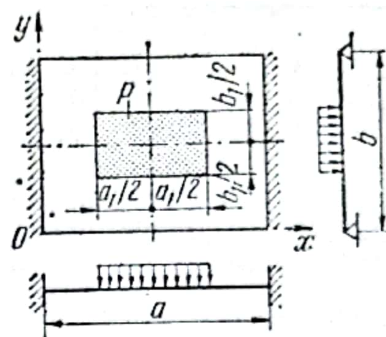
$-m_{xr}/P$				m_{yc}/P					
0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,153	0,146	0,135	0,117	∞	0,210	0,154	0,120	0,096	0,077
0,147	0,139	0,127	0,109	∞	0,204	0,149	0,115	0,092	0,074
0,137	0,129	0,117	0,100	∞	0,203	0,148	0,115	0,092	0,075
0,168	0,167	0,165	0,164	∞	0,195	0,143	0,109	0,087	0,069
0,167	0,166	0,165	0,164	∞	0,196	0,144	0,109	0,087	0,069
0,167	0,167	0,165	0,164	∞	0,195	0,143	0,109	0,086	0,069
0,150	0,143	0,132	0,114	0,132	0,119	0,100	0,082	0,067	0,054
0,144	0,137	0,124	0,107	0,127	0,114	0,096	0,078	0,064	0,052
0,135	0,127	0,115	0,098	0,125	0,113	0,095	0,078	0,064	0,052
0,163	0,161	0,156	0,141	0,119	0,109	0,091	0,074	0,060	0,049
0,163	0,161	0,156	0,140	0,119	0,109	0,091	0,075	0,059	0,048
0,163	0,160	0,155	0,140	0,119	0,110	0,091	0,074	0,059	0,049
0,142	0,136	0,126	0,108	0,079	0,076	0,067	0,057	0,047	0,038
0,139	0,132	0,120	0,103	0,074	0,070	0,062	0,053	0,044	0,036
0,131	0,124	0,112	0,096	0,072	0,068	0,061	0,052	0,043	0,035
0,152	0,147	0,138	0,121	0,068	0,064	0,058	0,048	0,039	0,031
0,152	0,147	0,138	0,121	0,068	0,064	0,057	0,047	0,039	0,031
0,152	0,147	0,138	0,121	0,067	0,064	0,057	0,048	0,039	0,031
0,131	0,125	0,116	0,100	0,053	0,052	0,047	0,040	0,033	0,027
0,131	0,125	0,113	0,097	0,047	0,045	0,041	0,035	0,029	0,024
0,126	0,118	0,107	0,092	0,044	0,043	0,039	0,034	0,028	0,023
0,137	0,131	0,120	0,103	0,041	0,039	0,035	0,031	0,026	0,021
0,137	0,131	0,120	0,103	0,041	0,038	0,036	0,031	0,025	0,021
0,137	0,130	0,120	0,103	0,044	0,039	0,035	0,031	0,025	0,020

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	1,0	0,121	0,092	0,070	0,054	0,042	0,034	0,119	0,118
	1,2	0,127	0,099	0,076	0,060	0,047	0,038	0,126	0,124
	1,4	0,131	0,101	0,078	0,061	0,048	0,039	0,124	0,122
	1,6	0,130	0,102	0,079	0,062	0,049	0,038	0,127	0,126
	1,8	0,129	0,101	0,079	0,061	0,049	0,038	0,127	0,125
	2,0	0,131	0,100	0,078	0,061	0,048	0,038	0,126	0,125
1,0	1,0	0,099	0,076	0,058	0,045	0,036	0,029	0,100	0,099
	1,2	0,107	0,085	0,067	0,052	0,041	0,033	0,113	0,111
	1,4	0,112	0,088	0,070	0,055	0,043	0,035	0,115	0,113
	1,6	0,112	0,089	0,069	0,055	0,044	0,035	0,112	0,111
	1,8	0,113	0,089	0,070	0,057	0,044	0,035	0,112	0,111
	2,0	0,111	0,087	0,069	0,054	0,043	0,035	0,112	0,111
1,2	1,2	0,092	0,072	0,057	0,045	0,036	0,028	0,097	0,096
	1,4	0,096	0,077	0,060	0,049	0,038	0,031	0,104	0,102
	1,6	0,097	0,078	0,062	0,049	0,038	0,032	0,099	0,098
	1,8	0,097	0,079	0,063	0,051	0,039	0,032	0,099	0,098
	2,0	0,097	0,079	0,063	0,050	0,039	0,032	0,099	0,098
1,4	1,4	0,084	0,067	0,053	0,043	0,034	0,027	0,091	0,089
	1,6	0,085	0,069	0,054	0,044	0,034	0,028	0,088	0,087
	1,8	0,086	0,069	0,055	0,044	0,035	0,028	0,088	0,087
	2,0	0,086	0,069	0,055	0,045	0,035	0,028	0,088	0,087
1,6	1,6	0,076	0,062	0,049	0,038	0,032	0,026	0,077	0,076
	1,8	0,077	0,062	0,049	0,039	0,031	0,026	0,078	0,077
	2,0	0,076	0,062	0,050	0,039	0,031	0,026	0,078	0,077
1,8	1,8	0,069	0,055	0,045	0,035	0,029	0,022	0,070	0,069
	2,0	0,069	0,057	0,046	0,036	0,029	0,024	0,070	0,069
2,0	2,0	0,063	0,050	0,041	0,029	0,026	0,021	0,063	0,062

Tabelul VI.29 (continuare)

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,115	0,110	0,102	0,088	0,039	0,038	0,034	0,030	0,024	0,020
0,121	0,114	0,104	0,090	0,031	0,030	0,028	0,024	0,020	0,016
0,118	0,111	0,101	0,086	0,028	0,027	0,025	0,022	0,018	0,015
0,122	0,115	0,104	0,089	0,027	0,026	0,022	0,019	0,016	0,014
0,122	0,115	0,104	0,089	0,026	0,024	0,022	0,019	0,016	0,012
0,121	0,115	0,104	0,089	0,025	0,024	0,022	0,011	0,016	0,014
0,097	0,093	0,086	0,074	0,031	0,030	0,027	0,023	0,019	0,016
0,108	0,102	0,093	0,080	0,022	0,022	0,020	0,017	0,014	0,011
0,109	0,103	0,093	0,080	0,018	0,018	0,016	0,014	0,012	0,009
0,107	0,101	0,090	0,077	0,016	0,016	0,015	0,014	0,011	0,009
0,107	0,100	0,091	0,077	0,016	0,015	0,013	0,011	0,009	0,009
0,107	0,100	0,090	0,077	0,016	0,016	0,014	0,012	0,011	0,009
0,093	0,088	0,080	0,069	0,018	0,018	0,016	0,014	0,011	0,009
0,098	0,093	0,084	0,072	0,013	0,012	0,011	0,010	0,008	0,006
0,095	0,088	0,079	0,067	0,011	0,011	0,010	0,008	0,007	0,005
0,094	0,088	0,079	0,067	0,010	0,010	0,009	0,006	0,005	0,005
0,094	0,088	0,079	0,067	0,010	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004
0,086	0,081	0,074	0,063	0,010	0,010	0,009	0,008	0,006	0,005
0,083	0,078	0,069	0,059	0,007	0,007	0,006	0,006	0,005	0,004
0,083	0,078	0,070	0,059	0,006	0,005	0,005	0,004	0,003	0,003
0,083	0,078	0,069	0,059	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003
0,073	0,068	0,061	0,052	0,006	0,005	0,004	0,004	0,004	0,003
0,074	0,069	0,062	0,052	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,002
0,074	0,069	0,062	0,053	0,004	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002
0,066	0,062	0,055	0,047	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001
0,066	0,062	0,055	0,047	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001
0,060	0,056	0,050	0,042	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001

B. Laturile



a_1/b	b_1/b \ a/b	m_{xc}/P							
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,0	∞	0,158	0,105	0,077	0,059	0,047	0,158	0,156
	1,2	∞	0,247	0,187	0,151	0,125	0,103	0,153	0,149
	1,4	∞	0,247	0,187	0,151	0,125	0,103	0,138	0,135
	1,6	∞	0,238	0,185	0,147	0,123	0,100	0,122	0,120
	1,8	∞	0,235	0,181	0,146	0,121	0,098	0,103	0,101
	2,0	∞	0,231	0,178	0,143	0,117	0,097	0,083	0,083
0,2	1,0	0,242	0,146	0,101	0,074	0,057	0,045	0,155	0,153
	1,2	0,165	0,152	0,132	0,114	0,096	0,080	0,152	0,149
	1,4	0,165	0,152	0,132	0,114	0,096	0,080	0,139	0,136
	1,6	0,161	0,150	0,131	0,112	0,095	0,079	0,122	0,120
	1,8	0,159	0,147	0,128	0,110	0,092	0,076	0,103	0,101
	2,0	0,155	0,144	0,125	0,106	0,090	0,075	0,085	0,084
0,4	1,0	0,181	0,127	0,092	0,069	0,053	0,043	0,147	0,146
	1,2	0,110	0,106	0,098	0,086	0,077	0,062	0,151	0,148
	1,4	0,110	0,106	0,098	0,086	0,074	0,062	0,140	0,136
	1,6	0,109	0,105	0,096	0,085	0,073	0,061	0,124	0,121
	1,8	0,106	0,101	0,093	0,082	0,070	0,059	0,105	0,103
	2,0	0,102	0,098	0,090	0,080	0,069	0,057	0,086	0,085
0,6	1,0	0,146	0,109	0,082	0,062	0,048	0,039	0,135	0,134
	1,2	0,081	0,079	0,074	0,067	0,058	0,049	0,149	0,146
	1,4	0,082	0,079	0,074	0,067	0,058	0,049	0,139	0,136
	1,6	0,079	0,078	0,073	0,066	0,058	0,047	0,126	0,123
	1,8	0,076	0,075	0,069	0,063	0,054	0,045	0,107	0,105
	2,0	0,073	0,071	0,066	0,060	0,052	0,044	0,089	0,088

Tabelul VI.29 (continuare)

scurte încastrate

$P = pa_1b_1$
m_{xc} și m_{yc} la centrul plăcii
m_{xr} la mijlocul laturilor încastrate

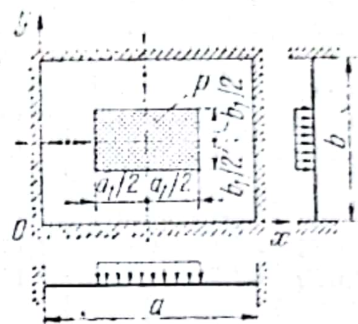
m_{xr}/P				m_{yc}/P					
0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,153	0,146	0,135	0,117	∞	0,210	0,154	0,120	0,096	0,077
0,142	0,130	0,115	0,097	∞	0,155	0,102	0,074	0,057	0,046
0,129	0,118	0,104	0,087	∞	0,177	0,122	0,093	0,073	0,059
0,113	0,104	0,091	0,077	∞	0,189	0,137	0,105	0,086	0,068
0,096	0,088	0,077	0,065	∞	0,202	0,148	0,115	0,095	0,077
0,079	0,072	0,064	0,054	∞	0,210	0,157	0,123	0,101	0,082
0,150	0,143	0,132	0,114	0,132	0,119	0,100	0,082	0,067	0,054
0,142	0,130	0,115	0,096	0,233	0,143	0,098	0,072	0,056	0,045
0,130	0,119	0,105	0,088	0,255	0,164	0,118	0,090	0,072	0,058
0,114	0,104	0,092	0,077	0,270	0,178	0,131	0,103	0,084	0,068
0,096	0,088	0,078	0,065	0,282	0,190	0,144	0,114	0,094	0,077
0,079	0,073	0,064	0,054	0,291	0,199	0,152	0,122	0,101	0,082
0,142	0,136	0,126	0,108	0,079	0,076	0,067	0,057	0,047	0,038
0,141	0,129	0,114	0,096	0,177	0,123	0,089	0,067	0,052	0,042
0,130	0,119	0,105	0,088	0,199	0,144	0,109	0,085	0,068	0,055
0,115	0,105	0,092	0,078	0,212	0,161	0,124	0,098	0,080	0,066
0,098	0,089	0,079	0,066	0,225	0,173	0,135	0,109	0,091	0,075
0,081	0,074	0,065	0,055	0,234	0,182	0,145	0,117	0,097	0,079
0,131	0,125	0,116	0,100	0,053	0,052	0,047	0,040	0,033	0,027
0,138	0,127	0,112	0,094	0,143	0,105	0,078	0,060	0,047	0,038
0,130	0,119	0,105	0,088	0,164	0,126	0,098	0,078	0,063	0,051
0,117	0,106	0,093	0,078	0,178	0,142	0,114	0,093	0,075	0,062
0,100	0,091	0,080	0,067	0,192	0,155	0,126	0,103	0,085	0,070
0,083	0,076	0,067	0,056	0,201	0,163	0,134	0,114	0,092	0,075

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	1,0	0,121	0,092	0,070	0,054	0,042	0,034	0,119	0,118
	1,2	0,063	0,062	0,058	0,053	0,046	0,039	0,144	0,141
	1,4	0,063	0,061	0,058	0,053	0,046	0,039	0,139	0,136
	1,6	0,062	0,061	0,057	0,051	0,045	0,037	0,128	0,126
	1,8	0,059	0,057	0,053	0,049	0,044	0,035	0,110	0,109
	2,0	0,053	0,053	0,050	0,045	0,041	0,034	0,093	0,091
1,0	1,0	0,099	0,076	0,058	0,045	0,036	0,029	0,100	0,099
	1,2	0,051	0,050	0,047	0,043	0,038	0,032	0,135	0,132
	1,4	0,051	0,049	0,047	0,043	0,038	0,032	0,136	0,133
	1,6	0,049	0,047	0,045	0,042	0,036	0,030	0,132	0,129
	1,8	0,045	0,044	0,042	0,038	0,034	0,028	0,114	0,112
	2,0	0,043	0,043	0,042	0,036	0,032	0,027	0,097	0,095
1,2	1,2	0,043	0,041	0,039	0,036	0,031	0,026	0,119	0,117
	1,4	0,042	0,040	0,038	0,035	0,031	0,027	0,129	0,126
	1,6	0,041	0,039	0,038	0,034	0,030	0,025	0,135	0,131
	1,8	0,037	0,036	0,035	0,031	0,028	0,022	0,118	0,116
	2,0	0,033	0,032	0,030	0,028	0,025	0,021	0,101	0,099
1,4	1,4	0,037	0,035	0,033	0,030	0,027	0,023	0,117	0,114
	1,6	0,034	0,034	0,032	0,030	0,026	0,021	0,138	0,132
	1,8	0,032	0,031	0,029	0,027	0,023	0,019	0,123	0,119
	2,0	0,028	0,027	0,025	0,023	0,020	0,017	0,106	0,104
1,6	1,6	0,030	0,030	0,028	0,025	0,022	0,018	0,141	0,125
	1,8	0,027	0,027	0,026	0,023	0,021	0,016	0,127	0,121
	2,0	0,025	0,023	0,021	0,019	0,017	0,015	0,111	0,108
1,8	1,8	0,023	0,023	0,022	0,020	0,017	0,014	0,130	0,117
	2,0	0,021	0,020	0,018	0,016	0,015	0,013	0,116	0,111
2,0	2,0	0,017	0,017	0,017	0,016	0,014	0,012	0,120	0,108

Tabelul VI.29 (continuare)

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,115	0,110	0,102	0,088	0,039	0,038	0,034	0,030	0,024	0,020
0,134	0,123	0,108	0,091	0,117	0,088	0,067	0,052	0,041	0,033
0,129	0,119	0,105	0,088	0,138	0,109	0,086	0,069	0,056	0,046
0,119	0,108	0,095	0,079	0,154	0,125	0,102	0,083	0,068	0,057
0,103	0,094	0,082	0,069	0,165	0,137	0,113	0,095	0,078	0,064
0,086	0,079	0,070	0,058	0,176	0,146	0,123	0,102	0,084	0,070
0,097	0,093	0,086	0,074	0,031	0,030	0,027	0,023	0,019	0,016
0,126	0,115	0,102	0,086	0,097	0,074	0,057	0,044	0,034	0,028
0,127	0,116	0,102	0,086	0,117	0,094	0,075	0,061	0,050	0,040
0,121	0,109	0,095	0,079	0,132	0,109	0,091	0,075	0,062	0,051
0,106	0,096	0,084	0,071	0,146	0,123	0,103	0,086	0,071	0,059
0,090	0,082	0,072	0,061	0,155	0,130	0,111	0,094	0,078	0,065
0,111	0,102	0,090	0,076	0,082	0,062	0,048	0,037	0,029	0,023
0,120	0,109	0,096	0,081	0,101	0,081	0,065	0,052	0,042	0,033
0,121	0,108	0,094	0,078	0,115	0,096	0,079	0,066	0,054	0,046
0,109	0,098	0,085	0,072	0,128	0,109	0,092	0,078	0,065	0,054
0,094	0,085	0,075	0,063	0,139	0,118	0,102	0,086	0,073	0,060
0,109	0,100	0,088	0,074	0,086	0,069	0,056	0,045	0,037	0,030
0,119	0,104	0,090	0,075	0,100	0,083	0,069	0,058	0,048	0,039
0,111	0,099	0,086	0,071	0,113	0,097	0,082	0,069	0,058	0,048
0,098	0,088	0,077	0,064	0,123	0,107	0,092	0,078	0,065	0,054
0,110	0,096	0,082	0,068	0,089	0,074	0,061	0,051	0,044	0,035
0,110	0,097	0,083	0,069	0,101	0,085	0,073	0,061	0,051	0,043
0,100	0,090	0,078	0,065	0,110	0,095	0,082	0,070	0,059	0,049
0,103	0,090	0,077	0,064	0,090	0,076	0,065	0,054	0,047	0,038
0,101	0,089	0,076	0,064	0,098	0,086	0,075	0,064	0,054	0,045
0,096	0,084	0,072	0,060	0,090	0,078	0,066	0,057	0,048	0,039

Placa dreptunghiulară, cu sarcină parțial distri



$\frac{b_1}{a}$	a_1/a \ b/a	m_{xc}/P: 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	$-m_{xr}/P$: 0	0,2	0,4	0,6	0,8
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1,0	∞	0,136	0,085	0,059	0,044	0,035	0,101	0,103	0,104	0,104	0,101
	1,2	∞	0,150	0,097	0,070	0,053	0,043	0,122	0,121	0,119	0,116	0,108
	1,4	∞	0,157	0,104	0,075	0,058	0,046	0,127	0,126	0,123	0,117	0,108
	1,5	∞	0,159	0,105	0,077	0,059	0,047	0,127	0,127	0,123	0,117	0,107
0,2	1,0	0,214	0,124	0,080	0,056	0,042	0,033	0,098	0,099	0,100	0,100	0,097
	1,2	0,228	0,138	0,093	0,067	0,051	0,041	0,118	0,118	0,116	0,113	0,105
	1,4	0,236	0,145	0,100	0,073	0,056	0,044	0,124	0,124	0,112	0,115	0,106
	1,5	0,238	0,147	0,101	0,074	0,057	0,045	0,125	0,124	0,120	0,115	0,105
0,4	1,0	0,157	0,104	0,072	0,051	0,038	0,031	0,090	0,091	0,092	0,093	0,090
	1,2	0,172	0,119	0,084	0,062	0,048	0,038	0,112	0,111	0,110	0,107	0,099
	1,4	0,180	0,126	0,092	0,068	0,053	0,042	0,120	0,119	0,116	0,111	0,102
	1,5	0,182	0,128	0,094	0,070	0,054	0,043	0,121	0,120	0,117	0,111	0,101
0,6	1,0	0,123	0,086	0,061	0,044	0,033	0,026	0,078	0,079	0,080	0,081	0,080
	1,2	0,138	0,101	0,074	0,055	0,043	0,034	0,102	0,101	0,100	0,098	0,091
	1,4	0,147	0,109	0,082	0,062	0,048	0,039	0,112	0,111	0,109	0,104	0,096
	1,5	0,149	0,111	0,084	0,064	0,050	0,040	0,114	0,114	0,110	0,105	0,096
0,8	1,0	0,098	0,070	0,050	0,036	0,027	0,022	0,064	0,065	0,066	0,067	0,066
	1,2	0,113	0,084	0,063	0,048	0,037	0,030	0,089	0,089	0,088	0,086	0,080
	1,4	0,122	0,094	0,072	0,055	0,043	0,035	0,102	0,101	0,099	0,095	0,087
	1,5	0,124	0,096	0,074	0,057	0,045	0,036	0,105	0,105	0,102	0,097	0,089
1,0	1,0	0,080	0,057	0,041	0,030	0,022	0,018	0,051	0,052	0,054	0,055	0,054
	1,2	0,094	0,071	0,053	0,040	0,031	0,025	0,075	0,076	0,075	0,073	0,069
	1,4	0,104	0,080	0,062	0,048	0,038	0,030	0,089	0,090	0,088	0,084	0,078
	1,5	0,107	0,083	0,064	0,050	0,040	0,032	0,094	0,094	0,092	0,088	0,080
1,2	1,2	0,079	0,059	0,045	0,034	0,026	0,021	0,063	0,064	0,063	0,062	0,058
	1,4	0,087	0,069	0,053	0,042	0,032	0,026	0,077	0,077	0,076	0,073	0,067
	1,5	0,092	0,072	0,055	0,044	0,035	0,028	0,084	0,084	0,082	0,078	0,071
1,4	1,4	0,075	0,059	0,046	0,036	0,028	0,023	0,067	0,067	0,066	0,063	0,058
	1,5	0,079	0,062	0,048	0,038	0,030	0,024	0,073	0,074	0,072	0,068	0,062
1,5	1,5	0,073	0,058	0,045	0,036	0,028	0,022	0,067	0,068	0,066	0,063	0,058

Tabelul VI.30

buită, încastrată perfect pe contur

$P = pa_1b_1$

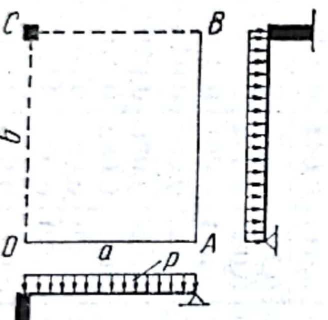
m_{xc} și m_{yc} la centrul plăcii

m_{xr} și m_{yr} la mijloacele laturilor încastrate

	m_{yc}/P						$-m_{yr}/P$					
1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0,088	∞	0,214	0,157	0,123	0,098	0,080	0,102	0,098	0,090	0,078	0,064	0,051
0,093	∞	0,211	0,154	0,121	0,096	0,079	0,073	0,070	0,064	0,054	0,044	0,034
0,092	∞	0,208	0,152	0,119	0,095	0,078	0,046	0,044	0,039	0,033	0,026	0,019
0,091	∞	0,207	0,151	0,118	0,095	0,077	0,034	0,032	0,027	0,023	0,017	0,012
0,086	0,136	0,124	0,104	0,086	0,070	0,057	0,103	0,099	0,091	0,079	0,065	0,052
0,092	0,132	0,121	0,102	0,084	0,068	0,056	0,074	0,071	0,065	0,056	0,046	0,036
0,091	0,130	0,118	0,099	0,082	0,067	0,055	0,048	0,045	0,041	0,034	0,027	0,021
0,090	0,129	0,117	0,098	0,081	0,067	0,054	0,036	0,033	0,030	0,024	0,019	0,014
0,079	0,085	0,080	0,072	0,061	0,050	0,041	0,104	0,100	0,092	0,080	0,066	0,054
0,087	0,081	0,077	0,068	0,058	0,048	0,039	0,078	0,075	0,069	0,059	0,048	0,039
0,088	0,077	0,074	0,065	0,056	0,046	0,038	0,051	0,049	0,041	0,037	0,030	0,024
0,087	0,076	0,072	0,065	0,055	0,046	0,038	0,039	0,037	0,033	0,028	0,022	0,017
0,070	0,059	0,056	0,051	0,044	0,036	0,030	0,104	0,100	0,093	0,081	0,067	0,055
0,080	0,055	0,052	0,048	0,041	0,034	0,028	0,082	0,079	0,072	0,063	0,052	0,042
0,082	0,051	0,048	0,044	0,038	0,032	0,026	0,057	0,054	0,050	0,043	0,034	0,028
0,082	0,050	0,047	0,043	0,037	0,031	0,025	0,045	0,043	0,039	0,033	0,026	0,021
0,059	0,044	0,042	0,038	0,033	0,027	0,022	0,101	0,097	0,090	0,079	0,066	0,054
0,070	0,040	0,038	0,035	0,030	0,025	0,020	0,085	0,082	0,076	0,066	0,056	0,045
0,076	0,035	0,033	0,031	0,027	0,022	0,018	0,064	0,061	0,056	0,049	0,040	0,032
0,076	0,034	0,032	0,029	0,025	0,021	0,017	0,053	0,050	0,046	0,039	0,032	0,026
0,048	0,035	0,033	0,031	0,026	0,022	0,018	0,088	0,086	0,079	0,070	0,059	0,059
0,060	0,031	0,029	0,027	0,023	0,019	0,016	0,085	0,082	0,076	0,067	0,056	0,046
0,067	0,026	0,024	0,022	0,020	0,016	0,013	0,069	0,067	0,062	0,054	0,045	0,036
0,069	0,024	0,023	0,021	0,018	0,015	0,012	0,059	0,057	0,053	0,046	0,038	0,031
0,051	0,026	0,024	0,022	0,019	0,016	0,013	0,077	0,075	0,070	0,061	0,052	0,042
0,058	0,021	0,019	0,017	0,016	0,013	0,011	0,070	0,069	0,064	0,055	0,046	0,037
0,061	0,019	0,018	0,016	0,014	0,012	0,010	0,062	0,059	0,055	0,049	0,041	0,033
0,051	0,018	0,017	0,015	0,013	0,011	0,009	0,067	0,065	0,060	0,053	0,045	0,036
0,054	0,016	0,015	0,013	0,012	0,010	0,008	0,063	0,060	0,056	0,050	0,042	0,034
0,050	0,015	0,014	0,012	0,011	0,009	0,007	0,062	0,060	0,056	0,050	0,042	0,034

Tabelul VI.31

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd două laturi adiacente simplu rezemate, celelalte două laturi libere rezemate pe un stîlp



$$w_0 = k_0 \frac{pa^4}{E\delta^3} \quad \text{(la centru)}$$

$$w_a = k_0' \frac{pa^4}{E\delta^3} \quad \text{(la mijlocul laturii libere } BC)$$

$$w_b = k_0'' \frac{pa^4}{E\delta^2} \quad \text{(la mijlocul laturii libere } OC)$$

$$m_{xc} = k_1 \cdot pa^2 \quad \text{(la centru)}$$

$$m_x = k_1' \cdot pa^2 \quad \text{(la mijlocul laturii libere } BC)$$

$$m_{yc} = k_2 \cdot pb^2 \quad \text{(la centru)}$$

$$m_y = k_2' \cdot pb^2 \quad \text{(la mijlocul laturii libere } OC)$$

$$R_c = k_3 \cdot pab \quad \text{(în colțul } C)$$

$M_{xyc} = \pm \frac{k_3}{2} \cdot pab$ (în colțul C),

$\mathfrak{R}_y = k_4 \cdot pab$ (rezultanta reacțiunii pe latura OA)

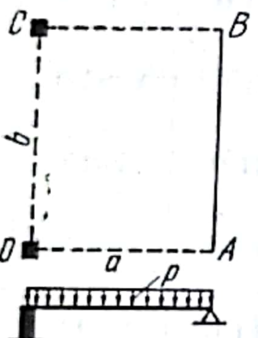
$\mathfrak{R}_x = k_5 \cdot pab$ (rezultanta reacțiunii pe latura AB)

b/a	k_0	k_0'	k_0''	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_3	k_4	k_5
0,50	0,0408	0,0120	0,0672	0,0272	0,0513	0,0952	0,1524	0,234	0,546	0,220
0,55	0,0492	0,0168	0,0768	0,0313	0,0589	0,0905	0,1490	0,236	0,523	0,240
0,60	0,0564	0,0240	0,0864	0,0352	0,0661	0,0860	0,1452	0,238	0,503	0,258
0,65	0,0648	0,0324	0,0948	0,0389	0,0730	0,0818	0,1412	0,238	0,486	0,275
0,70	0,0744	0,0420	0,1032	0,0425	0,0796	0,0781	0,1370	0,238	0,468	0,293

0,75	0,0852	0,0540	0,1116	0,0458	0,0859	0,0748	0,1331	0,239	0,452	0,309
0,80	0,0972	0,0684	0,1188	0,0490	0,0919	0,0717	0,1293	0,237	0,437	0,325
0,85	0,1092	0,0840	0,1260	0,0521	0,0975	0,0687	0,1252	0,236	0,423	0,340
0,90	0,1212	0,1020	0,1320	0,0551	0,1028	0,0660	0,1210	0,235	0,409	0,355
0,95	0,1344	0,1224	0,1380	0,0579	0,1079	0,0633	0,1169	0,233	0,395	0,370
1,00	0,1483	0,1440	0,1440	0,0607	0,1128	0,0608	0,1128	0,232	0,384	0,384
1/0,95	0,1646	0,1499	0,1690	0,0633	0,1169	0,0579	0,1079	0,233	0,370	0,395
1/0,90	0,1847	0,1554	0,2011	0,0660	0,1210	0,0551	0,1028	0,235	0,355	0,409
1/0,85	0,2088	0,1606	0,2410	0,0687	0,1252	0,0521	0,0975	0,236	0,340	0,423
1,25	0,2373	0,1670	0,2900	0,0717	0,1293	0,0490	0,0919	0,237	0,325	0,437
1/0,75	0,2690	0,1705	0,3524	0,0748	0,1331	0,0458	0,0859	0,239	0,309	0,452
1/0,70	0,3094	0,1746	0,4291	0,0781	0,1370	0,0425	0,0796	0,238	0,293	0,468
1/0,65	0,3626	0,1813	0,5304	0,0818	0,1412	0,0389	0,0730	0,238	0,275	0,486
1/0,60	0,4345	0,1849	0,6656	0,0861	0,1452	0,0352	0,0661	0,238	0,258	0,503
1/0,55	0,5374	0,1835	0,8389	0,0906	0,1490	0,0313	0,0589	0,236	0,240	0,523
2,00	0,6528	0,1920	1,0752	0,0952	0,1524	0,0272	0,0513	0,0234	0,220	0,546

Tabelul VI.32

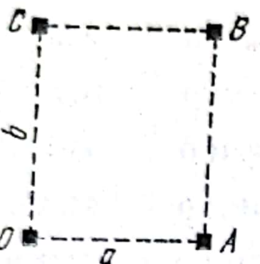
Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, avînd o latură simplu rezemată și rezemări în colțurile opuse



$w_0 = k_0 \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$	(la centru)
$w_1 = k_0' \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$	(la mijloacele laturilor libere OA și BC)
$w_2 = k_0'' \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$	(la mijlocul laturii libere OC)
$m_{xc} = k_1 \cdot pa^2$	(la centru)
$m_x = k_1' \cdot pa^2$	(la mijloacele laturilor libere OA și BC)
$m_{yc} = k_2 \cdot pb^2$	(la centru)
$m_y = {}'_2 \cdot pb^2$	(la mijlocul laturii libere OC)
$R_c = k_3 \cdot pab$	(în colțurile O și C)
$M_{xyc} = \pm \frac{k_3}{2} \cdot pab$	(în colțurile și OC)
$\mathfrak{R} = k_4 \cdot pab$	(rezultanta reacțiunilor pe latura AB)

b/a	k_0	k_0'	k_0''	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_3	k_4
0,50	0,1644	0,1620	0,0216	0,1231	0,1278	0,0300	0,2576	0,244	0,510
0,55	0,1668	0,1632	0,0288	0,1228	0,1289	0,0337	0,2343	0,245	0,509
0,60	0,1692	0,1644	0,0372	0,1224	0,1300	0,0364	0,2146	0,245	0,511
0,65	0,1740	0,1668	0,0468	0,1219	0,1310	0,0383	0,1977	0,243	0,514
0,70	0,1788	0,1680	0,0576	0,1214	0,1321	0,0398	0,1833	0,241	0,517
0,75	0,1860	0,1692	0,0708	0,1208	0,1333	0,0410	0,1709	0,240	0,521
0,80	0,1932	0,1704	0,0864	0,1202	0,1345	0,0419	0,1601	0,237	0,526
0,85	0,2016	0,1728	0,1032	0,1195	0,1395	0,0422	0,1506	0,235	0,530
0,90	0,2100	0,1752	0,1224	0,1188	0,1370	0,0423	0,1421	0,232	0,535
0,95	0,2208	0,1764	0,1440	0,1180	0,1382	0,0424	0,1346	0,230	0,540
1,00	0,2316	0,1788	0,1680	0,1172	0,1394	0,0425	0,1280	0,228	0,544
1/0,95	0,2454	0,1793	0,1940	0,1163	0,1405	0,0421	0,1205	0,225	0,549
1/0,90	0,2614	0,1810	0,2267	0,1157	0,1418	0,0414	0,1129	0,222	0,555
1/0,85	0,2777	0,1813	0,2662	0,1151	0,1430	0,0405	0,1052	0,219	0,574
1,25	0,3018	0,1846	0,3135	0,1145	0,1443	0,0393	0,0975	0,215	0,570
1/0,75	0,3296	0,1856	0,3751	0,1141	0,1455	0,0375	0,0898	0,212	0,577
1/0,70	0,3692	0,1896	0,4541	0,1136	0,1470	0,0354	0,0822	0,208	0,584
1/0,65	0,4230	0,1880	0,5506	0,1133	0,1490	0,0331	0,0746	0,204	0,592
1/0,60	0,4900	0,1941	0,6841	0,1133	0,1510	0,0305	0,0670	0,200	0,602
1/0,55	0,5768	0,1966	0,8652	0,1137	0,1527	0,0277	0,0593	0,194	0,613
2	0,6912	0,1920	1,0944	0,1136	0,1536	0,0246	0,0516	0,188	0,624

Placa dreptunghiulară, încărcată uniform, rezemată la colțuri *Tabelul VI.33*



$w_0 = k_0 \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$ (la centru)

$w_1 = k_0' \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$ (la mijloacele laturilor OA și BC)

$w_2 = k_0'' \cdot \frac{pa^4}{E\delta^3}$ (la mijloacele laturilor AB și OC)

$m_{xc} = k_1 \, pa^2$ (la centru)

$m_x = k_1' \cdot pa^2$ (la mijloacele laturilor OA și BC)

$m_{yc} = k_2 \cdot pb^2$ (la centru)

$m_y = k_2' \cdot pb^2$ (la mijloacele laturilor AB și OC)

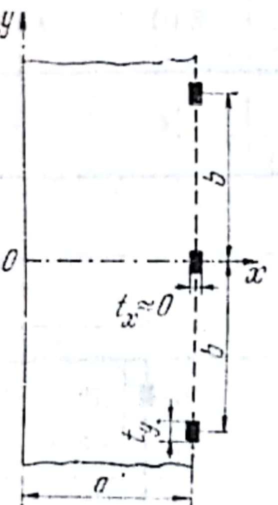
$R_0 = 0{,}250 \; pab$ (la colțuri)

$M_{xy} = \pm 0{,}125 \; pab$ (la colțuri)

b/a	k_0	k_0'	k_0''	k_1	k_1'	k_2	k_2'
0,50	0,1716	0,1680	0,0216	0,1218	0,1300	0,0608	0,2620
0,55	0,1788	0,1704	0,0300	0,1213	0,1322	0,0677	0,2416
0,60	0,1860	0,1740	0,0384	0,1206	0,1345	0,0749	0,2251
0,65	0,1944	0,1776	0,0492	0,1198	0,1369	0,0806	0,2114
0,70	0,2052	0,1812	0,0624	0,1188	0,1395	0,0858	0,1996
0,75	0,2196	0,1860	0,0792	0,1176	0,1425	0,0906	0,1901
0,80	0,2364	0,1908	0,0984	0,1161	0,1459	0,0948	0,1821
0,85	0,2568	0,1956	0,1212	0,1143	0,1494	0,0986	0,1752
0,90	0,2796	0,2004	0,1464	0,1120	0,1532	0,1013	0,1695
0,95	0,3030	0,2052	0,1764	0,1091	0,1568	0,1036	0,1644
1,00	0,3384	0,2100	0,2100	0,1055	0,1604	0,1055	0,1604
1/0,95	0,3748	0,2160	0,2513	0,1036	0,1644	0,1091	0,1568
1/0,90	0,4260	0,2231	0,3053	0,1013	0,1695	0,1120	0,1532
1/0,85	0,4911	0,2318	0,3741	0,0986	0,1752	0,1143	0,1494
1,25	0,5771	0,2402	0,4658	0,0948	0,1821	0,1161	0,1459
1/0,75	0,6933	0,2501	0,5873	0,0906	0,1901	0,1176	0,1425
1/0,70	0,8533	0,2595	0,7535	0,0858	0,1996	0,1188	0,1395
1/0,65	1,0877	0,2753	0,9937	0,0806	0,2114	0,1198	0,1369
1/0,60	1,4329	0,2958	1,3405	0,0749	0,2251	0,1206	0,1345
1/0,55	1,9532	0,3277	1,8614	0,0677	0,2416	0,1213	0,1322
2,00	2,7456	0,3156	2,6880	0,0608	0,2620	0,1218	0,1300

Tabelul VI.34

Placa tip bandă, încărcată uniform, rezemată simplu pe o latură și pe stîlpi echidistanți pe latura opusă



$$m_{xc} = \frac{pab}{k_1}$$ (la centru, în deschidere)

$$m_{xr} = \frac{pab}{k_1'}$$ (la centru în dreptul unui stîlp)

$$m_{yc} = \frac{pab}{k_2}$$ (la centru, în deschidere)

$$m_{yr} = -\frac{pab}{k_2'}$$ (la centrul în dreptul unui stîlp)

$$m_y = \frac{pab}{k_2''}$$ (la mijlocul unei laturi libere în deschidere)

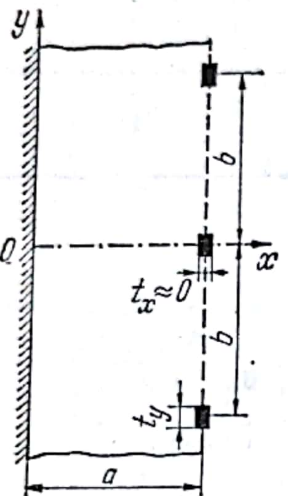
$$m_{ys} = -\frac{pab}{k_2'''}$$ (pe marginea liberă, în dreptul stîlpului)

$$R = 0{,}5\ pab$$ (pe stîlp)

b/a	k_1	k_1'	k_2	k_2'	k_2''	k_2''' pentru $t_y/b =$		
						0,05	0,10	0,15
0,8	6,45	6,11	140	122	13,6	4,07	4,59	4,94
0,9	7,35	6,77	102	87,0	13,5	3,94	4,42	4,76
1,0	8,29	7,39	79,4	65,0	13,5	3,84	4,30	4,61
1,1	9,30	7,97	65,1	51,5	13,4	3,77	4,20	4,51
1,2	10,3	8,50	55,4	42,7	13,4	3,71	4,13	4,42
1,3	11,4	8,99	48,9	36,2	13,4	3,66	4,07	4,35
1,4	12,4	9,42	43,9	31,4	13,4	3,62	4,03	4,30
1,5	13,6	9,86	40,2	27,6	13,4	3,59	4,00	4,27

Tabelul VI.35

Placa tip bandă, încărcată uniform, încastrată perfect pe o latură şi stîlpi echidistanţi pe latura opusă



$$m_{xc,\,max} = \frac{pab}{k_1} \quad \left(\text{aproximativ în punctul } \frac{x}{a} = 0{,}58\,;\ \frac{y}{b} = 0{,}5\right)$$

$$m_{xs,\,max} = \frac{pab}{k_1'} \quad \left(\text{aproximativ în punctul } \frac{x}{a} = 0{,}67\,;\ \frac{y}{b} = 0\right)$$

$$m_{x,\,rc} = -\frac{pab}{k_1''} \quad \left(\frac{x}{a} = 0\,;\ \frac{y}{b} = 0{,}5\right)$$

$$m_{x,\,rs} = -\frac{pab}{k_1'''} \quad \left(\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 0\right)$$

$$m_{y,\,m} = \frac{pab}{k_2} \quad \left(\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 0{,}5\right)$$

$$m_{y,\,s} = -\frac{pab}{k_2'} \quad \left(\frac{x}{a} = 0{,}5\,;\ \frac{y}{b} = 0\right)$$

$$m_{y,\,m} = \frac{pab}{k_2''} \quad \left(\frac{x}{a} = 1\,;\ \frac{y}{b} = 0{,}5\right)$$

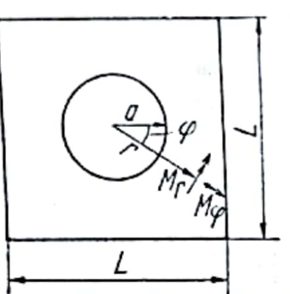
$$m_{y,\,s} = -\frac{pab}{k_2'''} \quad \left(\frac{x}{a} = 1\,;\ \frac{y}{b} = 0\right)$$

$$R = \frac{pab}{k_3} \quad \text{(pe stîlp)}$$

b/a	k_1	k_1'	k_1''	k_1'''	k_2	k_2'	k_2''	k_2''' pentru t_y/b =			k_3
								0,05	0,10	0,15	
0,8	11,6	10,2	5,56	5,60	185	167	18,1	5,42	6,08	6,52	2,80
0,9	13,3	11,1	6,15	6,26	135	118	18,0	5,27	5,88	6,30	2,82
1,0	15,3	12,0	6,69	6,91	108	89,2	18,0	5,17	5,75	6,15	2,83
1,1	17,7	12,8	7,15	7,55	90,1	72,5	18,1	5,10	5,66	6,05	2,85
1,2	20,0	13,6	7,52	8,22	78,7	60,6	18,3	5,07	5,62	5,98	2,88
1,3	22,7	14,4	7,78	8,89	71,5	51,5	18,5	5,06	5,60	5,97	2,91
1,4	25,8	15,2	7,98	9,60	65,8	45,9	18,8	5,07	5,60	5,97	2,95
1,5	28,9	16,0	8,15	10,3	62,5	41,8	19,1	5,09	5,62	5,98	2,99

Tabelul VI.36

Placă pătrată, încărcată uniform, simplu rezemată pe contur, cu gol circular central



$$M_r = \frac{pL^2}{k_1} \quad \text{(moment radial)}$$

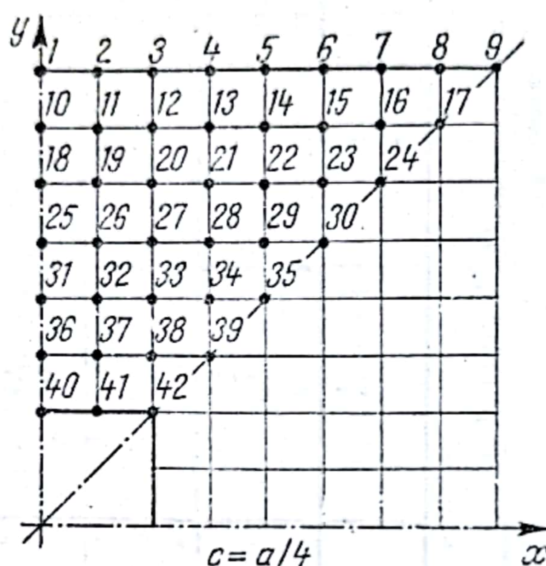
$$M_\varphi = \frac{pL^2}{k_2} \quad \text{(moment inelar)}$$

(în punctul φ, r)

$\frac{a}{L}$	φ	$\frac{r}{L}$	k_1	φ	$\frac{r}{L}$	k_2
0,050	0 45	0,050 0,050	12,3 12,2	— —	— —	— —
0,100	0 45	0,100 0,100	13,9 13,4	— —	— —	— —
0,125	0 45 45	0,125 0,125 0,707	15,2 14,2 26,2	0 45 45	0,28 0,23 0,71	40,0 63,6 −26,2
0,250	0 45 45	0,250 0,250 0,707	31,8 21,0 28,4	0 45 45	0,36 0,27 0,707	83,2 2 000 −28,4
0,375	0 45 45	0,375 0,375 0,707	182 40,0 47,6	0 45 45	0,43 0,38 0,707	308 ∞ −47,6

Placa dreptunghiulară şi pătrată, cu gol dreptunghiular şi pătrat. În tabelele VI.37 — VI.40 se dau valorile coeficienţilor numerici care determină săgeţile şi momentele încovoietoare în nodurile reţelelor din fig. VI. 16, *a*, *b*,. În calcule s-a considerat $\mu = 0{,}2$. Formulele de calcul sînt următoarele :

$$w = \frac{k_w}{128} \cdot \frac{pa^4}{K}, \qquad M_x = \frac{k_x}{8} pa^2, \quad M_y = \frac{k_y}{8} pa^2 .$$



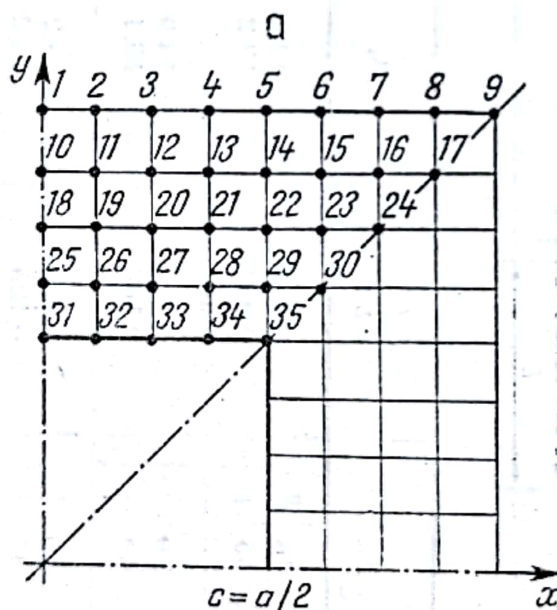


Fig. VI.16

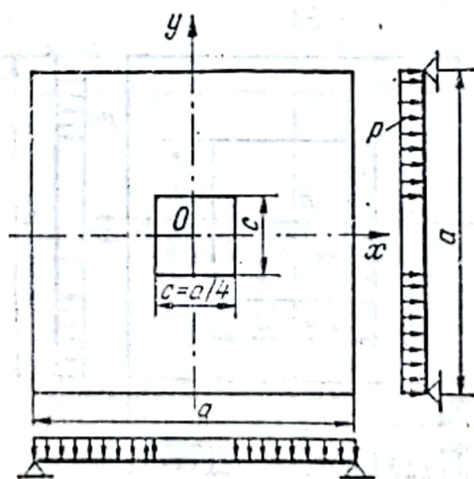
Raportul dintre latura golului şi latura plăcii este $c/a = 0{,}4$ şi 0,2. Rezemarea plăcii este simplă, respectiv încastrată perfect pe tot conturul.

Placa încărcată cu sarcină liniară pe conturul golului şi placa rezemată la colţuri a fost studiată de D. V. Vainberg [43].

Tabelul VI.37

Placa pătrată, încărcată uniform, simplu rezemată pe contur, cu gol central ($c = a/4$)

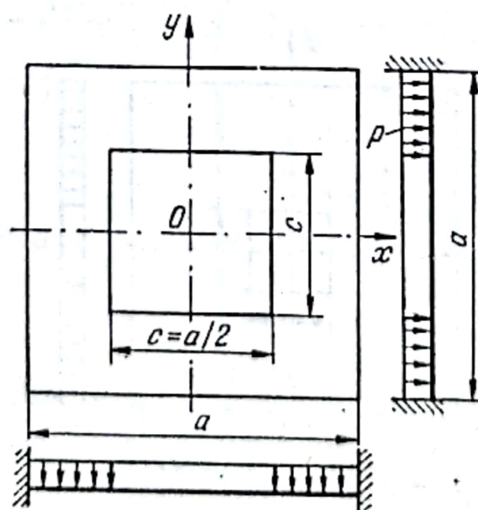
Punct	k_w	k_x	k_y	Punct	k_w	k_x	k_y
1–9	0	0	0	26	91,883	3,931	3,249
10	32,839	1,429	1,587	27	86,741	3,819	3,310
11	32,260	1,421	1,580	28	78,311	3,507	3,312
12	30,530	1,388	1,554	29	66,918	3,100	3,094
13	27,678	1,314	1,499	30	52,940	2,625	2,625
14	23,770	1,199	1,387	31	120,36	5,111	3,187
15	18,902	1,043	1,197	32	118,03	5,078	3,309
16	13,196	0,831	0,913	33	111,10	4,897	3,664
17	6,815	0,521	0,521	34	99,832	4,287	3,908
18	64,323	2,744	2,660	35	84,912	3,690	3,690
19	63,171	2,728	2,656	36	144,86	6,353	2,288
20	59,731	2,659	2,635	37	141,79	6,330	2,583
21	54,070	2,493	2,563	38	132,66	5,932	3,939
22	46,346	2,247	2,373	39	118,18	4,631	4,631
23	36,775	1,930	2,025	40	168,29	7,916	0
24	25,615	1,511	1,511	41	164,17	8,348	0
25	93,608	3,955	3,222	42	151,35	7,051	7,051



Tabelul VI.38

Placa pătrată, încărcată uniform, simplu rezemată pe contur, cu gol central ($c = a/2$)

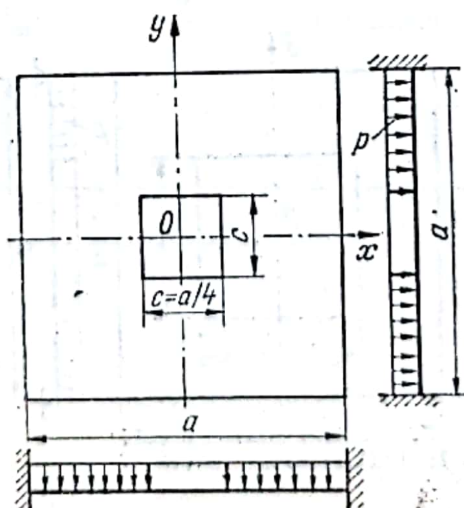
Punct	k_w	k_x	k_y	Punct	k_w	k_x	k_y
10	29,189	1,045	0,930	23	33,939	1,853	1,645
11	28,741	1,062	0,935	24	23,609	1,362	1,362
12	27,382	1,110	0,948	25	85,148	2,796	0,981
13	25,064	1,171	0,965	26	83,794	2,849	1,003
14	21,727	1,180	0,979	27	79,682	3,015	1,086
15	17,365	1,019	0,965	28	72,655	3,290	1,314
16	12,143	0,784	0,808	29	62,474	3,398	2,065
17	6,273	0,483	0,483	30	49,184	2,346	2,346
18	57,626	1,976	1,275	31	112,231	3,501	0
19	56,730	2,010	1,289	32	110,407	3,582	0
20	54,008	2,109	1,335	33	104,852	3,877	0
21	49,367	2,248	1,424	34	95,259	4,648	0
22	42,681	2,289	1,572	35	80,824	4,698	4,698



Tabelul VI.39

Placa pătrată, încărcată uniform, încastrată pe contur, cu gol central ($c = a/4$)

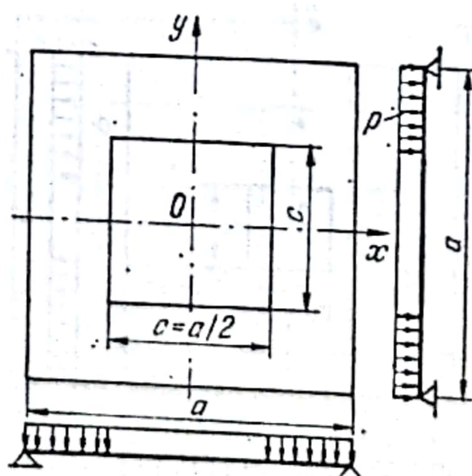
Punct	k_w	k_x	k_y	Punct	k_w	k_x	k_y
1	0	−1,318	−6,589	22	6,426	0,116	−0,798
2	0	−1,288	−6,440	23	4,517	−0,038	−0,540
3	0	−1,198	−5,990	24	2,535	−0,343	−0,343
4	0	−1,048	−5,424	25	18,799	0,879	−0,132
5	0	−0,844	−4,218	26	18,327	0,878	−0,101
6	0	−0,597	−2,987	27	16,921	0,849	−0,0184
7	0	−0,336	−1,679	28	14,626	0,719	0,0804
8	0	−0,108	−0,542	29	11,598	0,482	0,126
9	0	0	0	30	8,095	0,0908	0,0908
10	3,294	−0,581	−3,621	31	27,680	1,524	0,615
11	3,220	−0,500	−3,524	32	26,950	1,514	0,655
12	2,995	−0,504	−3,238	33	24,779	1,439	0,769
13	2,620	−0,425	−2,779	34	21,270	1,147	0,837
14	2,109	−0,337	−2,187	35	16,740	0,733	0,733
15	1,493	−0,268	−1,523	36	36,237	2,123	0,709
16	0,839	−0,257	−0,874	37	35,206	2,115	0,800
17	0,271	−0,356	−0,356	38	32,137	1,862	1,229
18	10,240	0,169	−1,516	39	27,281	1,387	1,387
19	9,994	0,178	−1,462	40	44,498	2,745	0
20	9,258	0,194	−1,335	41	43,068	2,894	0
21	8,047	0,181	−1,107	42	38,624	2,452	2,452



Tabelul VI.40

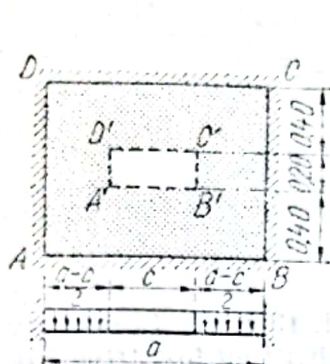
Placa pătrată, încărcată uniform, încastrată pe contur, cu gol central ($c = a/2$)

Punct	k_w	k_x	k_y	Punct	k_w	k_x	k_y
1	0	−0,803	−4,014	19	5,955	0,0461	−0,684
2	0	−0,793	−3,964	20	5,677	0,103	−0,610
3	0	−0,761	−3,804	21	5,165	0,184	−0,491
4	0	−0,700	−3,498	22	4,360	0,240	−0,331
5	0	−0,599	−2,996	23	3,235	0,146	−0,170
6	0	−0,453	−2,266	24	1,923	−0,090	−0,090
7	0	−0,274	−1,372	25	10,822	0,322	−0,0446
8	0	−0,099	−0,495	26	10,650	0,347	−0,0324
9	0	0	0	27	10,109	0,422	0,0051
10	2,007	−0,356	−2,019	28	9,130	0,530	0,0759
11	1,982	−0,343	−1,980	29	7,616	0,582	0,238
12	1,902	−0,302	−1,858	30	5,544	0,285	0,285
13	1,749	−0,235	−1,647	31	15,715	0	0
14	1,498	−0,159	−1,341	32	15,451	0	0
15	1,133	−0,112	−0,953	33	14,624	0,643	0
16	0,686	−0,118	−0,552	34	13,127	0,849	0
17	0,247	−0,230	−0,230	35	10,746	0,898	0,898
18	6,043	0,0266	−0,708				



Tabelul VI.41

Placa pătrată, încărcată uniform, încastrată pe contur, cu gol dreptunghiular



$M_{x,c} = -\frac{pa^2}{k_0}$ (la mijlocul laturilor AD şi BC)

$M_{x,max} = \frac{pa^2}{k_1}$ (la mijlocul laturilor $A'B'$ şi $D'C'$ ale golului)

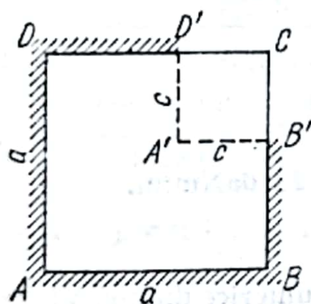
$M_{y,c} = -\frac{pa^2}{k_2}$ (la mijlocul laturilor AB şi CD)

$M_{y,max} = \frac{pa^2}{k_3}$ (la mijlocul laturilor $A'D'$ şi $B'C'$)

c/a	k_0	k_1	k_2	k_3
0,0	19	56	19	56
0,2	21	59	21	46
0,4	22	63	23	67
0,6	24	64	24	91
0,8	33	67	24	111
1,0	∞	68	23	∞

Tabelul VI.42

Placa pătrată, încărcată uniform, încastrată pe contur, cu gol pătrat într-un colţ



$M_r = -\frac{pa^2}{k_0}$ (la mijlocul laturilor BC şi CD)

$M_g = -\frac{pa^2}{k_1}$ (în colţurile B' şi D', în lungul laturilor golului $A'B'$, respectiv $A'D'$)

$M_m = -\frac{pa^2}{k_2}$ (la mijlocul laturilor AB şi AD)

$M_{max} = \frac{pa^2}{k_3}$ (în lungul laturilor golului $A'B'$ şi $A'D'$)

c/a	k_0	k_1	k_2	k_3
0,0	19	∞	19	∞
0,2	19	29	20	100
0,4	18	18	20	46
0,6	—	17	22	56
0,8	—	59	59	333
1,0	—	∞	∞	∞

Calcule aproximative pentru plăci. *Podestele* pot fi calculate ca plăci rezemate pe trei laturi. Cu datele numerice din fig. VI.17 (după J. Hahn [4]), treptele se calculează ca o grindă simplu rezemată pe deschiderea de 2,20 m. Se consideră următoarele încărcări

— pentru podest $p_1 = 760$ daN/m ²;
— pentru trepte $p_2 = 950$ daN/m ².

Treptele transmit o încărcare liniară pe marginea liberă a podestelor

$$q = 950 \times 1,0 = 950 \text{ daN/m}.$$

Cu raportul laturilor $b/a = 1,40/2,20 = 0,636$, din tabelele VI. 13 şi VI. 14 se citesc coeficienţii care determină momentele încovoietoare; aceşti coeficienţi au fost trecuţi în tabelul următor.

	k_1	k_1'	k_2
Sarcina uniform distribuită p_1	9,41	5,80	18,22
Sarcina liniară q	9,43	4,48	36,40

Momentele încovoietoare rezultă sub forma:

— la centru $$m_x = \frac{760 \times 1,40^2}{9,41} + \frac{950 \times 2,20}{9,43} = 158 + 222 = 380 \text{ daNm/m}$$

$$m_y = \frac{760 \times 1,40^2}{18,22} - \frac{950 \times 2,20}{36,40} = 81,7 - 57,5 = 24,2 \text{ daNm/m};$$

— la mijlocul laturii libere

$$m_x = \frac{760 \times 1,40^2}{5,80} + \frac{950 \times 2,20}{4,48} = 257 + 466 = 723 \text{ daNm/m}.$$

Placa de balcon poate fi studiată după J. Hahn [4]. Cu datele numerice din fig. VI. 18 planşeul încăperii se calculează ca o placă rezemată pe trei laturi, încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe suprafaţă, o sarcină liniară şi un moment distribuite uniform în lungul marginii libere.

Sarcina uniform distribuită: $p = 900$ daN/m ².

Placa de balcon (în consolă) transmite la marginea *CD* un moment

$$M_b = \frac{900 \times 1,5^2}{2} = 1\,012,5 \text{ daNm/m}$$

şi o sarcină liniară

$$q = 900 \times 1,5 = 1\,350 \text{ daN/m}.$$

Pentru raportul laturilor $\frac{b}{a} = \frac{2,0}{4,0} = 0,5$ coeficienţii k_1, k_1', k_2 şi k_3 se citesc din tabelele VI. 13 — VI. 15. Momentele au următoarele valori:

— la centru $m_x = \frac{900 \times 2,0^2}{8,46} + \frac{1\,350 \times 4,0}{9,85} + \frac{1\,012,5}{8,10} = 425 + 547 + 125 = 1\,097$ daNm/m;

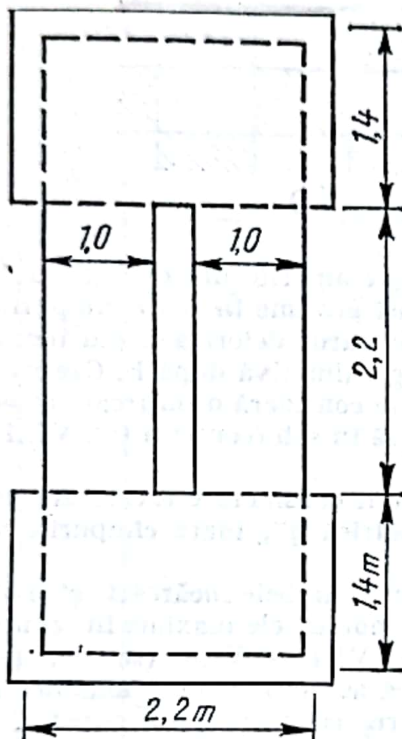


Fig. VI.17

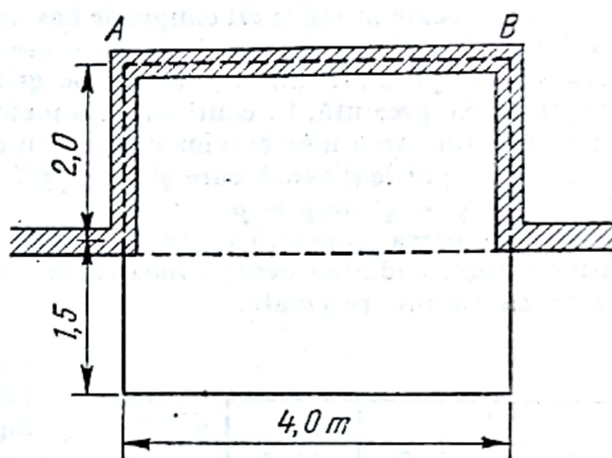


Fig. VI.18

$$m_y = \frac{900 \times 2,0^2}{12,99} - \frac{1\,350 \times 4,0}{52,9} - \frac{1\,012,5}{2,55} = 277 - 102 - 396 = -221 \text{ daNm/m};$$

— la mijlocul laturii libere $m_x = \frac{900 \times 2,0^2}{4,89} + \frac{1\,350 \times 4,0}{4,91} + \frac{1\,012,5}{2,47} = 737 + 1096 + 410 = 2\,243$ daNm/m;

— forţa concentrată în colţurile A şi B: $R_A = \frac{2 \times 900 \times 2,0^2}{7,03} - \frac{2 \times 1\,350 \times 4,0}{3,75} + \frac{1\,012,5}{-5,59} = 1\,025 - 2\,880 - 181 = -2\,036$ daN.

3.2. Plăci continue

La plăci continue în ambele direcţii se disting ipoteze de încărcare cu sarcina permanentă şi sarcina utilă, pentru obţinerea momentelor maxime şi minime în cîmp, respectiv a momentelor maxime pe reazeme.

Pentru momentele în cîmp, se încarcă toate cîmpurile cu sarcina permanentă g, iar cu sarcina utilă p se încarcă în şah (vezi cîmpurile haşurate sau cîmpurile albe din fig. VI. 19, a). Pentru momentele maxime pe reazeme se încarcă toate cîmpurile cu sarcina permanentă, iar cu sarcina utilă se încarcă cîmpurile alăturate reazemului considerat, celelalte

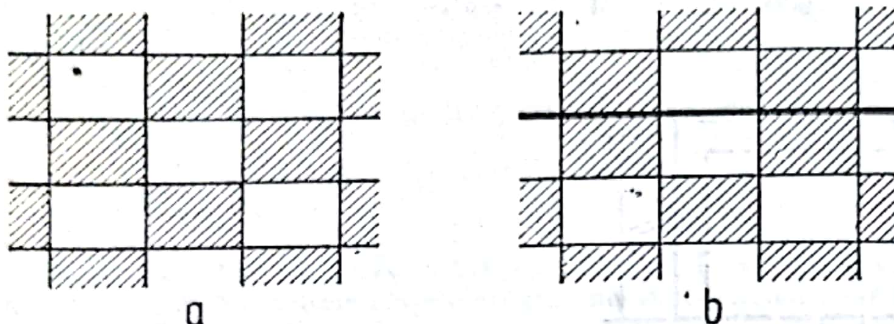


Fig. VI.19

cîmpuri fiind încărcate în şah (vezi cîmpurile haşurate sau cîmpurile albe din fig. VI. 19, b).

În cele ce urmează se consideră ca placa are aceeaşi grosime în toate cîmpurile, iar rezemarea se face pe diafragme rigide sau pe grinzi ale căror deformaţii din încovoiere sînt neglijabile. Se prezintă, în continuare, o metodă aproximativă după F. Czerny [19].

Pentru determinarea momentelor maxime în cîmp se consideră o încărcare $q' = g + p/2$ în toate cîmpurile şi o încărcare $q'' = \pm p/2$ dispusă în şah (conform fig. VI. 19, a), astfel încît $q = q' + q'' = g + p$.

Pentru încărcarea simetrică q', toate cîmpurile vor fi considerate încastrate perfect pe reazemele intermediare. Pentru încărcarea antisimetrică q'', toate cîmpurile vor fi considerate ca simplu rezemate.

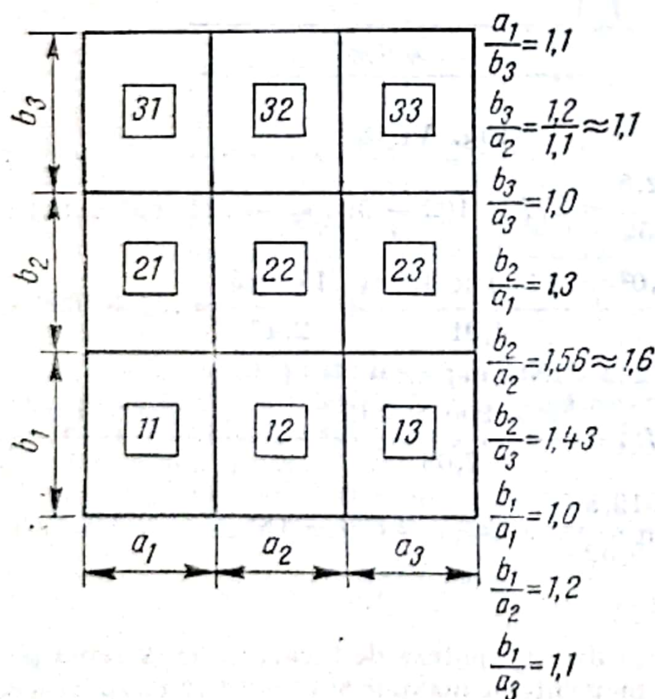


Fig. VI.20

Pentru ambele încărcări q' şi q'', se vor lua momentele maxime în cîmp din tabelele VI.1 — VI.6 (se va neglija faptul că aceste momente maxime nu se produc riguros în aceleaşi puncte).

Momentele maxime pe reazem rezultă ca media aritmetică a momentelor de încastrare pe reazemul considerat, în ipoteza că cele două cîmpuri adiacente sînt încastrate perfect. O aproximaţie mai bună rezultă dacă numai pentru încărcarea simetrică q' se consideră condiţiile de rezemare menţionate anterior, în timp ce pentru încărcarea antisimetrică q'' se admite încastrare perfectă doar pe reazemul considerat şi simplă rezemare pe restul laturilor (şi aici se neglijează faptul că, în cele două ipoteze de încărcare, momentele de încastrare maxime nu se produc în aceeaşi secţiune).

Pentru exemplificare, se consideră placa continuă cu 9 cîmpuri, avînd raportul laturilor indicat în fig. VI. 20. Momentele încovoietoare maxime în cîmp şi pe reazem sînt redate în tabelul VI.43.

Tabelul VI.43

Momente încovoietoare în placa continuă cu 9 cîmpuri

Cîmpul	Momente în cîmp	Reazemul	Momente pe reazem
11	$m_x = m_y = \left(\frac{q'}{40,2} \pm \frac{q''}{27,2}\right) a_1^2$	11—12	$m_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{14,3} + \frac{q''}{11,9}\right) a_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{13,9} + \frac{q''}{10,2}\right) a_2^2$
12	$m_x = \left(\frac{q'}{33,8} \pm \frac{q''}{19,1}\right) a_2^2$	12—13	$m_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{13,9} + \frac{q''}{10,2}\right) a_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,7} + \frac{q''}{10,9}\right) a_3^2$
	$m_y = \left(\frac{q'}{66,2} \pm \frac{q''}{29,1}\right) a_2^2$	21—22	$m_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,2} + \frac{q''}{9,7}\right) a_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,8} + \frac{q''}{8,8}\right) a_2^2$
13	$m_x = \left(\frac{q'}{35,1} \pm \frac{q''}{22,4}\right) a_3^2$	22—23	$m_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,8} + \frac{q''}{8,8}\right) a_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{10,9} + \frac{q''}{9,1}\right) a_3^2$
	$m_y = \left(\frac{q'}{42,0} \pm \frac{q''}{27,9}\right) a_3^2$		
21	$m_x = \left(\frac{q'}{31,8} \pm \frac{q''}{16,8}\right) a_1^2$	31—32	$m_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{13,6} + \frac{q''}{10,9}\right) b_3^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{14,8} + \frac{q''}{10,9}\right) a_2^2$
	$m_y = \left(\frac{q'}{46,9} \pm \frac{q''}{30,9}\right) a_1^2$	32—33	$m_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{14,8} + \frac{q''}{10,9}\right) a_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{14,3} + \frac{q''}{11,9}\right) a_3^2$

Tabelul VI.43 (continuare)

Cîmpul	Momente în cîmp	Reazemul	Momente pe reazem
22	$m_x = \left(\frac{q'}{28,1} \pm \frac{q''}{12,7}\right) a_2^2$		
	$m_y = \left(\frac{q'}{98,1} \pm \frac{q''}{36,1}\right) a_2^2$	11—21	$m_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{14,3} + \frac{q''}{11,9}\right) a_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{13,3} + \frac{q''}{9,6}\right) a_1^2$
23	$m_x = \left(\frac{q'}{26,4} \pm \frac{q''}{14,3}\right) a_3^2$	21—31	$m_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{13,3} + \frac{q''}{9,6}\right) a_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,7} + \frac{q''}{10,9}\right) b_3^2$
	$m_y = \left(\frac{q'}{52,3} + \frac{q''}{33,8}\right) a_3^2$	12—22	$m_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{17,5} + \frac{q''}{10,1}\right) a_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{17,5} + \frac{q''}{8,7}\right) a_2^2$
31	$m_x = \left(\frac{q'}{42,0} \pm \frac{q''}{27,9}\right) b_3^2$		
	$m_y = \left(\frac{q'}{35,1} \pm \frac{q''}{22,4}\right) b_3^2$	22—32	$m_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{17,5} + \frac{q''}{8,7}\right) a_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{17,7} + \frac{q''}{10,9}\right) a_2^2$
32	$m_x = \left(\frac{q'}{37,9} \pm \frac{q''}{22,4}\right) a_2^2$		
	$m_y = \left(\frac{q'}{60,3} \pm \frac{q''}{27,9}\right) a_2^2$	13—23	$m_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{18,6} + \frac{q''}{10,9}\right) a_3^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,8} + \frac{q''}{9,0}\right) a_3^2$
33	$m_x = m_y = \left(\frac{q'}{40,2} \pm \frac{q''}{27,2}\right) a_3^2$	23—33	$m_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{12,8} + \frac{q''}{9,0}\right) a_3^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{14,3} + \frac{q''}{11,9}\right) a_2^2$

Reacțiunile pe contur. În mod acoperitor față de metoda exactă, reacțiunile transmise de plăci încărcate cu sarcină uniform distribuită se determină prin împărțirea suprafeței fiecărui cîmp în triunghiuri și trapeze. Reazemele vor fi încărcate cu sarcinile trapezoidale sau triunghiulare din zonele aferente (fig. VI.21, *a*, *b*).

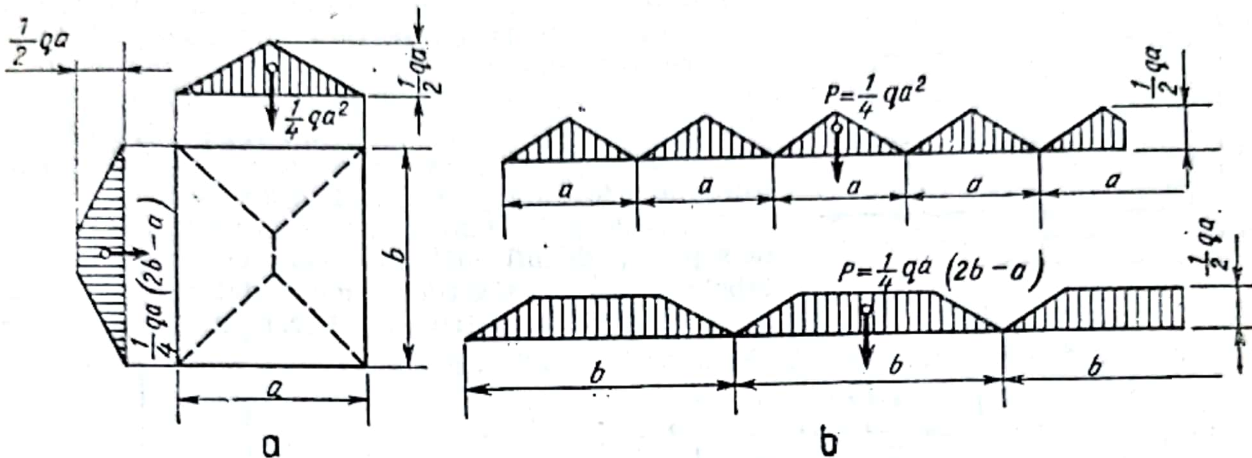


Fig. VI.21

Pentru calculul momentelor încovoietoare în grinzile marginale, sarcinile triunghiulare și trapezoidale pot fi echivalate cu sarcini uniform distribuite:

— pentru deschiderea mică a $$q_{ech} = q\,\frac{a}{4};$$

— pentru deschiderea mare b $$q_{ech} = q\,\frac{a}{4}\left(2 - \frac{a}{b}\right).$$

4. PLĂCI OBLICE

Plăcile oblice (în formă de paralelogram) pot fi studiate în coordonate oblice, după aceleași metode ca și plăcile dreptunghiulare. Alegînd sistemul de axe ca în fig. VI. 22 și notînd

$$x = \xi + c\zeta; \qquad y = s\,\zeta$$
$$c = \cos\omega; \qquad s = \sin\omega,$$

operatorii laplacean și bilaplacean au expresiile

$$\Delta w = \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\,c\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \zeta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right).$$

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{s^4}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4\,c\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \zeta} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \zeta^3}\right) + 2(1 + 2c^2)\,\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4}\right].$$

P. Lardy a indicat o soluție analitică, pentru placa simplu rezemată pe contur, cu ajutorul seriilor trigonometrice [57]. V. Ille a aplicat calculul variațional bazat pe metoda

Kantorovici, la studierea plăcilor oblice avînd două laturi opuse încastrate sau simplu rezemate, celelalte două fiind rezemate arbitrar [55, 56].

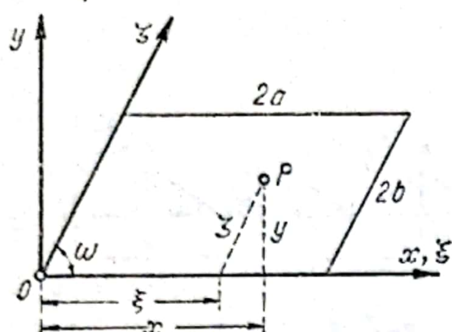


Fig. VI.22

Dificultățile calculului analitic au făcut pe numeroși cercetători să aplice metoda diferențelor finite în coordonate dreptunghiulare, oblice sau triunghiulare (de exemplu H. Favre [51], M. Naruoka [58], J. Balaš și A. Hanuška [53], D. V. Vainberg [43] etc.).

Placa paralelogram avînd două laturi opuse simplu rezemate, iar celelalte două laturi libere își găsește o largă aplicare la pasarele și poduri; din această cauză ea a fost amplu studiată și tabelată.

J. Balaš și A. Hanuška au editat un amplu volum de suprafețe de influență care conține și o serie de tabele cu valorile săgeților și momentelor produse de o sarcină uniform distribuită. Parametrii variați sînt:

unghiul de oblicitate $\varphi = 0°, 15°, 30°, 45°, 52°30', 60°$

raportul $\varkappa = \frac{b}{a} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}$;

punctele în care sînt determinate mărimile statice rezultă din fig. VI.23.

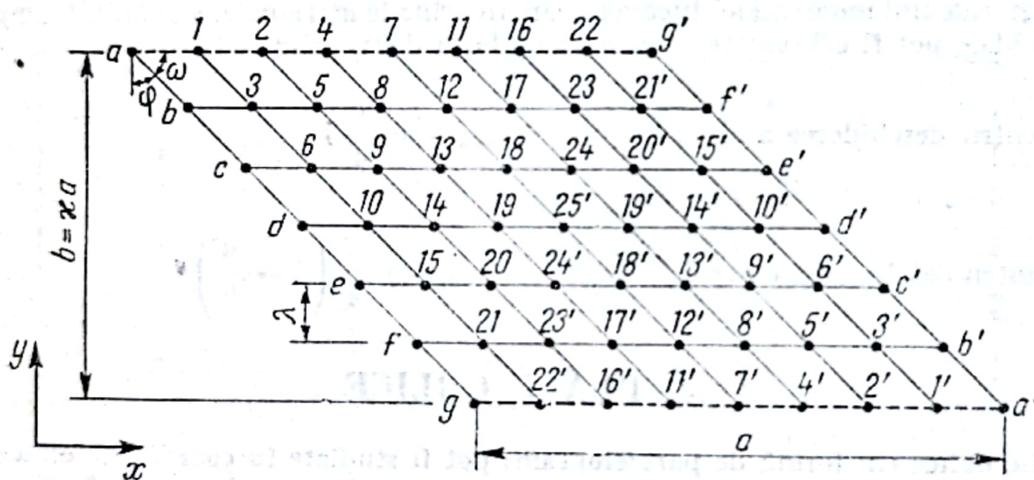


Fig. VI.23

Expresiile săgeților și momentelor sînt:

$$w = k_w \cdot \frac{p\lambda^4}{K}$$

$$M_x = k_x \cdot p\lambda^2; \quad M_y = k_y \cdot p\lambda^2 \quad \left(\text{cu } \lambda = \frac{b}{6}\right)$$

$$M_{xy} = k_{xy} \cdot p\lambda^2.$$

În mod informativ, se dau în tabelele VI.44 – VI.46 valorile lui k_w, k_x, k_y, k_{xy} pentru cazurile $\varphi = 30°, 45°, 60°$ și $\varkappa = 1/3$, $1/2$ și $1/1$.

Pentru plăcile oblice continue pe două și trei deschideri, se citează volumul de tabele editate de C. Schleicher și B. Wegener [59].

Tabelul VI.44

Placă oblică avînd $\varkappa = 1/3$

Punct	φ = 30°				φ = 45°				φ = 60°			
	k_w	k_x	k_y	k_{xy}	k_w	k_x	k_y	k_{xy}	k_w	k_x	k_y	k_{xy}
b	0	−0,64	0,64	0,37	0	−0,01	0,01	0	0	0,40	−0,40	0,23
c	0	−1,31	1,31	0,75	0	−0,30	0,30	0	0	0,94	−0,94	0,54
d	0	−2,15	2,15	1,24	0	−0,96	0,96	0	0	1,32	−1,32	0,76
e	0	−3,47	3,47	2,00	0	−2,44	2,44	0	0	1,11	−1,11	0,64
f	0	−5,69	5,69	3,28	0	−5,82	5,82	0	0	−0,88	0,88	−0,51
1	330,16	5,58	0	2,59	181,20	2,01	0	1,21	76,75	0,77	0	0,28
2	631,26	14,60	0	5,01	351,94	6,42	0	3,29	149,46	2,65	0	1,14
3	332,16	6,63	1,74	3,53	181,23	2,82	1,33	1,82	75,51	1,70	0,35	0,83
4	856,35	22,92	0	7,22	489,24	11,78	0	5,96	208,39	4,92	0	2,59
5	631,31	15,95	1,73	6,46	348,90	7,60	2,02	4,69	142,46	3,72	0,95	2,11
6	336,23	7,49	2,82	4,81	182,04	3,33	2,51	2,83	72,59	2,46	0,59	1,51
7	962,11	28,25	0	8,94	565,18	16,61	0	8,55	241,68	7,03	0	4,65
8	848,91	23,97	1,35	8,52	478,76	13,03	2,00	7,74	190,85	5,69	1,54	4,05
9	635,89	17,29	2,65	7,90	348,89	8,59	3,41	6,49	132,89	4,25	1,93	3,30
10	342,94	8,26	3,47	6,41	184,63	3,50	3,60	4,20	68,48	2,73	1,07	2,20
11	920,76	29,28	0	10,35	554,66	19,08	0	10,70	238,34	8,45	0	7,13
12	942,86	28,48	1,07	9,83	542,48	17,32	1,62	10,09	210,95	7,21	1,94	6,55
13	847,84	25,01	2,02	9,50	473,95	14,19	3,04	9,52	172,76	5,72	3,01	5,90
14	645,89	18,75	2,86	9,43	354,15	9,60	4,08	8,75	123,67	3,96	3,15	4,88
15	353,75	9,16	3,64	8,68	191,23	3,41	4,57	6,65	65,00	1,99	2,23	3,16
16	726,94	25,27	0	11,69	444,78	17,39	0	12,53	190,97	8,18	0	9,67
17	889,46	28,34	1,00	10,81	517,45	18,36	1,36	11,66	195,20	7,60	1,98	9,03
18	931,32	28,60	1,67	10,25	527,75	17,73	2,41	11,18	185,46	6,66	3,37	8,65
19	853,70	26,09	2,11	10,30	477,23	15,45	3,16	11,15	160,97	5,20	4,11	8,30
20	662,97	20,54	2,39	10,92	368,68	11,15	3,70	11,46	121,58	2,98	4,35	7,91
21	371,48	10,79	2,92	12,26	206,94	3,83	4,64	12,06	67,73	0,42	4,54	7,62
22	401,51	14,61	0	13,18	244,33	8,43	0	14,07	101,03	2,13	0	10,59
23	689,34	22,82	1,25	11,81	397,98	14,04	1,77	12,94	141,59	4,29	2,42	10,38
24	867,30	27,23	1,72	10,75	491,30	16,96	2,44	11,95	166,43	5,56	3,60	9,95
25	927,47	28,64	1,86	10,41	522,57	17,85	2,63	11,63	174,78	5,96	3,96	9,81

Tabelul VI.45

Placa oblică având $\varkappa = 1/2$

Punct	φ = 30°				φ = 45°				φ = 60°			
	k_w	k_x	k_y	k_{xy}	k_w	k_x	k_y	k_{xy}	k_w	k_x	k_y	k_{xy}
b	0	0,035	−0,035	−0,020	0	0,239	−0,239	0	0	0,266	−0,286	0,165
c	0	−0,109	0,109	0,063	0	0,391	−0,391	0	0	0,756	−0,756	0,436
d	0	−0,352	0,352	0,203	0	0,364	−0,364	0	0	1,071	−1,071	0,618
e	0	−0,844	0,844	0,487	0	−0,035	0,035	0	0	0,957	−0,957	0,552
f	0	−1,879	1,879	1,085	0	−1,331	1,331	0	0	0,230	−0,230	0,133
1	64,555	2,562	0	0,696	35,593	1,042	0	0,293	15,758	0,381	0	0,106
2	123,179	6,342	0	1,705	68,775	3,055	0	1,032	30,634	1,301	0	0,449
3	64,482	3,305	0,852	1,222	35,163	1,783	0,546	0,717	15,163	1,095	0,121	0,548
4	167,125	9,824	0	2,819	94,888	5,235	0	2,092	42,501	2,423	0	1,006
5	121,644	7,074	1,146	2,466	66,411	3,824	1,045	1,764	27,838	2,122	0,460	1,148
6	64,708	3,774	1,344	1,774	34,459	2,236	0,942	1,156	13,592	1,654	0,101	1,014
7	188,337	12,243	0	3,876	108,885	7,079	0	3,337	48,760	3,405	0	1,774
8	162,876	10,308	1,157	3,583	89,212	5,772	1,335	3,017	35,781	2,962	0,799	1,912
9	121,200	7,639	1,779	3,222	64,108	4,222	1,816	2,539	23,395	2,408	0,883	1,754
10	65,440	4,038	1,682	2,417	33,805	2,341	1,371	1,625	11,366	1,756	0,271	1,322
11	181,216	13,011	0	4,814	106,500	8,080	0	4,612	47,141	3,866	0	2,740
12	180,698	12,267	1,060	4,474	99,169	7,159	1,420	4,282	37,177	3,253	1,151	2,780
13	160,700	10,698	1,772	4,255	84,685	5,941	2,243	3,967	27,967	2,638	1,673	2,543
14	122,183	8,143	2,030	4,040	62,721	4,281	2,420	3,447	18,772	1,990	1,560	2,081
15	67,195	4,205	1,913	3,413	33,868	2,006	1,992	2,400	9,377	1,249	0,860	1,345
16	143,982	11,587	0	5,633	85,417	7,539	0	5,783	36,574	3,245	0	3,868
17	170,540	12,357	0,994	5,150	93,106	7,363	1,403	5,337	31,490	2,567	1,570	3,544
18	176,125	12,212	1,659	4,869	92,377	6,896	2,328	5,082	27,078	2,101	2,484	3,224
19	160,864	11,105	1,935	4,824	82,664	5,954	2,718	4,916	22,174	1,589	2,810	2,882
20	125,395	8,808	1,859	4,960	63,862	4,275	2,706	4,802	16,195	0,775	2,765	2,533
21	71,099	4,636	1,804	5,395	36,264	1,314	2,742	4,876	8,899	−0,698	2,734	2,272
22	79,933	6,864	0	6,176	46,885	3,610	0	6,310	18,496	0,181	0	4,056
23	132,164	9,984	1,082	5,637	70,544	5,341	1,665	5,915	20,469	0,595	2,148	3,529
24	163,928	11,656	1,652	5,162	85,006	6,358	2,436	5,540	22,286	1,067	3,031	3,310
25	174,593	12,174	1,858	5,020	89,875	6,680	2,687	5,430	22,982	1,245	3,281	3,250

Tabelul VI.46

Placa oblică avînd $\varkappa = 1/1$

Punct	$\varphi = 30°$				$\varphi = 45°$				$\varphi = 60°$			
	k_w	k_x	k_y	k_{xy}	k_w	k_x	k_y	k_{xy}	k_w	k_x	k_y	k_{xy}
b	0	0,0730	−0,0730	−0,0422	0	0,1433	−0,1433	0	0	0,2006	−0,2006	0,1158
c	0	0,0801	−0,0801	−0,0463	0	0,2161	−0,2161	0	0	0,2444	−0,2444	0,1411
d	0	0,0520	−0,0520	−0,0300	0	0,1745	−0,1745	0	0	0,1327	−0,1327	0,0766
e	0	−0,0171	0,0171	0,0098	0	0,0722	−0,0722	0	0	0,0387	−0,0387	0,0223
f	0	−0,1852	0,1852	0,1068	0	−0,0779	0,0779	0	0	0,0213	−0,0213	0,0123
1	4,0590	0,6986	0	0,0688	2,2756	0,3303	0	0,0261	1,0425	0,1979	0	0,0492
2	7,7138	1,6178	0	0,3255	4,3602	0,8364	0	0,1952	1,9705	0,4139	0	0,0528
3	3,9830	1,0294	0,2638	0,3070	2,1467	0,6545	0,1583	0,2630	0,8340	0,4088	0,0207	0,2782
4	10,4326	2,4534	0	0,6216	5,9608	1,3684	0	0,4502	2,6590	0,6401	0	0,1849
5	7,3959	1,9136	0,4595	0,6242	3,9300	1,1421	0,3910	0,5475	1,4335	0,5611	0,2339	0,4389
6	3,8997	1,1533	0,3789	0,4295	1,9522	0,7455	0,2780	0,3812	0,5801	0,3648	0,1678	0,3044
7	11,7319	3,0349	0	0,9307	6,7696	1,7892	0	0,7555	2,9771	0,8099	0	0,3900
8	9,7460	2,5909	0,5633	0,9164	5,0903	1,5082	0,5618	0,8322	1,7308	0,6339	0,4180	0,5777
9	7,1686	2,0136	0,6775	0,8099	3,4999	1,1549	0,6554	0,7150	0,9652	0,4420	0,4909	0,4366
10	3,8456	1,1677	0,4610	0,5195	1,7952	0,6850	0,4152	0,4313	0,4422	0,2483	0,3166	0,2367
11	11,2752	3,2294	0	1,2288	6,5433	1,9665	0	1,0850	2,8266	0,8514	0	0,6568
12	10,6513	2,9400	0,6061	1,1661	5,4321	1,6485	0,6891	1,0777	1,7018	0,5927	0,5705	0,6551
13	9,3378	2,5844	0,8517	1,1012	4,4426	1,3796	0,9348	0,9743	1,1420	0,4505	0,7333	0,5056
14	7,0601	2,0157	0,7954	0,9382	3,2341	1,0469	0,8537	0,7690	0,7712	0,3400	0,6355	0,3518
15	3,8634	1,1161	0,5436	0,6452	1,7302	0,5683	0,5510	0,4560	0,4020	0,2037	0,3716	0,1931
16	8,9502	2,8787	0	1,4800	5,1793	1,7296	0	1,4037	2,1836	0,6801	0	0,9749
17	9,9141	2,8455	0,6158	1,3382	4,8865	1,4682	0,7912	1,2191	1,3848	0,4218	0,6848	0,6280
18	10,0939	2,7971	0,9301	1,2803	4,6772	1,3839	1,1176	1,1182	1,1289	0,3957	0,8825	0,4999
19	9,1851	2,5526	0,9779	1,2099	4,1496	1,2341	1,1505	1,0026	0,9648	0,3694	0,8583	0,4095
20	7,1335	2,0088	0,8305	1,1073	3,1847	0,8955	1,0149	0,8625	0,7219	0,2449	0,7451	0,3161
21	4,0557	1,0099	0,6512	1,0950	1,8003	0,2055	0,8934	0,7859	0,3799	−0,1099	0,6890	0,1980
22	4,9596	1,6749	0	1,5513	2,8145	0,7773	0	1,4579	1,1470	0,1909	0	0,9340
23	7,5900	2,1963	0,6282	1,3642	3,5678	0,9220	0,8781	1,1547	0,8898	0,1491	0,7400	0,4670
24	9,3214	2,6013	0,9297	1,3030	4,2190	1,1906	1,1702	1,0924	0,9720	0,3115	0,9022	0,4276
25	9,9275	2,7387	1,0335	1,3035	4,4620	1,2892	1,2545	1,0878	1,0275	0,3731	0,9382	0,4264

5. ECUAŢIILE GENERALE ÎN COORDONATE POLARE

5.1. Ecuaţiile de echilibru

În coordonate polare, solicitările statice se iau după direcţia razei şi în direcţia inelară. Se notează:

M_r — momentul încovoietor radial;
M_φ — momentul încovoietor inelar;
$M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$ — momentele de torsiune;
T_r, T_φ — forţele tăietoare în secţiuni corespunzătoare lui M_r şi M_φ.

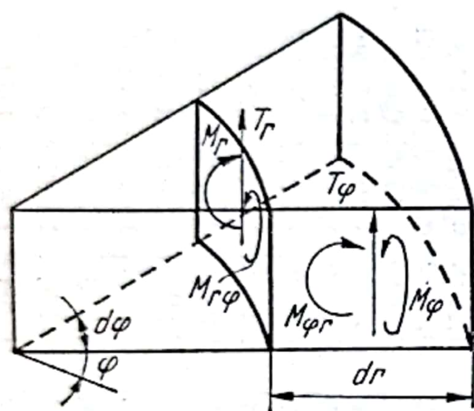


Fig. VI.24

Ele satisfac următoarele ecuaţii de echilibru (fig. VI.24):

$$\frac{\partial(M_r r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial \varphi} - M_\varphi = T_r \cdot r, \qquad \text{(VI.42a)}$$

$$\frac{\partial(M_{r\varphi} \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + M_{\varphi r} = T_\varphi \cdot r, \qquad \text{(VI.42b)}$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{T_r}{r} = -Z. \qquad \text{(VI.42c)}$$

5.2. Relaţiile dintre mărimile secţionale şi săgeţi

Momente încovoietoare

$$M_r = -K\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right],$$

$$M_\varphi = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]. \qquad \text{(VI.43a)}$$

Momente de torsiune

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = -K(1-\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right). \qquad \text{(VI.43b)}$$

Forţe tăietoare

$$T_r = -K\frac{\partial}{\partial r}\Delta w; \quad T_\varphi = -K\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Delta w, \qquad \text{(VI.43c)}$$

în care

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \qquad \text{(VI.44)}$$

Între mărimile precedente mai există relațiile :

$$\mathfrak{M} = \frac{M_r + M_\varphi}{1+\mu}; \qquad \Delta w = -\frac{\mathfrak{M}}{K}; \qquad \Delta\mathfrak{M} = -Z.$$

5.3. Ecuația cu derivate parțiale a săgeților

Înlocuind pe T_r, T_φ din relațiile (VI. 43 c) și (VI. 42 c) se obține :

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) = \frac{Z(r,\varphi)}{K}, \tag{VI.45}$$

care rezultă și direct din (VI. 13) prin reprezentarea laplaceanului în coordonate polare.

5.4. Condiții de contur

Forțele tăietoare generalizate au expresiile

$$T_r^* = T_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial\varphi} = -K\left[\frac{\partial}{\partial r}\Delta w + (1-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)\right],$$

$$T_\varphi^* = T_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi r}}{\partial r} = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Delta w + (1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right]. \tag{VI.46}$$

Fiecare mod de rezemare comportă două condiții, pentru conturul circular al plăcii :

— simplu rezemat $\quad w = 0$ și $M_r = 0$;

— încastrat perfect $\quad w = 0$ și $\dfrac{\partial w}{\partial r} = 0$;

— liber $\quad M_r = 0$ și $T_r^* = 0$.

Dacă placa are formă de sector, pe laturile drepte condițiile de rezemare se vor scrie :

— simplă rezemare $\quad w = 0$ și $M_\varphi = 0$;

— încastrare perfectă $\quad w = 0$ și $\dfrac{\partial w}{\partial\varphi} = 0$;

— rază liberă $\quad M_\varphi = 0$ și $T_\varphi^* = 0$.

Pe lîngă aceasta, la plăcile simplu rezemate mai intervin la colțuri dreptunghiulare și reacțiunile concentrate :

$$R_{1,2} = \pm 2M_{r\varphi}; \tag{VI.47}$$

de aceea va fi necesară, în general, o ancorare a colțurilor plăcii.

6. PLĂCI CIRCULARE

6.1. Starea de eforturi și de deformații simetrică

În cazul simetriei de încărcare și de rezemare în raport cu centrul, mărimile secționale și deformațiile sînt independente de unghiul φ și deci derivatele lor în raport cu φ sînt nule ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$).

Ecuația săgeților se simplifică și rezultă:

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr}, \tag{VI.48a}$$

$$\Delta\Delta w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} \quad \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{Z(r)}{K}. \tag{VI.48b}$$

Această ecuație este integrabilă complet. Soluția totală se scrie

$$w = w_p + \overline{w},$$

în care:

$$\overline{w} = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \tag{VI.49}$$

reprezintă soluția ecuației (VI. 49) făcute omogene ($Z(r) \equiv 0$), cu A, B, C, D constante de integrare, iar

$$w_p = \frac{1}{K}\int\frac{dr}{r}\int r\,dr\int\frac{dr}{r}\int Z(r) r\,dr \tag{VI.50}$$

o soluție particulară (nu se introduc constante de integrare deoarece acestea intervin în soluția ecuației omogene).

Pentru sarcini care variază după legea $Z(r) = p \cdot r^m$ ($m \geqslant 0$), soluția particulară este:

$$w_p = \frac{p}{K} \cdot \frac{r^{m+4}}{(m+2)^2 (m+4)^2}.$$

Mărimile secționale se exprimă, în funcție de săgeți, astfel:

$$M_r = -K\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right),$$

$$M_\varphi = -K\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2 w}{dr^2}\right), \tag{VI.51}$$

$$T_r = -K\left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right).$$

Mai interesează şi panta tangentei

$$\theta = -\frac{dw}{dr}. \tag{VI.52}$$

Forţa tăietoare radială se poate deduce direct din condiţia de echilibru a unei secţiuni circulare prin placă (fig. VI.25) :

$$T_r = -\frac{P_r}{2\pi r}. \tag{VI.53}$$

în care P_r reprezintă rezultanta sarcinilor aplicate în interiorul regiunii de placă de rază r.

Momentele de torsiune $M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$ şi forţele tăietoare inelare sînt identic nule. Momentele încovoietoare M_r şi M_φ sînt momente principale.

Condiţiile la limită pentru determinarea constantelor A, B, C, D din (VI.49) sînt:

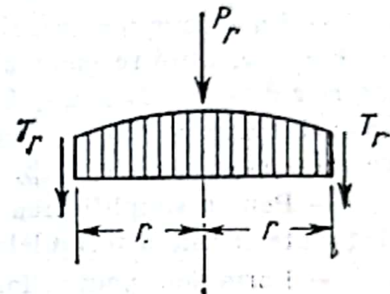


Fig. VI.25

— pe conturul $r = a$ simplu rezemat $w=0$ şi $M_r=0$;

— pe conturul $r = a$ încastrat perfect $w=0$ şi $\theta=0$;

— pe conturul $r = a$ liber $M_r = 0$ şi $T_r = 0$;

— la centrul plăcii pline ($r = 0$), w şi θ finiţi, deci în (VI. 49) trebuie luat $A = B = 0$.

Dacă sarcinile sînt aplicate discontinuu, ecuaţia săgeţilor trebuie să fie utilizată de atîtea ori cîte suprafeţe de încărcare continuă avem (pentru fiecare zonă corespunzînd cîte patru constante A_i, B_i, C_i, D_i). În lungul cercurilor de delimitare a acestor zone va trebui să se exprime continuitatea deformaţiilor w, θ şi a mărimilor secţionale M_r, T_r.

Pentru cazurile mai des întîlnite în practică, se dau în paragraful următor formulele şi diagramele corespunzătoare.

6.2. Formule rezumative şi diagrame pentru plăci circulare şi inelare solicitate simetric

În cele ce urmează se fac următoarele observaţii şi se dau indicaţii pentru utilizarea formulelor şi a diagramelor.

— Primele şapte cazuri se referă la placa întreagă (fără gol), celelalte la placa inelară.

— La plăcile întregi la care încărcarea este continuă pe toată suprafaţa corespunde cîte o singură expresie pentru fiecare mărime statică; la plăcile întregi cu sarcini parţiale (discontinue), suprafaţa este împărţită în regiuni concentrice, pentru fiecare corespunzînd cîte un grup de formule. Aceste formule satisfac condiţiile de continuitate pe cercurile de frontieră între două regiuni vecine.

— În locul variabilei liniare r, s-a ales variabilă adimensională $\rho = r/a$, astfel încît în factor apar termeni dimensionali.

— Pentru fiecare caz de încărcare şi rezemare au fost schiţate diagramele de variaţie ale lui w, M_r, M_φ, T_r. În partea stîngă se specifică mărimea statică, în partea dreaptă factorii dimensionali (de exemplu respectiv pa^4/K, pa^2, pa^2, pa), iar pe diagramă se citesc coeficienţii numerici ai factorilor dimensionali. În cazul sarcinilor continue pe toată suprafaţa plăcii, aceşti coeficienţi sînt valabili oricare ar fi dimensiunile plăcii sau intensitatea sarcinilor.

— Pentru exemplele numerice din diagrame s-a admis $\mu = 1/6$ (beton armat).

— Pentru acelaşi caz de încărcare sînt grupate formulele pentru un contur simplu rezemat, respectiv încastrat perfect; de aceea se va observa alegerea formulelor corespunzătoare cazului de rezemare impus.

— Pentru sarcini discontinue, regiunile sînt delimitate de cercul $r = b = \beta a$ sau $\rho = \frac{b}{a} = \beta < 1$. Exemplele numerice sînt tratate pentru o valoare particulară a lui β; deci diagramele dau numai o imagine a variaţiei, fără ca coeficienţii înscrişi în diagrame să fie valabilă şi pentru alţi β.

— La plăcile inelare, raza cercului de rezemare a fost notată cu a, iar a cercului liber cu $b = \beta a$. Cînd rezemarea este în exterior $\beta < 1$ şi $\beta \leq \rho \leq 1$, iar cînd rezemarea este în interior $\beta > 1$ şi $1 \leq \rho \leq \beta$. Pentru ambele cazuri sînt valabile aceleaşi formule. Diagramele sînt tratate separat pentru cele două cazuri, coeficienţii numerici corespunzînd unor valori particulare ale lui β.

— Pentru simplificarea scrierii s-au introdus prescurtările $k_1 \ldots k_6$, ale căror expresii sînt date înaintea formulelor cazului respectiv.

— Formulele pentru forţele tăietoare T_r sînt date după expresiile încărcării, ele nedepinzînd de modul de rezemare al plăcii.

— Unele cazuri mai complexe de încărcare sau rezemare pot fi tratate cu ajutorul formulelor stabilite, prin suprapunerea efectelor (v. pct. 6.3).

Cazul a. *Placa întreagă cu sarcină uniform distribuită*

$$\left.\begin{aligned} &p = \text{const}\,;\quad T_r = -\frac{pr}{2} = -\frac{pa}{2}\rho\,;\ \text{sarcina totală}\ P = \pi p a^2 \\ &\text{reacţiunea}\quad V = \frac{pa}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.54)}$$

C o n t u r u l î n c a s t r a t p e r f e c t (fig. VI. 26, a)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{pa^4}{64\,K}(1-\rho^2)^2\,;\quad \theta = \frac{pa^3}{16\,K}\cdot\rho(1-\rho^2) \\ M_r &= \frac{pa^2}{16}\left[1+\mu-(3+\mu)\,\rho^2\right] \\ M_\varphi &= \frac{pa^2}{16}\left[1+\mu-(1+3\mu)\,\rho^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.55)}$$

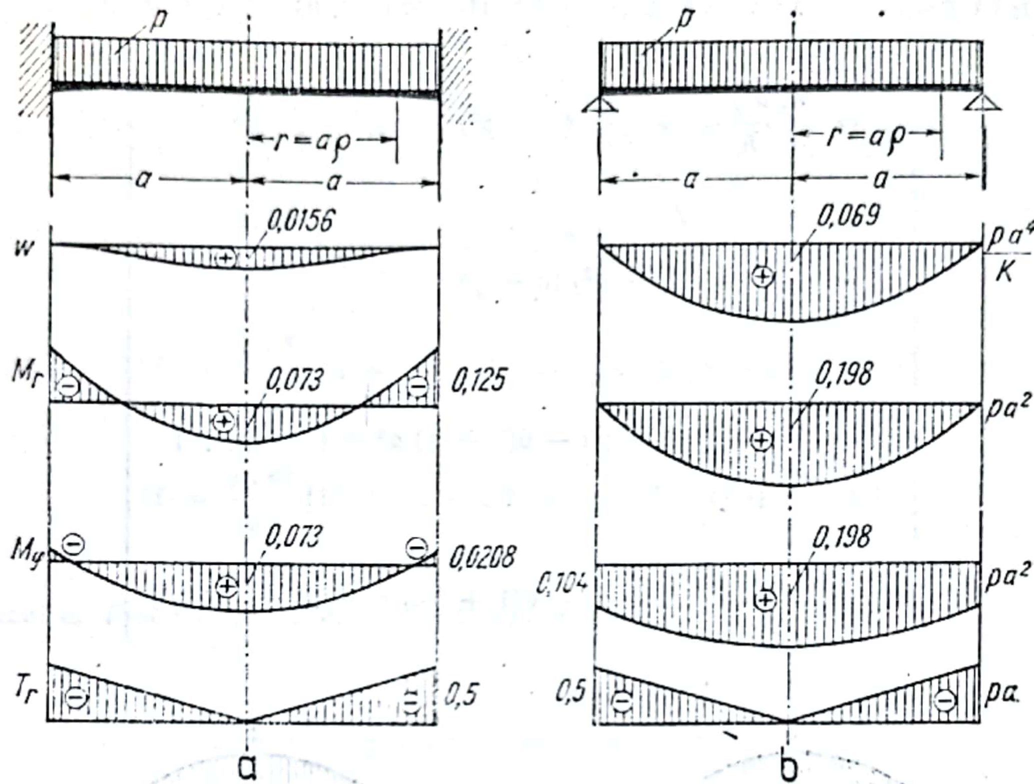


Fig. VI.26

Conturul simplu rezemat (fig. VI. 26, *b*)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{pa^4}{64\,K}(1-\rho^2)\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}-\rho^2\right)\\ \theta &= \frac{pa^3}{16\,K}\rho\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}-\rho^2\right)\\ M_r &= \frac{pa^2}{16}(3+\mu)(1-\rho^2)\\ M_\varphi &= \frac{pa^2}{16}[3+\mu-(1+3\mu)\rho^2]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.56)}$$

Cazul b. *Placa întreagă cu sarcină parabolică*

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0(1-\rho^2);\ \text{sarcina totală}\ P=\frac{\pi}{2}pa^2\\ T_r &= -\frac{p_0\,a^2}{4}\cdot\rho(2-\rho^2);\qquad V=\frac{p_0\,a}{4}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.57)}$$

Conturul încastrat perfect (fig. VI.27, *a*)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{p_0\, a^4}{576\, K}\cdot(1-\rho^2)^2\,(7-\rho^2) \\ \theta &= \frac{p_0\, a^3}{96\, K}\cdot\rho(1-\rho^2)\,(5-\rho^2) \\ M_r &= \frac{p_0\, a^2}{96}\,[5(1+\mu)-6(3+\mu)\,\rho^2+(5+\mu)\,\rho^4] \\ M_\varphi &= \frac{p_0\, a^2}{96}\,[5(1+\mu)-6(1+3\mu)\,\rho^2+(1+5\mu)\,\rho^4]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.58)}$$

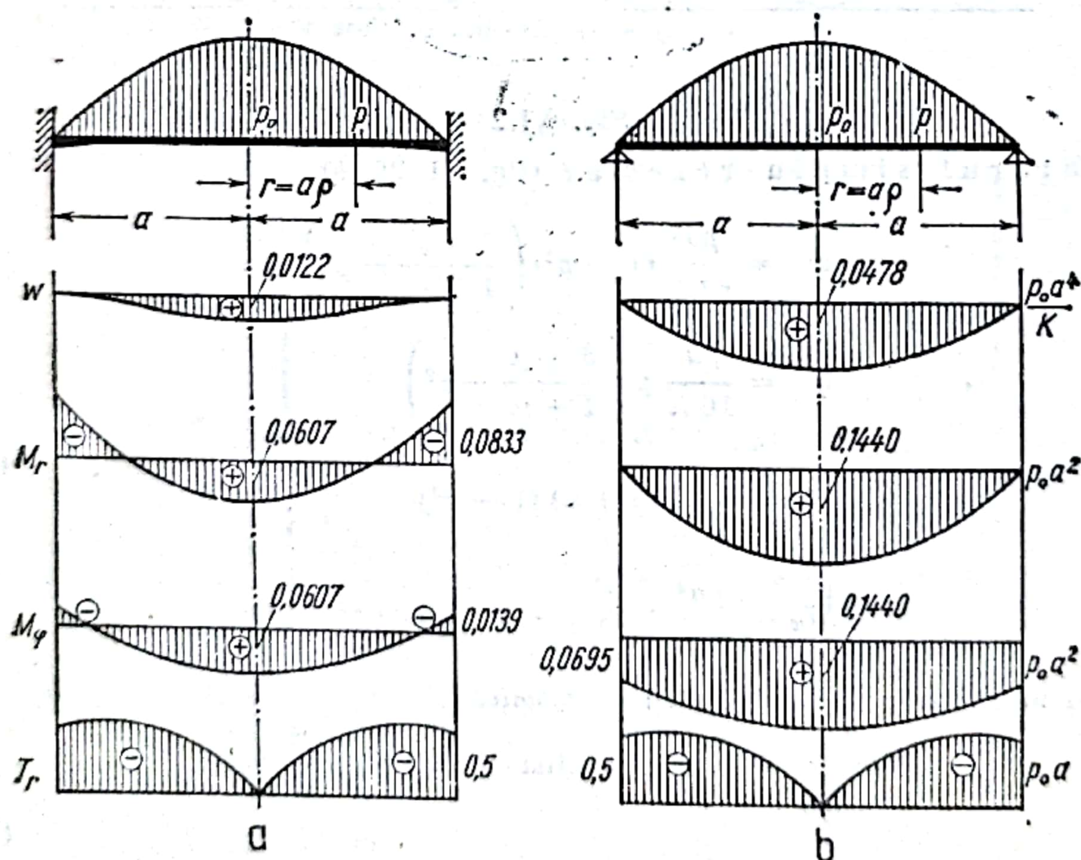


Fig. VI.27

Contur simplu rezemat (fig. VI.27, *b*)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{p_0 a^4}{576 K}\left(\frac{31+7\mu}{1+\mu} - \frac{39+15\mu}{1+\mu}\cdot\rho^2 + 9\rho^4 - \rho^6\right) \\ \theta &= \frac{p_0 a^3}{96 K}\cdot\rho\left(\frac{13+5\mu}{1+\mu} - 6\rho^2 + \rho^4\right) \\ M_r &= \frac{p_0 a^2}{96}\left[13+5\mu - 6(3+\mu)\rho^2 + (5+\mu)\rho^4\right] \\ M_\varphi &= \frac{p_0 a^2}{96}\left[13+5\mu - 6(1+3\mu)\rho^2 + (1+5\mu)\rho^4\right]. \end{aligned}\right\} \quad (VI.59)$$

Cazul c. *Placa întreagă cu sarcină conică*

$$\left.\begin{aligned} &p = p_0(1-\rho); \text{ sarcina totală } P = \frac{\pi}{3} p_0 a^2 \\ &T_r = -\frac{p_0 a}{6}\rho(3-2\rho); \qquad V = \frac{p_0 a}{6} \end{aligned}\right\} \quad (VI.60)$$

Conturul încastrat perfect (fig. VI. 28, *a*)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{p_0 a^4}{14\,400 K}(1-\rho)^2(129 + 258\rho + 97\rho^2 - 64\rho^3) \\ \theta &= \frac{p_0 a^3}{720 K}\rho(1-\rho)(29 + 29\rho - 16\rho^2) \\ M_r &= \frac{p_0 a^2}{720}\left[29(1+\mu) - 45(3+\mu)\rho^2 + 16(4+\mu)\rho^3\right] \\ M_\varphi &= \frac{p_0 a^2}{720}\left[29(1+\mu) - 45(1+3\mu)\rho^2 + 16(1+4\mu)\rho^3\right] \end{aligned}\right\} \quad (VI.61)$$

Contur simplu rezemat (fig. VI.28, *b*)

$$
\left.\begin{aligned}
w &= \frac{p_0\, a^4}{14\,400\, K}\left[\frac{549 + 129\mu}{1+\mu} - \frac{710 + 290\mu}{1+\mu}\cdot\rho^2 + 225\,\rho^4 - 64\,\rho^5\right]\\
\theta &= \frac{p_0\, a^3}{720\, K}\cdot\rho\left(\frac{71 + 29\mu}{1+\mu} - 45\,\rho^2 + 16\,\rho^3\right)\\
M_r &= \frac{p_0\, a^2}{720}\,[71 + 29\mu - 45\,(3+\mu)\,\rho^2 + 16\,(4+\mu)\,\rho^3]\\
M_\varphi &= \frac{p_0\, a^2}{720}\,[71 + 29\mu - 45\,(1+3\mu)\,\rho^2 + 16\,(1+4\mu)\,\rho^3]
\end{aligned}\right\}\qquad (VI.62)
$$

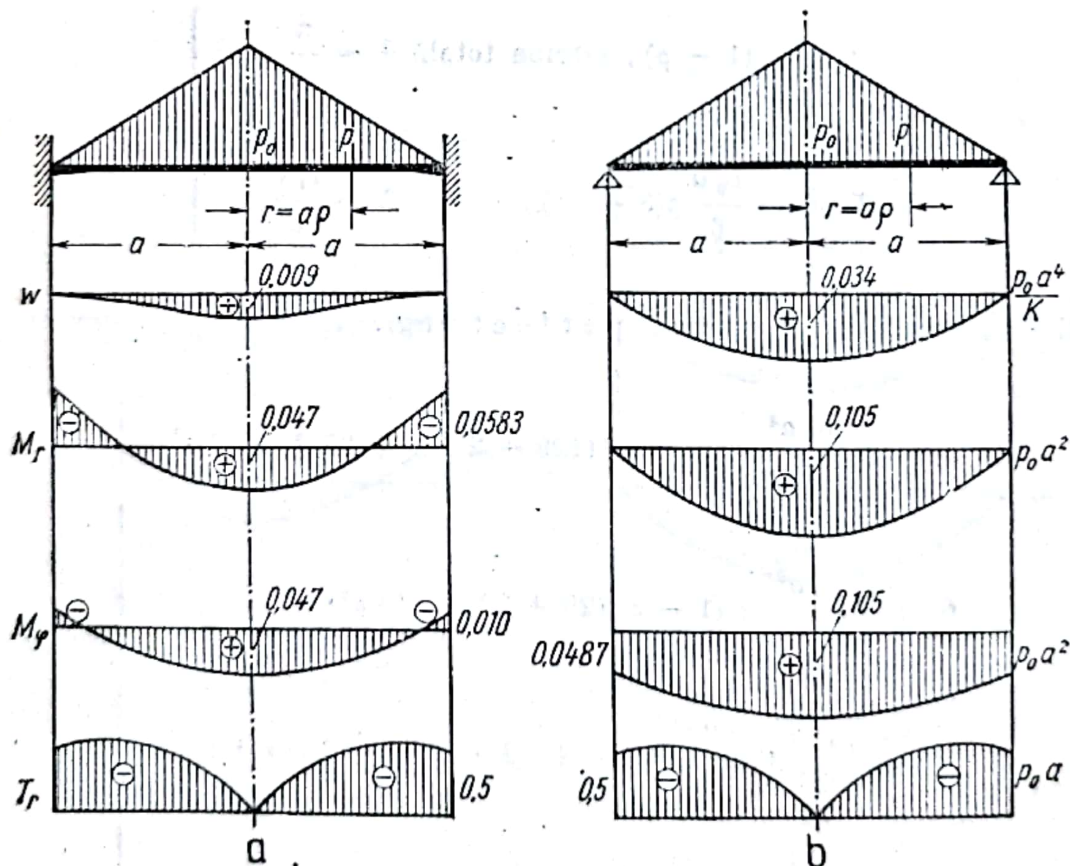


Fig. VI.28

Cazul d. *Placa întreagă simplu rezemată supusă la încovoiere pură* (fig. VI.29)

Momentul distribuit uniform pe contur M

$$T_r \equiv 0; \quad V \equiv 0$$

$$w = \frac{Ma^2}{2K(1+\mu)}(1-\rho^2). \qquad \text{(VI.63)}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{Ma}{K(1+\mu)}\rho \\ M_r &= M_\varphi = M \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.64)}$$

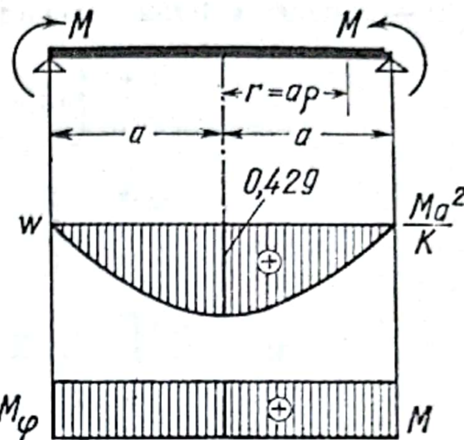


Fig. VI.29

Cazul e. *Placa întreagă cu sarcină uniform distribuită parțial*

$$\left.\begin{aligned} p &= \text{const}; \quad \text{sarcina totală } P = \pi p b^2 = \pi p a^2 \cdot \beta^2 \\ T_r &= -\frac{pa}{2}\cdot\rho \quad \text{pentru } 0 \leqslant \rho \leqslant \beta; \qquad V = \frac{pa}{2}\cdot\beta^2 \\ T_r &= -\frac{pa}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\rho} \quad \text{pentru } \beta \leqslant \rho \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.65)}$$

Conturul încastrat perfect (fig. VI. 30, *a*)

— regiunea interioară încărcată $(0 \leqslant \rho \leqslant \beta)$:

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{pa^2b^2}{64\,K}\left[4 - 3\,\beta^2 + 4\,\beta^2 \ln\beta - 2\,(\beta^2 - 4\ln\beta)\,\rho^2 + \frac{\rho^4}{\beta^2}\right] \\ \theta &= \frac{pa\,b^2}{16\,K}\cdot\rho\left(\beta^2 - 4\ln\beta - \frac{\rho^2}{\beta^2}\right) \\ M_r &= \frac{pb^2}{16}\left[(1+\mu)(\beta^2 - 4\ln\beta) - \frac{3+\mu}{\beta^2}\cdot\rho^2\right] \\ M_\varphi &= \frac{pb^2}{16}\left[(1+\mu)(\beta^2 - 4\ln\beta) - \frac{1+3\mu}{\beta^2}\,\rho^2\right]; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.66a)}$$

— regiunea exterioară neîncărcată ($\beta \leqslant \rho \leqslant 1$)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{pa^2b^2}{32\,K}\left[(2-\beta^2)(1-\rho^2)+2(\beta^2+2\rho^2)\ln\rho\right]\\
\theta &= \frac{pab^2}{16\,K}\cdot\rho\left[\beta^2\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)-4\ln\rho\right]\\
M_r &= \frac{pb^2}{16}\left[-4+(1-\mu)\frac{\beta^2}{\rho^2}+(1+\mu)(\beta^2-4\ln\rho)\right]\\
M_\varphi &= \frac{pb^2}{16}\left[-4\mu-(1-\mu)\frac{\beta^2}{\rho^2}+(1+\mu)(\beta^2-4\ln\rho)\right].
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.66b)}$$

Contur simplu rezemat (fig. VI. 30, *b*)
— regiunea interioară încărcată ($0 \leqslant \rho \leqslant \beta$):

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{pa^2b^2}{64\,K}\cdot\left\{\frac{4(3+\mu)}{1+\mu}\quad\frac{7+3\mu}{1+\mu}\beta^2+4\beta^2\ln\beta-\right.\\
&\quad\left.-\frac{2}{1+\mu}\left[4-(1-\mu)\beta^2-4(1+\mu)\ln\beta\right]\rho^2+\frac{\rho^4}{\beta^2}\right)\\
\theta &= \frac{pab^2}{16\,K}\cdot\rho\left(\frac{4}{1+\mu}-\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2-4\ln\beta-\frac{\rho^2}{\beta^2}\right)\\
M_r &= \frac{pb^2}{16}\left[4-(1-\mu)\beta^2-4(1+\mu)\ln\beta-\frac{3+\mu}{\beta^2}\rho^2\right]\\
M_\varphi &= \frac{pb^2}{16}\left[4-(1-\mu)\beta^2-4(1+\mu)\ln\beta-\frac{1+3\mu}{\beta^2}\rho^2\right];
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.67a)}$$

— regiunea exterioară neîncărcată ($\beta \leqslant \rho \leqslant 1$)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{pa^2b^2}{64\,K}\left\{\left[2\frac{(3+\mu)}{1+\mu}-\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2\right](1-\rho^2)+2\beta^2\ln\rho+4\rho^2\ln\rho\right\}\\
\theta &= \frac{pab^2}{16K}\left[\left(\frac{4}{1+\mu}-\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2\right)\rho-\frac{\beta^2}{\rho}-4\rho\ln\rho\right]\\
M_r &= \frac{pb^2}{16}\left[(1-\mu)\beta^2\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)-4(1+\mu)\ln\rho\right]\\
M_\varphi &= \frac{pb^2}{16}\left[(1-\mu)\left(4-\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho^2}\right)-4(1+\mu)\ln\rho\right].
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.67b)}$$

Exemplul numeric din fig. VI. 30, *a*, *b*, corespunde valorii $\beta = 0{,}5$

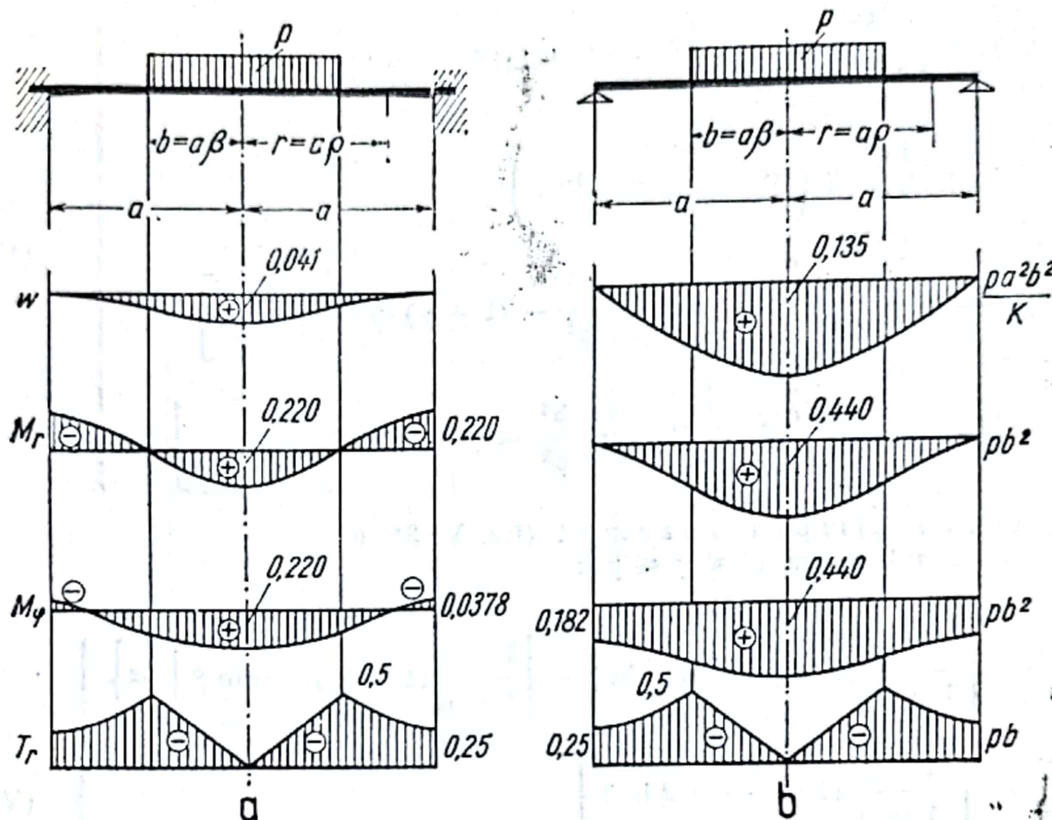


Fig. VI.30

Cazul 1. ***Placa întreagă cu sarcină inelară***

Sarcina liniară P. Sarcina totală $= 2\pi\, bP = 2\,\pi\beta P a$

$$T_r = 0 \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \beta \tag{VI.68}$$

$$T_r = -\frac{P\beta}{\rho} \quad \text{pentru} \quad \beta \leqslant \rho \leqslant 1. \qquad V = P\beta.$$

Conturul încastrat perfect (fig. VI. 31, *a*)

— regiunea interioară ($0 \leqslant \rho \leqslant \beta$).

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{Pa^2b}{8K}\left[1 - \beta^2 + 2\beta^2 \ln\beta + (1 - \beta^2 + 2\ln\beta)\,\rho^2\right] \\ \theta &= -\frac{Pab}{4K}\,\rho(1 - \beta^2 + 2\ln\beta) \\ M_r &= M_\varphi = -\frac{Pb}{4}(1+\mu)(1 - \beta^2 + 2\ln\beta); \end{aligned}\right\} \tag{VI.69a}$$

— regiunea exterioară ($\beta \leqslant \rho \leqslant 1$):

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{Pa^2b}{8K}\left[(1+\beta^2)(1-\rho^2)+2(\beta^2+\rho^2)\ln\rho\right]\\
\theta &= \frac{Pab}{4K}\,\rho\left(\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho^2}-2\ln\rho\right)\\
M_r &= -\frac{Pb}{4}\left[2-(1-\mu)\frac{\beta^2}{\rho^2}-(1+\mu)(\beta^2-2\ln\rho)\right]\\
M_\varphi &= -\frac{Pb}{4}\left[2\mu+(1-\mu)\frac{\beta^2}{\rho^2}-(1+\mu)(\beta^2-2\ln\rho)\right].
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(VI.69b)}$$

Conturul simplu rezemat (fig. VI.31, *b*)
— regiunea interioară ($0 \leqslant \rho \leqslant \beta$):

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{Pa^2b}{8K}\left\{\frac{3+\mu}{1+\mu}(1-\beta^2)+2\beta^2\ln\beta-\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}(1-\beta^2)-2\ln\beta\right]\rho^2\right\}\\
\theta &= \frac{Pab}{4K}\cdot\rho\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}(1-\beta^2)-2\ln\beta\right]\\
M_r &= M_\varphi = \frac{Pb}{4}\left[(1-\mu)(1-\beta^2)-2(1+\mu)\ln\beta\right];
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(VI.70a)}$$

— regiunea exterioară ($\beta \leqslant \rho \leqslant 1$):

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{Pa^2b}{8K}\left[\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}-\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2\right)(1-\rho^2)+2(\beta^2+\rho^2)\ln\rho\right]\\
\theta &= \frac{Pab}{4K}\,\rho\left[\frac{2-(1-\mu)\beta^2}{1+\mu}-\frac{\beta^2}{\rho^2}-2\ln\rho\right]\\
M_r &= \frac{Pb}{4}\left[(1-\mu)\beta^2\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)-2(1+\mu)\ln\rho\right]\\
M_\varphi &= \frac{Pb}{4}\left[(1-\mu)\left(2-\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho^2}\right)-2(1+\mu)\ln\rho\right].
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(VI.70b)}$$

Exemplul numeric din fig. VI. 31, *a*, *b* corespunde valorii $\beta_a^r = 0{,}5$.

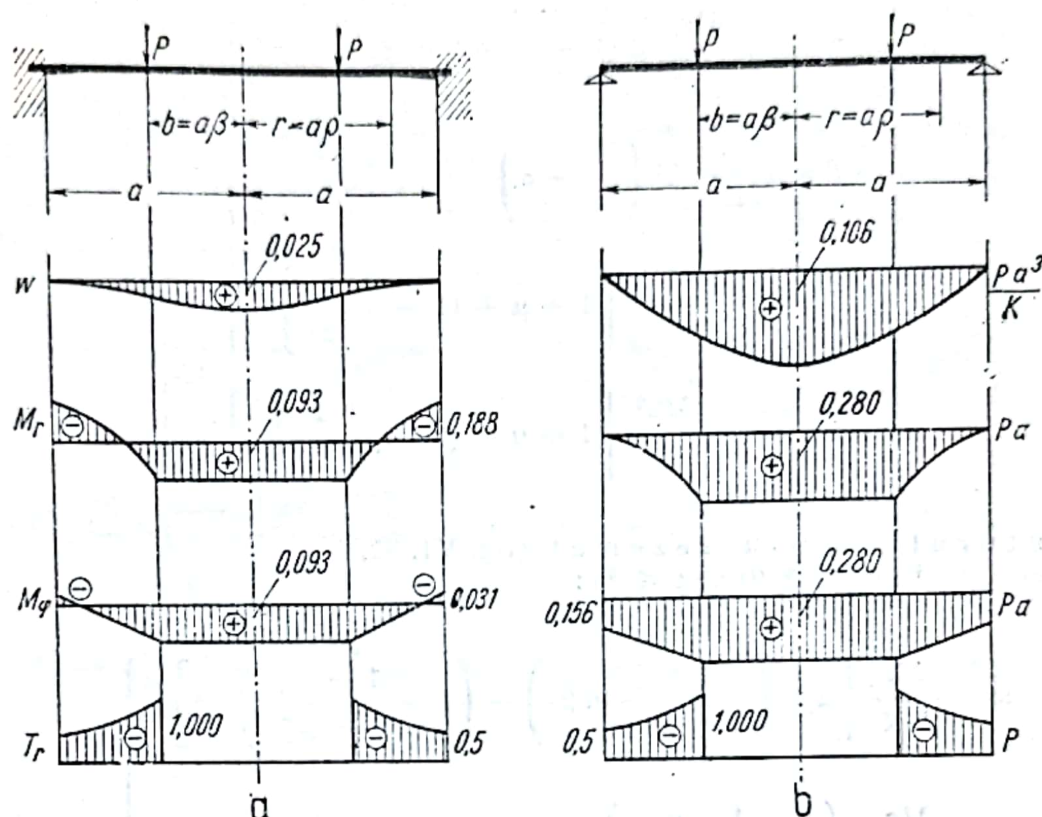


Fig. VI.31

Cazul g. *Placa întreagă încărcată cu momente uniforme dispuse inelar* Momente M;

$$T_r \equiv 0; \qquad V \equiv 0. \tag{VI.71}$$

C o n t u r u l î n c a s t r a t p e r f e c t (fig. VI.32, *a*)
— regiunea interioară $(0 \leqslant \rho \leqslant \beta)$:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{Ma^2}{4K}\left[2\beta^2 \ln \beta + (1-\beta^2)\,\rho^2\right] \\ \theta &= \frac{Ma}{2K}(1-\beta^2)\,\rho \\ M_r &= M_\varphi = \frac{M}{2}(1+\mu)(1-\beta^2); \end{aligned}\right\} \tag{VI.72a}$$

— regiunea exterioară ($\beta \leqslant \rho \leqslant 1$):

$$
\left.\begin{aligned}
w &= -\frac{Ma^2}{4K}\beta^2(1-\rho^2+2\ln\rho)\\
\theta &= \frac{Ma}{2K}\cdot\beta^2\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)\\
M_r &= -\frac{M\beta^2}{2}\left[1+\mu+(1-\mu)\frac{1}{\rho^2}\right]\\
M_\varphi &= -\frac{M\beta^2}{2}\left[1+\mu-(1-\mu)\frac{1}{\rho^2}\right].
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI.72b)}
$$

Conturul simplu rezemat (fig. VI. 32, *b*)
— regiunea interioară ($0 \leqslant \rho \leqslant \beta$):

$$
\left.\begin{aligned}
w &= \frac{Ma^2}{4K}\left[2\beta^2\left(\frac{1}{1+\mu}-\ln\beta\right)-\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2\right)\rho^2\right]\\
\theta &= \frac{Ma}{2K}\rho\left(1+\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2\right)\\
M_r &= M_\varphi = \frac{M}{2}\left[1+\mu+(1-\mu)\beta^2\right];
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI.73a)}
$$

— regiunea exterioară ($\beta \leqslant \rho \leqslant 1$):

$$
\left.\begin{aligned}
w &= \frac{Ma^2}{4K}\cdot\frac{\beta^2}{1+\mu}\left[(1-\mu)(1-\rho^2)-2(1+\mu)\ln\rho\right].\\
\theta &= \frac{Ma}{2K}\cdot\frac{\beta^2}{1+\mu}\left[(1-\mu)\rho+(1+\mu)\frac{1}{\rho}\right]\\
M_r &= \frac{M}{2}(1-\mu)\beta^2\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right);\quad M_\varphi = \frac{M}{2}(1-\mu)\beta^2\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI.73b)}
$$

Exemplul numeric din fig. VI.32, *a*, *b* corespunde valorii $\beta = 0,5$.

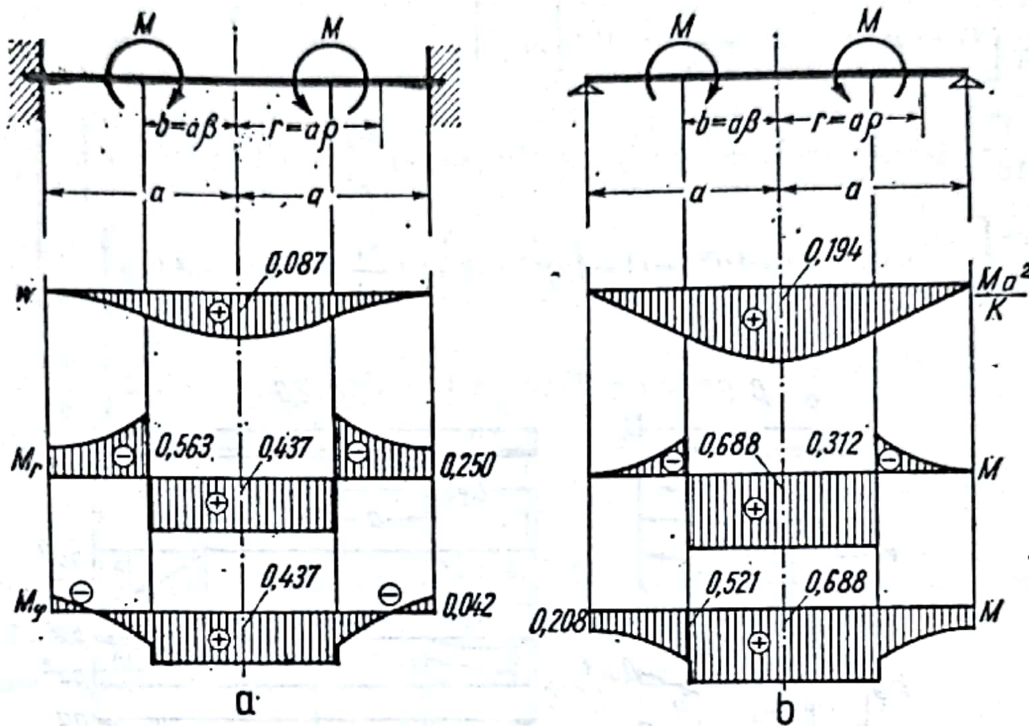


Fig. VI.32

Cazul h. *Placa inelară cu sarcină uniform distribuită* $p = \text{const}$; sarcina totală $|P| = \pi p(a^2 - b^2)$

$$T_r = -\frac{pa}{2}\left(\rho - \frac{\beta^2}{\rho}\right); \qquad V = \frac{pa}{2}(1 - \beta^2) \quad (\beta < 1);$$

$$V = \frac{pa}{2}(\beta^2 - 1) \quad (\beta > 1). \tag{VI.74}$$

Contur încastrat perfect (fig. VI.33, *a*)

Notație simplificatoare: $k_1 = \beta^2 \dfrac{(1-\mu)\beta^2 + (1+\mu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{1 - \mu + (1+\mu)\beta^2}$ (VI.75a)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{pa^4}{64\,K}\left[-1 + 2(1 - k_1 - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k_1 \ln \rho - 8\beta^2\rho^2 \ln \rho\right] \\
\theta &= \frac{pa^3}{16\,K}\left[(1 - k_1)\rho - \rho^3 + \frac{k_1}{\rho} + 4\beta^2\rho \ln \rho\right] \\
M_r &= \frac{pa^2}{16}\left[(1+\mu)(1-k_1)+4\beta^2-(3+\mu)\rho^2-(1-\mu)\frac{k_1}{\rho^2}+4(1+\mu)\beta^2 \ln \rho\right] \\
M_\varphi &= \frac{pa^2}{16}\left[(1+\mu)(1-k_1)+4\mu\beta^2-(1+3\mu)\rho^2+(1-\mu)\frac{k_1}{\rho^2}+4(1+\mu)\beta^2 \ln \rho\right].
\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.75b)}$$

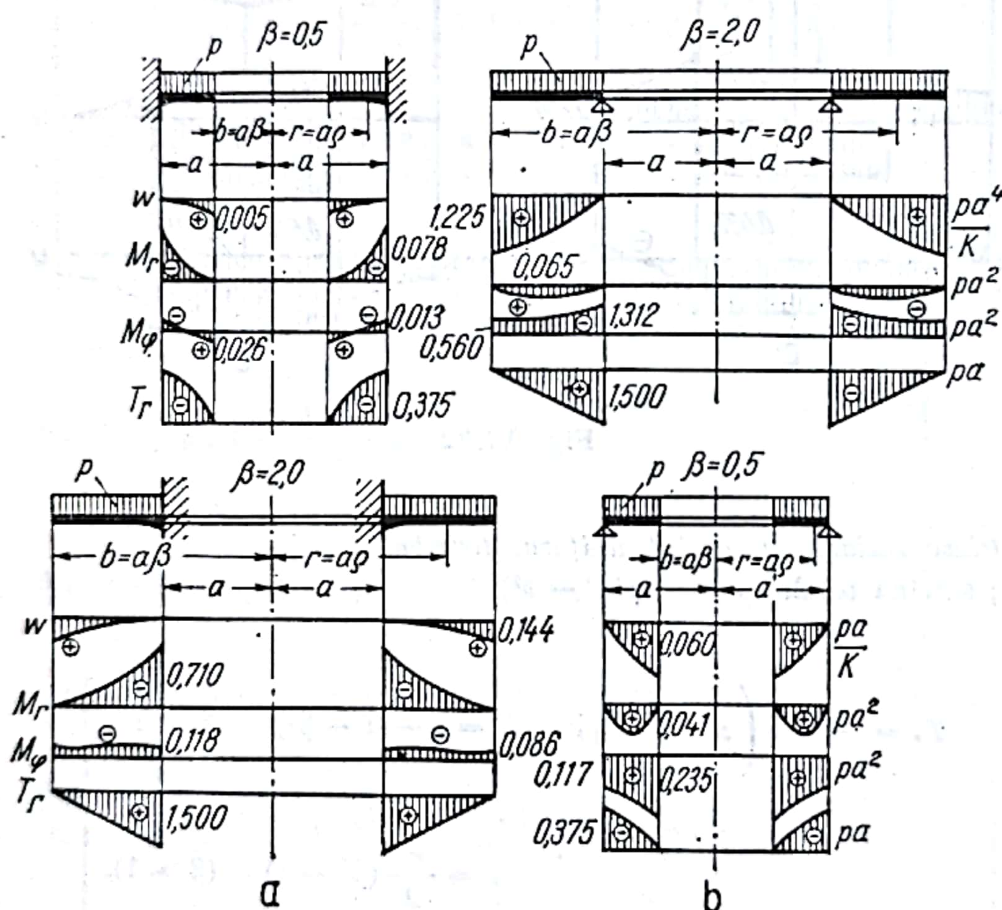


Fig. VI.33

C o n t u r s i m p l u r e z e m a t (fig. VI.33, *b*)

Notație simplificatoare: $k_2 = \beta^2\left[3 + \mu + 4(1 + \mu)\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}\ln \beta\right]$ (VI.76a)

$$
\left.
\begin{aligned}
w &= \frac{pa^4}{64\,K}\left\{\frac{2}{1+\mu}\left[(3+\mu)(1-2\beta^2)+k_2\right](1-\rho^2)-\right.\\
&\quad \left.-(1-\rho^4)-\frac{4k_2}{1-\mu}\ln\rho-8\beta^2\rho^2\ln\rho\right\}\\
\theta &= \frac{pa^3}{16\,K}\left[\frac{1}{1+\mu}(3+\mu-4\beta^2+k_2)\rho-\rho^3+\frac{k_2}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\rho}+4\beta^2\rho\ln\rho\right]\\
M_r &= \frac{pa^2}{16}\left[(3+\mu)(1-\rho^2)+k_2\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)+4(1+\mu)\beta^2\ln\rho\right]\\
M_\varphi &= \frac{pa^2}{16}\left[2(1-\mu)(1-2\beta^2)+(1+3\mu)(1-\rho^2)+\right.\\
&\quad \left.+k_2\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)+4(1+\mu)\beta^2\ln\rho\right].
\end{aligned}
\right\}
\quad \text{(VI.76b)}
$$

Exemplele numerice din fig. VI.33, *a*, *b* corespund valorii $\beta = 0{,}5$, respectiv $\beta = 2{,}0$.

Cazul i. *Placa inelară cu sarcină liniară pe conturul liber*

Sarcina liniară P. Sarcina totală: $2\pi Pb = 2\pi\beta Pa$

$$
\left.
\begin{aligned}
T_r &= -P\cdot\beta\cdot\frac{1}{\rho};\ V = P\beta \qquad (\beta < 1)\\
V &= -P\beta \qquad (\beta > 1)
\end{aligned}
\right\}
\quad \text{(VI.77)}
$$

Contur încastrat perfect (fig. VI.34, *a*)

Notație simplificatoare: $k_3 = \beta^2\cdot\dfrac{1+(1+\mu)\ln\beta}{1-\mu+(1+\mu)\beta^2}$ (VI.78a)

$$
\left.
\begin{aligned}
w &= \frac{Pa^3}{8K}\beta\left[(1+2k_3)(1-\rho^2)+4k_3\ln\rho+2\rho^2\ln\rho\right]\\
\theta &= \frac{Pa^2}{2K}\beta\left[k_3\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)-\rho\ln\rho\right]\\
M_r &= \frac{Pa}{2}\beta\left[-1+(1+\mu)k_3+(1-\mu)k_3\frac{1}{\rho^2}-(1+\mu)\ln\rho\right]\\
M_\varphi &= \frac{Pa}{2}\beta\left[-\mu+(1+\mu)k_3-(1-\mu)k_3\frac{1}{\rho^2}-(1+\mu)\ln\rho\right].
\end{aligned}
\right\}
\quad \text{(VI.78b)}
$$

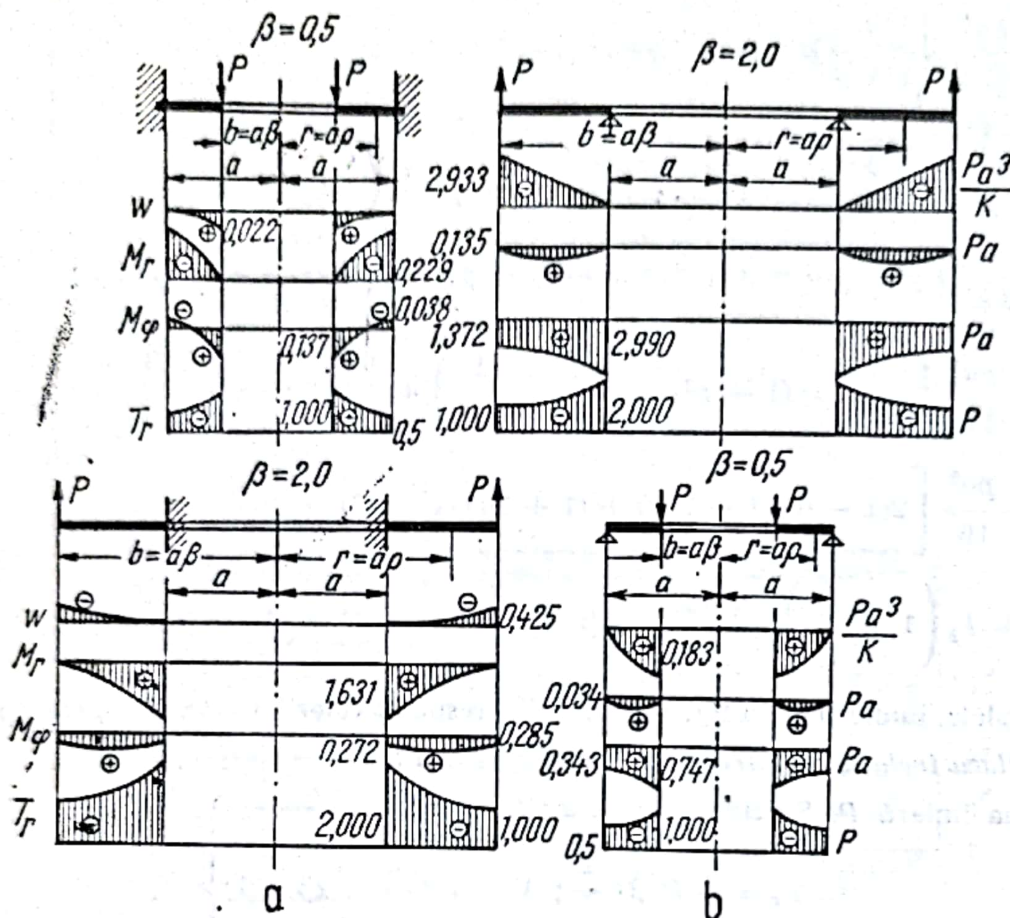


Fig. VI.34

Contur simplu rezemat (fig. VI.34, *b*)

Notaţie simplificatoare: $k_4 = (1+\mu)\dfrac{\beta^2}{1-\beta^2}\ln\beta$ **(VI.79a)**

$$
\left.
\begin{aligned}
w &= \frac{Pa^3}{8K}\beta\left[\frac{3+\mu-2k_4}{1+\mu}(1-\rho^2)+\frac{4k_4}{1-\mu}\ln\rho+2\rho^2\ln\rho\right]\\
\theta &= \frac{Pa^2}{2K}\beta\left(\frac{1-k_4}{1+\mu}\rho-\frac{k_4}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\rho}-\rho\ln\rho\right)\\
M_r &= \frac{Pa}{2}\beta\left[\frac{k_4}{\rho^2}-k_4-(1+\mu)\ln\rho\right]\\
M_\varphi &= \frac{Pa}{2}\beta\left[1-\mu-k_4-\frac{k_4}{\rho^2}-(1+\mu)\ln\rho\right].
\end{aligned}
\right\}\quad \text{(VI.79b)}
$$

Exemplele numerice din fig. VI.34, *a*, *b*, corespund valorii $\beta = 0{,}5$, respectiv $\beta = 2{,}0$.

Cazul j. *Placa inelară cu momente uniforme pe conturul liber.*

Momente M; $T_r = V \equiv 0$. (VI.80)

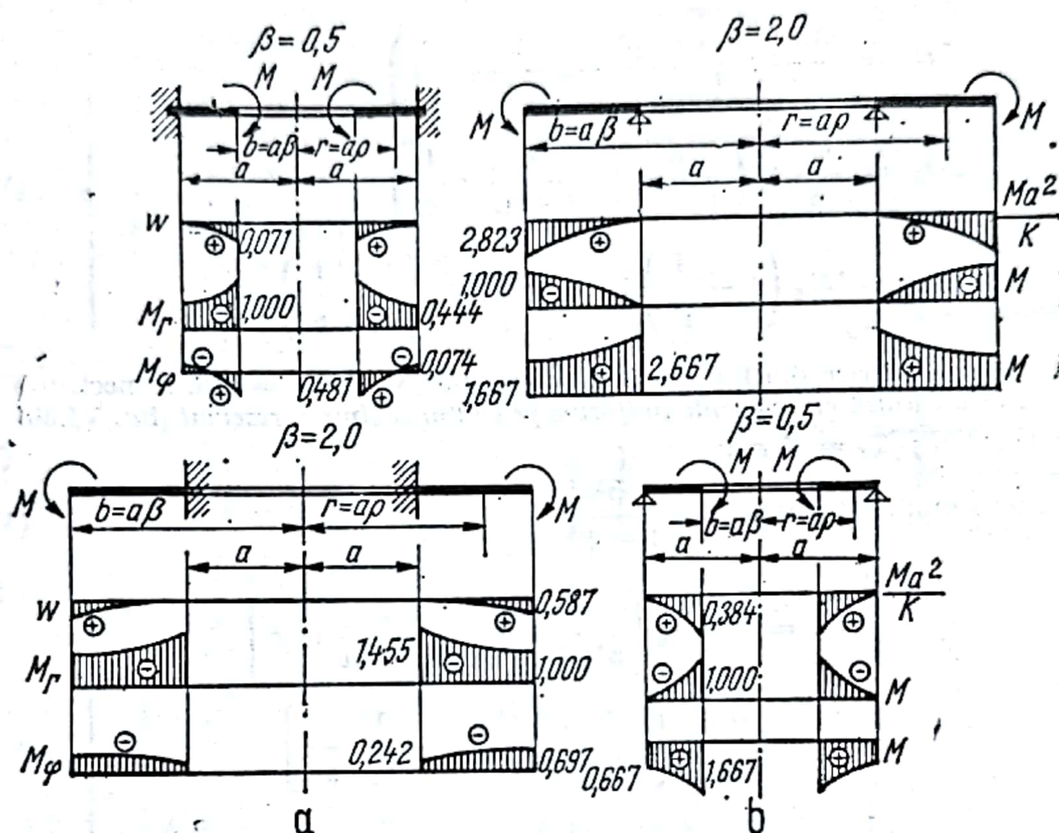


Fig. VI. 35

C o n t u r î n c a s t r a t p e r f e c t (fig. VI. 35, *a*)

Notație simplificatoare: $k_5 = \dfrac{\beta^2}{1-\mu+(1+\mu)\beta^2}$ (VI.81a)

$$w = \frac{Ma^2}{2K} k_5(-1+\rho^2-2\ln\rho)$$

$$\theta = \frac{Ma}{K} k_5\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)$$

$$M_r = -Mk_5\left[1+\mu+(1-\mu\right]$$

$$M_\varphi = -Mk_5\left[1+\mu-(1-\mu)\frac{1}{\rho^2}\right].$$

(VI.81b)

Contur simplu rezemat (fig. VI. 35, *b*)

Notație simplificatoare : $k_6 = \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2}$ (VI.82a)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{Ma^2}{2K}k_6\left(\frac{1-\rho^2}{1+\mu}-\frac{2}{1-\mu}\ln\rho\right)\\ \theta &= \frac{Ma}{K}k_6\left(\frac{\rho}{1+\mu}\quad\frac{1}{1-\mu}\cdot\frac{1}{\rho}\right)\\ M_r &= Mk_6\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right);\quad M_\varphi = Mk_6\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.82b)}$$

Exemplele numerice din fig. VI. 35, *b* corespund valorii $\beta = 0,5$, respectiv $\beta = 2,0$.

Cazul k. *Placă inelară cu momente uniforme pe conturul simplu rezemat* (fig. VI.36)

Momente M; $T_r = V \equiv 0$ (VI.83)

Notație simplificatoare : $k_6 = \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2}$ (VI.84a)

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{Ma^2}{2K}k_6\left[\frac{1-\rho^2}{\beta^2(1+\mu)}\quad\frac{2}{1-\mu}\ln\rho\right]\\ \theta &= \frac{Ma}{K}k_6\left[\frac{\rho}{\beta^2(1+\mu)}+\frac{1}{1-\mu)\rho}\right]\\ M_r &= Mk_6\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\rho^2}\right);\quad M_\varphi = Mk_6\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\rho^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.84b)}$$

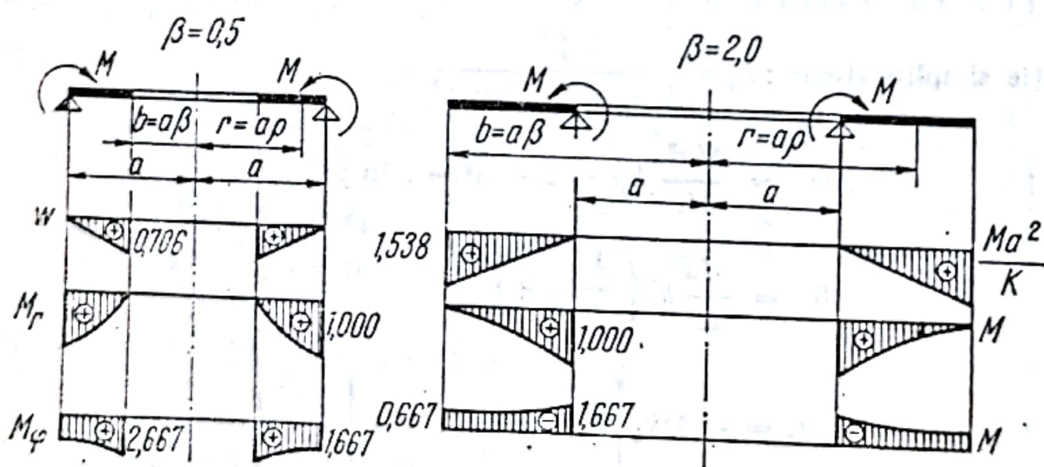


Fig. VI.36

Exemplele numerice din fig. VI.36 corespunde valorii $\beta = 0,5$, respectiv $\beta = 2,0$.

6.3. Exemple de aplicare a formulelor rezumative

Este posibil să se realizeze un mod de încărcare și rezemare al plăcii circulare sau inelare, prin suprapunerea efectelor, utilizînd cazurile redate la paragraful 6.2. Se dau în continuare, patru asemenea exemple.

Placa întreagă cu consolă, încărcată cu sarcină uniform distribuită. Încărcarea reală a plăcii (fig. VI. 37, *a*) se realizează din suprapunerea cazului a și a cazului f luat cu semn schimbat (fig. VI. 37, *b*, *c*). În ultimele două cazuri, reacțiunile *V* sînt egale și de sens contrar, deci se anulează. Rezultă următoarele două grupe de formule :

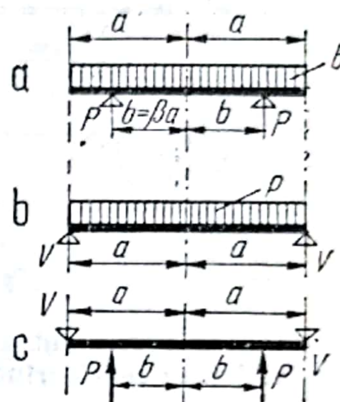


Fig. VI.37

— regiunea interioară (cîmp) $(0 \leqslant \rho \leqslant \beta)$

$$w = \frac{pa^4}{16\,K}\left\{\frac{1}{4}(1-\rho^2)\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}-\rho^2\right)-\frac{3+\mu}{1+\mu}(1-\beta^2)-2\,\beta^2\ln\beta+\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}(1-\beta^2)-2\ln\beta\right]\rho^2\right\},$$

$$\theta = \frac{pa^3}{8\,K}\,\rho\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}-\rho^2\right)-\frac{1-\mu}{1+\mu}(1-\beta^2)+2\ln\beta\right],$$

$$M_r = \frac{pa^2}{8}\left[\frac{3+\mu}{2}(1-\rho^2)-(1-\mu)(1-\beta^2)+2(1+\mu)\ln\beta\right],$$

$$M_\varphi = \frac{pa^2}{8}\left[1+\mu+(1-\mu)\,\beta^2+2(1+\mu)\ln\beta-\frac{1+3\mu}{2}\rho^2\right];$$

— regiunea exterioară (consolă) $(\beta \leqslant \rho \leqslant 1)$

$$w = \frac{pa^4}{16\,K}\left[\frac{1}{4}(1-\rho^2)\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}-\rho^2\right)-\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}-\frac{1-\mu}{1+\mu}\beta^2\right)(1-\rho^2)-2(\beta^2+\rho^2)\ln\rho\right],$$

$$\theta = \frac{pa^3}{8\,K}\,\rho\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}-\rho^2\right)-\frac{2-(1-\mu)\,\beta^2}{1+\mu}+\frac{\beta^2}{\rho^2}+2\ln\rho\right],$$

$$M_r = \frac{pa^2}{8}\left[\frac{3+\mu}{2}(1-\rho^2)-(1-\mu)\beta^2\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)+2(1+\mu)\ln\rho\right],$$

$$M_\varphi = \frac{pa^2}{8}\left[\frac{3+\mu}{2}-\frac{1+3\mu}{2}\rho^2-(1-\mu)\left(2-\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho^2}\right)+2(1+\mu)\ln\rho\right].$$

Exemplul numeric din fig. VI.37 corespunde valorii $\beta = 0,5$.

Placa inelară simplu rezemată pe ambele contururi, cu sarcină uniform distribuită. Cazul din fig. VI. 38 se realizează considerînd placa inelară simplu rezemată în lungul conturului exterior și liberă în lungul conturului interior (cazul b), încărcată cu sarcină uniform distribuită, căreia îi mai adaugăm sarcina liniară P (cazul i). Valoarea lui P se determină din condiția ca pentru $\rho=\beta$ să rezulte $w=0$.

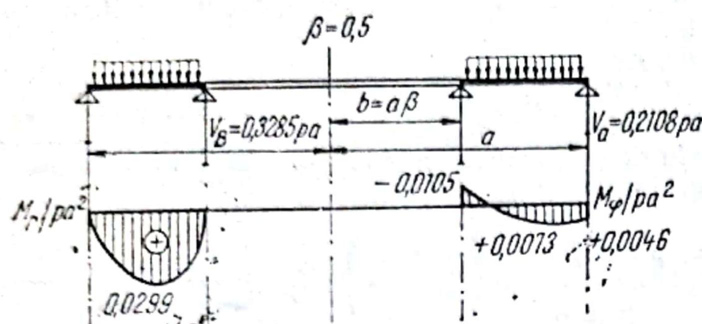


Fig. VI.38

Notînd cu w_1 săgeata pentru $P=1$, cu w_0 săgeata dată de încărcarea exterioară p, pentru marginea liberă ($\rho=\beta$), valoarea lui P se determină din relația:

$$w_1P + w_0 = 0.$$

Exemplul numeric din fig. VI.38 corespunde valorii $\beta = 0,5$.

Placa inelară dublu încastrată, cu sarcină uniform distribuită. Cazul din fig. VI.39 se realizează considerînd placa inelară încastrată perfect în lungul conturului exterior și liberă în lungul conturului interior (cazul h) încărcată cu sarcină uniform distribuită, căreia îi mai adaugăm sarcina liniară P (cazul i) și momentele M (cazul j).

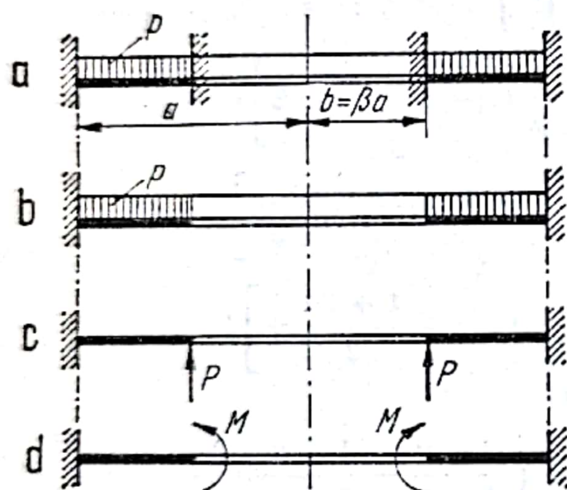


Fig. VI.39

Valorile lui P și M se determină din condițiile ca pentru $\rho=\beta$ să rezulte $w=0$ și $\theta=0$.

Notînd cu w_1, θ_1 săgeata și rotirea pentru $P=1$, cu w_2, θ_2 săgeata și rotirea pentru $M=1$ și cu w_0, θ_0 săgeata și rotirea date de încărcarea exterioară p, toate relative la marginea interioară ($\rho=\beta$), valorile lui P și M se determină din relațiile:

$$w_1P + w_2M + w_0 = 0;$$

$$\theta_1P + \theta_2M + \theta_0 = 0,$$

în care $\theta_1 = w_2$.

Placa întreagă simplu rezemată cu sarcină conică distribuită parțial la centru (fig. VI.40, *a*). Se împarte placa în două regiuni, prin secțiunea circulară de rază $b=\beta a$. Pentru realizarea continuității, se introduc momentele M (fig. VI. 40, *b*, *c*); ele se determină din condiția de tangente egale a plăcii întregi de rază b și a plăcii inelare:

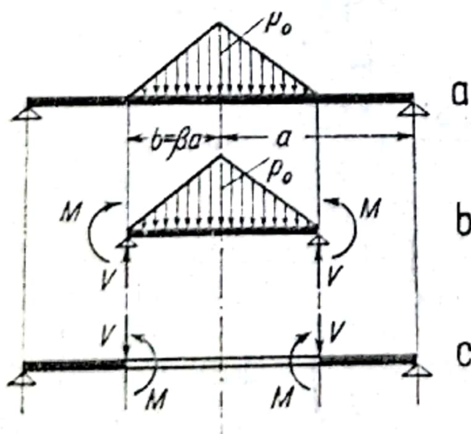


Fig. VI.40

$$\theta_p + \theta_{1M}\cdot M = \theta_V + \theta_{2M}\cdot M$$

în care: θ_p este rotirea plăcii de rază b pe reazem dată de sarcina conică (cazul c); θ_{1M} — rotirea aceleiași plăci produsă de momentele $M=1$ (cazul d); θ_{2M} — rotirea plăcii inelare produsă de momentele

$M = 1$ (cazul j); θ_V — rotirea plăcii inelare produsă de sarcinile V adică de reacțiunile plăcii interioare ($V = p_0 b/6$).

Placa întreagă continuă pe două deschideri (fig. VI.41). Se separă placa continuă într-o placă inelară și o placă interioară plină; se introduc sarcina liniară X și momentele

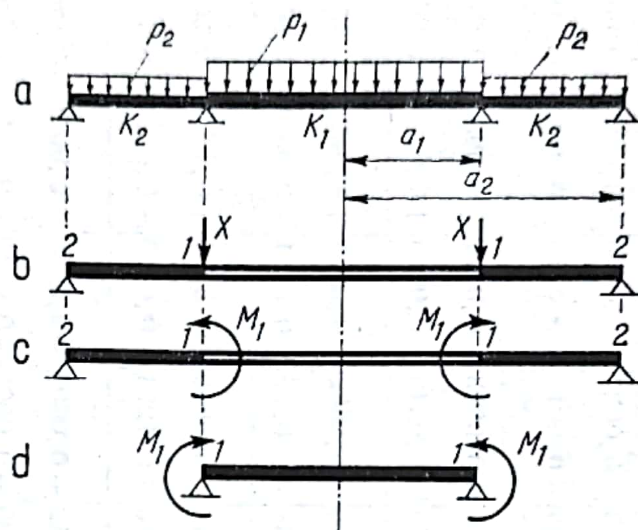


Fig. VI.41

încovoietoare M, pe reazemul intermediar pentru exprimarea condițiilor de săgeată nulă pe acest reazem și continuitatea tangentelor la suprafața medie deformată.

Se notează:

δ_{11} — săgeata plăcii inelare datorită sarcinii liniare $X = 1$;
δ_{12} — săgeata plăcii inelare datorită momentului $M_1 = 1$;
$\delta_{21} = \delta_{12}$ — rotirea plăcii inelare datorită sarcinii $X = 1$;
δ'_{22} — rotirea în secțiunea *1* produsă de momentele $M_1 = 1$ în placa inelară;
δ''_{22} — rotirea pe reazemul *1* a plăcii interioare produsă de momentele $M_1 = 1$;
Δ_1 — săgeata plăcii inelare la marginea liberă ($r = a_1$) produsă de încărcarea exterioară;
Δ'_2 — rotirea pe reazemul *1* produsă de încărcarea exterioară în placa inelară;
Δ''_2 — rotirea pe reazem a plăcii interioare, în care toți coeficienții de influență de mai înainte se citesc de la cazurile i, j, d.

Ecuațiile canonice din care se determină X și M_1 sînt:

$$X_1\delta_{11} + M_1\delta_{12} + \Delta_1 = 0$$

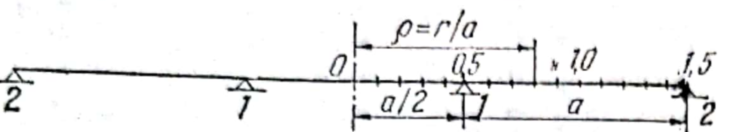
$$X_1\delta_{21} + M_1(\delta'_{22} - \delta''_{22}) + \Delta'_2 - \Delta''_{22} = 0.$$

Pentru cazul particular $a_1 = a$, $a_2 = 1{,}5\,a$ și 4 ipoteze de încărcare, în tabelul VI.47 au fost date, după G. Márkus [62], valorile momentelor încovoietoare M_r, M_φ și reacțiunilor V_1, V_2. În același tabel au fost adăugate alte trei cazuri cînd placa continuă este încastrată perfect pe conturul exterior.

Tabelul VI.47

Placa circulară continuă pe două deschideri

$\rho = r/a$



ρ		1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7
	M_r/pa^2	0	−0,0007	−0,0014	−0,0023	−0,0034	−0,0046	−0,0062	−0,0081	−0,0108
	M_φ/pa^2	−0,0010	−0,0012	−0,0014	−0,0015	−0,0015	−0,0014	−0,0012	−0,0007	+0,0003
	M_r/pa^2	0	+0,0326	+0,0592	+0,0793	+0,0923	+0,0971	+0,0937	+0,0794	+0,0519
	M_φ/pa^2	+0,0198	+0,0257	+0,0285	+0,0279	+0,0240	+0,0165	+0,0054	−0,0092	−0,0270
	M_r/pa^2	0	+0,0319	+0,0578	+0,0770	+0,0889	+0,0925	+0,0875	+0,0713	+0,0411
	M_φ/pa^2	+0,0188	+0,0245	+0,0271	+0,0264	+0,0225	+0,0151	+0,0042	−0,0099	−0,0267
	M_r/M	+1	+0,9282	+0,8502	+0,7646	+0,6699	+0,5636	+0,4425	+0,3015	+0,1325
	M_φ/M	+0,3911	+0,3306	+0,2665	+0,1986	+0,1264	+0,0499	−0,0311	−0,1159	−0,2030
	M_r/pa^2	+0,0046	+0,0036	+0,0025	+0,0012	−0,0003	−0,0020	−0,0041	−0,0068	−0,0102
	M_φ/pa^2	+0,0008	+0,0003	−0,0001	−0,0005	−0,0009	−0,0012	−0,0013	−0,0012	−0,0006
	M_r/pa^2	−0,0881	−0,0491	−0,0157	+0,0119	+0,0333	+0,0475	+0,0547	+0,0528	+0,0402
	M_φ/pa^2	−0,0147	−0,0034	+0,0050	+0,0104	+0,0128	+0,0121	+0,0081	+0,0010	−0,0091
	M_r/pa^2	−0,0835	−0,0455	−0,0132	+0,0131	+0,0330	+0,0455	+0,0506	+0,0460	+0,0300
	M_φ/pa^2	−0,0139	−0,0031	+0,0049	+0,0099	+0,0119	+0,0109	+0,0068	−0,0002	−0,0097

Tabelul VI.47 (continuare)

ρ		0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	Reacțiuni	
	M_r/pa^2	−0,0146	−0,0203	−0,0025	+0,0113	+0,0212	+0,0272	+0,0291	V_1/pa	+0,2712
	M_φ/pa^2	+0,0022	+0,0057	+0,0141	+0,0207	+0,0254	+0,0282	+0,0291	V_2/pa	−0,0071
	M_r/pa^2	+0,0067	−0,0648	−0,0648	−0,0648	−0,0648	−0,0648	−0,0648	V_1/pa	+0,8932
	M_φ/pa^2	−0,0467	−0,0648	−0,0648	−0,0648	−0,0648	−0,0648	−0,0648	V_2/pa	+0,3689
	M_r/pa^2	−0,0079	−0,0851	−0,0673	−0,0535	−0,0436	−0,0376	−0,0357	V_1/pa	+1,1642
	M_φ/pa^2	−0,0445	−0,0591	−0,0507	−0,0441	−0,0394	−0,0366	−0,0357	V_2/pa	+0,3618
	M_r/M	−0,0784	−0,3579	−0,3579	−0,3579	−0,3579	−0,3579	−0,3579	$V_1\Big/\frac{M}{a}$	+3,1530
	M_φ/M	−0,2878	−0,3579	−0,3579	−0,3579	−0,3579	−0,3579	−0,3579	$V_2\Big/\frac{M}{a}$	−1,0510
	M_r/pa^2	−0,0149	−0,0220	−0,0042	+0,0097	+0,0196	+0,0255	+0,0275	V_1/pa	+0,2863
	M_φ/pa^2	+0,0009	+0,0041	+0,0125	+0,0191	+0,0216	+0,0266	+0,0275	V_2/pa	−0,0121
	M_r/pa^2	+0,0136	−0,0332	−0,0332	−0,0332	−0,0332	−0,0332	−0,0332	V_1/pa	+0,6035
	M_φ/pa^2	−0,0213	−0,0332	−0,0332	−0,0332	−0,0332	−0,0332	−0,0332	V_2/pa	+0,4655
	M_r/pa^2	−0,0013	−0,0552	−0,0374	−0,0235	−0,0136	−0,0077	−0,0057	V_1/pa	+0,8898
	M_φ/pa^2	−0,0204	−0,0291	−0,0207	−0,0141	−0,0116	−0,0066	−0,0057	V_2/pa	+0,4531

6.4. Cazul general de încărcare

Ca şi la plăcile dreptunghiulare, se pot căuta soluţii sub formă de serii trigonometrice în raport cu unghiul φ. Plecînd de la relaţia (VI. 45), soluţia generală se poate scrie sub forma :

$$w(r, \varphi) = w_p(r) + A_0 \ln r + B_0 r^2 \ln r + C_0 r^2 + D_0 +$$

$$+ \left[w_{11}(r) + A_{11} \frac{1}{r} + B_{11}\, r \ln r + C_{11} r^3 + D_{11} r \right] \begin{matrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{matrix} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \left[w_{1m}(r) + A_{1m}\, r^{m+2} + B_{1m}\, r^{-m+2} + C_{1m}\, r^m + D_{1m}\, r^{-m} \right] \begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix} \qquad \text{(VI.85a)}$$

în care A, B, C, D reprezintă constante de integrare, iar w_p, w_{11}, w_{1m} soluţii particulare, funcţie de încărcarea exterioară exprimată sub forma :

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{1m}(r) \cdot \begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix} . \qquad \text{(VI.85b)}$$

În relaţiile precedente se va considera sin φ şi sin $m\varphi$, respectiv cos φ şi cos m φ după poziţia diametrului de referinţă (de la care se măsoară unghiul φ).

Se va observa că soluţia notată cu indicele p reprezintă tocmai soluţia din cazul încărcărilor simetrice ; $w_p(r)$ este determinat de relaţia (VI. 50) în care se va lua $p(r) = p_0(r)$.

La plăcile circulare întregi, constantele A_0, B_0, A_{11}, B_{11}, B_{1m}, D_{im} trebuie să fie luate egale cu zero, pentru ca la centrul plăcii, săgeata să rămînă finită.

Celelalte soluţii particulare pot fi obţinute prin metoda variaţiei constantelor.

În cazul $p_{1m}(r) = \text{const}$, rezultă următoarele soluţii particulare :

$$w_{1m} = \frac{p_{1m}\, r^4}{(4 - m^2)(16 - m^2)K} \qquad (m = 1, 3, 5, 6, 7, \ldots)$$

$$w_{12} = \frac{p_{12}\, r^2}{48\, K} \cdot \ln \frac{r}{a}, \qquad w_{14} = - \frac{p_{14}\, r^4}{96\, K} \cdot \ln \frac{r}{a}.$$

Dacă sarcinile variază liniar cu raza $\left(p_m = q \frac{r}{a} = q\, \rho, \text{ unde } q = \text{const} \right)$,

$$w_{1m} = \frac{q a^4}{(9 - m^2)(25 - m^2) K}\, \rho^5 \qquad (m \neq 3 \text{ şi } 5),$$

$$w_{13} = \frac{q a^4}{96\, K}\, \rho^5 \ln \rho\, ; \qquad w_{15} = \frac{q a^4}{160\, K}\, \rho^5 \ln \rho .$$

Dacă sînt cunoscute săgeţile w, rezultă uşor pantele tangentelor şi mărimile secţionale.

6.5. Formule rezumative şi diagrame pentru plăci circulare şi inelare solicitate antisimetric

Cazul a. *Placa întreagă cu o sarcină distribuită liniar*

$$p = q\rho\cos\varphi. \tag{VI.86}$$

Conturul încastrat perfect (fig. VI.42, *a*)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{qa^4}{192\,K}\,\rho(1-\rho^2)^2\cos\varphi\\
\frac{\partial w}{\partial r} &= -\frac{qa^3}{192\,K}(1-\rho^2)(1-5\rho^2)\cos\varphi\\
\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial\varphi} &= \frac{qa^3}{192\,K}(1-\rho^2)^2\sin\varphi\\
M_r &= \frac{qa^2}{48}\cdot\rho[3+\mu-(5+\mu)\rho^2]\cos\varphi\\
M_\varphi &= \frac{qa^2}{48}\,\rho[1+3\mu-(1+5\mu)\rho^2]\cos\varphi\\
M_{r\varphi} &= -\frac{qa^2}{48}(1-\mu)\rho(1-\rho^2)\sin\varphi\\
T_r &= \frac{qa}{24}(2-9\rho^2)\cos\varphi\\
T_\varphi &= -\frac{qa}{24}(2-3\rho^2)\sin\varphi\\
V &= \frac{7}{24}\,qa\cos\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{VI.87}$$

Conturul simplu rezemat (fig. VI.42, *b*)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{qa^4}{192\,K}\,\rho\left[\frac{7+\mu}{3+\mu} - \frac{2(5+\mu)}{3+\mu}\,\rho^2 + \rho^4\right]\cos\varphi\\
\frac{\partial w}{\partial r} &= -\frac{qa^3}{192\,K}\left[\frac{7+\mu}{3+\mu} - \frac{6(5+\mu)}{3+\mu}\,\rho^2 + 5\rho^4\right]\cos\varphi\\
\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \frac{qa^3}{192\,K}\left[\frac{7+\mu}{3+\mu} - \frac{2(5+\mu)}{3+\mu}\,\rho^2 + \rho^4\right]\sin\varphi\\
M_r &= \frac{qa^2}{48}\,(5+\mu)\rho(1-\rho^2)\cos\varphi\\
M_\varphi &= \frac{qa^2}{48}\,\rho\left[\frac{(5+\mu)(1+3\mu)}{3+\mu} - (1+5\mu)\rho^2\right]\cos\varphi\\
M_{r\varphi} &= -\frac{qa^2}{48}\,(1-\mu)\,\rho\left(\frac{5+\mu}{3+\mu} - \rho^2\right)\sin\varphi\\
T_r &= \frac{qa}{24}\left[\frac{2(5+\mu)}{3+\mu} - 9\rho^2\right]\cos\varphi\\
T_\varphi &= -\frac{qa}{24}\left[\frac{2(5+\mu)}{3+\mu} - 3\rho^2\right]\sin\varphi\\
V &= \frac{qa}{4}\cos\varphi.
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(VI.88)}$$

Cazul b. *Placa întreagă cu conturul exterior liber și zona centrală rigidă* (fig. VI.42, *c*).

Porțiunea de placă în interiorul cercului $r = b$ $\left(\rho = \frac{b}{a} = \beta\right)$ este perfect rigidă.

Condiția

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{w}{b} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{w}{\beta}\,. \qquad \text{(VI.89)}$$

Notații simplificatoare:

$$\left.\begin{aligned} k_7 &= \frac{4(2+\mu)+(1-\mu)(3+\beta^4)\beta^2}{3+\mu+(1-\mu)\beta^4} \\ k_8 &= \frac{4(2+\mu)\beta^4-(3+\mu)(3+\beta^4)\beta^2}{3+\mu+(1-\mu)\beta^4} \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.90)}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{qa^4}{192\,K}\cdot\rho\left(\rho^4-2k_7\rho^2+12\ln\rho-\frac{2k_8}{\rho^2}\right)\cos\varphi \\ M_r &= \frac{qa}{48}\left[(5+\mu)\rho^3-(3+\mu)k_7\rho+\frac{3(1+\mu)}{\rho}-(1-\mu)\frac{k_8}{\rho^3}\right]\cos\varphi \\ M_\varphi &= \frac{qa^2}{48}\left[(1+5\mu)\rho^3-(1+3\mu)k_7\rho+\frac{3(1+\mu)}{\rho}+(1-\mu)\frac{k_8}{\rho^3}\right]\cos\varphi \\ M_{r\varphi} &= \frac{qa^2}{48}(1-\mu)\left(\rho^3-k_8\rho+\frac{3}{\rho}+\frac{k_2}{\rho^3}\right)\sin\varphi \\ T_r &= \frac{qa}{24}\left(9\rho^2-2k_8-\frac{3}{\rho^2}\right)\cos\varphi \\ T_\varphi &= \frac{qa}{24}\left(3\rho^2-2k_7\rho+\frac{3}{\rho}\right)\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI.91)}$$

Dacă presiunea liniară este datorită unui moment M acționînd în centrul plăcii, relația între q și M se scrie:

$$q=\frac{4\,M}{\pi a^3}\cdot$$

Exemplul numeric din fig. VI.42, c corespunde valorii $\beta = 0{,}5$.

Numeroasele formule și tabele pentru plăci circulare și inelare solicitate antisimetric se găsesc în cartea lui G. Márkus [63].

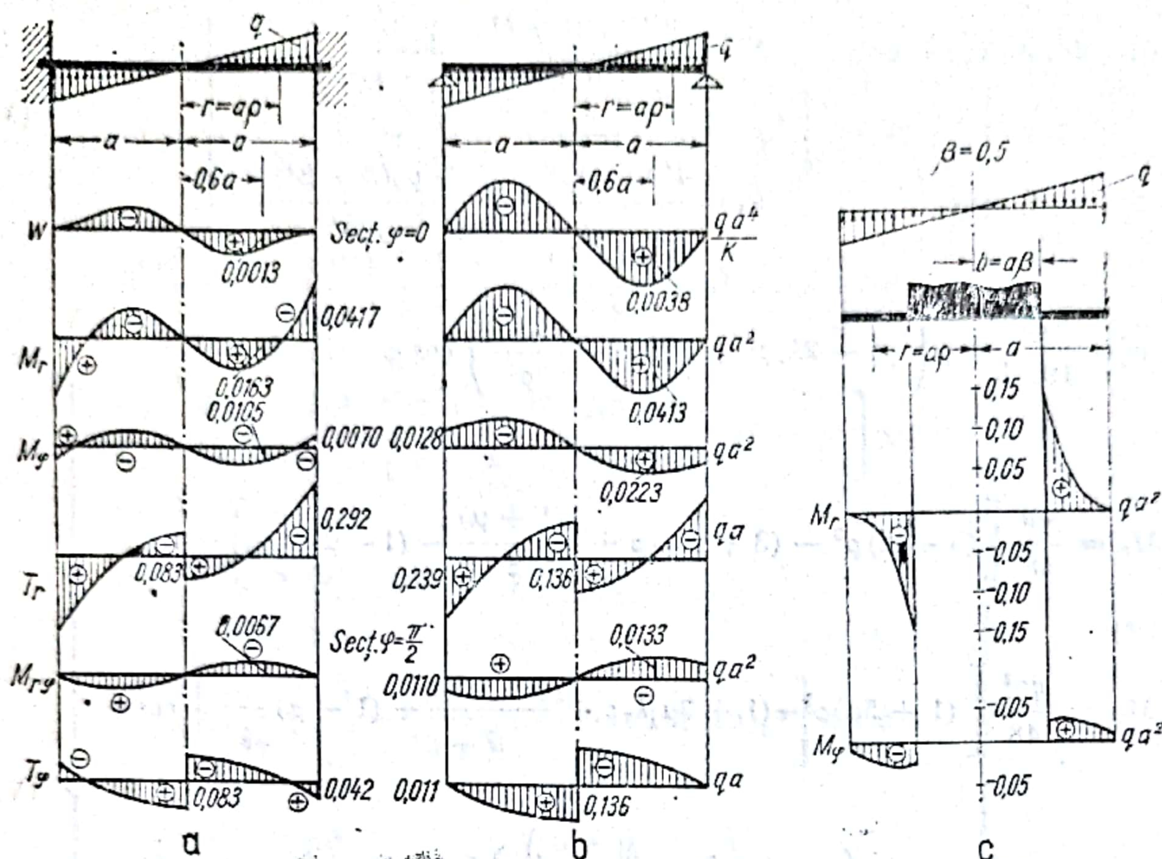
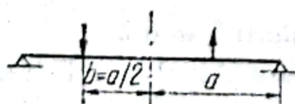


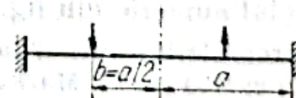
Fig. VI.42

Tabelul VI.48

Placa circulară cu sarcină inelară

ρ =	$M_r/P_1 \cos\varphi$	$M_\varphi/P_1 \cos\varphi$	$M_{r\varphi}/P_1 \sin\varphi$	$M_r/P_1 \cos\varphi$	$M_\varphi/P_1 \cos\varphi$	$M_{r\varphi}/P \sin\varphi$
1,0	0	+0,05757	−0,04934	−0,18750	−0,03125	0
0,9	+0,03693	+0,07645	−0,06026	−0,13182	−0,00348	−0,01585
0,8	+0,08064	+0,09666	−0,07133	−0,06936	+0,02561	−0,03186
0,7	+0,13510	+0,11770	−0,08159	+0,00385	+0,05553	−0,04705
0,6	+0,20803	+0,13763	−0,08825	+0,09553	+0,08434	−0,05864
0,5	+0,31641	+0,14988	−0,08327	+0,22266	+0,10547	−0,05859
0,4	+0,25313	+0,11990	−0,06661	+0,17813	+0,08438	−0,04688
0,3	+0,18984	+0,08993	−0,04996	+0,13359	+0,06328	−0,03516
0,2	+0,12656	+0,05995	−0,03331	+0,08906	+0,04219	−0,02344
0,1	+0,06328	+0,02998	−0,01665	+0,04453	+0,02109	−0,01172
0,0	0	0	0	0	0	0





Tabelul VI.49

Plăci în formă de sector de cerc

Placă semicirculară cu diferite condiţii de rezemare

Figura	Încărcare	Momente
	Uniform distribuită	$M_{x0} = 0,318\, pa^2$
	Uniform distribuită	$M_{x0} = +0,092\, pa^2$ $M_{x1} = -0,162\, pa^2$ $M_{y2} = +0,020\, pa^2$ $M_{y3} = -0,118\, pa^2$
	Variind liniar	$M_{x0} = +0,023\, pa^2$ $M_{x1} = -0,039\, pa^2$ $M_{y2} = +0,010\, pa^2$ $M_{y3} = -0,051\, pa^2$
	Uniform distribuită	$M_{y0} = -0,073\, pa^2$ $M_{y2} = +0,036\, pa^2$ $M_{y3} = -0,058\, pa^2$ $M_{x2} = +0,019\, pa^2$
	Variind liniar	$M_{y0} = -0,028\, pa^2$ $M_{y3} = -0,036\, pa^2$
	Uniform distribuită	$M_{y0} = -0,390\, pa^2$ $M_{y1} = -0,200\, pa^2$ $M_{x3} = +0,038\, pa^2$

7. PLĂCI PE MEDIU ELASTIC

Plăcile pe mediu elastic pot fi calculate utilizînd, în principal, două metode:

a) placa reazemă pe un mediu elastic caracterizat prin una, două sau trei constante elastice;

b) placa reazemă pe un mediu considerat ca un semispațiu elastic.

În cele ce urmează vor fi examinate succesiv soluții în coordonate carteziene (pentru placa dreptunghiulară) și soluții în coordonate polare (pentru placa circulară).

7.1. Utilizarea unui singur coeficient de pat

Se presupune că presiunea mediului p este, în fiecare punct, proporțională cu săgeata w, conform relației:

$$p = kw \tag{VI.92}$$

în care k reprezintă coeficientul de pat (tasare) al mediului elastic.

Conform acestei ipoteze, ecuația diferențială a săgeților se scrie

$$K\,\Delta\Delta\, w + kw = Z. \tag{VI.93}$$

În cazul unei plăci dreptunghiulare, de laturi $a \times b$, simplu rezemate pe contur, soluția poate fi căutată sub forma seriei duble trigonometrice (VI.18 a), în care

$$w_{mn} = \frac{Z_{mn}}{K\pi^4\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)^2 + k} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{VI.94}$$

Dacă două laturi opuse sînt simplu rezemate, soluția poate fi obținută cu ajutorul seriilor simple trigonometrice. Obișnuit, în locul sarcinii de suprafață Z se consideră reacțiunea fundației $k(w_c - w)$, în care w_c reprezintă săgețile de contur (presupuse constante). Soluția generală se scrie sub forma

$$w = w_p + \overline{w},$$

în care:

$$w_p = \frac{4\,kw_0}{K\pi}\sum_m \frac{1}{m\left(\dfrac{m^4\pi^4}{a^4} + \dfrac{k}{K}\right)}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{VI.95a}$$

$$\overline{w} = \sum_m (A_m \operatorname{ch}\beta_m y \cos\gamma_m y + B_m \operatorname{sh}\beta_m y \sin\gamma_m y + C_m \operatorname{ch}\beta_m y \sin\beta_m y + D_m \operatorname{sh}\beta_m y \cos\gamma_m y)\sin\frac{m\pi x}{a}. \tag{VI.95b}$$

în care s-a notat:

$$\beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{K}} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{2}}, \quad \gamma_m = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{K}} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{2}}. \qquad \text{(VI.95c)}$$

În continuare, se indică soluțiile pentru două cazuri particulare.

Placa infinită încărcată cu forțe P în puncte echidistante în lungul axei x (fig. VI.43). Soluția generală pentru săgeți [9] se scrie

$$w = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}\,ak} e^{-\lambda y/\sqrt{2}} \left(\cos\frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\lambda y}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+ \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_m \frac{(-1)^{m/2}}{\sqrt{\lambda^4 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4}} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos\gamma_m y + \beta_m \sin\gamma_m y) \cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$(m = 2, 4, 6, \ldots) \qquad \text{(VI.95d)}$$

în care $\lambda^4 = k/K$, iar β_m și γ_m sînt dați de relația (VI. 95 c).

Săgeata maximă se produce sub forțele P și are mărimea

$$w_{max} = \frac{P\lambda}{ak} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \lambda \sum_m^{\infty} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\lambda^4 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4}} \right). \qquad \text{(VI.96)}$$

Placa infinită încărcată cu o forță concentrată P

— săgeata maximă $w_{max} = \frac{P\lambda^2}{8k}$;

— presiunea maximă

$$p_{max} = \frac{P}{8}\sqrt{\frac{k}{K}}.$$

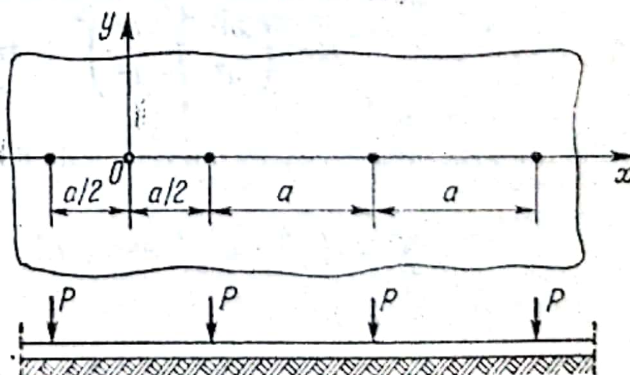


Fig. VI.43

Pentru momentul încovoietor şi efortul unitar corespunzător, soluţia de placă subţire conduce la o singularitate în dreptul forţei concentrate. După Westergaard [9], efortul unitar de întindere maxim (la faţa inferioară a plăcii) poate fi determinat cu ajutorul relaţiei :

$$\sigma_{max} = 0,275(1 + \mu) \frac{P}{\delta^2} \log \frac{E\delta^3}{kb^4},$$

în care :

$$b = \sqrt{1,6\,c^2 + \delta^2} - 0,675 \qquad \text{pentru } c \leqslant 1,724\,\delta;$$

$$b = c \qquad \text{pentru } c \geqslant 1,724\,\delta,$$

iar c este raza ariei circulare pe care se admite că se distribuie uniform forţa P. Dacă aria încărcată este pătrată (cu latura u), se va lua $c = 0,565\,u$. Tabele cu valori numerice ale momentelor încovoietoare sînt date de Stiglat şi Wippel [8].

Pentru alte cazuri de rezemare pe contur se vor aplica metode numerice de calcul.

7.2. Utilizarea a doi coeficienţi de pat

Luînd în considerare şi forţele de frecare dintre faţa inferioară a plăcii şi mediul elastic, eforturile tangenţiale sînt de forma

$$\tau_{zx} = -\,k'\delta \frac{\partial w}{\partial x}\;;\quad \tau_{zy} = -\,k'\delta \frac{\partial w}{\partial y} \tag{VI.97}$$

în care k' reprezintă o caracteristică de frecare între placă şi mediul elastic, de dimensiuni FL^{-3}, ca şi k.

Ecuaţia diferenţială a săgeţilor se scrie în acest caz :

$$K\,\Delta\Delta\, w - k'\delta^2\,\Delta w + kw = Z. \tag{VI.98}$$

O soluţie particulară se obţine prin serii duble trigonometrice (VI.18a) în care

$$w_{mn} = \frac{Z_{mn}}{K\pi^4\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)^2 + 4\pi^2 k'\delta^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right) + k}. \tag{VI.99}$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este de forma :

$$\bar{w} = \sum_m \left(A'_m e^{\beta_1 y} + B'_m e^{\beta_2 y} + C'_m e^{-\beta_1 y} + D'_m e^{-\beta_2 y}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} +$$

$$+ \sum_m \left(A''_m e^{\beta_1 y} + B''_m e^{\beta_2 y} + C''_m e^{-\beta_1 y} + D''_m e^{-\beta_2 y}\right) \cos \frac{m\pi x}{a}.$$

7.3. Mediul elastic caracterizat prin trei parametri

Modelul matematic al mediului se realizează introducînd două straturi elastice verticale, legate solidar cu o membrană întinsă (fig. VI. 44), k și $\bar{k}$ reprezintă parametrii definind comportarea stratului superior și inferior, iar T tensiunea uniformă a membranei. M. Mele arată [68] că, în acest caz, ecuația diferențială a plăci este de ordinul al șaselea :

$$k\,\Delta\Delta\Delta\, w - K\cdot\frac{k+\bar{k}}{T}\,\Delta\Delta\, w + k\,\Delta w - \frac{k\bar{k}}{T}\,w = \Delta Z - \frac{k+\bar{k}}{T}\,Z. \qquad \text{(VI.100)}$$

Ținînd seama că w apare doar cu derivate pare, sînt posibile soluții prin serii duble și simple trigonometrice pentru plăcile dreptunghiulare simplu rezemate pe tot conturul, respectiv pe două laturi opuse.

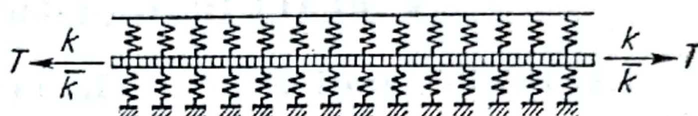


Fig. VI.44

7.4. Placa rezemată pe semispațiul elastic

Sînt date indicații pentru placa circulară încărcată simetric (v. pct. 7.6).

7.5. Placa circulară pe mediu elastic, încărcată simetric

În ipoteza unui singur coeficient de pat k, ecuația diferențială se scrie dezvolta

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr} + \frac{k}{K}\,w = \frac{Z(r)}{K}\,. \qquad \text{(VI.101)}$$

O soluție particulară w_p a ecuației (VI. 101) va corespunde încărcării date. Soluția ecuației omogene $\overline{w}$ poate fi obținută cu ajutorul funcțiilor de tip Bessel (pentru detalii vezi St. P. Timoshenko și S. Woinowsky-Krieger [9] și K. Hirschfeld [61]).

Deoarece calculul analitic prezintă serioase dificultăți, se poate utiliza calculul numeric prin diferențe finite (vezi de exemplu K. Beyer [2], K. Hirschfeld [61] și Al. Lisowski [67]). În fig. VI.45 sînt redate variațiile presiunii p și a momentelor M_r, M_φ la o placă de fundație a unui coș de fabrică, cu următoarele dimensiuni : grosimea plăcii 2,2 m ; raza $a = 9$ m, lățimea pereților $s = 0{,}9$ m, raza inelului de încărcare $b = 4{,}5$ m. S-a neglijat influența forțelor de frecare ($k' = 0$). Curbele corespund următoarelor

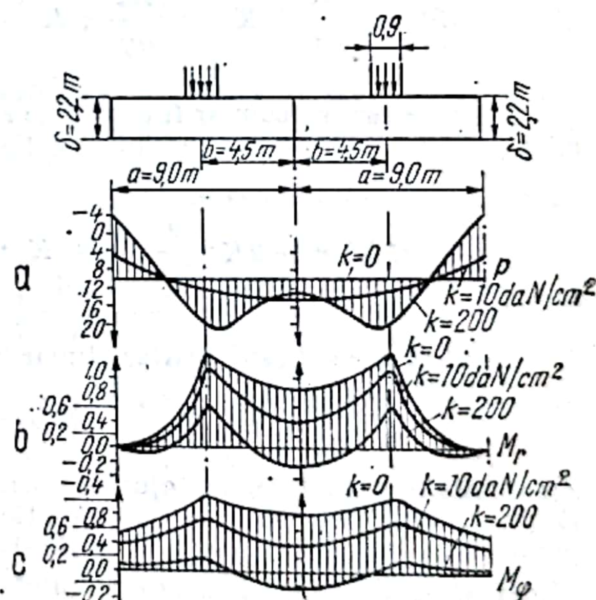


Fig. VI.45

valori ale coeficientului de tasare: $k=0$ (presiune pe teren uniformă); $k=10$ daN/cm³ şi $k=200$ daN/cm².

7.6. Placa circulară rezemată pe semispaţiul elastic

Soluţia se bazează pe egalitatea dintre săgeata plăcii şi tasarea semiplanului elastic sub acţiunea încărcării exterioare. Pentru detalii şi tabele vezi Gorbunov-Posadov [66].

8. PLĂCI DE GROSIME VARIABILĂ

8.1. Plăci de grosime variabilă, în coordonate cartesiene

În relaţiile (VI. 7 b) (VI. 8) şi (VI. 9), modulul de rigiditate la încovoiere trebuie considerat variabil $K(x, y)$. Ecuaţia cu derivate parţiale a săgeţilor rezultă sub forma

$$K\Delta\Delta\, w + 2\left(K'\frac{\partial}{\partial x} + K^{\cdot}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta w + (K'' + K^{\cdot\cdot})\,\Delta w -$$

$$-(1-\mu)\left(K''\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2K'^{\cdot}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + K^{\cdot\cdot}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = Z(x, y) \qquad \text{(VI.102)}$$

în care, pentru prescurtare, s-a notat

$$K' = \frac{\partial K}{\partial x},\; K^{\cdot} = \frac{\partial K}{\partial y};\; K'' = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2},\; K'^{\cdot} = \frac{\partial^2 K}{\partial x\partial y},\; K^{\cdot\cdot} = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}. \qquad \text{(VI.103)}$$

În unele cazuri, cum ar fi pereţii de rezervoare sau plăcile în consolă, variaţia grosimii plăcii are loc într-o singură direcţie, fie y. În acest caz (VI. 102) se reduce la:

$$K\Delta\Delta\, w + 2K^{\cdot}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + K^{\cdot\cdot}\Delta w - (1-\mu)K^{\cdot\cdot}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = Z(x, y). \qquad \text{(VI.104)}$$

Cazul cînd rigiditatea variază liniar în direcţia y

$$K(y) = K_0 + K_1 y$$

a fost studiat analitic, cu ajutorul seriilor trigonometrice, de R. Gran Olsson şi de H. Favre şi B. Gilg pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată pe cele patru laturi (citat după Timoshenko şi Woinowsky-Krieger [9].

H. Göttlicher [9] a aplicat diferenţele finite pentru pereţii de rezervor.

J. Bergfelder [71] a preconizat de asemenea aplicarea diferenţelor finite ecuaţiei (VI.104) indicînd moleculele de calcul corespunzătoare.

E. Eisenbiegler și Z. Mouhtasseb [73] au tratat placa dreptunghiulară simplu rezemată pe două laturi opuse, cu o latură liberă, iar a patra simplu rezemată sau încastrată perfect, sub acțiunea unei sarcini uniforme și a unei sarcini liniare. Grosimea plăcii, variabilă liniar către marginea liberă, a fost aproximată prin 10 trepte de grosime constantă. În articolul citat se dau tabele pentru momentele încovoietoare și de torsiune pentru rapoarte între grosimile extreme 1/1 ; 1/1,25 ; 1/1,5 ; 1/2 și 1/3 și pentru rapoarte de laturi variind între 0,4 și 2,0.

Çetmeli [72] a considerat o lege exponențială de variație a grosimii plăcii dreptunghiulare într-o direcție

$$\delta_y = \delta_0 e^{hy/3}; \quad K(y) = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\mu^2)} e^{hy}.$$

Ecuația săgeților (VI.104) capătă următoarea formă :

$$\Delta\Delta w + 2h\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + h^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{Z(x, y)}{K(y)}.$$

Deoarece grosimea plăcii variază rapid și deci, parametrul h trebuie să ia valori mici, atunci termenul în h^2 poate fi neglijat în ecuația precedentă, iar soluția generală se obține cu ajutorul funcțiilor exponențiale și trigonometrice.

Pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată pe contur, încărcată cu sarcină triunghiulară (care variază în același sens cu grosimea plăcii) sînt influențate puternic săgețile (săgeata maximă este deplasată spre grosimea cea mai mică a plăcii) și momentele încovoietoare acționînd pe direcția grosimii constante (ele suferă reduceri importante).

Pentru plăci a căror grosime variază local, G. Hoeland recomandă [75] considerarea unei plăci în două trepte ; fiecare treaptă este studiată ca o placă de grosime constantă, exprimîndu-se condițiile de continuitate a săgeților și rotirilor în secțiunea de contact.

8.2. Plăci circulare de grosime variabilă

Variația grosimii plăcii se produce doar în lungul razei, astfel încît ne vom ocupa doar de starea de eforturi și de deformații simetrică în raport cu centrul. Ecuația diferențială a săgeților se scrie :

$$\frac{d}{dr}\left[rK\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)\right] + r\frac{dK}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = Z(r)\cdot r. \quad \text{(VI.105)}$$

Integrînd o dată și înlocuind săgețile w prin unghiurile θ conform (VI.52) se obține :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{K}\frac{dK}{dr}\right)\frac{d\theta}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{rK}\frac{dK}{dr}\right)\theta = \frac{P_r}{K}. \quad \text{(VI.106)}$$

Pentru a aduce ecuația (VI.106) la o formă simetrică, G. Worch face substituția [65]

$$\theta = \frac{z}{\sqrt{Kr}}, \quad \text{(VI.107)}$$

Rezultă ecuația:

$$\frac{d^2z}{dr^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{3}{r^2} + \frac{2}{rK}\frac{dK}{dr}(1-2\mu) - \left(\frac{1}{K}\frac{dK}{dr}\right)^2 + \frac{2}{K}\cdot\frac{d^2K}{dr^2}\right]z = P_r\sqrt{\frac{r}{K}}\,. \tag{VI.108}$$

Soluții analitice au fost studiate de O. Pichler (citat după [9]), luînd grosimea plăcii variabilă după legea exponențială

$$\delta = \delta_0 e^{-\beta r^2}.$$

Luînd grosimea plăcii variabilă liniar după legea

$$\delta = \delta_0(1-\rho) \qquad (\rho = r/a),$$

și admițînd $\mu = 1/3$, ecuația (VI.108) se integrează cu mijloace elementare. Aceasta se scrie

$$\rho^2(1-\rho)^2\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \rho(1-4\rho)(1-\rho)^2\frac{d\theta}{d\rho} - (1-\rho)^2\theta = -\frac{P_r a^2}{K_{max}}\rho^2$$

cu soluția generală

$$\theta = \theta_p + A\frac{2\rho+1}{\rho} + B\frac{3\rho-2\rho^2}{(1-\rho)^2}\,.$$

Soluția particulară θ_p se determină pentru fiecare mod de încărcare în parte.
În cazul plăcii încastrate, în consolă, rezultă:
— sarcină uniform distribuită p (fig. VI.46, a):

$$\theta_p = \frac{pa^3}{2K_{max}}\left[\frac{4\rho^3+15\rho^2-6\rho-6}{36\rho(1-\rho^2)} - \frac{\rho_e^2(2\rho^2+\rho-1)}{6\rho(1-\rho)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(2\rho+1)(1+\rho_e^2)}{6\rho}\ln(1-\rho) - \frac{(3-2\rho)\rho_e^2\rho}{6(1-\rho)^2}\ln\rho\right];$$

— sarcină inelară pe conturul liber (fig. VI.46, b):

$$\theta_p = \frac{P_a}{2\pi K_{max}}\left[\frac{2\rho^2+\rho-1}{6\rho(1-\rho)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\rho+1}{6\rho}\ln(1-\rho) + \frac{3\rho-2\rho^2}{6(1-\rho)^2}\ln\rho\right].$$

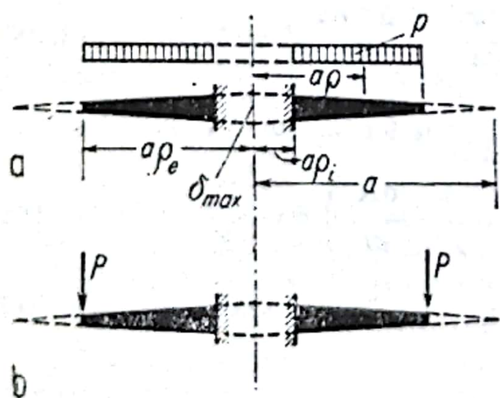


Fig. VI.46

Dacă grosimea plăcii variază după legea

$$\delta = Cr^k; \quad K(r) = \frac{EC^3r^{3k}}{12(1-\mu^2)},$$

ecuația (VI.106) se scrie :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1+3k}{r}\frac{d\theta}{dr} - \frac{1-3\mu k}{r^2}\theta =$$

$$= -\frac{1}{Kr}\int Z(r)r\,dr$$

și are soluții de forma :

$$\theta = \theta_p + Ar^\alpha + Br^\beta$$

în care A, B sînt constante de integrare, iar

$$\alpha, \beta = -\frac{3k}{2} \pm \sqrt{1 - 2\mu\frac{3k}{2} + \left(\frac{3k}{2}\right)^2}\ ;$$

θ_p este o soluție particulară. Pentru sarcină distribuită după legea $Z = p_n r^n$, soluția particulară este de forma

$$\theta_p = -\frac{12(1-\mu^2)}{EC^3(n+2)}\cdot$$

$$\cdot\frac{p_n}{(n+3)^2 - 3k(n+3) - 1 + 3\mu k}r^{n+3-3k}.$$

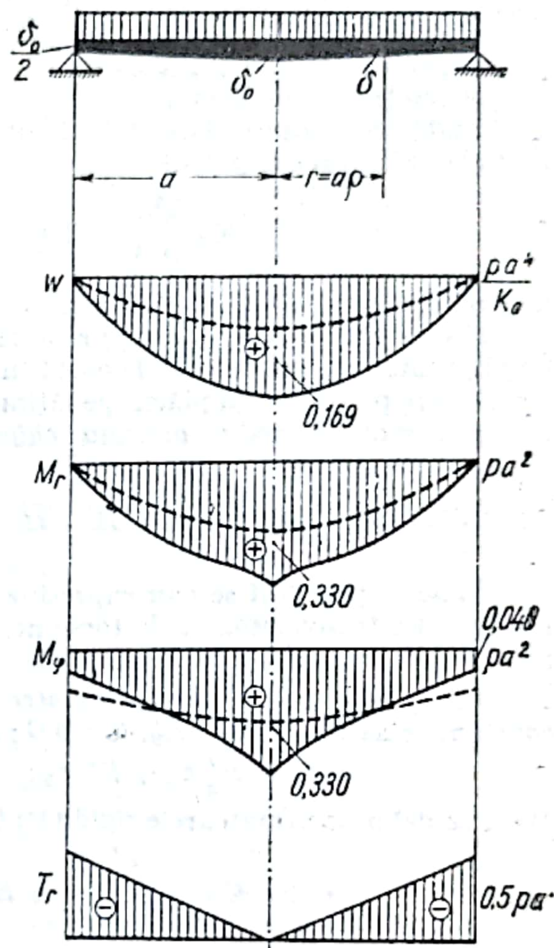


Fig. VI.47

Soluția precedentă este aplicată în cazul plăcilor cu goluri. În particular, pentru $k = 1$ corespunde o variație liniară a grosimii (grosimea maximă la margine) [65] (fig. VI.47).

A. D. Kovalenko [76] a dat soluții pentru legi de variație a grosimii sub formă polinomială.

Problema a fost abordată pe cale numerică cu ajutorul diferențelor finite. În fig. VI.47 este redată variația lui w, M_r, M_φ, T_r la o placă circulară încărcată cu sarcină uniform distribuită, grosimea variind liniar cu raza. Cu linie întreruptă a fost reprezentată variația acelorași mărimi la placa de grosime constantă δ_0 după G. Worch [65].

9. PLĂCI ORTOTROPE

9.1. Introducere

În categoria plăcilor ortotrope intră mai multe tipuri de structuri, și anume :

a) plăci cu ortotropie de material :
— plăci armate cruciș, la care armarea de cele două direcții este mult diferită ;
— plăci din placaj ;

b) plăci cu ortotropie geometrică :
— plăci ondulate,
— plăci cu rigidizări simetrice sau nesimetrice (excentrice), numite și plăci cu nervuri ;

— plăci cu îngroşări locale echidistante ;
— plăci cu armătură rigidă ;
— plăci celulare tip fagure ;
— reţele dese de grinzi.

Toate aceste tipuri de structuri pot fi studiate cu ajutorul aceleiaşi ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al patrulea

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z(x, y) \qquad \text{(VI.109)}$$

în care rigidităţile K_x, K_y, H au expresii diferite pentru fiecare tip de structură considerată.

Plăcile enumerate la pct. b) reprezintă de fapt *structuri discrete*, pentru care cea mai larg aplicată metodă de calcul constă în *netezirea* structurii adică în distribuirea elementelor discrete pe suprafaţa plăcii (pe lăţimea aferentă, în fiecare direcţie), astfel încît ansamblul să devină un *mediu continuu echivalent*.

9.2. Rigidităţile K_x, K_y, H şi evaluarea mărimilor secţionale

În acest paragraf se dau expresiile rigidităţiilor la încovoiere şi torsiune şi expresiile momentelor încovoietoare, de torsiune şi forţelor tăietoare, pentru diferitele cazuri enumerate la paragraful 9.1.

9.2.1. Plăci cu ortotropie de material. Materialul ortotrop este caracterizat prin patru constante elastice, fie E'_x, E'_y, E'' şi G ; legea lui Hooke generalizată se exprimă sub forma

$$\sigma_x = E'_x\, \varepsilon_x + E''\, \varepsilon_y ; \quad \sigma_y = E''\, \varepsilon_x + E'_y\, \varepsilon_y ; \quad \tau_{xy} = G\, \gamma_{xy}.$$

Dacă se definesc următoarele rigidităţi la încovoiere şi torsiune

$$K_x = \frac{E'_x\,\delta^3}{12} ; \; K_y = \frac{E'_y\,\delta^3}{12} ; \; K_1 = \frac{E''\,\delta^3}{12} ;$$

$$K_{xy} = \frac{G\,\delta^3}{12} ; \; H = K_1 + 2K_{xy},$$

mărimile secţionale sînt exprimate după cum urmează :

$$M_x = -\left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y = -\left(K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = -\,2K_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ;$$

$$T_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$T_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

Este posibilă o altă formulare echivalentă prin introducerea a doi coeficienţi de contracţie transversală diferiţi (μ_x, μ_y), cu satisfacerea condiţiei de reciprocitate (după Betti):

$$K_1 = K_x\mu_y = K_y\mu_x,$$

iar $2K_{xy} = (1 - \sqrt{\mu_x\mu_y})\sqrt{K_xK_y}$.

Mărimile secţionale se scriu sub forma:

$$M_x = -K_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y = -K_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = -2K_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\delta y};$$

$$T_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (K_x\mu_y + 2K_{xy})\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

$$T_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (K_y\mu_x + 2K_{xy})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right].$$

9.2.2. Plăci ondulate (fig. VI.48). Fie E şi μ constantele elastice ale materialului (izotrop), δ grosimea de placă, f săgeata ondulei în raport cu linia mediană, l lungimea unei semiunde (măsurată pe coardă) şi s lungimea arcului.

Dacă generatoarele se întind în direcţia axei y, rezultă rigidităţile:

$$K_x = \frac{l}{s}\cdot\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)};$$

$$K_y = EI;\quad K_1 \approx 0,$$

$$H = 2K_{xy} = \frac{s}{l}\cdot\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)},$$

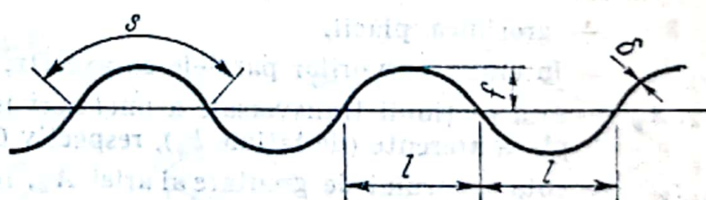


Fig. VI.48

în care I reprezintă momentul de inerţie al secţiunii ondulate, raportat la unitatea de lăţime de placă.

Pentru ondule sinusoidale, se poate lua

$$\frac{s}{l} \approx 1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \quad \text{şi} \quad I \approx \frac{f^2\delta}{2}\left[1 - \frac{0,81}{1 + 2,5\left(\frac{f}{2l}\right)^2}\right].$$

Mărimile secţionale iau forma simplificată

$$M_x = -K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \; ; \; M_y = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \; ; \; M_{xy} = -2K_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} ,$$

$$T_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \; ; \; T_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) .$$

9.2.3. Plăci cu rigidizări simetrice. Fie E şi μ constantele elastice ale materialului (izotrop), δ grosimea de placă; rigidităţile au expresiile:

— pentru rigidizări într-o singură direcţie, fie y (fig. VI. 49),

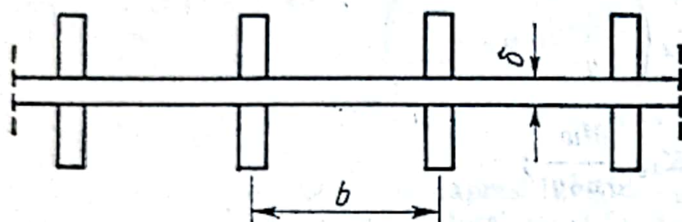


Fig. VI.49

$$K_x = H = \frac{E\,\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$K_y = \frac{E\,\delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI}{b} ,$$

în care b reprezintă interaxa rigidizărilor; I — momentul de inerţie al unei rigidizări în raport cu planul median al plăcii;

— pentru rigidizări în două direcţii

$$K_x = \frac{E\,\delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI_x}{b_x} \; ; \; K_y = \frac{E\,\delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI_y}{b_y} \; ; \; H = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} .$$

9.2.4. Plăci cu nervuri de rigidizare (fig. VI.50). Se notează [88]:

δ — grosimea plăcii,

b_x, b_y — interaxa nervurilor paralele cu axa Ox, respectiv Oy;

A_x, A_y — aria secţiunii transversale a unei nervuri paralele cu axa Ox şi a porţiunii de placă aferente (de lăţime b_x), respectiv Oy şi b_y;

e_x, e_y — cota centrului de greutate al ariei A_x, respectiv A_y, în raport cu planul xOy;

t_x, t_y — grosimea nervurilor paralele cu axa x, respectiv y;

E, μ — constantele elastice ale materialului;

$D = \dfrac{E\,\delta}{1-\mu^2}$ — rigiditatea axială a plăcii;

D_x, D_y — rigiditatea axială a plăcii ortotrope în direcţia x, respectiv y;

$\nu = \dfrac{D}{\sqrt{D_x D_y}}$ — coeficientul rigidităţilor axiale;

$\overline{\mu} = \nu\mu$ — coeficientul de contracţie transversală modificat;

$\overline{D} = D \dfrac{1-\mu}{1-\nu^2\mu}$ — rigiditatea la lunecare a plăcii ortotrope;

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii;

K_x, K_y — rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope în direcţia x, respectiv y, raportată la planul centrelor de greutate $z = e_x$, respectiv $z = e_y$;

$(K_y + D_x e_x^2)$, $(K_y + D_y e_y^2)$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope în direcţia x, respectiv y, raportată la planul median al plăcii;

$K_{xy} = \dfrac{Gt^3Ah}{3b_x}$ — rigiditatea la torsiune a unei nervuri simple (evaluată ca pentru secţiuni înguste);

$K_{yx} = 1{,}1 \dfrac{G}{3b_x}(t_1^3 h_1 + t_2^3 h_2)$ — rigiditatea la torsiune a unei nervuri cu secţiunea I_x;

$H = K + K_{xy} + K_{yx} + \mu D e_x e_y + \dfrac{1-\mu}{4} D(e_x + e_y)^2.$

Utilizînd metoda mixtă, în care necunoscutele sînt o funcţie de eforturi F şi săgeata w, E. Giencke [82] ajunge la următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale (v. şi [88]):

$$\frac{1}{D_y}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{2}{\overline{D}}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{D_x}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} -$$

$$- \mu e_x \frac{D}{D_x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (e_x + e_y)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu e_y \frac{D}{D_y}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0, \qquad \text{(VI.110a)}$$

$$\left(K_x - \frac{\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2} D_x e_x^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\left(K + K_{xy} + \right.$$

$$\left. + K_{yx} + \frac{\mu}{1-\overline{\mu}^2} D e_x e_y\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ \left(K_y - \frac{\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2} D_y e_y^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} +$$

$$+ \frac{\mu}{1-\overline{\mu}^2}\left(\frac{D}{D_y} e_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{D}{D_x} e_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) -$$

$$- \frac{e_x + e_y}{1-\overline{\mu}^2}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \qquad \text{(VI.110b)}$$

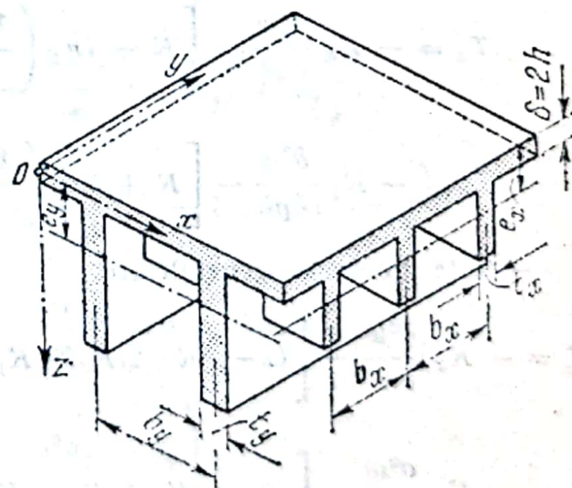


Fig. VI.50

În cazul general, reprezentat de ecuaţiile (VI.110 a, b), efectul de şaibă nu poate fi separat de cel de placă.

Totuşi, o simplificare considerabilă rezultă, aşa cum a arătat E. Giencke [82], dacă se neglijează influenţa alungirilor în dreptul centrelor de greutate (pe fiecare direcţie) asupra săgeţilor; aceasta revine la a considera că rigidităţile axiale D_x şi D_y sînt infinite. În notaţiile precedente rezultă

$$\nu = 0\,;\ \overline{D} = D(1-\mu)\,;\ \overline{\mu} = 0,$$

ar sistemul (VI.110 a, b) se reduce la ecuaţia (VI.109).

Pentru mărimile secţionale este mai simplu să fie raportate de la planul median al plăcii, la linia centrelor de greutate pe fiecare direcţie;

— momente încovoietoare

$$\overline{M}_x = -K_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu(K + De_xe_y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\overline{M}_y = -K_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu(K + De_xe_y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

— momente de torsiune

$$\overline{M}_{xy} = -\left\{(1-\mu)\left[K + e_x(e_x+e_y)\frac{D}{2}\right] + 2K_{xy}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},$$

$$\overline{M}_{yx} = -\left\{(1-\mu)\left[K + e_y(e_x+e_y)\frac{D}{2}\right] + 2K_{yx}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};$$

— forţe tăietoare

$$T_x = -K_x\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left[K + De_y\left(\frac{1+\mu}{2}e_x + \frac{1-\mu}{2}e_y\right) + 2K_{yx}\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2},$$

$$T_y = -K_y\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left[K + De_x\left(\frac{1+\mu}{2}e_y + \frac{1-\mu}{2}e_x\right) + 2K_{xy}\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y};$$

— forţe tăietoare generalizate

$$T_x^* = -K_x\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left[(2-\mu)K + 2(K_{xy}+K_{yx}) + D\left(\frac{1-\mu}{2}e_x^2 + 2e_xe_y + \frac{1-\mu}{2}e_y^2\right)\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2},$$

$$T_y^* = -K_y\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left[(2-\mu)K + 2(K_{yx}+K_{xy}) + D\left(\frac{1-\mu}{2}e_x^2 + 2e_xe_y + \frac{1-\mu}{2}e_y^2\right)\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y};$$

— eforturi normale

$$\overline{N}_x = -D\frac{1-\mu}{2}(e_x+e_y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\overline{N}_y = -D\frac{1-\mu}{2}(e_x+e_y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

— eforturi de lunecare

$$\overline{N}_{xy} = \overline{N}_{yx} = +D\frac{1-\mu}{2}(e_x+e_y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

K. Trenks [89] a studiat aceeaşi problemă prin metoda deformaţiilor; alegînd ca funcţii necunoscute deplasările u, v, w, el stabileşte un sistem de trei ecuaţii cu derivate parţiale, reductibile la o singură ecuaţie de ordinul opt.

9.2.5. **Reţele dese de grinzi.** Se admite că reţeaua se compune din două sau trei serii de grinzi paralele şi echidistante. Se notează:

e_1, e_2, e_3 — distanţele dintre axele grinzilor (fig. VI.51);
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — unghiurile dintre axa Ox şi axele grinzilor;
I_1, I_2, I_3 — momentele de inerţie axiale;
I_{1p}, I_{2p}, I_{3p} — momentele de inerţie polare;
E, G — modulii de elasticitate longitudinal, respectiv transversal.

Ecuaţia cu derivate parţiale a săgeţilor reţelei se obţine ca pentru o placă anizotropă:

$$K_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + K_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_4\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + K_5\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z(x, y) \qquad \text{(VI.111)}$$

în care:

$$K_1 = \sum_j\left(\frac{EI_j}{e_j}\cos^4\alpha_j + \frac{GI_{jp}}{e_j}\sin^2\alpha_j\cdot\cos^2\alpha_j\right),$$

$$K_2 = \sum_j\left(\frac{EI_j}{e_j}4\sin\alpha_j\cdot\cos^3\alpha_j + \frac{GI_{jp}}{e_j}\sin 2\alpha_j\cos 2\alpha_j\right),$$

$$K_3 = \sum_j\left[\frac{EI_j}{e_j}6\sin^2\alpha_j\cdot\cos^2\alpha_j + \frac{GI_{jp}}{e_j}(1-6\sin^2\alpha_j\cos^2\alpha_j)\right],$$

$$K_4 = \sum_j\left(\frac{EI_j}{e_j}4\sin^3\alpha_j\cdot\cos\alpha_j + \frac{GI_{jp}}{e_j}\sin 2\alpha_j\cos 2\alpha_j\right),$$

$$K_5 = \sum_j\left(\frac{EI_j}{e_j}\sin^4\alpha_j + \frac{GI_{jp}}{e_j}\sin^2\alpha_j\cos^2\alpha_j\right),$$

iar $j = 2$ pentru două şiruri de grinzi, respectiv $j = 3$ pentru trei şiruri.

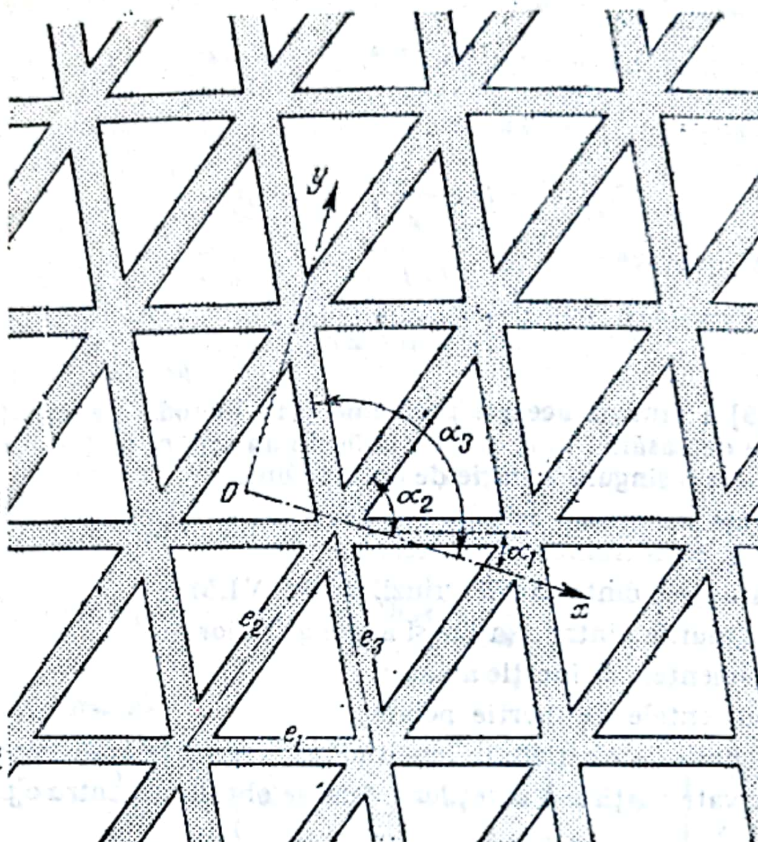


Fig. VI.51

Relaţiile precedente se pot simplifica considerabil în cazuri particulare. Pentru ochiuri rombice : $I_1 = I_2 = I$; $I_{xp} = I_{2p} = I_p$; $e_1 = e_2 = e$,

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha \,;\; \sin \alpha_1 = - \sin \alpha_2 = \sin \alpha$$

$$K_1 = \frac{2}{e} \cos^2\alpha(EI \cos^2\alpha + GI_p \sin^2\alpha),$$

$$K_2 = K_4 = 0,$$

$$K_3 = \frac{2}{e}\left[EI\,\frac{3}{2}\sin^2 2\alpha + GI_p\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 2\alpha\right)\right],$$

$$K_5 = \frac{2}{e} \sin^2\alpha(EI \sin^2\alpha + GI_p \cos^2\alpha).$$

Pentru ochiuri dreptunghiulare ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90°$) ecuaţia (VI.111) se reduce la forma (VI.109), în care

$$K_x = \frac{EI_1}{e_1}; \quad K_y = \frac{EI_2}{e_2}; \quad 2H = \frac{GI_{1p}}{e_1} + \frac{GI_{2p}}{e_2}.$$

Pentru ochiuri triunghiulare echilaterale (cu grinzi identice)

$$K_x = H = K_y = \frac{3}{8} \cdot \frac{3EI + GI_p}{e}.$$

9.3. Tipuri de soluţii pentru plăcile ortotrope

Ecuaţia cu derivate parţiale (VI.109) generalizează ecuaţia (VI.13) pentru plăcile plane izotrope (la care $K_x = K_y = H$); de aceea, în principiu, sînt aplicabile toate tipurile de soluţii dezvoltate precedent. În cele ce urmează ne vom limita la forma de contur dreptunghiulară.

Seriile duble trigonometrice sînt aplicabile în cazul plăcii simplu rezemate pe contur. Exprimînd încărcarea transversală sub forma (VI.17 a), iar săgeţile sub forma (VI.18 a), rezultă

$$w_{mn} = \frac{Z_{mn}}{\pi^4 \left(K_x \frac{m^4}{a^4} + 2H \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + K_y \frac{n^4}{b^4} \right)} \quad \text{(VI.112)}$$

Seriile simple trigonometrice sînt aplicabile în cazul plăcii avînd două laturi opuse simplu rezemate.

Luînd
$$Z(x, y) = \sum_m Z_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$w(x, y) = \sum_m Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

funcţiile $Y_m(y)$ se determină din ecuaţia diferenţială ordinară

$$K_y \frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2H \frac{m^2\pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + K_x \frac{m^4\pi^4}{a^4} Y_m = Z_m(y). \quad \text{(VI.113)}$$

Soluţia ecuaţiei omogene este de forma

$$Y_m(y) = exp \left(r \frac{m\pi y}{a} \right),$$

în care r satisface ecuaţia caracteristică

$$r^4 - 2\frac{H}{K_y} r^2 + \frac{K_x}{K_y} = 0.$$

Rădăcinile $r_i(i = 1, 2, 3, 4)$ sînt reale şi distincte, reale şi duble sau complexe conjugate, după cum $H^2 - K_x K_y \gtrless 0$.

Cazul $H^2 - K_x K_y > 0$.

$$\overline{w}(x, y) = \sum_m (A_1 e^{\beta_1 y} + A_2 e^{\beta_2 y} + A_3 e^{-\beta_1 y} + A_4 e^{-\beta_2 y}) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

în care
$$\beta_{1,2} = \frac{m}{a\sqrt{K_y}} \sqrt{H \pm \sqrt{H^2 - K_x K_y}}$$

Cazul $H^2 - K_x K_y = 0$ este echivalent cu cazul izotropiei (printr-o schimbare afină a axelor de coordonate)

$$\overline{w}(x, y) = \sum_m [(A_1 + A_2 y) e^{\beta_1 y} + (A_3 + A_4 y) e^{-\beta_1 y}] \sin \frac{m\pi x}{a},$$

în care
$$\beta_1 = \frac{m\pi}{a} \sqrt[4]{\frac{K_x}{K_y}}.$$

Cazul $H^2 - K_x K_y < 0$.

$$\overline{w}(x, y) = \sum_m [e^{\beta y}(A_1 \cos \alpha y + A_2 \sin \alpha y) + e^{-\beta y}(A_3 \cos \alpha y + A_4 \sin \alpha y)] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

în care:
$$\alpha = \frac{m\pi}{a\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{K_x}{K_y}} - \frac{H}{K_y}}, \quad \beta = \frac{m\pi}{a\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{K_x}{K_y}} + \frac{H}{K_y}}.$$

Acest caz este dezvoltat într-un mare număr de publicaţii [3, 9, 83, 85, 88].

9.4. Alte date privind plăcile ortotrope cu nervuri excentrice

În cazul în care nervurile dintr-o direcţie sînt mult diferite ca rigiditate de cele de pe direcţia cealaltă, netezirea lor nu mai duce la rezultate acceptabile. I. Beleş [77] admite că placa împreună cu nervurile dese constituie o placă ortotropă, iar diafragmele (de pe cealaltă direcţie joacă rolul unor elemente cu care placa este obligată să conlucreze.

Utilizînd seriile duble trigonometrice, în lucrarea menţionată [77] se exprimă egalitatea de săgeţi între placă şi diafragme, ajungîndu-se la exprimarea sarcinilor în zonele de conlucrare sub forma

$$Y_i(y) = \sum_n Y_{in} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

în care i reprezintă numărul de ordine al diafragmelor.

Pentru o placă cu trei diafragme (fig.VI. 52), coeficienții Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n} sînt dați de sistemul de ecuații canonice (corespunzător armonicei de rang n):

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11,n}Y_{1n}+\delta_{12,n}Y_{2n}+\delta_{13,n}Y_{3n}+\Delta_{1n}=0,\\ \delta_{21,n}Y_{1n}+\delta_{22,n}Y_{2n}+\delta_{23,n}Y_{3n}+\Delta_{2n}=0,\\ \delta_{31,n}Y_{1n}+\delta_{32,n}Y_{2n}+\delta_{33,n}Y_{3n}+\Delta_{3n}=0,\end{aligned}\right\}$$

în care:

$$\delta_{ii,n}=\gamma_{in}+\sum_m\frac{\sin^2\dfrac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}},$$

$$\delta_{ij,n}=\delta_{ji,n}=\sum_m\frac{\sin\dfrac{m\pi x_i}{a}\sin\dfrac{m\pi x_j}{a}}{N_{mn}},$$

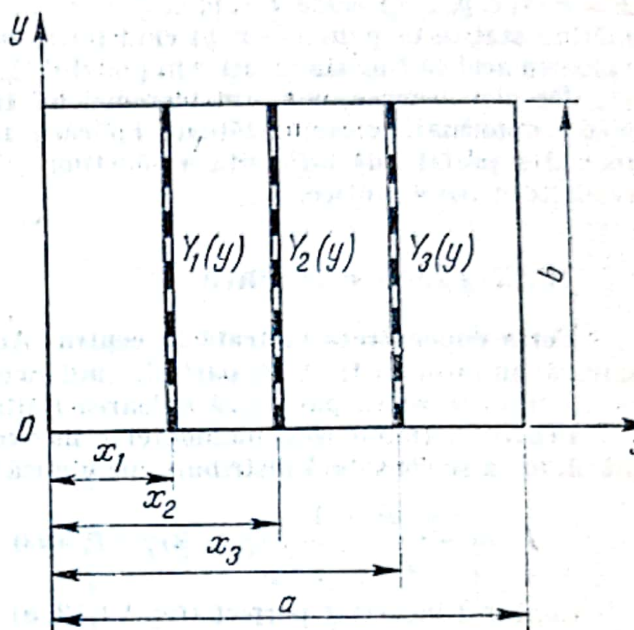


Fig. VI.52

$$\Delta_{in}=\frac{a}{2}\sum_m\frac{p_{mn}\sin\dfrac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}},$$

$$\gamma_{in}=\frac{b^4K_x}{2a^3EI_1n^4},$$

$$N_{mn}=m^4+2\rho_1\alpha^2m^2n^2+\rho_2\alpha^4n^4,$$

$$\alpha=\frac{a}{b};\qquad \rho_1=\frac{H}{K_x},\qquad \rho_2=\frac{K_y}{K_x}.$$

Pentru cazul general, vezi lucrarea lui I. Beleș [77]. Mai semnalăm studiile lui N. Dehousse [80, 81].

10. SUPRAFEȚE DE INFLUENȚĂ

10.1. Introducere

Expresiile săgeților w și ale solicitărilor produse de acțiunea unei forțe concentrate pot fi deduse din cazurile studiate în paragrafele precedente, prin trecere la limită. Față de un sistem de axe xOy, poziția punctului de aplicare a forței P este definită prin coordonatele ξ, ζ. Fiecare mărime statică este dată de o funcție de influență de forma

$F=P \cdot f(x, y, \xi, \zeta)$ unde $f(x, y, \xi, \zeta) = f(\xi, \zeta, x, y)$. Acest fapt arată că valoarea unei mărimi statice în punctul (x, y) cînd forța este aplicată în punctul (ξ, ζ), este egală cu valoarea aceleiași mărimi statice în punctul (ξ, ζ) cînd forța este aplicată în punctul (x, y).

De aici decurge, conform teoremei lui Betti-Maxwell, că pentru $P = 1$, suprafața medie deformată corespunzătoare aplicării sarcinii-unitate în punctul (ξ, ζ) reprezintă tocmai suprafața de influență a săgeților w, relativă la punctul (ξ, ζ); analog pentru celelalte mărimi statice.

10.2. Plăci circulare

Forța concentrată aplicată la centru. Acesta este un caz limită al plăcii întregi cu sarcină uniform distribuită parțial, cînd raza suprafeței încărcate tinde către zero, iar rezultanta încărcării păstrează valoarea finită P.

Pentru determinarea momentelor încovoietoare și a forțelor tăietoare în centrul plăcii, forța se consideră distribuită pe o mică suprafață de rază $b = \beta a$.

$$T_r = -\frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (\rho \geqslant \beta); \quad T_r = 0 \quad \text{pentru } \rho = 0; \quad V = \frac{P}{2\pi a}. \qquad \text{(VI.114)}$$

Conturul încastrat perfect (fig. VI.53, a)

$$w = \frac{Pa^2}{16K\pi}(1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln\rho); \quad \theta = -\frac{Pa}{4K\pi}\rho \ln \rho$$

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{P}{4\pi}[1 + (1+\mu)\ln\rho] \\ M_\varphi &= -\frac{P}{4\pi}[\mu + (1+\mu)\ln\rho] \end{aligned}\right\} \text{valabil numai pentru } \rho \geqslant \beta. \qquad \text{(VI.115)}$$

Pentru regiunea interioară încărcată se aplică relația (VI.66 a). Dacă în aceasta se neglijează β^2 ca o cantitate mică ridicată la pătrat, pentru centrul plăcii se obține:

$$w_{max} = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{Pa^2}{K}; \quad M_r = M_t = -\frac{P(1+\mu)}{4\pi}\ln\beta. \qquad \text{(VI.116)}$$

Conturul simplu rezemat (fig. VI.53, b)

$$w = \frac{Pa^2}{16K\pi}\left[\frac{3+\mu}{1+\mu}(1-\rho^2) + 2\rho^2 \ln\rho\right],$$

$$\theta = \frac{Pa}{4K\pi}\rho\left(\frac{1}{1+\mu} - \ln\rho\right),$$

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{P}{4\pi}(1+\mu)\ln\rho, \\ M &= \frac{P}{4\pi}[1 - \mu - (1+\mu)\ln\rho]. \end{aligned}\right\} \text{valabil numai pentru } \rho \geqslant \beta. \qquad \text{(VI.117)}$$

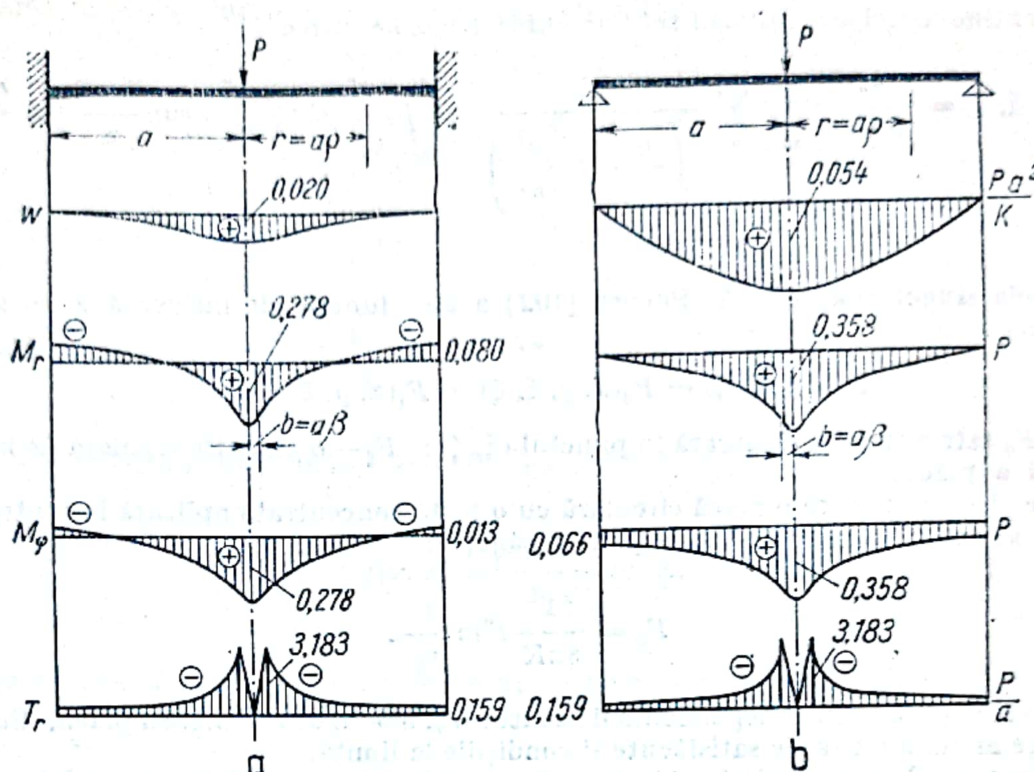


Fig. VI.53

La centrul plăcii :

$$w_{max} = \frac{3+\mu}{16\pi(1+\mu)} \cdot \frac{Pa^2}{K}\ ; \qquad M_r = M_\varphi = \frac{P}{4\pi}\,[1-(1+\mu)\ln\beta]. \qquad \text{(VI.118)}$$

Exemplele numerice din fig. VI.53, *a*, *b* corespund valorii $\beta = 0{,}05$.

Forța concentrată aplicată într-un punct oarecare *A*. Dacă se măsoară unghiul φ de la raza OA, se poate utiliza soluția (VI.85, a) în care se neglijează termenii în sin $m\,\varphi$ și soluțiile particulare $w_m(r)$, deoarece placa nu este încărcată cu sarcini distribuite. Soluția se aplică separat pentru regiunea interioară cercului de rază $OA = b = \beta a$ și regiunea inelară exterioară.

În cazul plăcii circulare încastrate pe contur, săgeata sub sarcină este :

$$w = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{Pa^2}{K}\,(1-\beta^2)^2. \qquad \text{(VI.119)}$$

10.3. Plăci dreptunghiulare

Suprafețele de influență pot fi determinate prin metoda obișnuită și prin metoda singularităților.

Metoda obișnuită. Plecînd de la placa încărcată cu o sarcină parțială uniform distribuită după un dreptunghi $2c \times 2d$, se trece la limită $4pcd \to P$; $c, d \to 0$.

Se obţine astfel cu ajutorul seriilor duble trigonometrice

$$w(x,y,\xi,\zeta)=\frac{4P}{\pi^4 Kab}\sum_m\sum_n\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\zeta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Metoda singularităţilor. A. Pucher [102] a ales funcţia de influenţă F ca sumă a două funcţii

$$F(x,y,\xi,\zeta)=F_0(x,y,\xi,\zeta)+F_1(x,y,\xi,\zeta)$$

în care: F_0 este o funcţie singulară în punctul (ξ,ζ); F_1 — o funcţie regulată pe întreaga suprafaţă a plăcii.

F_0 se alege ca pentru o placă circulară cu o forţă concentrată aplicată la centru (vezi termenul al doilea în relaţia (VI.49) pentru săgeţi):

$$F_0=\frac{1}{8\pi K}r^2\ln\frac{r}{r_0}.$$

Această expresie este independentă de conturul şi modul de rezemare a plăcii. Funcţia F_1 se alege astfel încît să fie satisfăcute şi condiţiile la limită.

Evident că F_0 şi F_1 trebuie să satisfacă ecuaţiile omogene $\Delta\Delta F_0=0$ şi $\Delta\Delta F_1=0$, deoarece placa este neîncărcată; punctul (ξ,ζ) este un punct singular.

Trecînd la coordonate carteziene cu ajutorul relaţiei:

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2$$

şi în ipoteza neglijării coeficientului de contracţie transversală ($\mu=0$) se obţine

$$F_0=-\frac{1}{16\pi K}[(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2]\cdot\ln\frac{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}{r_0^2},$$

$$M_{x0}=-K\frac{\partial^2 F_0}{\partial\xi^2}=-\frac{1}{8\pi}\left(2\ln\frac{r}{r_0}+2\cos^2\varphi+1\right),$$

$$T_{r0}=-K\frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta F_0)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Suprafaţa de influenţă se reprezintă în plan prin curbe de nivel. De exemplu pentru M_{x0}, la cota $\varkappa$ vom avea curba de ecuaţie

$$r(\varkappa,\varphi)=r_0\cdot e^{-0,5}\cdot e^{-4\pi\varkappa}\cdot e^{-\cos^2\varphi}$$

care arată că toate curbele sînt asemenea.

Suprafața mărginită de o curbă de nivel $\varkappa$ are mărimea :

$$\Omega(\varkappa) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \mathrm{d}\varphi = 0{,}5382\, r_0^2\, e^{-8\pi\varkappa},$$

Volumul definit de curba de nivel $\varkappa$ are mărimea :

$$V(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{\infty} \Omega(\varkappa)\, \mathrm{d}\varkappa = 0{,}02146\, r_0^2\, e^{-8\pi\varkappa}.$$

În mod analog, pentru forța tăietoare T_{r0}, curbele de nivel au ecuația :

$$r(\varkappa, \varphi) = \frac{1}{2\pi\varkappa} \cos\varphi,$$

iar suprafața, respectiv volumul, definite de curbele de nivel :

$$\Omega(\varkappa) = \frac{1}{16\pi\varkappa^2}, \quad V(\varkappa) = \frac{1}{16\pi\varkappa}.$$

O problemă aparte prezintă momentele pe reazeme la plăci încastrate pe contur. Plecîndu-se de la soluția plăcii semiinfinite în consolă, încărcată cu o forță concentrată într-un punct oarecare, se obține, prin trecerea la limită :

$$M_{x0} = -\frac{1}{\pi} \cos^2\varphi.$$

Valorile funcțiilor singulare pe conturul plăcii rămîn peste tot finite. Soluția suplimentară pentru funcția F_1 trebuie să fie aleasă astfel încît toate condițiile la limită să fie satisfăcute. Ea apare astfel ca o solicitare pe contur și poate fi aleasă sub formă de serie, dintre soluțiile particulare cunoscute ale ecuației biarmonice. În fig. VI.54 sînt redate cîteva suprafețe de influență pentru plăci dreptunghiulare, și anume : suprafața de influență a momentului încovoietor M_x la centrul unei plăci pătrate (fig. VI.54, *a*) ; suprafețele de influență ale momentului încovoietor M_x(sus), respectiv momentul de torsiune M_{xy}(jos) la centrul unei plăci pătrate încastrată perfect pe tot conturul (fig. VI.54,*b*) ; suprafața de influență a momentului încovoietor M_x, la mijlocul laturii încastrate (fig. VI.54, *c*). Liniile de cotă reprezintă valorile momentelor multiplicate cu 8π.

În afara articolelor citate la bibliografie, menționăm albumele de planșe ale lui G. Hoeland [94], S. Krug și P. Stein [96], A. Molkenthin [99], A. Pucher [102], J. Balaš și A. Hanuška [91].

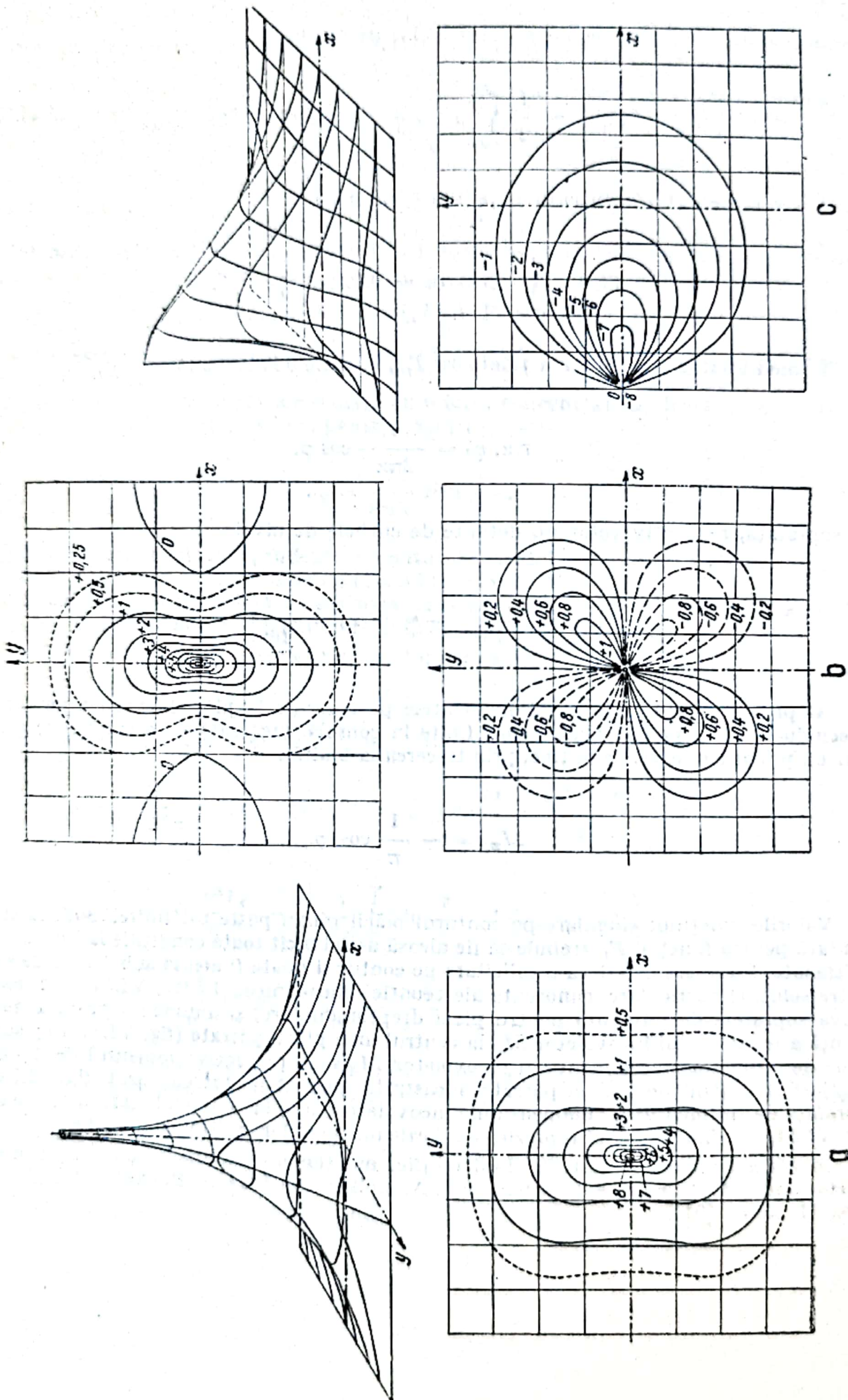


Fig. VI.54

11. PROBLEME SPECIALE DE PLĂCI

11.1. Efectul deformației din forțe tăietoare asupra încovoierii plăcilor

Neglijarea efectului deformației din forțe tăietoare este echivalentă cu ipoteza că modulul de elasticitate transversal este infinit; ca o consecință, ecuația diferențială a săgeților este de ordinul al patrulea, iar într-un punct situat pe contur pot fi impuse doar două condiții. În particular, la colțurile plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate apar forțe concentrate R, ceea ce denotă o concentrare de eforturi.

O teorie mai exactă a fost dezvoltată de E. Reissner care admite că placa are o grosime δ finită și că în ea apar și eforturi unitare normale σ_z (dirijate după grosimea plăcii):

$$\sigma_z = -\frac{3p}{4}\left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{\delta} + \frac{1}{3}\left(\frac{2z}{\delta}\right)^2\right]$$

în care p reprezintă sarcina de suprafață aplicată la fața superioară a plăcii.

În afara săgeților w care satisfac ecuația cu derivate parțiale de ordinul al patrulea

$$K\,\Delta\Delta\, w = p - \frac{\delta^2}{10}\,\frac{2-\mu}{1-\mu}\,\Delta\, p, \qquad \text{(VI.120)}$$

mai este introdusă o funcție de eforturi ψ care satisface ecuația de ordinul al doilea

$$\Delta\,\psi - \frac{10}{\delta^2}\,\psi = 0. \qquad \text{(VI.121)}$$

Mărimile secționale rezultă sub forma

$$T_x = -K\frac{\partial}{\partial x}\Delta\, w + \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$T_y = -K\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$M_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\delta^2}{5}\left(-K\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta\, w + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right) - \frac{p\,\delta^2}{10}\,\frac{\mu}{1-\mu},$$

$$M_y = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\delta^2}{5}\left(-K\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta\, w + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right) - \frac{p\,\delta^2}{10}\,\frac{\mu}{1-\mu},$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\delta^2}{10}\left(2K\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta\, w - \Delta\,\psi\right).$$

În această teorie, pentru fiecare latură de contur pot fi exprimate cîte trei condiții.

11.2. Deformaţiile mari ale plăcilor

Ecuaţiile de echilibru sînt caracterizate prin:
a) introducerea forţelor axiale care satisfac relaţiile

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \qquad \text{(VI.122)}$$

b) luarea în considerare a acestor forţe în ecuaţia de proiecţii pe normală

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\left(Z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad \text{(VI.123)}$$

Ecuaţiile de deformaţii sînt completate cu termeni neliniari

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad \text{(VI.124)}$$

Relaţiile de elasticitate sînt cele din teoria elasticităţii

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E\delta}(N_x - \mu N_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E\delta}(N_y - \mu N_x),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E\delta} N_{xy}, \qquad \text{(VI.125)}$$

respectiv din teoria liniară a încovoierii (VI.7) — (VI.9).

În final se ajunge la sistemul de două ecuaţii cu derivate parţiale avînd ca necunoscute săgeata w şi o funcţie de eforturi F:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \qquad \text{(VI.126)}$$

$$K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = Z + \delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Sistemul poate fi exprimat şi în coordonate polare [109].

Soluţii au fost obţinute cu ajutorul seriilor de puteri sau prin metode variaţionale [106, 107, 108, 109, 110].

Efectul de membrană care apare datorită deformaţiilor mari reduce efectul de încovoiere; pentru a ilustra această reducere, în fig. VI. 55 *a*, *b* este redată variaţia săgeţilor şi a momentelor încovoietoare ale unei plăci pătrate rezemate elastic pe grinzi ($\lambda = EI/Ka$, în care EI reprezintă rigiditatea la încovoiere a grinzilor, K rigiditatea la încovoiere a plăcii, a — latura plăcii).

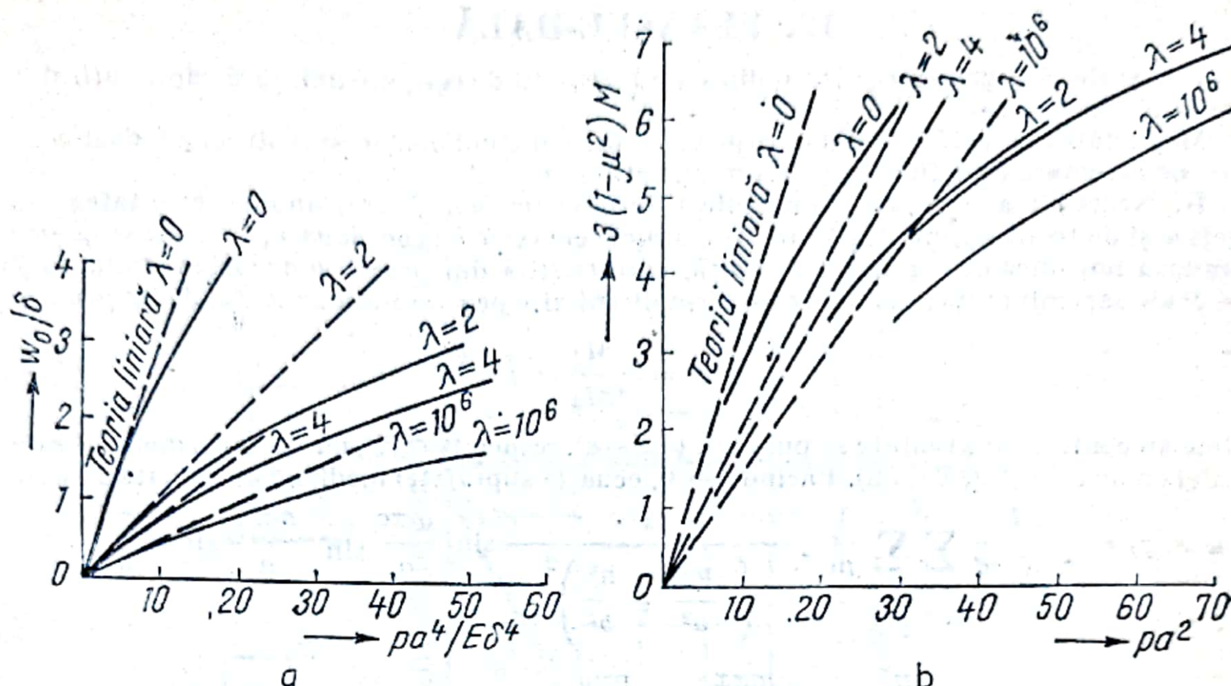


Fig. VI.55

11.3. Plăci groase

Plăcile groase pot fi studiate doar prin metodele teoriei elasticităţii spaţiale.

În cazul plăcilor circulare încărcate simetric au fost date soluţii sub formă de polinoame [113], funcţii Bessel [111], polinoame Legendre [112] etc. Orientativ se poate indica o relaţie de forma

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma}_{max}\left(1 + k\frac{c^2}{a^2}\right)$$

pentru efortul unitar σ_{max} la centrul unei plăci circulare simplu rezemate, încărcate cu o sarcină uniform distribuită la faţa superioară; $\bar{\sigma}_{max}$ reprezintă efortul unitar maxim în placa subţire, c — jumătatea grosimii plăcii, a — raza plăcii, k — coeficient numeric avînd valorile

$$k = 0{,}3613 \text{ pentru } \mu = 0{,}1, \quad k = 0{,}3717 \text{ pentru } \mu = 0{,}3.$$

Se vede că, pentru grosimi mari, corecţia adusă de termenul al doilea din formula precedentă poate să fie considerabilă.

11.4. Starea de eforturi în dreptul forţelor concentrate

Acţiunea forţelor, concentrate, producînd local o puternică concentrare de eforturi, trebuie să fie studiată ca o problemă de elasticitate spaţială.

Admiţînd că sarcina este aplicată pe o zonă restrînsă de rază c şi izolînd un solid de rotaţie de grosime δ şi rază b, se ajunge la următoarea formulă aproximativă

$$\sigma_{max} = \frac{P}{\delta^2}\left[(1+\mu)\left(0{,}485 \log\frac{a}{\delta} + 0{,}52\right) + 0{,}48\right],$$

în care a reprezintă raza plăcii circulare simplu rezemate.

12. PLANŞEE-DALĂ

Planşeele fără grinzi, realizate din dale rezemînd direct pe stîlpi, fără capiteluri, sînt denumite planşee-dală.

Majoritatea cercetătorilor au exprimat, pentru studierea acestor structuri, doar condiţia de rezemare punctuală a plăcii în axa stîlpilor.

R. Negruţiu a exprimat condiţiile riguroase de conlucrare, anume egalitatea de săgeţi w şi de rotiri φ_x, φ_y după direcţii paralele cu axele de coordonate. În acest scop este introdusă noţiunea de cuplu de suprafaţă, care rezultă din perechea de forţe rezultante P şi $-P$ ale sarcinii dreptunghiulare uniform distribuite pe suprafaţa $2c \times 2d$, de intensitate

$$p = \frac{M}{4cd\varepsilon};$$

forţele au centrele de greutate în punctele $(\xi, \zeta + \varepsilon)$, respectiv (ξ, ζ), iar vectorul moment este paralel cu axa Ox (fig. VI. 56). Făcînd $\varepsilon \to 0$, ecuaţia suprafeţei mediane deformate se scrie

$$w(x, y) = \frac{M}{\pi^4 Kbcd} \sum_m \sum_n \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi d}{b} \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{n\pi\zeta}{b} \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

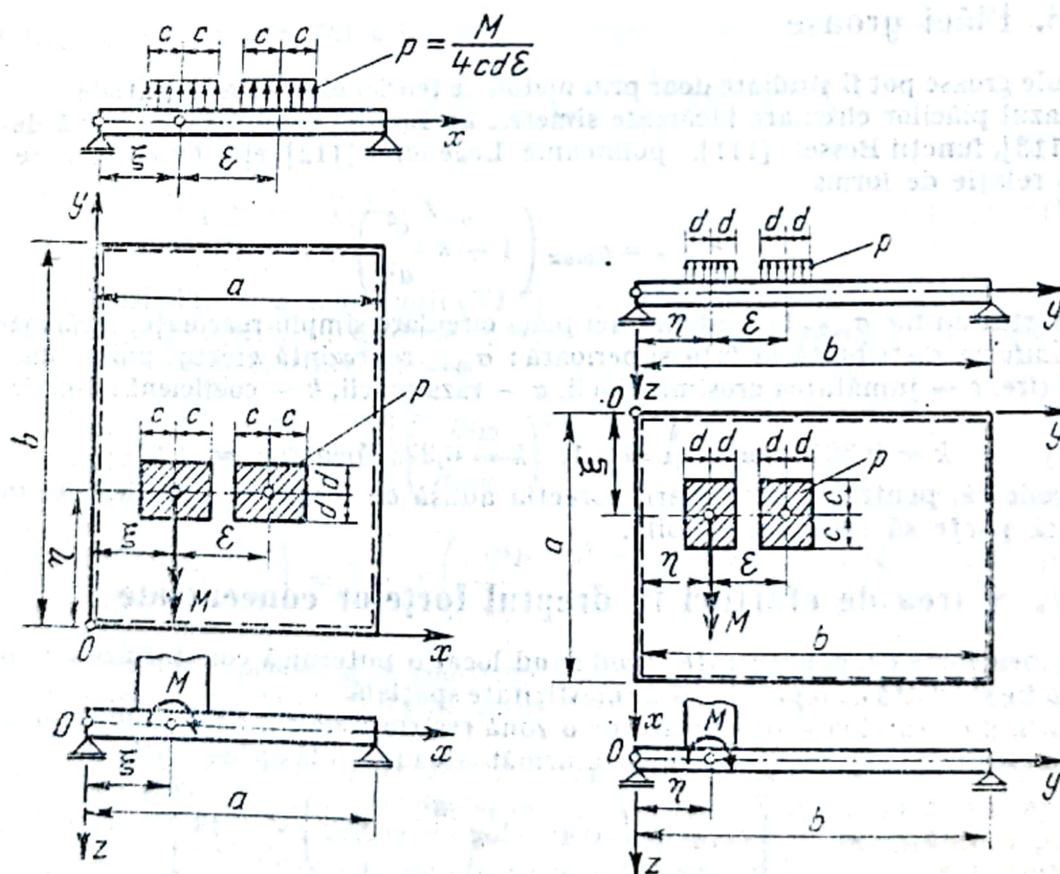
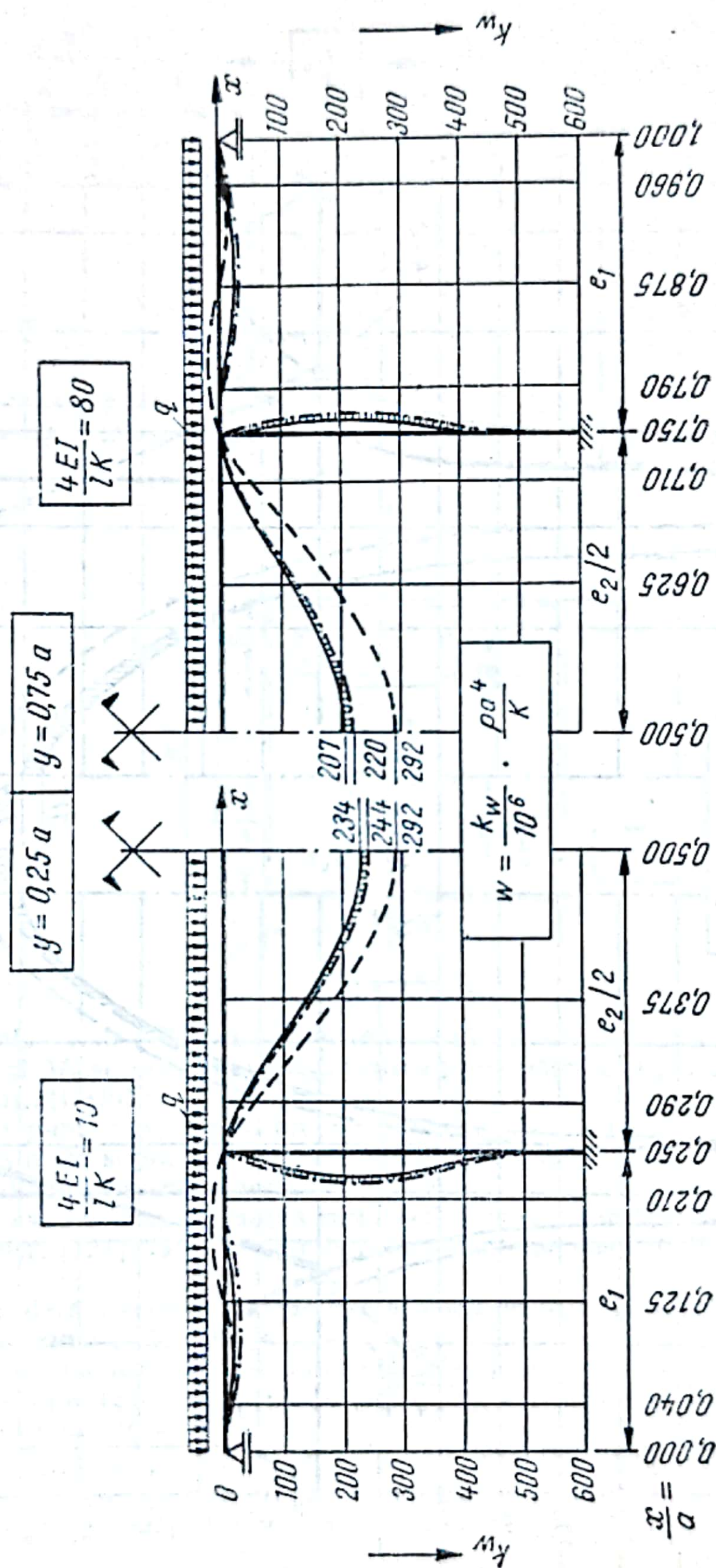


Fig. VI.56



4EI/lK = 80
4EI/lK = 10
y = 0,75 a
y = 0,25 a
w = k_w/10^6 · pa^4/K
207
220
292
234
244
292
q
x
k_wy
e_1
e_2/2
0
100
200
300
400
500
600
x/a =
0,000
0,040
0,125
0,210
0,250
0,290
0,375
0,500
0,625
0,710
0,750
0,790
0,875
0,960
1,000

Fig. VI.57 a

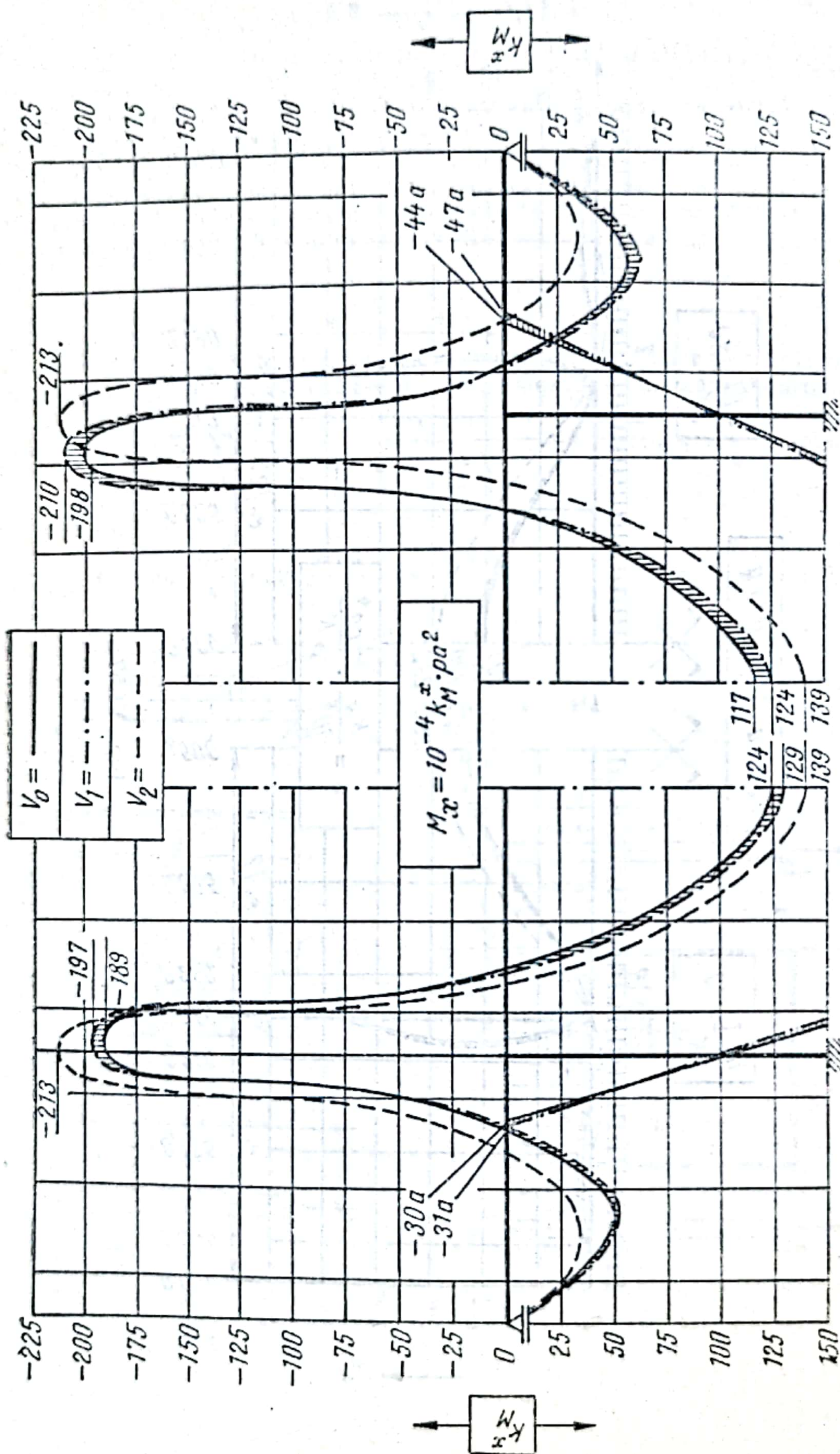

V_0 =
V_1 =
V_2 =
$M_x = 10^{-4} k_M^x \cdot pa^2$
k_M^x w_y
−225 −200 −175 −150 −125 −100 −75 −50 −25 0 25 50 75 100 125 150
−213
−210
−198
−197
−189
−44 a
−47 a
−30 a
−31 a
117
124
139
124
129
139

Fig. VI.57 b

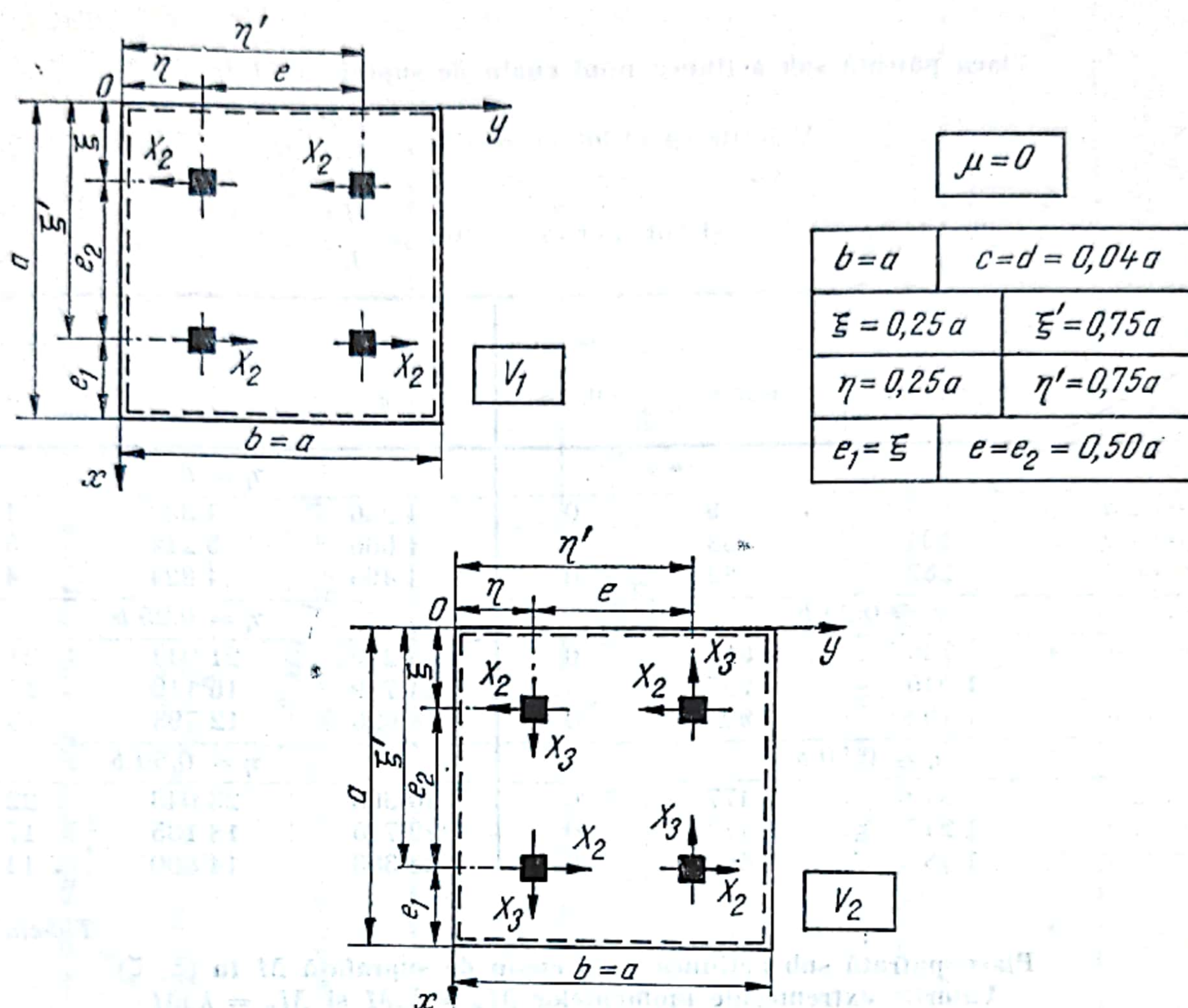


Fig. VI.57c

În tabelele VI.50 — VI.53 redăm valorile săgeţilor w, rotirilor φ_x, momentelor încovoietoare M_x şi M_y şi de torsiune M_{xy} pentru placa pătrată şi placa de lungime infinită; parametrii variaţi sînt:

— poziţia punctului de aplicare a cuplului de suprafaţă;

— dimensiunile suprafeţei pe care se aplică cuplul M.

Valorile din tabele corespund lui $\mu = 1/6$.

Pentru a avea o imagine asupra rezultatelor ce se obţin în diferite variante, redăm, după R. Negruţiu [121], variaţia săgeţilor şi momentelor încovoietoare M_x în cazurile cînd (fig. VI.57):

— se consideră o rezemare articulată a plăcii pe stîlpi (varianta V_0),

— se ţine seama şi de rotirea φ_x (varianta V_1),

— se ţine seama de rotirile pe ambele direcţii, φ_x şi φ_y (varianta V_2). Placa examinată este pătrată, simplu rezemată pe contur şi legată cu patru stîlpi. Încărcarea este uniform distribuită pe toată suprafaţa.

Marele avantaj al metodei lui R. Negruţiu [121] rezidă în faptul că ea permite studierea structurilor cu planşee-dală la acţiunea forţelor orizontală. Pentru detalii, se va consulta monografia [121].

Tabelul VI.50

Placa pătrată sub acţiunea unui cuplu de suprafaţă M în (ξ, ζ)

$$\text{Valorile săgeţilor } w = 10^5 k_w \frac{Ma^2}{K}$$

$$\text{şi rotirilor } \varphi_x = 10^5 k_{\varphi x} \frac{Ma}{K}$$

$c = d =$ \ $\xi =$	$k_w =$ c	$k_w =$ 0,25 a	$k_w =$ 0,50 a	$k_{\varphi x} =$ c	$k_{\varphi x} =$ 0,25 a	$k_{\varphi x} =$ 0,50 a
	$\eta = d$			$\eta = d$		
0,02 a	87	9	0	4 286	4 330	4 347
0,04 a	194	38	0	4 660	5 211	5 275
0,06 a	282	82	0	4 495	4 824	4 955
	$\eta = 0{,}25\ b$			$\eta = 0{,}25\ b$		
0,02 a	736	910	0	35 219	21 044	21 447
0,04 a	1 045	907	0	24 749	16 119	16 534
0,06 a	1 194	902	0	18 626	12 798	13 191
	$\eta = 0{,}50\ b$			$\eta = 0{,}50\ b$		
0,02 a	840	1 477	0	40 368	23 043	22 751
0,04 a	1 247	1 473	0	29 745	18 135	17 789
0,06 a	1 487	1 466	0	23 383	14 800	14 448

Tabelul VI.51

Placa pătrată sub acţiunea unui cuplu de suprafaţă M în (ξ, ζ)
Valorile extreme ale momentelor $M_x = k_x M$ şi $M_y = k_y M$

$c = d =$ \ $\xi =$	max k_x în $(\xi + c, \eta)$ c	0,25 a	0,50 a	min k_x în $(\xi - c, \eta)$ c	0,25 a	0,50 a	max k_y în $(\xi + c, \eta)$ c	0,25 a	0,50 a	min k_y în $(\xi - c, \eta)$ c	0,25 a	0,50 a
	$\eta = d$						$\eta = d$					
0,02 a	2,535	2,552	2,552	0	−2,553	−2,552	3,063	2,278	2,276	0	−2,273	−2,276
0,04 a	1,661	1,607	1,609	0	−1,611	−1,609	1,595	1,180	1,171	0	−1,158	−1,171
0,06 a	1,175	1,139	1,142	0	−1,146	−1,142	1,071	0,807	0,789	0	−0,758	−0,789
	$\eta = 0{,}25\ b$						$\eta = 0{,}25\ b$					
0,02 a	5,850	4,342	4,322	0	−4,298	−4,322	3,751	2,452	2,305	0	−2,152	−2,305
0,04 a	3,186	2,481	2,466	0	−2,433	−2,466	1,945	1,333	1,195	0	−1,030	−1,195
0,06 a	2,089	1,695	1,684	0	−1,642	−1,684	1,314	0,936	0,804	0	−0,633	−0,804
	$\eta = 0{,}50\ b$						$\eta = 0{,}50\ b$					
0,02 a	5,894	4,395	4,339	0	−4,253	−4,339	3,743	2,471	2,307	0	−2,124	−2,307
0,04 a	3,267	2,543	2,489	0	−2,398	−2,489	1,932	1,353	1,187	0	−1,005	−1,187
0,06 a	2,197	1,764	1,715	0	−1,614	−1,715	1,300	0,956	0,793	0	−0,608	−0,793

Tabelul VI.52

Placa de lungime infinită ($b \to \infty$) sub acțiunea unui cuplu de suprafață M în $(\xi, 0)$

Valorile săgeților $w = 10^5 k_w \dfrac{Ma^2}{K}$

și rotirilor $\varphi_x = 10^5 k_{\varphi x} \dfrac{Ma}{K}$ $(\varphi_y = 0)$ în punctul $(\xi, 0)$

	$k_w =$			$k_{\varphi x} =$		
$c = d =$ \ $\xi =$	c	$0{,}25\,a$	$0{,}50\,a$	c	$0{,}25\,a$	$0{,}50\,a$
$0{,}02\,a$	952	2 319	0	46 109	26 170	23 409
$0{,}04\,a$	1 463	2 314	0	35 107	20 692	17 914
$0{,}06\,a$	1 809	2 305	0	28 683	17 483	14 702

Tabelul VI.53

Placa de lungime infinită ($b \to \infty$) sub acțiunea unui cuplu de suprafață M în $(\xi, 0)$
Valorile extreme ale momentelor $M_x = k_x M$ și $M_y = k_y M$

	max k_x în $(\xi + c, 0)$			min k_x în $(\xi - c, 0)$			max k_y în $(\xi + c, 0)$			min k_y în $(\xi - c, 0)$		
$c = d =$ \ $\xi =$	c	$0{,}25\,a$	$0{,}50\,a$	c	$0{,}25\,a$	$0{,}50\,a$	c	$0{,}25\,a$	$0{,}50\,a$	c	$0{,}25\,a$	$0{,}50\,a$
$0{,}02\,a$	7,142	5,643	5,505	0	−5,356	−5,505	3,918	2,601	2,461	0	−2,310	−2,461
$0{,}04\,a$	3,576	2,894	2,757	0	−2,599	−2,757	1,956	1,363	1,226	0	−1,070	−1,226
$0{,}06\,a$	2,375	1,966	1,831	0	−1,666	−1,831	1,294	0,942	0,809	0	−0,648	−0,809

13. CALCULUL PLĂCILOR ȚINÎND SEAMA DE RETRANSMITEREA PLASTICĂ A EFORTURILOR. METODA LINIILOR DE RUPERE. METODA BENZILOR

13.1. Ipoteze de calcul

Numeroase studii experimentale au arătat că, în procesul de creștere progresivă a încărcărilor, plăcile plane rezemate pe două direcții ating un stadiu de solicitare în care, în punctul cel mai solicitat al materialului se atinge limita de curgere. Creșterea în continuare a încărcărilor face ca plastificarea materialului să se producă și în alte puncte ale plăcilor. În același timp, din punctele deja intrate în curgere, plastificarea începe să se extindă și asupra materialului din zonele învecinate, de-a lungul unor linii drepte, denumite *linii de rupere* [138] sau *axe de articulații plastice* (ele sînt echivalentul articulațiilor plastice de la grinzi).

Calculul plăcilor ținînd seama de retransmiterea plastică a eforturilor constituie de multe ori unica alternativă a calculului analitic în domeniul de comportare elastică a materialului (exceptînd metodele numerice) și prezintă totodată o sursă de economii de material, prin exploatarea rezervelor de siguranță.

În calculul după teoria liniilor de rupere, se fac următoarele ipoteze simplificatoare :

1) În stadiul de rupere, deformațiile elastice sînt neglijabile în raport cu deformațiile plastice.

2) Porțiunile de placă cuprinse între liniile de rupere pot fi considerate ca plăci plane rigide.

3) Axa de articulație plastică între două porțiuni de placă trece prin intersecția axelor în jurul cărora se produce rotirea absolută a porțiunilor respective.

4) În lungul unei linii de rupere, secțiunea se plastifică în întregime, deci în tot lungul fiecărei linii de rupere există un moment încovoietor constant, egal cu momentul limită.

13.2. Metode generale de soluționare

Cea mai larg aplicată teoremă pntru calculul plăcilor este *teorema cinematică*, conform căreia *încărcarea efectivă de cedare a unei plăci rezemate pe două direcții este egală cu cea mai mică valoare a încărcărilor de referință calculate pentru toate combinațiile posibile ale valorilor pe care le pot avea parametrii fiecăruia dintre mecanismele posibile de cedare ale plăcii*.

La scrierea ecuației de echilibru în stadiul de cedare al plăcilor se utilizează și teorema rapoartelor unghiurilor de rotire ; deplasările efectuate de punctele unei plăci, într-o deplasare virtuală dată mecanismului ei de cedare, sînt complet definite prin valorile rapoartelor unghiurilor cu care se rotesc porțiunile de placă delimitate de liniile de rupere față de axele lor de rotație.

Aplicarea metodei cinematice implică următoarele etape de calcul [138] :

1) Identificarea tuturor mecanismelor posibile de cedare ale plăcii respective, caracterizate de parametrii λ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ de care depind pozițiile liniilor de rupere ale fiecărui mecanism.

2) Scrierea ecuației de echilibru plastic, folosind principiul lucrului mecanic virtual. Forma generală a acestei ecuații este :

$$L_M + L_Q = 0, \tag{VI.127}$$

în care: L_M este lucrul mecanic virtual al momentelor plastice care acționează de-a lungul liniilor de rupere (totdeauna negativ);
L_Q — lucrul mecanic virtual al încărcărilor care solicită placa în stadiul de formare a mecanismului de cedare (totdeauna pozitiv).

Ecuația (VI.121) este o funcție de forma

$$P_m = F(M_{p1}, M_{p2}, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots) = 0,$$

în care: P_m este încărcarea de cedare; M_{p1}, $M_{p2}, \ldots$ sînt momentele plastice care acționează de-a lungul tuturor liniilor de rupere ale mecanismului de cedare; λ_1, $\lambda_2, \ldots$ — parametrii, de valori inițial necunoscute, care precizează pozițiile liniilor de rupere ale mecanismului de cedare.

3) Pentru fiecare mecanism posibil de cedare se exprimă condiția de minim a încărcării de cedare

$$\frac{\partial P_m}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial P_m}{\partial \lambda_2} = 0, \ldots$$

din care rezultă parametrii λ_i.

Se introduc în relația (VI.128) valorile obținute pentru λ_i.

4) Dintre încărcările de referință astfel obținute pentru toate mecanismele posibile de cedare ale plăcii, se reține cea care are valoarea cea mai mică; aceasta este *încărcarea efectivă de cedare*, iar mecanismul corespunzător este mecanismul real de cedare al plăcii.

13.3. Exemple de determinare a încărcării de cedare

Placa dreptunghiulară incastrată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită (fig. VI.58). Se dă o deplasare virtuală a axei centrale, $\eta = 1/2$, astfel încît rezultă $\theta = 1/l_1$.

Lucrul mecanic exterior virtual se evaluează ca produsul dintre încărcarea de cedare p_r și volumul de deplasări virtuale:

$$L_Q = -\frac{p_r l_1}{12}(3l_2 - l_1).$$

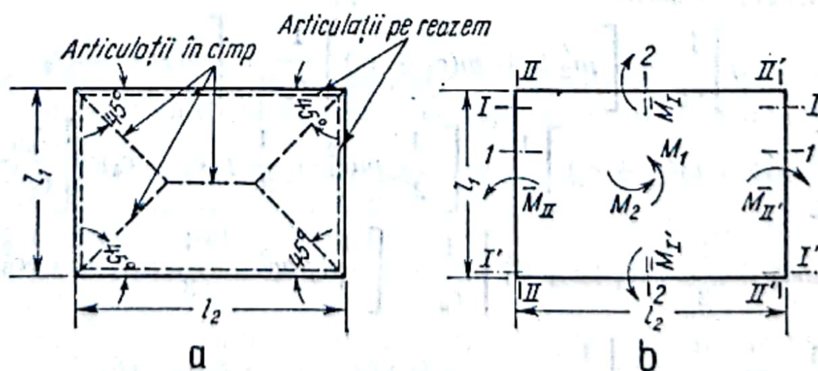


Fig. VI.58

Momentele plastice se evaluează pe toată lungimea liniilor de rupere, fie:

$$M_{p1} = m_1(l_2 - l_1),\ M_{p2} = m_2 l_1 \sqrt{2};\ M_{pI} = m_I l_2;\ M_{pI'} = m_{I'} l_2;$$
$$M_{pII} = m_{II} l_1;\ M_{pII'} = m_{II'} l_1.$$

Rotirile au valorile:

$$\theta_1 = 2\theta;\ \theta_2 = \theta/\sqrt{2};\ \theta_I = \theta_{I'} = \theta_{II} = \theta_{II'} = \theta; \quad \theta = \frac{1}{l_1}.$$

$$-L_M = \sum M_{pi}\,\theta_i = 2M_1 + 2M_2 + M_I + M_{I'} + M_{II} + M_{II'}.$$

astfel încît ecuaţia (VI.127) se scrie

$$2M_1 + 2M_2 + M_I + M_{I'} + M_{II} + M_{II'} = \frac{1}{12} p_r l_1^2 (3\,l_2 - l_1). \qquad \text{(VI.129)}$$

Luînd $p_r = c(g+p)$, relaţia (VI.129) poate servi la determinarea coeficientului de siguranţă c.

Placa dreptunghiulară simplu rezemată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită. În relaţia (VI.129) este suficient să anulăm momentele de pe contur:

$$M_1 + M_2 = \frac{1}{24} p_r l_1^2 (3l_2 - l_1).$$

Placa dreptunghiulară încărcată cu o sarcină concentrată la centru:

— contur simplu rezemat:

$$P_r = 4m\left(1 + \frac{a}{b}\right);$$

— contur încastrat perfect:

$$P_r = 8m\left(1 + \frac{a}{b}\right),$$

în care: a este latura mare a plăcii; b — latura mică a plăcii; m — momentul plastic pe unitatea de lungime, acelaşi pe ambele direcţii ale plăcii.

Placa dreptunghiulară cu gol central (fig. VI. 59). Placa este încărcată cu sarcina uniform distribuită p şi sarcina liniară $\bar{p}_m (m = 1, 2, 3, 4)$ pe laturile golului.

Ecuaţia (VI.127) se scrie

$$\left[m_1' a + m(c_2 + c_4)\right]\frac{1}{c_1} + \left[m_2' b + m(c_1 + c_3)\right]\frac{1}{c_2} + \left[m_3' a + m(c_2 + c_4)\right]\frac{1}{c_3} +$$
$$+\left[m_4' b + m(c_1 + c_3)\right]\frac{1}{c_4} = \left[\frac{1}{2} p a c_1^2 - \frac{1}{3} p(c_2 + c_4)c_1^2\right]\frac{1}{c_1} +$$
$$+\left[\frac{1}{2} p b c_2^2 - \frac{1}{3} p(c_1 + c)_3 \cdot c_2^2\right]\frac{1}{c_2} + \left[\frac{1}{2} p a c_3^2 - \frac{1}{3} p(c_2 + c_4)c_3^2\right]\frac{1}{c_3} +$$
$$+\left[\frac{1}{2} p b c_2^2 - \frac{1}{3} p(c_1 + c_3)c_4^2\right]\frac{1}{c_4} + (\bar{p}_1 + \bar{p}_3)(a - c_2 - c_4) + ((\bar{p}_2 + \bar{p}_4)(b - c_1 - c_3).$$

Dacă placa este simplu rezemată, se va lua $m_1' = m_2' = m_3' = m_4' = 0$, iar relația precedentă devine:

$$m\left(\frac{c_2 + c_4}{c_1} + \frac{c_1 + c_3}{c_2} + \frac{c_2 + c_4}{c_3} + \frac{c_1 + c_3}{c_4}\right) = \frac{1}{2} pa(c_1 + c_3) + \frac{1}{2} pb(c_2 + c_4) - \frac{2}{3} p(c_1 + c_3)(c_2 + c_4) + (\bar{p}_1 + \bar{p}_3)(a - c_2 - c_4) + (\bar{p}_2 + \bar{p}_4)(b - c_1 - c_3).$$

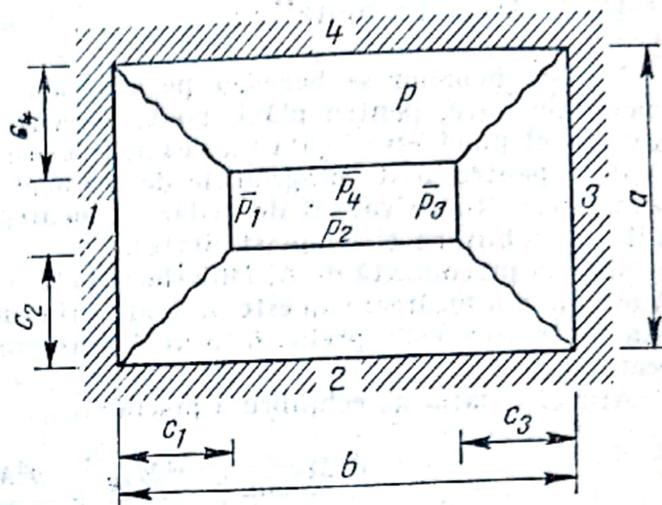


Fig. VI.59

Placa circulară întreagă simplu rezemată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită. Dacă placa are aceeași armare pe toată suprafața

$$p_r = cp = \frac{6}{a^2} m,$$

în care: a este raza plăcii; m — momentul de rupere pe unitatea de lungime; p_r — încărcarea de cedare, uniform distribuită.

Dacă placa este armată diferit în sens radial și inelar, există un inel de rupere de rază r și o infinitate de raze de rupere. Raza r se determină din relația

$$2\left(\frac{r}{a}\right)^3 - 3\left(1 + \frac{m_r}{m_\varphi}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1 = 0,$$

iar sarcina de rupere

$$p_r = \frac{2m_\varphi}{r^2},$$

în care: m_r este momentul de rupere corespunzător armăturii radiale, pe unitatea de lungime de contur; m_φ — momentul de rupere corespunzător armăturii inelare, pe unitatea de lungime de rază.

Placa circulară întreagă, încărcată cu o sarcină concentrată în centru:

— contur simplu rezemat $P_r = 2\pi m$,

— contur încastrat perfect $P_r = 4\pi m$.

Alte figuri de rupere sînt date în cărțile lui K.W. Johansen [125], L. L. Jones și R. H. Wood [126].

Coeficienții plastici în secțiunile critice ale plăcilor de beton armat pe două direcții au fost stabiliți de V. Petcu prin metoda redistribuirii minime a momentelor sau prin metoda reducerii momentelor de pe reazeme [131, 132, 133, 138, 139, 140, 141].

13.4. Metoda benzilor

Metoda benzilor se bazează pe teorema statică din teoria plastică simplă a structurilor care, pentru plăci, poate fi enunţată astfel: încărcarea efectivă de cedare a unei plăci este egală cu cea mai mare valoare a încărcărilor de referinţă calculate pentru toate diagramele de momente static admisibile ale plăcii; (diagramă corespunzătoare valorii de cedare a încărcării de referinţă, care îndeplineşte condiţiile de echilibru şi de plasticitate).

Metoda preconizată de A. Hillerborg [143, 147] pleacă de la ideea că, la rupere, nici o fracţiune din încărcare nu este preluată prin momente de torsiune, adică $M_{xy} = 0$, şi că toată încărcarea este preluată prin încovoiere, fie într-o direcţie x, fie în cealaltă direcţie y.

Atunci ecuaţia de echilibru a plăcilor

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x,y)$$

poate fi înlocuită prin relaţiile

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -\alpha p, \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -(1-\alpha)p$$

care caracterizează comportarea unei benzi de placă lucrînd fără torsiune; α reprezintă fracţiunea de încărcare preluată de benzi în direcţia x, iar $(1-\alpha)$ în direcţia y. Astfel, încărcarea poate fi împărţită între benzi, sau, cum se obişnuieşte cel mai adesea, pentru α se iau valorile 0 sau 1.

Metoda benzilor poate fi studiată în *teoria simplă* şi *teoria revăzută*.

Teoria simplă este aplicabilă plăcilor de orice formă, încărcate uniform şi rezemate continuu. Teoria revăzută este aplicabilă plăcilor rezemate pe stîlpi.

În cele ce urmează ne limităm la examinarea unei plăci dreptunghiulare încărcate uniform (fig. VI.60, *a*).

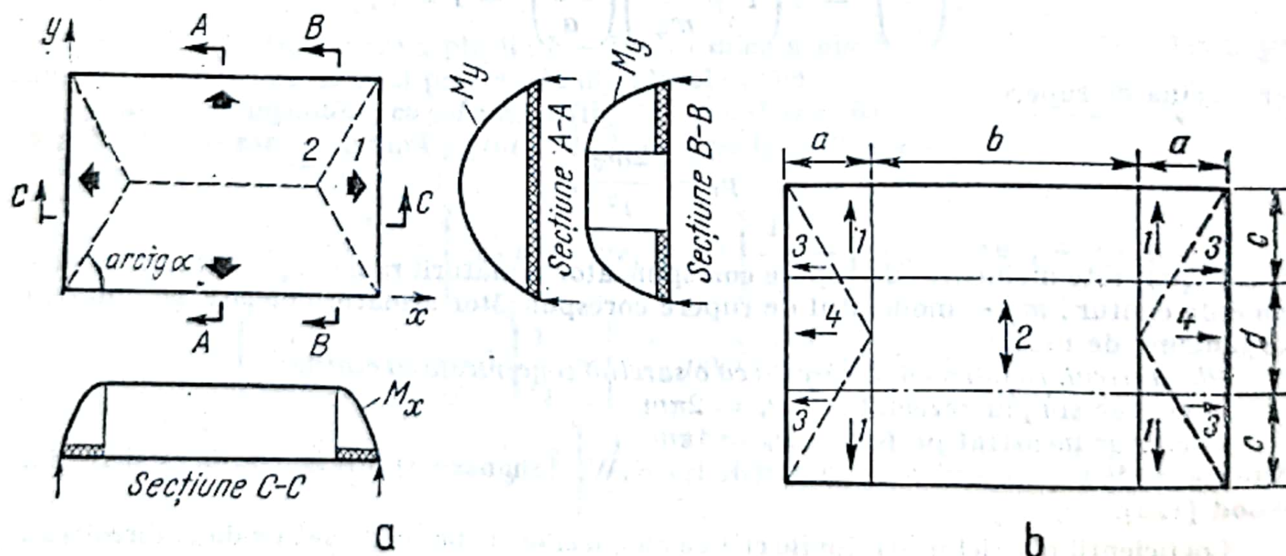


Fig. VI.60

Placa este împărțită în benzi, săgețile indicînd direcția pe care lucrează fiecare bandă. Din fig. VI.60, *b* rezultă că benzile *1* au o lățime *a*, deschiderea $(d + 2c)$ și sînt încărcate în zonele triunghiulare conținînd săgețile. Momentul încovoietor maxim M_y variază de la zero (la marginea exterioară) la $\frac{1}{8}p(d + 2c)^2$ (la marginea interioară). Valoarea medie a lui $M_{y(max)}$ poate fi obținută fie prin integrare pe bandă sau, mai simplu, luînd lungimea medie încărcată și utilizînd un factor de corecție K dat de Hillerborg (fig. VI. 61).

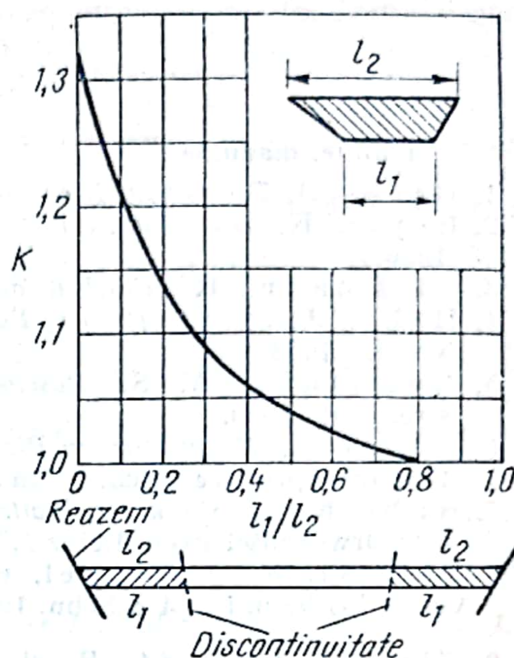


Fig. VI.61

Pe această ultimă cale rezultă momentul de proiectare a benzii *1*

$$M_1 = \frac{1}{2}pK\left(\frac{l_2 + l_1}{2}\right)^2,$$

Prin particularizare pentru benzile *1 — 4* rezultă valorile înscrise în tabelul VI.54.

Tabelul VI.54

Momentele pe benzi pentru o placă dreptunghiulară (vezi fig. VI.60,*b*)

Banda	$l_1 =$	$l_2 =$	Momentul pe bandă
1	0	$c + d/2$	$M_1 = \frac{1}{32}pK(2c + d)^2$
2	$2c + d$	$2c + d$	$M_2 = \frac{1}{8}p(2c + d)^2$
3	0	$\frac{ac}{c + d/2}$	$M_3 = \frac{1}{2}pK\left(\frac{ac}{2c + d}\right)^2$
4	$\frac{ac}{c + d/2}$	a	$M_4 = \frac{1}{8}pK\left(\frac{4ac + ad}{2c + d}\right)^2$

Armarea benzilor se va face pe toată lungimea lor pentru momentele maxime calculate.

Detalii asupra metodei benzilor vor putea fi găsite în lucrările [143, 144, 145, 146, 147].

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

Tratate, manuale

1. Bares, R. *Tables pour le calcul des dalles et des parois.* Paris, Dunod, 1969.
2. Beyer, K. *Die Statik im Stahlbetonbau.* Ed. a 2-a, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1956.
3. Girkmann, K. *Flächentragwerke.* Ed. a 6-a. Viena, Springer-Verlag, 1963.
4. Hahn, J. *Durchlaufträger, Rahmen und Platten.* Ed. a 9-a. Düsseldorf, Werner-Verlag, 1968.
5. Kalmanok, A. S. *Rasciot plastinok. Spravocinoe posobie.* Moscova, Gosstroiizdat, 1959.
6. Nádai, A. *Die elastischen Platten.* Berlin/Heidelberg/New York, Springer Verlag, 1968 (reimprimare neschimbată a ediţiei din 1925).
7. Rabich, R. *Statik der Platten, Scheiben, Schalen.* În: Taschenbuch der Bauingenieurwissenschaften, Leipzig, Teubner, 1962, p. 861—1120.
8. Stiglat, K. şi Wippel, H. *Platten.* Ed. a 2-a, Berlin/München/Düsseldorf, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1973.
9. Timoshenko, St. P. şi Woinowsky-Krieger, S. *Teoria plăcilor plane şi curbe.* Ed. a 2-a (trad. din l. engleză). Bucureşti, Editura tehnică, 1968.
10. Vainberg, D. V. şi Vainberg, E. D. *Plastini, diski, balki-stenki (procinosti, ustoicivosti i kolebaniia).* Kiev, Gosudarstvennoe izdatelistvo literaturi po stroitelistvu i arhitekture U.R.S.S., 1959.
11. Buck, K. E. ş. a. (Editat de ~). *Finite Elemente in der Statik. Einführung in die Methode.* Berlin/München/Düsseldorf, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1973.
12. Holand, I., Bell, K. (Editat de ~), *Finite Element Methods in Stress Analysis.* The Technical University of Norway, Trondheim, 1970.
13. Salvadori, M. G., Baron, M. L. *Metode numerice în tehnică* (trad. din l. engleză). Bucureşti, Editura tehnică, 1972.
14. Soare, M. V. *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri.* Ed. a 2-a Bucureşti, Editura Academiei, R. S. R., 1968.
15. Tottenham, H., Brebbia, C. (Editat de ~). *Finite Element Techniques in Structural Mechanics.* Southampton, Stress Analysis Publishers, 1970.
16. Zienkiewicz, O. C. şi Cheung, Y. K. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.* London/New York/Toronto/Sydney, McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1967.

Plăci dreptunghiulare

17. Czerny, Fr. *Tafeln für gleichmässig vollbelastete Rechteckplatten.* Bautechnik-Archiv, Heft 11, Berlin, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1955.
18. Czerny, Fr. *Tafeln für hydrostatisch belastete Rechteckplatten.* Bautechnik — Archiv, Heft 14, Berlin, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1959.
19. Czerny, Fr. *Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten.* În: Beton-Kalender, Vol. I, Berlin/München-Düsseldorf, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1972, p. 193 — 260.
20. Eibl. J. şi Ivanyi, G. *Momententafeln für dreiseitig gelagerte Platten bei angreifenden Randmomenten.* În: Beton-und Stahlbetonbau, 64, 11, 1969, p. 264 — 265.

21. Eisenbiegler, Günter. *Rechteckplatten mit randparallelen Liniengelenken.* În: Die Bautechnik, 51, 4 (1974), p. 133 — 141.
22. Franz, G. *Um eine Ecke laufende Kragplatten.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 63, 3, 1968, p. 64 — 68.
23. Fuchssteiner, W. *Drei- und zweiseitig gelagerte Platte.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 50, 9, 1955. p. 240 — 244.
24. Günther, H. *Rechteckplatten unter teilweiser hydrostatischer und gleichförmiger Last.* În: Die Bautechnik, 38, 4, 1961, p. 128—133.
25. Krishnamoorthy, C. S. și Chettiar, C. G. *Analysis of Balcony Slabs.* În: The Indian Concrete Journal. 42, 9, 1968, p. 347 — 354.
26. Lardy, P. *Sur une méthode nouvelle de résolution du problème des dalles rectangulaires encastrées.* Mémoires, 13e vol., Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zürich, 1953, p. 197 — 220.
27. Mesnager, M. *Calcul élémentaire rigoureux des plaques rectangulaires.* Publications, Premier Volume. Zürich, Association Internationale des Ponts et Charpentes, 1932, p. 329 — 336.
28. Neuwirth, H. *Berücksichtigung teilweiser Randeinspannung bei der Untersuchung von Rechteckplatten mittels Differenzenrechnung.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 53, 11, 1958, p. 283 — 284.
29. Nielsen, N. J. *Bestemmelse af Spaendinger i Plader ved Anvendelse af Differensligninger.* København, 1920.
30. Nyffeler, H. *Biegemomente in Rechteckplatten infolge Streckenlasten.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 63, 8, 1968, p. 186—190.
31. Özden, K. *Berechnung einer an einem Rand und zwei Ecken frei drehbar gestützten Rechteckplatte unter gleichmässig verteilter Belastung.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 63, 2, 1968, p. 40 — 44.
32. Rabich, R. *Randwertdiagramme zur Berechnung von Rechteckplatten mit Teillasten.* În: Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen Cottbus, 5, 3/4, 1962, p. 255 — 277.
33. Richter, B. *Berechnung von Rechteckplatten mit zwei parallelen frei drehbar gelagerten Rändern unter Verwendung von Randwerttabellen.* În: Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen Cottbus, 5, 3/4, 1962, p. 279 — 289.
34. Salvadori, G. M. și Reggini, H. C. *Simply supported corner plate.* În: Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 86, No. ST 11, Nov. 1960, pp. 141—154.
35. Schwarz, H. *Stützmomente kreuzweise durchlaufender Rechteckplatten.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft, 191, Berlin.
36. Stiglat, K. *Vierseiting gelagerte Platten mit Teilrandmoment (Kragplatten).* În: Die Bautechnik, 45, 3, 1968, p. 97 — 102; 45, 4, 1968, p. 127 — 131.
37. Stiglat, K. și Wippel, H. *Massive Platten. Besondere Kapitel der Schnittkraftermittlung und Bemessung.* În: Beton-Kalender 1977. Berlin/München/Düsseldorf, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, p. 311—422.
38. Zanaboni, O. *Soluzione della lastra rettangolare sotto carichi comunque distribuiti lungo linee e superficie.* În: Ricerche d'Ingegneria, IX, 5, 1941.
39. Zanaboni, O. *La lastra rettangolare incastrata (Metodo risolutivo generale).* În: Giornale del Genio Civile, 5, 1964, 291 — 310, 6, 1964, p. 361—376.
40. Zöphel, Jochen. *Die Quadratplatte mit teilweise frei drehbaren und teilweise starr eingespannten Rändern unter Gleichlast.* În: Die Bautechnik, 51, 9 (1974), p. 319 — 321.

Plăci dreptunghiulare cu goluri

41. Beck, H. *Näherungsweise Berechnung von Stahlbetonplatten mit Rechtöffnungen unter Gleichflächenlast.* În: Die Bautechnik, 46, 12, 1969, p. 397—401.
42. Dedič, O. *Spannungszustand einer quadratischen Platte mit kreisrunder Öffnung.* Beiträge zur angewandten Mechanik. Federhofer-Girkmann-Festschrift. Viena, Franz Deutige Verlag, 1950, pp. 143 — 160.
43. Vainberg D. V. şi alţii. *Issledovanie plastin s priamougolinimi otverctiiami.* În: Rezistenţa materialelor şi Teoria structurilor, 11, Kiev, Izdatellstvo Budivelinik, 1970, p. 31—41.

Plăci continue

44. Brunner, W. *Drehwinkel-Ausgleichsverfahren zur Berechnung beliebig belasteter durchlaufender Platten.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 56, 6, 1961, p. 140 — 149.
45. Lang, E. *Die Schnittmomente der durchlaufenden Platte mit gleichen Feldweiten, ermittelt mit Hilfe des Superpositionsgesetzes.* În: Die Bautechnik, 42, 12, 1965, p. 429—431.
46. Matildi, P. *Contributo al calcolo dei silos in cemento armato a celle rettangolari.* În: Giornale del Genio Civile. 3—4, 1958.
47. Pieper, K. şi Martens, P. *Durchlaufende vierseitig gestützte Platten im Hochbau.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 61, 6, 1966, p. 158 — 162.
48. Sollazzo, A. *Sul calcolo delle pereti dei serbatoi per liquidi a base rettangolare.* În: Giornale del Genio Civile, 11, 1961.
49. Woinowsky-Krieger, S. *Beitrag zur Theorie der durchlaufenden Platte.* În: Ingenieur-Archiv, IX, 5, 1938, p. 396—410.

Plăci oblice

50. Başar, Y. şi Yüksel, F. *Zur Berechnung schiefwinkliger orthotroper und isotroper Platten.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 56, 11, 1961, p. 268 — 275 şi 56, 12, 1961, p. 295 — 297.
51. Favre, H. *Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences.* 7e vol. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires, Zürich, 1943/44, p. 91 — 104.
52. Hanuska, A. *Die gleichmässig belastete schiefe Einfeldplatte.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 60, 1, 1965, p. 21—23.
53. Hanuska, Al. şi Balas, J. *Hauptbiegungsmomentenlinien schiefer Platten.* În: Der Bauingenieur, 40, 7, 1965, p. 265 — 267.
54. Ille, V. *Asupra calculului plăcilor plane oblice.* În: Lucrări ştiinţifice, Institutul Politehnic Cluj, 141—156, 1960.
55. Ille, V. şi Mühsam, H. *O metodă de calcul pentru placa oblică cu grinzi marginale.* În: Buletinul ştiinţific al Institutului Politehnic Cluj, 8, 1965, p. 597 — 609.
56. Ille, V. *Contribuţii la studiul plăcilor plane oblice izotrope în domeniul elastic.* Teză de doctorat. Institutul de Construcţii Bucureşti, 1966.
57. Lardy, P. Die strenge Lösung des Problems des schiefen Platte. Schweizerische Bauzeitung, 67, 1949, p. 207.
58. Naruoka, M. *Untersuchung der schiefen Platte mit Benutzung des Rechenautomaten.* În: Der Bauingenieur, 34, 10, 1959, p. 401—406.
59. Schleicher, C., Wegener, B. *Durchlaufende schiefe Platten. Tafeln zur statischen Berechnung.* Berlin, VEB Verlag für Bauwesen, 2. Aufl., 1971.

Plăci circulare şi în formă de sector

60. H a m p e , R. *Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke.* Bd. 1. *Kreis- und Kreisringplatte.* 3. Aufl., Berlin, VEB Verlag für Bauwesen, 1968.
61. H i r s c h f e l d, K. *Baustatik. Theorie und Beispiele.* 3 Aufl., 2 Teil. Berlin, Springer-Verlag, 1969.
62. M á r k u s, G. *Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke.* Budapest, Akadémiai Kiadó, 1967.
63. M á r k u s, G. *Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung.* Budapest, Akademiai Kiadó, 1973.
64. W o i n o w s k y — K r i e g e r, S. *Clamped Semicircular Plate under Uniform Bending Load.* În : Journal of Applied Mechanics, 3, 1955, p. 129.
65. W o r c h, G. *Elastische Platten.* În : Beton- Kalender 1959, p. 209 — 324.

Plăci pe mediu elastic

66. G o r b u n o v — P o s a d o v, I. M. *Tabele pentru calculul plăcilor subţiri pe mediu elastic* (trad. din l. rusă). Bucureşti, Editura tehnică, 1961.
67. L i s o w s k i, A l. *Obliczanie Konstrukcji na ciaglym podlozu sprezystym.* Varşovia, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1974.
68. M e l e, M. *La piastra circolare su suolo elastico.* În : Tecnica Italiana, n. 12, Dicembre 1966. Universitá di Trieste, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Pubblicazione N. 60.
69. S o l l a z z o, A. *Sul calcolo delle piastre di fondazione.* În Ingegneria Civile, 15, 1965.
70. W o i n o w s k y - K r i e g e r, S. *Berechnung einer auf elastischem Halbraum aufliegenden, unendlich erstreckten Platte.* În : Ingenieur-Archiv, 17, 1—2, 1949, p. 142 — 148.

Plăci de grosime variabilă

71. B e r g f e l d e r, J ü r g e n. *Berechnung von Platten veränderlicher Steifigkeit nach dem Differenzenverfahren.* Konstruktiver Ingenieurbau Berichte, H. 4, Essen, Vulkan-Verlag Dr. W. Classen, 1969.
72. Ç e t m e l i, E. *Beitrag zur Berechnung der Platte mit in einer Richtung exponential veränderlicher Dicke.* În : Die Bautechnik, 39, 12, 1962, p. 415 — 418.
73. E i s e n b i e g l e r, G ü n t e r, M o u h t a s s e b, Z e i d. *Dreiseitig gelagerte isotrope Rechteckplatten mit linear veränderlicher Dicke.* Abhandlungen, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, 34—II, Zürich, 1974, p. 53—72.
74. H a s s, B. *Anwendung des Reduktionsverfahrens auf Platten mit veränderlicher Dicke in mehrstegigen Plattenbalken.* În : Beton- und Stahlbetonbau, 61, 7, 1966, p. 183—187.
75. H o e l a n d, G. *Ein Beitrag zur Berechnung örtlich dickerer Platten.* În : Beton- und Stahlbetonbau, 54, 3, 1959, p. 65—69.
76. K o v a l e n k o, A. D. *Kruglie plastini peremennoi tolşcini.* Moscova, Gosudarstvennoe izdatelistvo fiziko-matematiceskoi literaturî, 1959.

Reţele de grinzi. Plăci ortotrope

77. B e l e ş, I. *Contribuţii la calculul construcţiilor metalice hidrotehnice, cu elementele de rezistenţă din tablă şi grinzi, ţinînd seama de efectul de conlucrare spaţială.* Teză de doctorat, Bucureşti, Institutul de construcţii, feb. 1972.
78. B u c ă, I. Gh. *Calculul elastic al plăcilor ortotrope cu utilizarea metodei diferenţelor finite.* În : Revista Transporturilor, 16, 12, 1969, p. 559—565.

79. B u c ă, I. Gh. *Contribuţii la definirea stării limită de deformaţie a platelajelor ortotrope ale podurilor metalice.* Teză de doctorat, Institutul de Construcţii Bucureşti, oct, 1970.
80. D e h o u s s e, N. M. şi D e s p r e z, J. *Les bordages orthotropes plans. Calcul d'une porte plane d'écluse.* Mémoires C. E. R. E. S.,22, 1967, p. 3–12.
81. D e h o u s s e, N. M. *Les bordages raidis en construction hidraulique.* Association Internationale des Ponts et Charpentes, Vol. 22, Zürich, 1962, p. 37–71.
82. G i e n c k e, E. *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen.* În: Der Stahlbau, 24, 6, 1955, p. 128–129.
83. G i e n c k e, E. *Die Berechnung von durchlaufenden Fahrbahnplatten.* În: Der Stahlbau, 27, 9, 1958, p. 229–237; 27, 11, 1958, p. 291–298; 27, 12, 1958, p. 326–332.
84. K l ö p p e l, K. şi S c h a r d t, R. *Systematische Ableitung der Differentialgleichungen für ebene anisotrope Flächentragwerke.* În: Der Stahlbau, 29, 2, 1960, p. 33–43.
85. M a d e r, F. W. *Berechnung orthotroper Platten unter Flächenlasten, Randmomenten und Randdurchbiegungen.* În: Der Stahlbau, 26, 5, 1957, p. 131–135.
86. N a r u o k a, M. şi O h m u r a, H. *On the Analyses of a Skew Girder Bridge by the Theory of Orthotropic Parallelogram Plates.* International Association for Bridge and Structural Engineering, Publications, vol., 19, Zürich, 1959, p. 231–256.
87. R e n t o n, J. D. *The Related Behaviour of Plane Grids, Space Grids and Plates.* În Space Structures (Edited by R. M. Davies). Oxford and Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, 1967, p. 19–32.
88. S o a r e, M. *Contribuţii la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte.* În: Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată, Tom. 33, 4, 1974, p. 717–732; Tom 34, 1, 1975, p. 31–44.
89. T r e n k s, K. *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten.* În: Der Bauingenieur 29, 10, 1954, p. 372–377.
90. Y o n e z a w a, H. şi M i k a m i, I. *Deflections and Bending Moments of Orthotropic Rectangular Plates of Variable Thickness,* În: Proceedings of the Fourteenth Japan National Congress For Applied Mechanics 1964, Sept. 7–8, Tokio, Japan Central Scientific Publishers, 1965, p. 39–43.

Suprafeţe de influenţă

91. B a l a s, J. şi H a n u s k a, A. *Influence Surfaces of Skew Plates.* Bratislava, Vydavatelstvo Slovenskej Akadémie Vied, 1964.
92. B r e t t h a u e r, G. şi N ö t z o l d, Fr. *Einflussflächen von vierseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatten nach dem Verfahren der Lastspiegelung.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 60, 8, 1965, p. 192–196.
93. H o e l a n d, G. *Stützmomenteneinflussfelder durchlaufender elastischer Platten mit zwei frei drehbar gelagerten Rändern.* În: Ingenieur-Archiv, 24, 2, 1956, p. 124–132.
94. H o e l a n d, G. *Stützmomenteneinflussfelder durchlaufender Platten.* Berlin, Springer-Verlag, 1957.
95. K a w a i, T. şi T h ü r l i m a n n, B. *Influence Surfaces for Moments in Slabs Continuous over Flexible Cross Beams.* În: Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, vol. 17, Zürich, 1957, p. 117–138.
96. K r u g, S. şi S t e i n, P. *Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten.* Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag, 1961.
97. M a a s, O. *Einflussflächen für die am geraden Rand freie Halbkreisplatte.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 57, 1, 1962, p. 19–20.

98. Malkwitz, H. *Die Singularitäten der Einflussflächen für Stützenmomente von Plattenrahmen mit feldweise veränderlichem Trägheitsmoment.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 62, 6, 1967, p. 145—147.
99. Molkenthin, Achim. *Einflussfelder zweifeldriger Platten mit freien Längsrändern (Influence Surfaces of Two-Span Continuous Plates with Free Longitudinal Edges).* Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1971.
100. Müggenburg, H. *Einflussflächen für die am bogenförmigen Rand eingespannte und am geraden Rand freie Halbkreisplatte.* În: Ingenieur-Archiv, 24, 5, 1956, p. 308—316.
101. Nehse, H. *Einflussflächen für die Schnittgrössen durchlaufender Rechteckplatten.* În: Beton- und Stahlbetonbau. 53, 7. 1958, p. 187—189.
102. Pucher, A. *Einflussfelder elastischer Platten.* Ed. a 3-a, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1964.
103. Thürlimann, B. *Influence Surfaces for Support Moments of Continuous Slabs.* Publications, 16th vol., International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, 1956, p. 485—498.

Efectul forțelor tăietoare

104. Reissner, E. *Finite Twisting and Bending of Thin Rectangular Elastic Plates* În: Journal of Applied Mechanics, Paper No. 57.
105. Reissner, E. *On the Theory of Bending of Elastic Plates.* În: Journal of Mathematics and Physics, 23, 4, 1944, p. 184—191.

Deformațiile mari ale plăcilor

106. Alzheimer, W. E. și Davis, R. T. *Nonlinear Unsymmetrical Bending of an Annular Plate.* În: Transactions of the ASME, 3, 1968, p. 190—192.
107. Vogel, U. *Herleitung der Differentialgleichungen der orthogonal-anisotropen Platte mit grosser Durchbiegung (nach der Theorie II. Ordnung) durch Anwendung der Variationsrechnung.* În: Der Stahlbau, 31, 4, 1962, p. 119—122.
108. Wilby, C. B. și Naqvi, M. M. *Deflexions of Rectangular Plates Supported Elastically.* În: Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Paper 7411, p. 431—439.
109. Wolmir, A. S. *Biegsame Platten und Schalen.* Berlin, VEB Verlag für Bauwesen 1962.
110. Zimmer, K. *Ein Beitrag zur nichtlinearen Plattentheorie.* În: Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden. 15, 5, 1966, p. 1017—1022.

Plăci groase

111. Csonka, P. *Beitrag zur Theorie der rotationssymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte.* În: Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 16, 1, 1967, p. 45—50.
112. Lardner, T. J. *Stresses in a Thick Plate with Axially Symmetric Loading.* În: Transactions of the ASME, 6, 1965, p. 458—459.
113. Sollazzo, A. *Sul calcolo delle piastra circolare di grosso spessore.* În: Tecnica Italiana, 26, 9, 1961.

Planșee-dală

114. Bretthauer, G. și Nötzold, Fr. *Zur Berechnung von Pilzdecken.* În: Beton- und Stahlbetonbau, 63, 10, 1968, p. 221—227; 63, 11, 1968, p. 251—261; 63, 12, 1968, p. 277—281.

115. Brotchie, J. F. și Russell, J. J. *Flat Plate Structures.* În : Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, vol. 61, 8, 1964, p. 959—996.
116. Duddeck, H. *Praktische Berechnung der Pilzdecke ohne Stützenkopfverstärkung (Flachdecke).* În : Beton- und Stahlbetonbau, 58, 3, 1963, p. 56—63.
117. Nain, P. V. *Moments in a Clamped Circular Slab Supported by a Number of Columns.* În : The Indian Concrete Journal, 40, 9, 1966, p. 364—371.
118. Negruțiu, R. *Plaques planes actionnées par des couples de surface. Étude des déplacements élastiques.* În : Buletinul științific al Institutului de Construcții București, XIII, 3, 1970, p. 115—144.
119. Negruțiu R. *Distribution des efforts sectionnels dans les plaques planes actionnées par des couples de surface.* În : Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., 16, 6, 1971, p. 1307—1335.
120. Negruțiu, R. *L'effet des groupements de couples de surface sur les plaques planes.* În : Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., 18, 1, 1973.
121. Negruțiu, R. *Analiza elastică a structurilor cu dale.* București, Editura Academiei RSR, 1976.
122. Pfaffinger, D. și Thürlimann, B. *Berechnungstabellen für unterzuglose Decken (Pilzdecken, Flachdecken),* Zürich, Verlags-AG des akademischen technischen Vereins, 1968.
123. Pfaffinger, Dieter D. *Column-Plate Interaction in Flat Slab Structures.* În : Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. ST 1, Jan. 1972, p. 307—326.

Calculul în domeniul plastic

124. Albigès, M. și Frederiksen M. *Calcul à la rupture des dalles par la théorie de Johansen.* În : Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 13, No. 145, 1960, p. 133—147.
125. Johansen, K. W. *Bruchmomente der kreuzweise bewehrten Platten.* Abhandlungen, Erster Band, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 1932, p. 277—296.
126. Jones, L. L. și Wood, R. H. *Yield-Line Analysis of Slabs.* London, Thames & Hudson Chatto & Windus, 1967.
127. Massonnet, Ch. și Save, M. *Calcul plastique des constructions.* I—II. Bruxelles, Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier, 1961, 1963.
128. Massonnet, Ch. *General Theory of Elasto-Plastic Membrane Plates.* În : Engineering Plasticity, Cambridge University Press, 1968, p. 443—471.
129. Nielsen, M. P. *On the Calculation of Yield Line Patterns with Curved Yield Lines.* Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering. Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Paper No. 22, Lisabona, 1962.
130. Petcu, V. *Calculul plastic al plăcilor armate cruciș.* În : Standardizarea, 14, 4, 1962, p. 174—182.
131. Petcu, V. *Calculul plastic al plăcilor continue armate cruciș.* În : Standardizarea, 14, 5, 1962, p. 238—241.
132. Petcu, V. *Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări uniform distribuite.* În : Studii și cercetări de mecanică aplicată, 18, 1, 1965, p. 91—116.
133. Petcu, V. *Criterii de soluționare a ecuației de echilibru plastic a plăcilor dreptunghiulare de beton armat.* În : Studii și cercetări de mecanică aplicată, 18, 2, 1965, p. 429—454.

134. P e t c u, V. *Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări de tip hidrostatic.* În : Studii şi cercetări de mecanică aplicată, 20, 5, 1965, p. 1099—1116.
135. P e t c u, V. *Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări de tip hidrostatic.* În : Studii şi cercetări de mecanică aplicată, 20. 6, 1965, p. 1475—1498.
136. P e t c u, V. şi S t ă n c u l e s c u, G. *Comportarea în domeniul plastic al plăcilor pătrate de beton armat.* În : Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, 21, 7, 1967, p. 374—381.
137. P e t c u, V. *Calculul plastic al planşeelor casetate de beton armat.* În : Studii şi cercetări de mecanică aplicată, 27, 5, 1968, p. 993—1014.
138. P e t c u, V. *Calculul structurilor în domeniul plastic.* Bucureşti, Editura tehnică, 1972.
139. S o a r e, V. M. şi P e t c u, V. *Studiul teoretic şi experimental al unor plăci dreptunghiulare de beton, armate cu oţel de rezistenţă superioară.* În : Revista Construcţiilor, 18, 11, 1966, p. 608—617.
140. S o a r e, V. M. şi P e t c u, V. *Studiul teoretic şi experimental al planşeelor prefabricate de beton armat de mari dimensiuni, îmbinate în cîmp.* În : Revista Construcţiilor, 21, 8, 1967, p. 415—427.
141. S o a r e, V. M., P e t c u, V., P a n c a l d i, U. şi D i n c u l e s c u - C r a i n i c e s c u, M. *Studiul teoretic şi experimental al planşeelor prefabricate din două panouri încărcate nesimetric.* În : Construcţii, 24, 6, 1972, p. 22—42.
142. W o o d, R. H. *Plastic Design of Slabs and Plates with Particular Reference to Reinforced Concrete Floor Slabs.* Londra, Thames and Hudson, 1961.

Metoda benzilor

143. A r m e r, G. S. T. *The Strip Method : A New Approach to the Design of Slabs.* În : Concrete, 2, 9, 1968, p. 358—363.
144. A r m e r, G. S. T. *Ultimate Load Tests of Slabs Designed by the Strip Method.* : În Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 41, 10, 1968, p. 313—331.
145. R a j u, N. K. *Optimised Strip Method for the Design of Freely Supported Slabs.* În : The Indian Concrete Journal, 45, 9, 1971, p. 390—393.
146. T h a k k a r, M. C. şi S r i d h a r, Rao, J. K. *Design of Two-Way Reinforced Concrete Rectangular Slabs by Modified Hillerborg's Strip Method.* În: Indian Concrete Journal, 44, 4, 1970, p. 158—166.
147. W o o d, R. H. şi A r m e r, G. S. T. *The Theory of the Strip Method for Design of Slabs.* În : Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 41, 10, 1968, p. 285—311.

SECȚIUNEA VII

ÎNVELITORI SUBȚIRI

Prof. ing. MIRCEA MIHAILESCU

VII

CUPRINS

TABELELE SECȚIUNII VII

N O T A Ţ I I

1. Notaţii diferenţiale

∂_i; ∂_{ii}; ∂_{iii}; ∂_{iiii} — derivatele parţiale de ordinele I, II, III şi IV în raport cu variabila x_i

$\Delta(-) = \partial_{ii}(-) + \partial_{jj}(-)$ — operator Laplace

$D = D_{22}\partial_{11}(-) - 2D_{12}\partial_{12}(-) + D_{11}\partial_{22}(-)$ — operator mixt de ordinul II.

2. Mărimi geometrice

$\mathbf{R} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$
$x_1 = x_1;\ x_2 = x_2;\ x_3 = x_3(x_1,\ x_2)$ — ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe în coordonate carteziene (fig. VII.1)

$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2)$; $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2)$
$x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2)$ — ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe în coordonate curbilinii.

$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — versorii axelor de coordonate carteziene

$\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2$ — versorii auxiliari în planul de referinţă în cazul axelor carteziene oblice (fig. VII.2)

$\mathbf{R}_1 = \partial_1\mathbf{R},\ \mathbf{R}_2 = \partial_2\mathbf{R},\ \mathbf{r}_3 = \dfrac{\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2|}$ — vectori dirijaţi după tangentele la liniile de coordonate ale suprafeţei mediane şi normala la suprafaţă

$\mathbf{R}^1,\ \mathbf{R}^2$ — vectori auxiliari corespunzători lui $\mathbf{R}_1$ şi $\mathbf{R}_2$ definiţi astfel: (fig. VII.3)

$$\mathbf{R}^i\mathbf{R}_j = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j \\ 0 \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

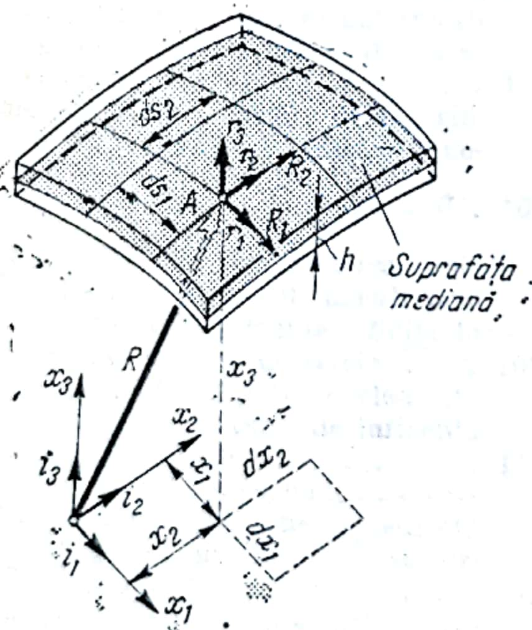


Fig. VII.1

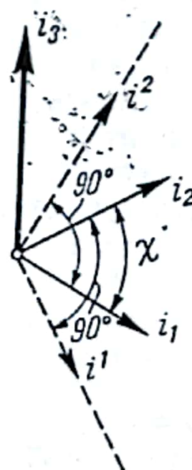


Fig. VII.2

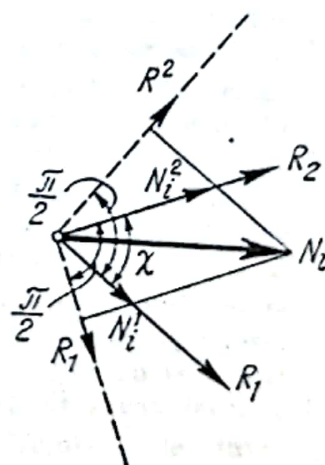


Fig. VII.3

$\mathbf{r}_1 = \dfrac{\mathbf{R}_1}{\alpha_1}$; $\mathbf{r}_2 = \dfrac{\mathbf{R}_2}{\alpha_2}$; $\mathbf{r}_3$ — versorii intrinseci

$\alpha_1 = \sqrt{g_{11}} = \mathscr{E}$, $\alpha_2 = \sqrt{g_{22}} = \mathscr{G}$ — coeficienții primei forme pătratice

$\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — notații Monge

$$\cos \chi = \frac{g_{12}}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \frac{\mathscr{F}}{\alpha_1 \alpha_2}$$

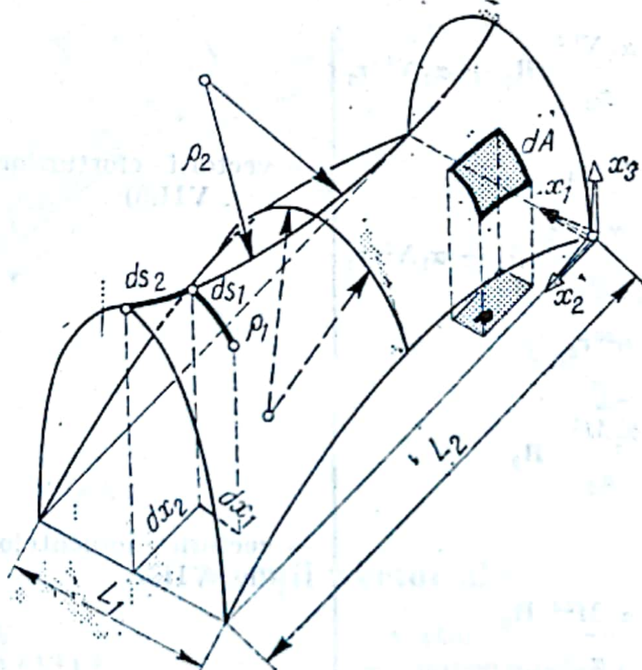


Fig. VII.4

g_{11}, g_{12}, g_{22} — notații tensoriale

α_1, α_2 — lungimile de arc măsurate pe liniile de coordonate
$x_2 = \text{const}$ pentru $dx_1 = 1$
$x_1 = \text{const}$ pentru $dx_2 = 1$

L_1; L_2 — deschiderile învelitorii adică distanțe dintre reazeme

ρ_1; ρ_2 — razele principale de curbură ale suprafeței mediane a învelitorii (fig. VII.4)

h — grosimea plăcii

s — lungimea arcului pe suprafața mediană

ω — unghiul axelor cartesiene oblice

χ — unghiul axelor oblice intrinseci între tangentele la liniile de coordonate

$dA = ds_1 ds_2 \sin \chi$ — elementul de arie al suprafeței

$I = \dfrac{h^3}{12}$ — momentul de inerție al învelitorii raportat la o lățime unitară.

3. Mărimi mecanice

$g(\mathrm{N/m^2})$ — greutate proprie uniform distribuită

$p = p^1\mathbf{R}_1 + p^2\mathbf{R}_2 + p^3\mathbf{r}_3(\mathrm{N/m^2})$ — încărcare exterioară distribuită

$\mathbf{P} = \mathbf{p}dA$ — încărcare exterioară rezultantă pe elementul de suprafață

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1\mathbf{R}_1 + \mathfrak{M}^2\mathbf{R}_2 + \mathfrak{M}^3\mathbf{r}_3$ — momentul exterior rezultant pe elementul de învelitoare

$$\alpha_2\mathbf{N}^1 = \frac{\alpha_2 N^{11}}{\alpha_1}\mathbf{R}_1 + \frac{\alpha_2 N^{12}}{\alpha_2}\mathbf{R}_2 + \alpha_2 N^{13}\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{n}^1 = n^{11}\mathbf{R}_1 + n^{12}\mathbf{R}_2 + n^{13}\mathbf{r}_3$$

$$\alpha_1\mathbf{N}^2 = \frac{\alpha_1 N^{21}}{\alpha_1}\mathbf{R}_1 + \frac{\alpha_1 N^{22}}{\alpha_2}\mathbf{R}_2 + \alpha_1 N^{23}\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{n}^2 = n^{21}\mathbf{R}_1 + n^{22}\mathbf{R}_2 + n^{23}\mathbf{r}_3$$

— vectorii eforturilor secționale (fig. VII.5)

$$\alpha_2\mathbf{M}^1 = \frac{\alpha_2 M^{11}}{\alpha_1}\mathbf{R}_1 - \frac{\alpha_2 M^{12}}{\alpha_2}\mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{m}^1 = m^{11}\mathbf{R}_1 - m^{12}\mathbf{R}_2$$

$$\alpha_1\mathbf{M}^2 = \frac{\alpha_1 M^{21}}{\alpha_1}\mathbf{R}_1 - \frac{\alpha_1 M^{22}}{\alpha_2}\mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{m}^2 = m^{21}\mathbf{R}_1 - m^{22}\mathbf{R}_2$$

— vectorii momentelor secționale (fig. VII.6)

$\mathbf{u} = u^1\mathbf{R}_1 + u^2\mathbf{R}_2 + u^3\mathbf{r}_3$ — vectorul deplasare avînd componentele pe direcțiile versorilor intrinseci

$\mathbf{\Phi} = \Phi^1\mathbf{R}_1 + \Phi^2\mathbf{R}_2 + \Phi^3\mathbf{r}_3$ — vectorul rotire în sensul axelor intrinseci

$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \varepsilon^{11}\mathbf{R}_1 + \varepsilon^{12}\mathbf{R}_2 + \varepsilon^{13}\mathbf{r}_3$ — vectorul deformațiilor specifice de alungire în direcția 1

$\boldsymbol{\varkappa}^1 = \varkappa^{11}\mathbf{R}_1 + \varkappa^{12}\mathbf{R}_2 + \varkappa^{13}\mathbf{r}_3$ — vectorul deformațiilor specifice de rotire în direcția 1

F — funcția de eforturi (AIRY)

E — modulul de elasticitate longitudinal

$G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — modulul de elasticitate transversal

μ — coeficient de contracție transversală (Poisson)

$d = \dfrac{Eh}{(1-\mu^2)}$; $k = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea axială și la încovoiere a unei porțiuni unitare de învelitoare.

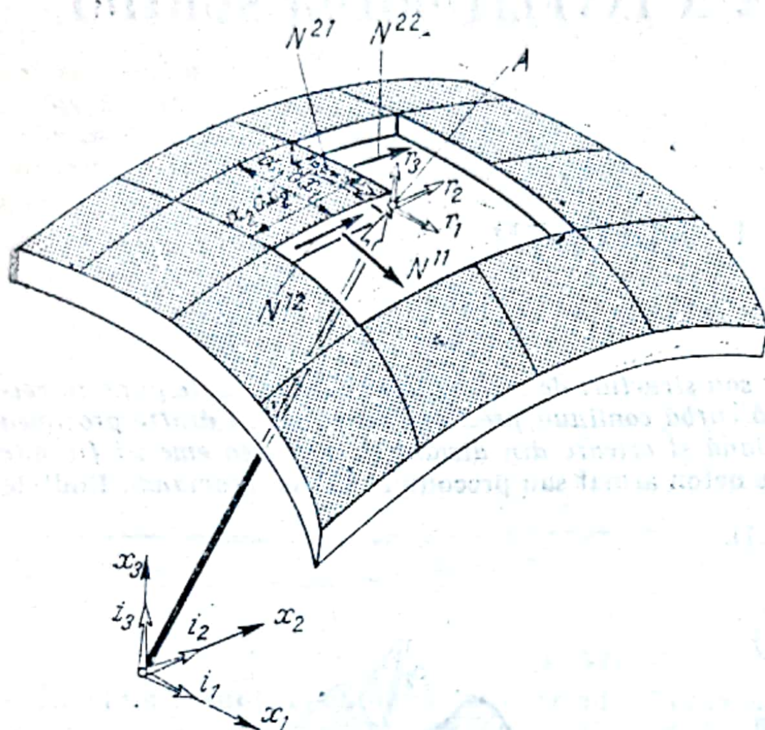


Fig. VII.5

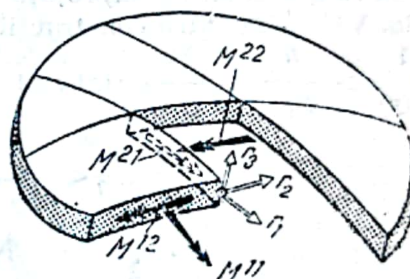


Fig. VII.6

4. Notații vectoriale

V	— vector
$V^1 V^2 V^3$	— componentele contravariante și
$V_1 V_2 V_3$	covariante ale unui vector
$\wedge$	— produs vectorial.

PARTEA ÎNTÎI

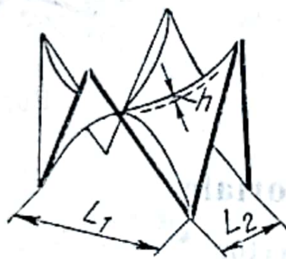
TEORIA GENERALĂ A ÎNVELITORILOR SUBȚIRI

1. DEFINIȚII

1.1. Definirea formei

Învelitorile subțiri sînt elemente sau structuri de rezistență la care se poate pune în evidență o suprafață mediană de formă curbă continuă precizînd că raportul dintre grosimea măsurată normal pe suprafața mediană și oricare din distanțele între reazeme să fie mic (fig. VII. 7); pentru construcțiile de beton armat sau precomprimat *se recomandă* limitele $\frac{1}{100} > \frac{h}{L_{1,2}} > \frac{1}{800}$ (tabelul VII.1).

Fig. VII.7



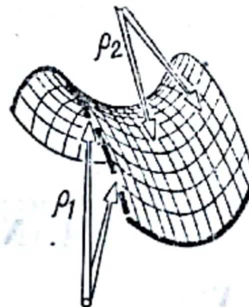
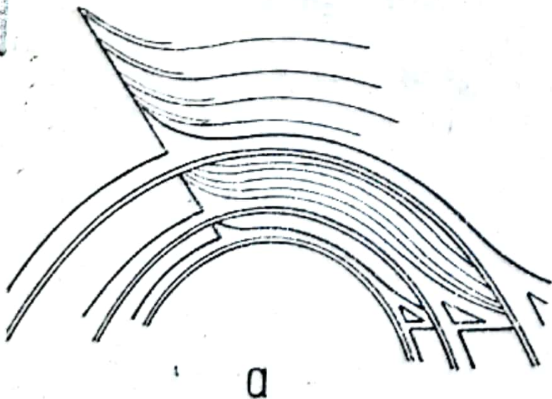


Fig. VII.8

Suprafața mediană definește *locul punctelor* situate *la jumătatea distanțelor celor mai scurte* dintre fețele exterioară și interioară ale învelitorii.

De asemenea, sînt reduse valorile raporturilor dintre grosimea învelitorii și oricare dintre razele sale principale de curbură (fig. VII.8), limitele fiind în acest caz mai îndepărtate; pentru construcții de beton armat: $\frac{1}{20} > \frac{h}{\rho_{1\cdot2}} > \frac{1}{600}$.



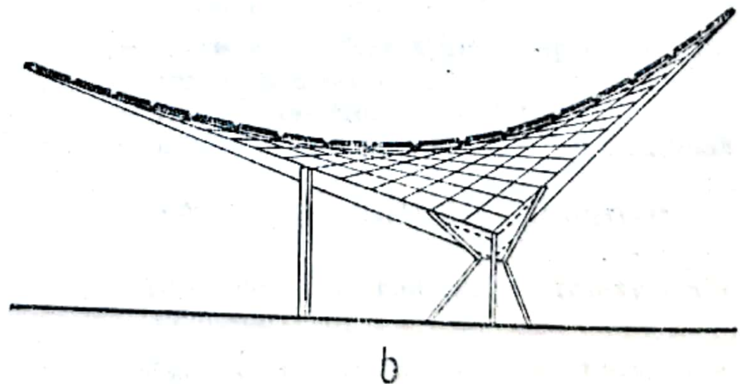


Fig. VII.9

În tabelul VII.1 sînt daţi parametri $\frac{h}{L_{1,2}}$ şi $\frac{h}{\rho_{1,2}}$ pentru cîteva construcţii caracteristice realizate din beton armat.

Învelitorile subţiri pot avea *placa de grosime constantă sau cu o variaţie monotonă.*

În cazul deschiderilor mai mari plăcile pot fi nervurate pe o direcţie, cînd învelitorile se denumesc ortotrope, sau nervurate pe mai multe direcţii, cînd se denumesc politrope (fig.VII.9,*a*, şi *b*).

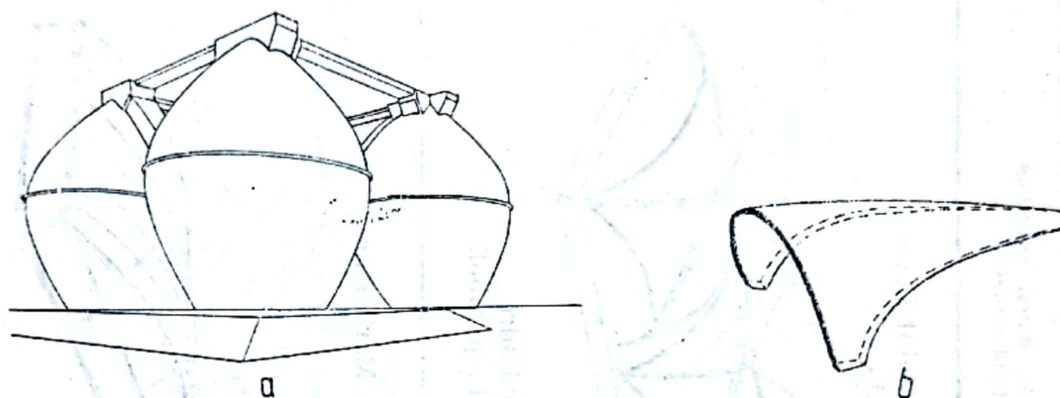


Fig. VII.10

Învelitorile subţiri se numesc *închise* cînd delimitarea lor se face prin cele două suprafeţe care definesc grosimea elementului ; secţionîndu-le cu o dreaptă variabilă care se deplasează normal la suprafaţa mediană, se obţin *învelitorile deschise* (fig. VII.10,*a* şi *b*).

În natură, coaja de ou este o învelitoare subţire continuă închisă, coaja de nucă o învelitoare ortotropă închisă, coaja de scoică ţine de învelitorile ortotrope deschise.

Fig. VII.11

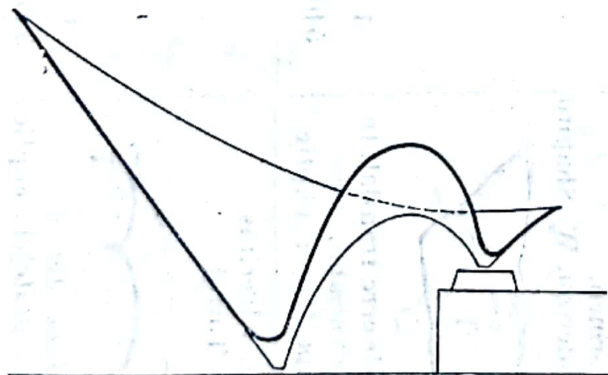


Fig. VII.12

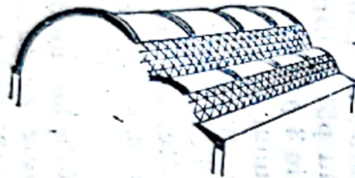
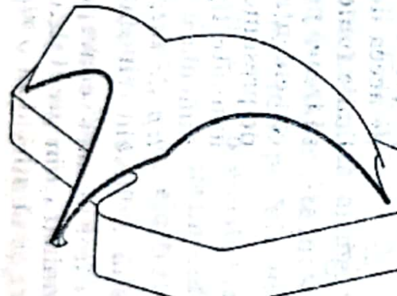
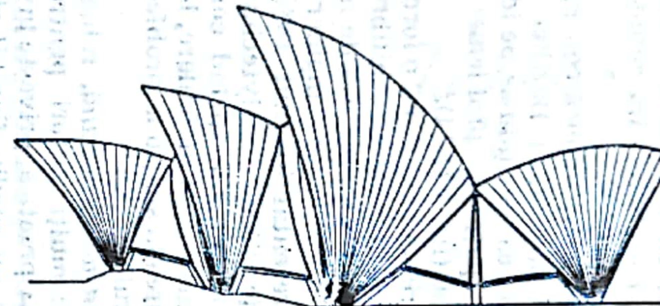
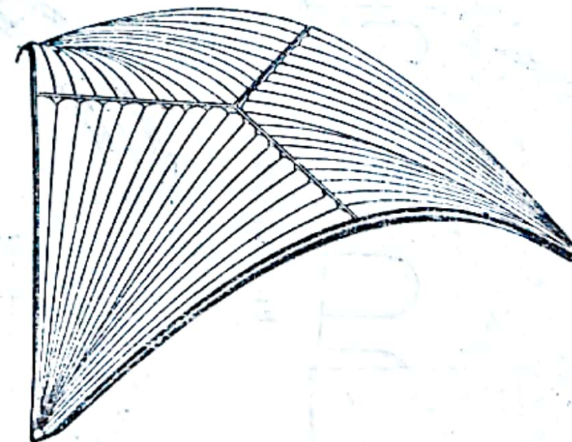
Învelitorile subţiri sînt considerate *elemente de construcţii*, cînd pentru a transmite acţiunea sarcinilor la reazeme sînt necesare grinzi sau arce de margini şi pot fi considerate structuri *complete* (*învelitori integral autoportante*), cînd rigiditatea lor este suficient de mare pentru a conduce singure eforturile la reazeme (fig. VII.11 şi VIII.12).

Tabelul VII.1

Tipuri de invelitori subțiri din beton armat

Construcția, autori, suprafața și tipul suprafeței	$\frac{h}{L}$	$\frac{h}{\rho}$
1. Restaurant la Xochimilco (Mexic) Felix Candela — Intersecție de paraboloizi hiperbolici — Tipul suprafeței: hiperbolic	$\frac{1}{333}$	
2. Aeroportul internațional „Kennedy" New-York Eero Saarinen, Boyd Anderson, W. Shapiro — Arce de cerc translatate pe arc variabil. Tipul suprafeței: eliptic	$\frac{1}{540}$	$\frac{1}{204}$
3. Piața din Algeciras Eduardo Torroja — Suprafața sferică — Tipul suprafeței: eliptic	$\frac{1}{535}$	$\frac{1}{500}$

Construcția, autori, suprafața și tipul suprafeței	$\frac{h}{L}$	$\frac{h}{\rho}$
7. Aerogara din Saint-Louis Minoru Yamasaki — Intersecție de cilindri — Tipul suprafeței: parabolic	$\frac{1}{330}$	$\frac{1}{245}$
8. Hangarul de la Marignane N. Esquillan — Unde de tip eliptic Cu dublă curbură pozitivă	$\frac{1}{220}$	$\frac{1}{80}$

4. Fronton Recoledos Eduardo Torroja  — Suprafaţa cilindrică. — Tipul suprafeţei : parabolic.	$\frac{h}{L_1}=\frac{1}{350}$ $\frac{h}{L_2}=\frac{1}{550}$	$\frac{1}{222}$
5. Clubul Tachira Caracas (Venezuela) Eduardo Torroja  — Paraboloid pe contur oarecare. — Tipul suprafeţei : eliptic.	$\frac{1}{130}$	
6. Auditoriul Colegiului din Culver-City Flewelling, Moody — Învelitoare cutată. — Tipul suprafeţei : eliptic.	$\frac{1}{760}$	$\frac{1}{480}$
9. Opera din Sidney Utzon Ove Arup R. Jenkins  — Unde de tip sferic	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{70}$
10. Palatul CNIT-Paris N. Esquillan  — Intersecţie de cilindri. — Tipul suprafeţei : parabolic.	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{52}$

1.2. Definirea constructivă a conceptului

Din punct de vedere constructiv, ideea învelitorilor subțiri a apărut ca multe din ideile tehnice concomitent pe cele două căi care au bordat mai mult sau mai puțin paralel dezvoltarea tehnicii: procedeele empirice, experimentale și studiile teoretice.

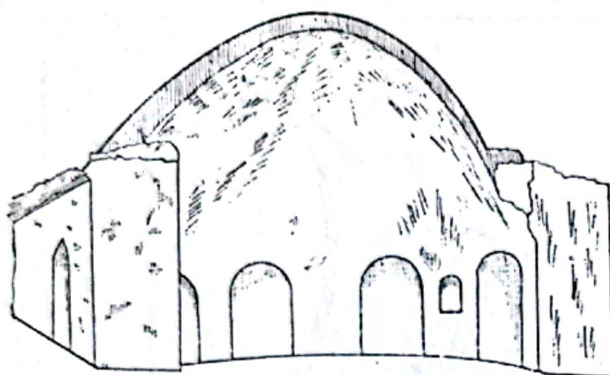


Fig. VII.13

Astfel, lîngă *Roma la Baje* se constată prezența unei cupole din beton datînd din anul 220 al erei noastre, care s-a realizat probabil fără cunoștințe teoretice (fig. VII.13).

Poleni [36] explică concepția avută cu ocazia proiectării Bazilicii Sf. Petru din Roma, ca bazîndu-se pe ideea extinderii în spațiu a problemei plane a lănțișorului (fig. VII.14).

1) Primul care a dat o formulare amplă, definind problema echilibrului învelitorilor subțiri în ipoteza de membrană, pare a fi M. L. Lecornu, inginer de mine, care a prezentat în anul 1880 [22] în Journal de l'école Polytechnique, un memoriu în care, analizînd condițiile de echilibru ale curbei funiculare, își propune generalizarea în spațiu a problemei plane a lănțișorului.

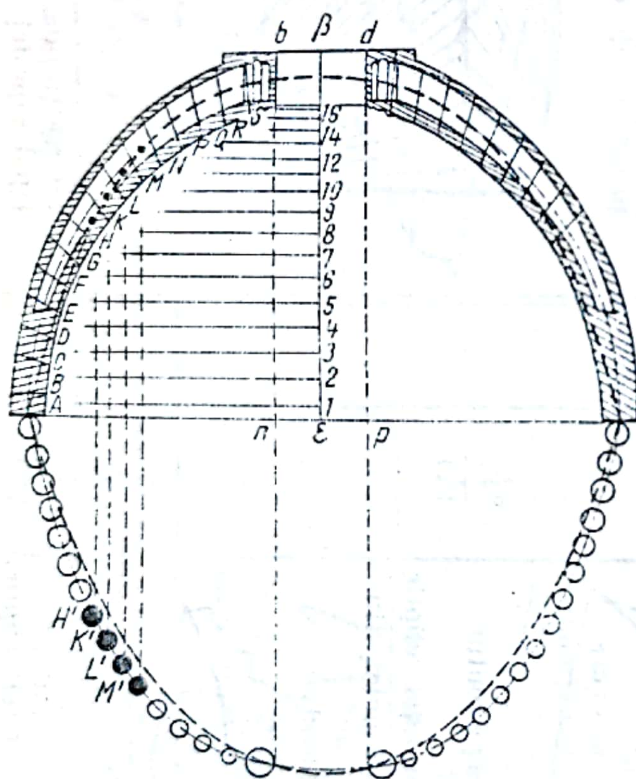


Fig. VII.14

Teoria de membrană, reluată în continuare de mulți autori pentru aplicabilitatea sa practică, privește învelitoarea subțire ca un mediu flexibil și inextensibil, alcătuit din elemente mici, avînd două laturi de mărime diferențială ds_1 și ds_2 înscrise pe suprafața mediană, și a treia de valoare finită egală cu grosimea învelitorii h, elementele presupunîndu-se legate între ele prin articulații sferice (fig. VII.15).

Este de precizat că *noțiunea de suprafață funiculară* se deosebește calitativ de aceea de linie funiculară; în timp ce liniile funiculare plane nu pot fi obligate să treacă prin mai mult de 3 puncte date, coincidența între forma unui arc și linia de presiune stabilindu-se numai pentru anumite tipuri de sarcini, suprafețele funiculare pot fi construite, *pentru orice tip de sarcini distribuite*, să se suprapună în toate punctele pe suprafața mediană a învelitorii date.

În consecință: *arcele sau bolțile*, a căror formă se concepe astfel încît linia lor mediană să coincidă cu linia de presiune, determinată din greutatea proprie, trebuie pentru alte tipuri de sarcini să *lucreze la încovoiere* și să aibă deci o *rigiditate corespunzătoare*; spre

1.2. Definirea constructivă a conceptului

Din punct de vedere constructiv, ideea învelitorilor subțiri a apărut ca multe din ideile tehnice concomitent pe cele două căi care au bordat mai mult sau mai puțin paralel dezvoltarea tehnicii: procedeele empirice, experimentale și studiile teoretice.

Astfel, lîngă *Roma la Baje* se constată prezența unei cupole din beton datînd din anul 220 al erei noastre, care s-a realizat probabil fără cunoștințe teoretice (fig. VII.13).

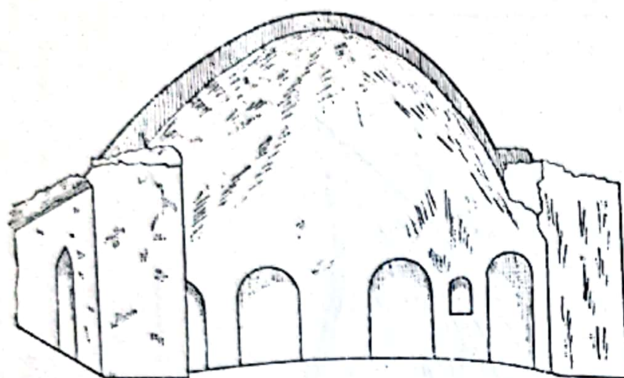


Fig. VII.13

Poleni [36] explică concepția avută cu ocazia proiectării Bazilicii Sf. Petru din Roma, ca bazîndu-se pe ideea extinderii în spațiu a problemei plane a lănțișorului (fig. VII.14).

1) Primul care a dat o formulare amplă, definind problema echilibrului învelitorilor subțiri în ipoteza de membrană, pare a fi M. L. Lecornu, inginer de mine, care a prezentat în anul 1880 [22] în Journal de l'école Polytechnique, un memoriu în care, analizînd condițiile de echilibru ale curbei funiculare, își propune generalizarea în spațiu a problemei plane a lănțișorului.

Teoria de membrană, reluată în continuare de mulți autori pentru aplicabilitatea sa practică, privește învelitoarea subțire ca un mediu flexibil și inextensibil, alcătuit din elemente mici, avînd două laturi de mărime diferențială ds_1 și ds_2 înscrise pe suprafața mediană, și a treia de valoare finită egală cu grosimea învelitorii h, elementele presupunîndu-se legate între ele prin articulații sferice (fig. VII.15).

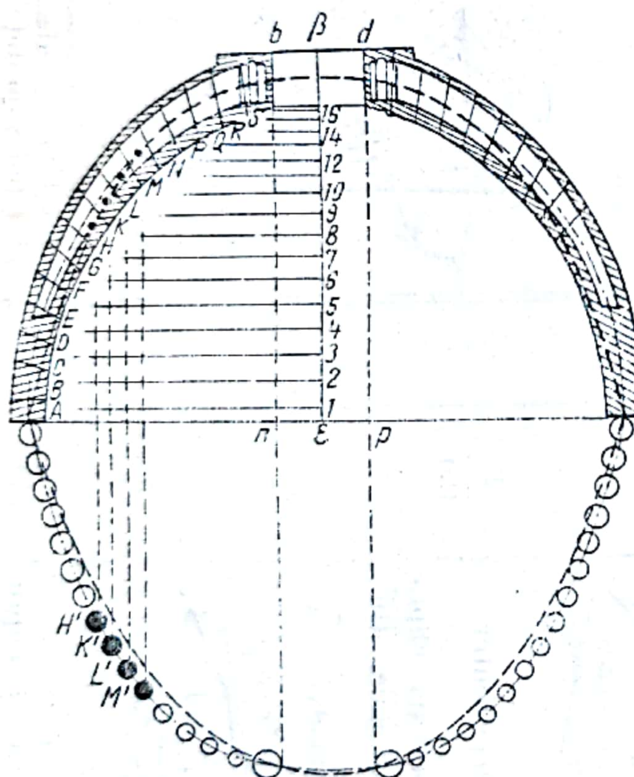


Fig. VII.14

Este de precizat că *noțiunea de suprafață funiculară* se deosebește calitativ de aceea de linie funiculară; în timp ce liniile funiculare plane nu pot fi obligate să treacă prin mai mult de 3 puncte date, coincidența între forma unui arc și linia de presiune stabilindu-se numai pentru anumite tipuri de sarcini, suprafețele funiculare pot fi construite, *pentru orice tip de sarcini distribuite*, să se suprapună în toate punctele pe suprafața mediană a învelitorii date.

În consecință: *arcele sau bolțile*, a căror formă se concepe astfel încît linia lor mediană să coincidă cu linia de presiune, determinată din greutatea proprie, trebuie pentru alte tipuri de sarcini să *lucreze la încovoiere* și să aibă deci o *rigiditate corespunzătoare*; spre

deosebire, *învelitorile subțiri* pentru orice încărcare pot să lucreze în condițiile unui echilibru stabil numai la *eforturi axiale și este de dorit ca rigiditatea la încovoiere să fie redusă.*

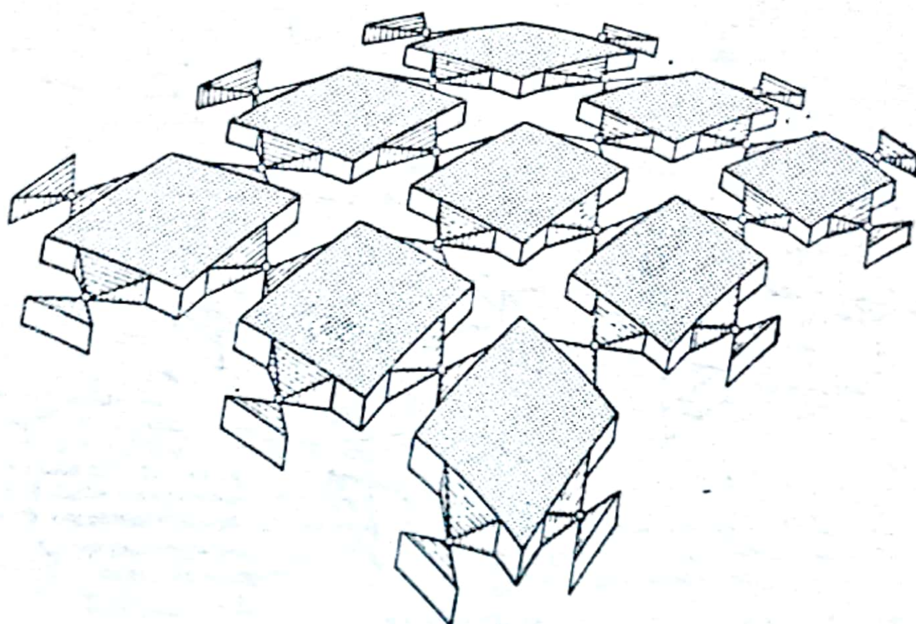


Fig. VII.15

2) Un alt mod de tratare a problemei stării mecanice a învelitorilor subțiri o constituie *teoria de încovoiere* enunțată prima dată de Love în anul 1888 într-un studiu fundamentat pe ipoteza enunțată în 1850 de Kirchhoff pentru plăcile plane.

Teoria de încovoiere reduce problema tridimensională a elasticității, care definește starea de eforturi și deformații funcție de *trei variabile independente*, necesare determinării pozițiilor punctelor materiale din învelitoare, la una *bidimensională* în care *eforturile* și *deformațiile* sînt exprimate funcție numai de *două variabile*, coordonatele punctelor de pe suprafața mediană a învelitorii.

Teoria de încovoiere, în forma scrisă prima dată de Love, presupune *învelitoarea rigidă atît la acțiunea forțelor axiale cît și la momente, avînd axele cuprinse în fiecare punct în planul tangent la suprafața mediană.*

Modelul fizic în această teorie figurează elementele, care compun învelitoarea, tot de grosime egală cu aceea a învelitorii, dar legate între ele prin articulații cilindrice orientate după normalele în fiecare punct la suprafața mediană (fig. VII.16).

O consecință a acestei schematizări o constituie postularea că *rotirea elementelor diferențiale în jurul normalelor la învelitoare este împiedicată numai prin intervenția eforturilor tangențiale la fiecare fațetă transversală*, eforturi cuprinse totodată și în planurile tangente la suprafața mediană (ipoteza atribuită lui Boltzmann).

3) În fine, o considerare mai cuprinzătoare a stării de eforturi la învelitorile subțiri se bazează pe noțiunea de *mediu Cosserat*, reluată recent de Schäffer [43], Günther [14], Green, Naghdi și Wainwright [12] care, infirmînd ipoteza axiomatică a lui Boltzmann,

consideră *rotirea* elementului diferenţial în jurul normalei la învelitoare împiedicată şi de *momente*, avînd *axele paralele cu normalele la suprafaţa mediană* (fig. VII.17).

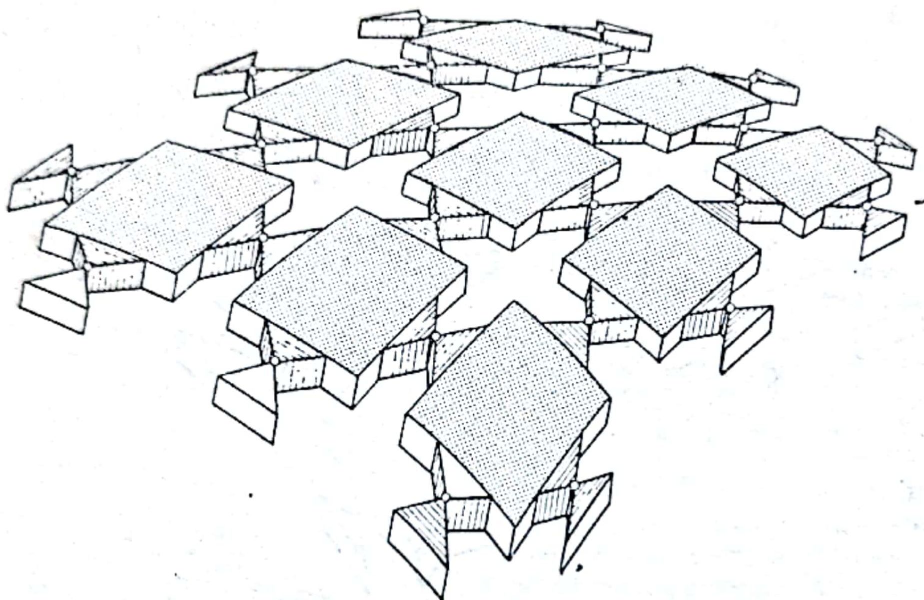


Fig. VII.16

În această situaţie, tensorul de momente raportat la un punct al suprafeţei mediane a învelitorii, la fel ca tensorul eforturilor axiale, are 6 componente, relaţiile de compatibilitate între deformaţii fiind analoage celor de echilibru.

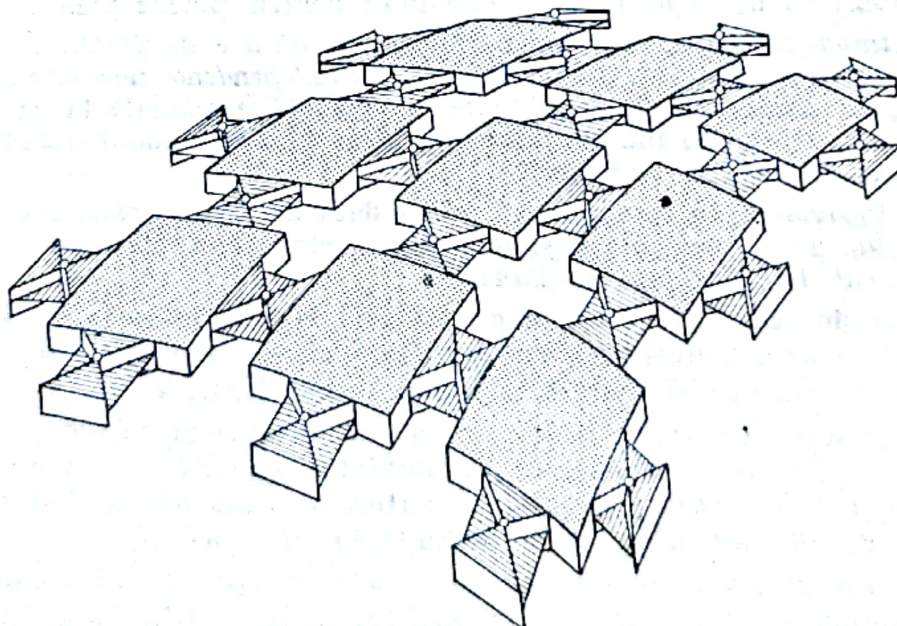


Fig. VII.17

2. ELEMENTE GEOMETRICE

O învelitoare subțire este definită din punct de vedere geometric, cînd se cunoaște *ecuația suprafeței mediane* (locul punctelor egal distanțate de cele două fețe, extradosul și intradosul învelitorii) și *variația grosimii h*, măsurată pe normala pe fiecare punct al învelitorii (fig. VII. 18).

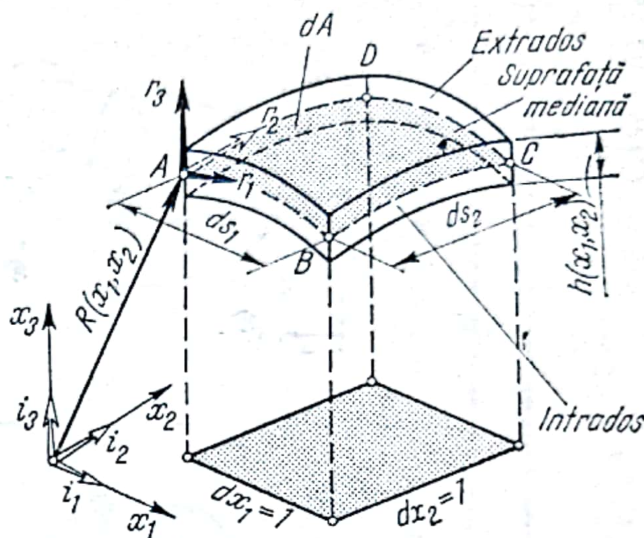


Fig. VII.18

2.1. Reprezentarea suprafețelor

1) *O suprafață se poate genera cinematic, prin mișcarea continuă în spațiu a unei curbe constante sau variabile.*

Pentru tehnică sînt interesante suprafețele cu un anumit caracter de regularitate, care se pot clasifica astfel:

a) *suprafețe de rotație*, obținute prin rotirea unui profil fix în jurul unei axe (cupole circulare, torul, hiperboloidul circular și altele);

b) *suprafețe construite periodic în jurul unei axe*; ele pot rezulta prin rotirea unui profil variabil de-a lungul unei curbe plane închise, cele mai frecvente au secțiunea perpendiculară pe axa de rotație în formă de elipsă (elipsoidul eliptic, paraboloidul eliptic etc.);

c) *suprafețe de translație* generate prin alunecarea în lungul unei curbe directoare a unei curbe generatoare de formă constantă, care rămîne mereu paralelă cu ea însăși (paraboloidul circular și paraboloidul hiperbolic etc.);

d) *suprafețe riglate*, generate prin mișcarea continuă a unei drepte; în această categorie se cuprind:

— *suprafețe cu plan director și curbe directoare*, obținute prin alunecarea pe o curbă dată (directoare) a unei drepte care rămîne paralelă cu un plan fix (plan director) și mai satisface o condiție geometrică (de obicei generatoarea se mai sprijină pe o curbă dată);

— *conoizii*, la care generatoarea se deplasează paralel cu planul director, rezemîndu-se pe o dreaptă fixă și îndeplinind încă o condiție geometrică (de obicei mai trece printr-o curbă dată);

— *paraboloizii hiperbolici*, generați prin mișcarea unei drepte care, alunecînd pe alte două situate oricum în spațiu, rămîne paralelă cu un plan director;

— *suprafața cu 3 directoare*, care se obțin prin alunecarea unei drepte variabile pe 3 curbe oarecare în spațiu;

— *cilindrii*, la care generatoarea alunecă în lungul unei curbe, paralel cu o direcție dată;

— *suprafețe conice*, generate de o dreaptă variabilă care trece printr-un punct fix și se mișcă pe o curbă oarecare.

2) *O suprafață în spațiul euclidian E_3* se definește ca o varietate bidimensională de puncte, care se poate reprezenta prin ecuația vectorială (v. fig. VII. 18).

$$\mathbf{R} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 \tag{VII.1}$$

în care coordonatele sînt funcții de două variabile

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2);\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2) \text{ și } x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2), \tag{VII.2}$$

ξ_1, ξ_2 numindu-se coordonate parametrice.
Păstrînd pe rînd ξ_1 = const sau ξ_2 = const, se obțin două familii de curbe care formează o rețea de coordonate curbilinii.

Cînd variabilele sînt chiar x_1 și x_2 alese astfel încît poziția unui punct să fie definită prin ecuațiile: $x_1 = x_1$; $x_2 = x_2$; $x_3 = x_3(x_1, x_2)$ coordonatele se numesc carteziene, funcțiile x_1, x_2, x_3 în ecuațiile de mai înainte se înțeleg că *sînt continue* și au derivate continue de ordinul 2. Suprafețele astfel obținute sînt denumite simple.

În general, coordonatele carteziene rectangulare apar pentru simplitatea conducerii operațiilor ca cele mai avantajoase, totuși, în numeroase situații [9], alegerea unui sistem de coordonate (parametri) adecvat problemei poate conduce mai operativ la rezultat; astfel se justifică folosirea sistemelor de coordonate *cilindrice, sferice, izoterme* sau *oblice* [10] în cadrul învelitorilor subțiri.

În tabelul VII. 2 apar ecuațiile unor suprafețe care se pot aplica în tehnică, scrise în raport cu sistemul de axe mai avantajos.

Tabelul VII.2

Tipuri și ecuații de suprafețe

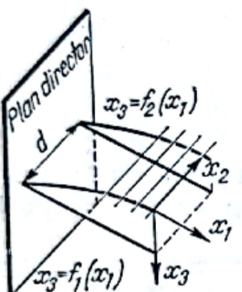
A. Suprafețe de rotație			
Sfera	Elipsoidul de rotație	Elipsoidul eliptic	Suprafața cu arc median lănțișor
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$	$a_1=a_2$ $\frac{x_1^2+x_2^2}{a_1^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$	$a_1 \neq a_2$ $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$	$x_3=a \cdot ch\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{a}\right)$
Tip eliptic	Tip eliptic	Tip eliptic	
Paraboloidul de rotație		Paraboloidul eliptic	
$x_3=m\left(x_1^2+x_2^2\right)$		$x_3=a_1 x_1^2+a_2 x_2^2$	
Tip eliptic			

Hiperboloidul de rotație cu o pînză $a_1=a_2$ $\frac{x_1^2+x_2^2}{a_1^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$	**Hiperboloidul de rotație cu două pînze** $a_1=a_2$ $\frac{x_1^2+x_2^2}{a_1^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=-1$	**Hiperboloidul eliptic cu o pînză** $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$	**Hiperboloidul eliptic cu două pînze** $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=-1$
Suprafață sinusoidală de rotație cu perioada $2\pi/3$ $\varphi_{max}=30$ $x_3=r^3\sin 3\varphi;\ -\frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}$ $x_3=3x_1^2x_2-x_2^3$	**Suprafață sinusoidală de rotație cu perioada $\pi/2$** $\varphi_{max}=\frac{\pi}{8}$ $x_3=\frac{1}{4}r^2\sin 4\varphi;\ -\frac{\pi}{8}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{8}$ $x_3=x_1x_2\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$	**Torul** Puncte eliptice Puncte parabolice Puncte hiperbolice $x_1^2+x_2^2+x_3^2+a^2-r^2=2a\sqrt{x_1^2+x_2^2}$	**Pseudosfera** $x_3=R\lg\frac{R-\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2)}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2)}$

Tabelul VII.2 (continuare)

B. Suprafețe riglate

Cu ambele directoare curbe



Cu directoare arc de cerc

$$x_3=\frac{d-x_2}{d}\sqrt{r_1^2-x_1^2}+\frac{x_2}{d}\sqrt{r_2^2-x_1^2}$$

Cu directoare elipse

$$x_3=\frac{d-x_2}{d}a_1\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}}+\frac{x_2}{d}a_2\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_2^2}}$$

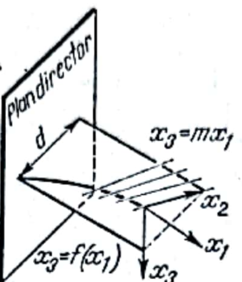
Cu directoare parabole

$$x_3=\left(m_1\frac{d-x_2}{d}+m\frac{x_2}{d}\right)x_1^2$$

Cu directoare lănțișoare

$$x_3=\frac{d-x_2}{d}a_1\,ch\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{d}a_2\,ch\frac{x_2}{a_2}$$

Cu o directoare dreaptă și una curbă



Cu o directoare arc de cerc

$$x_3=\frac{d-x_2}{d}\sqrt{r^2-x_1^2}+\frac{x_2}{d}mx_1$$

Cu o directoare parabolă

$$x_3=\frac{d-x_2}{d}m_1x_1^2+\frac{x_2}{d}m_1x_1$$

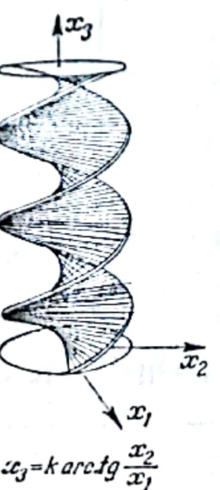
Cu o directoare elipsă

$$x_3=\frac{d-x_2}{d}a_1\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}}+\frac{x_2}{d}mx_1$$

Cu o directoare arc de lănțișor

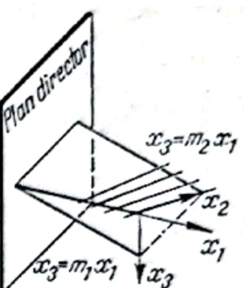
$$x_3=\frac{d-x_2}{d}a_1\,ch\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{d}mx_1$$

Cu o directoare elice



$$x_3=k\,arctg\frac{x_2}{x_1}$$

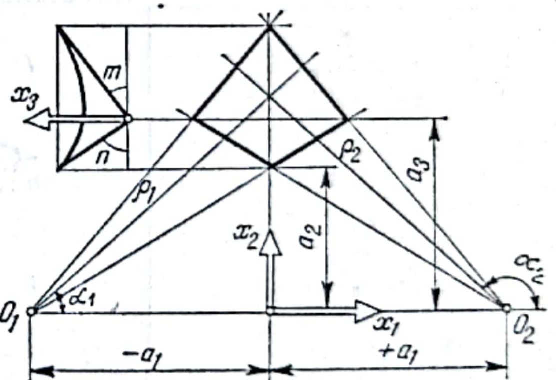
Cu ambele directoare rectilinii



$$x_3=\frac{d-x_2}{d}m_1x_1+\frac{x_2}{d}m_2x_1$$

$$x_3=\frac{(m_2-m_1)x_1x_2}{d}+m_1x_1$$

Suprafața cu trei directoare necoplanare

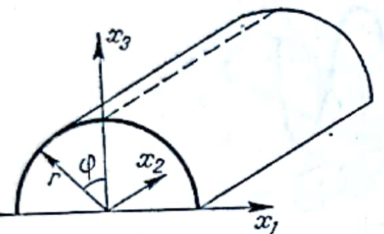


$$x_3=\frac{a_1^2\left(a_2^2m+a_3^2n\right)x_2^2-a_1^2\left(a_2^2-a_3^2\right)x_1x_2}{2a_1^2a_2a_3(a_2+a_3)}+$$

$$+\frac{-2a_1^2a_2a_3(a_3n-a_2m)x_2-a_2^2a_3^2(m+n)x_1^2}{2a_1^2a_2a_3(a_2+a_3)}+$$

$$+\frac{a_1^2a_2^2a_3^2(m+n)}{2a_1^2a_2a_3(a_2+a_3)}$$

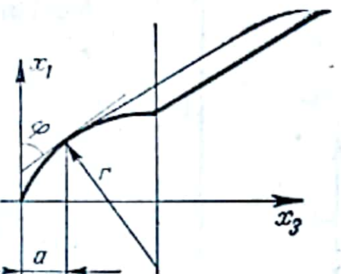
Cilindrul circular



$x_3 = r\cos\varphi$

Tip parabolic

Cilindrul cu arc director lănțișor

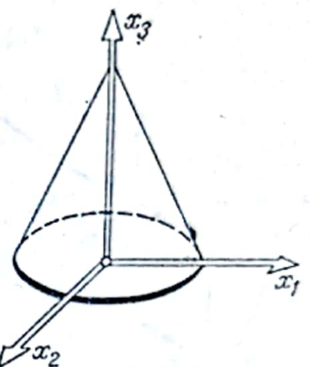


$r = r_0 \cos^2\varphi$

$r = a\,ch^2\left(\frac{x_1}{a}\right)$; $x_3 = a\,ch\left(\frac{x_1}{a}\right)$

Tip parabolic

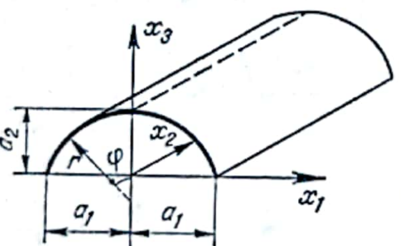
Conul circular



$x_3 = m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Tip parabolic

Cilindrul eliptic



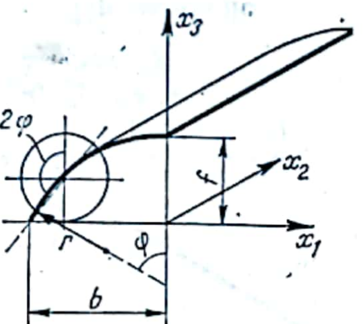
$r = r_0 \cos\varphi$

$r = \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 \sin^2\varphi + a_2^2\cos^2\varphi)^{3/2}}$;

$x_3 = a_2\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}}$

Tip parabolic

Cilindrul cu arc director cicloidă



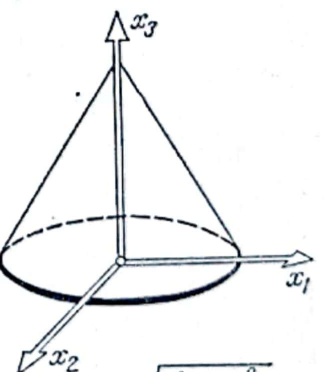
$r = r_0 \cos^{-3}\varphi$ $\quad r = 2f\cos\varphi$

$x_3 = \frac{f}{2}(1 - \cos\varphi)$ $\quad b = \frac{f\pi}{2}$

$x_1 = \frac{f}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi)$

Tip parabolic

Conul eliptic



$x_3 = m\sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}}$

Tip parabolic

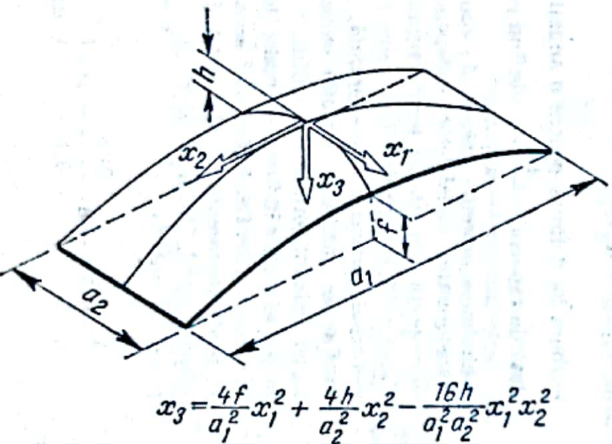
Tabelul VII.2 (continuare)

Cilindrul parabolic	Cilindrul cu arc director cicloidă scurtă	
$r = r_0 \cos^{-2}\varphi$ $r = 2\sqrt{\frac{2}{p}\left(c - x_1 + \frac{p}{2}\right)^3};\ x_3 = \sqrt{2p(c - x_1)}$	$x_1 = r\varphi - a \sin\varphi$ $x_2 = r - a\cos\varphi$	
Tip parabolic	Tip parabolic	

C. Învelitori de gradul IV

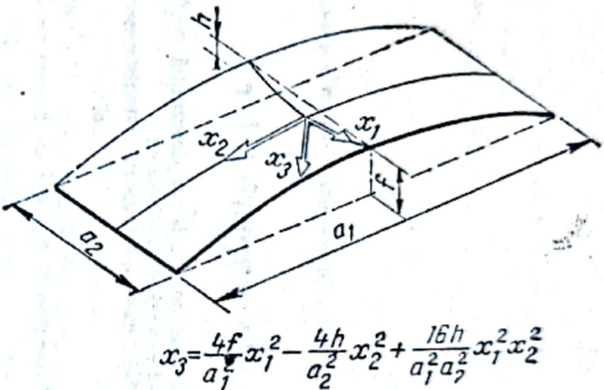
Învelitoare riglată cu o directoare dreaptă și o curbă (cosinusoida)	Parabolă variabilă cu săgeată maximă la margine translatată pe alte parabole toate cu curbura de același semn
$x_3 = a\cos 4\varphi$ $x_3 = \frac{x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}a$	$x_3 = \frac{f_1}{a_1^2}x_1^2\left(1 + \frac{f_3 - f_1}{f_1 a_2^2}x_2^2\right) - \frac{f_2}{a_2^2}x_2^2$

Parabolă variabilă cu curbura nulă la margine translatată pe o parabolă de aceeași curbură



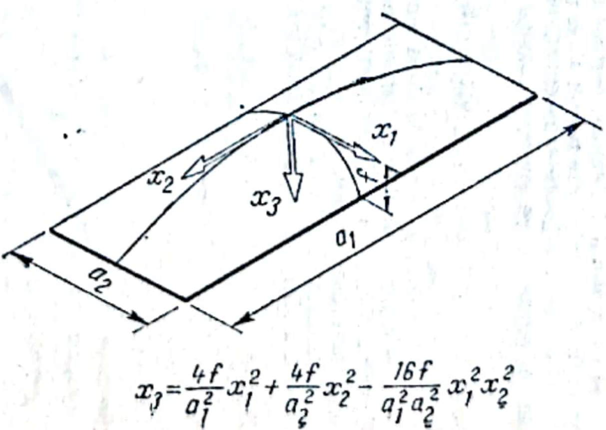
$$x_3=\frac{4f}{a_1^2}x_1^2+\frac{4h}{a_2^2}x_2^2-\frac{16h}{a_1^2a_2^2}x_1^2x_2^2$$

Parabolă variabilă cu curbura nulă la margini translatată pe o parabolă cu curbura de semn opus



$$x_3=\frac{4f}{a_1^2}x_1^2-\frac{4h}{a_2^2}x_2^2+\frac{16h}{a_1^2a_2^2}x_1^2x_2^2$$

Parabolă variabilă cu curbura nulă la margini translatată pe două drepte



$$x_3=\frac{4f}{a_1^2}x_1^2+\frac{4f}{a_2^2}x_2^2-\frac{16f}{a_1^2a_2^2}x_1^2x_2^2$$

Ecuațiile (VII. 1) definesc porțiuni regulate de suprafață cînd în toate punctele domeniului matricea funcțională

$$\mathbf{M} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \qquad \text{(VII.3)}$$

este de rangul doi, ceea ce este echivalent cu a scrie că:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi_2} \neq 0; \qquad \text{(VII.4)}$$

în consecință se constată; punctele unei suprafețe sînt regulate cînd pentru ele se poate defini o normală la suprafață și implicit un plan tangent.

2.2. Cîteva proprietăți diferențiale ale suprafețelor

1) Cu ajutorul derivatelor parțiale de ordinul 1 ale vectorului de poziție **R**, se determină coeficienții primei forme fundamentale, care permit să se pună în evidență mai *multe mărimi invariante*;

— *norma vectorului tangent* ($d\mathbf{R}$) la orice curbă de pe suprafață, care se asimilează cu distanța ds între două puncte vecine de pe suprafață, avînd ecuația

$$ds^2 = |d\mathbf{R}|^2 = \alpha_1^2 d\xi_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos\chi d\xi_1 d\xi_2 + \alpha_2^2 d\xi_2^2; \qquad \text{(VII.5)}$$

— *unghiul* χ înscris de două curbe trecînd prin A_0;

— *mărimea ariei infinitezimale* înscrisă între curbele de coordonate ξ_1 și ξ_2

În tabelul VII. 3 s-au calculat coeficienții primei forme pătratice pentru coordonate carteziene și cîteva tipuri de coordonate parametrice.

2) Cu ajutorul coeficienților celei de a doua forme fundamentale D_{11}, D_{12}, D_{22} se pune în evidență *curbura normală* a unei linii de pe suprafață trecînd prin A_0 (fig. VII.19); ea are expresia;

$$k_n = \frac{1}{\rho_n} = \mathbf{n}\cdot\frac{d^2\mathbf{R}}{d\rho^2} = \frac{D_{11}(d\xi_1)^2 + 2D_{12}d\xi_1 d\xi_2 + D_{22}(d\xi_2)^2}{\alpha_1^2 d\xi_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 d\xi_1 d\xi_2 + \alpha_2^2 d\xi_2^2} \qquad \text{(VII.6)}$$

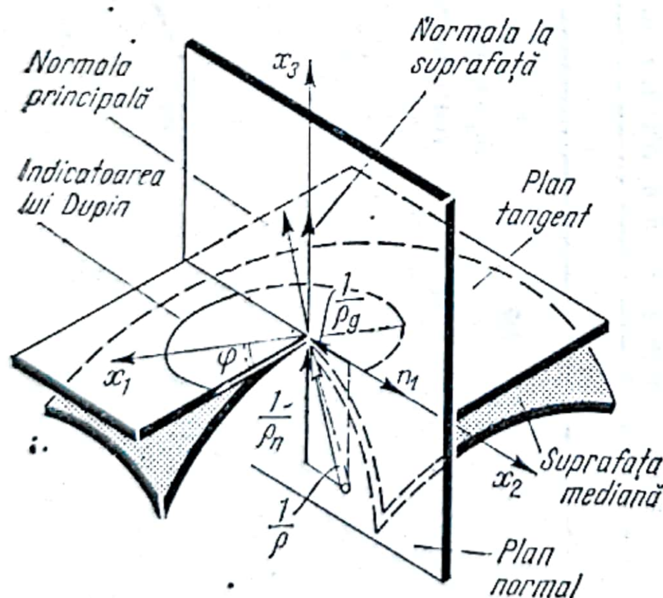


Fig. VII.19

curbura k_n definită pentru o anumită direcție dată de raportul $\frac{d\xi_2}{d\xi_1}$, este un invariant la schimbarea originii axelor de coordonate sau transformarea variabilelor independente, dacă se respectă condiția ca forma suprafeței să nu fie alterată. Pentru *clasificarea proprietăților geometrice ale punctelor de pe suprafață*, este interesant să se analizeze *variația curburii normale* k_n cînd planul normal care conține raza de curbură ρ_n se rotește în jurul normalei figurată în A_0 la suprafață (v. fig. VII. 19); această variație se poate reprezenta cu ajutorul indicatoarei lui Dupin. Astfel, formula curburii normale se poate retranscrie

$$\frac{1}{\rho_n} = k_n = \mathbf{n}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial s^2} = D_{11}\left(\frac{d\xi_1}{ds}\right)^2 + 2D_{12}\left(\frac{d\xi_1}{ds}\right)\left(\frac{d\xi_2}{ds}\right) + D_{22}\left(\frac{d\xi_2}{ds}\right)^2. \qquad \text{(VII.7)}$$

Să presupunem, fără a micșora din generalitate, că liniile de coordonate $\xi_1 = \text{const}$ și $\xi_2 = \text{const}$ se intersectează în A_0 sub un unghi drept, în care caz notînd:

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \cos\varphi; \qquad \frac{d\xi_2}{ds} = \sin\varphi \tag{VII.8}$$

unghiul φ din planul tangent este cuprins între direcția t la curba căreia îi corespunde k_n și direcția $\partial_1\mathbf{R}$.

Introducînd notațiile (VII.8) în ecuație (VII.7) și reprezentînd pe direcția t mărimea $\sqrt{\rho_n}$, alegînd apoi în planul tangent noi variabile:

$$\eta_1 = \sqrt{[\pm\rho_n]}\cos\varphi \text{ și } \eta_2 = \sqrt{[\pm\rho_n]}\sin\varphi \tag{VII.9}$$

se obține expresia *indicatoarei lui Dupin* (v. fig. VII.19)

$$D_{11}\eta_1^2 + 2D_{12}\eta_1\eta_2 + D_{22}\eta_2^2 = \pm 1. \tag{VII.10}$$

Indicatoarea este o conică care are patru direcții remarcabile:

— două *axe rectangulare între ele*, axele conicii care corespund *razelor principale de curbură* ale suprafeței și

— două *direcții reale sau imaginare*, care se intersectează sub un unghi oarecare și reprezintă *asimptotele conicii*, definind pozițiile după care razele de curbură devin infinite iar curburile normale se anulează.

Liniile de pe suprafață tangente în fiecare punct la direcțiile razelor principale se numesc *linii de curbură* și sînt *ortogonale* între ele; liniile pe suprafață, tangente în fiecare punct la direcțiile asimptotelor, se numesc *linii asimptotice*.

3) Egalînd membrul din stînga al ecuației (VII. 10) cu zero se pun în evidență direcțiile η_1/η_2 ale *asimptotelor* care depind ca existență de valoarea realizantului $D_{12}^2 - D_{11}D_{22}$ al ecuației (VII.10); ele pot fi *imaginare, reale* și *diferite*, sau *reale* și *confundate*. Ca urmare, proprietățile geometrice ale suprafeței în vecinătatea punctului A se caracterizează funcție de tipul indicatoarei și anume, dacă:

$D_{12}^2 - D_{11}D_{22} < 0$ indicatoarea este o *elipsă*, liniile *asimptotice* sînt imaginar conjugate, produsul *curburilor principale* $\left(\dfrac{1}{\rho_1\rho_2}\right)$ este pozitiv. Suprafața se situează de o singură parte a planului tangent și este convexă; punctul se numește de *tip eliptic* (fig. VII.20).

$D_{12} - D_{11}D_{22} > 0$ indicatoarea este o *hiperbolă*, direcțiile *asimptotice* sînt *reale*, *curbura lui Gauss* este *negativă*; suprafața are curburi opuse, planul tangent intersectează suprafața pe linii asimptotice; punctul se numește de tip *hiperbolic* (fig. VII.21).

$D_{12}^2 - D_{11}D_{22} = 0$ indicatoarea este *parabolă*, direcțiile asimptotice sînt *reale* și *confundate*. Suprafața are curbura lui Gauss *nulă*, planul tangent rămîne de aceeași parte a suprafeței și nu se rotește în lungul liniilor generatoare. Punctul este de tip *parabolic* (fig. VII. 22).

Suprafețele se clasifică în *eliptice, hiperbolice* și *parabolice*, dacă toate punctele sînt de același tip, respectiv *eliptic, hiperbolic* și *parabolic*.

Sfera, elipsoidul, paraboloidul de rotație sînt învelitori de *tip eliptic*; *paraboloidul hiperbolic, hiperboloidul cu o pînză, conoidul* sînt suprafețe de *tip hiperbolic*. *Cilindrul* și *conul* sînt de *tip parabolic* și sînt suprafețe desfășurabile.

4) În tabelul VII. 3 s-au dat pentru diferite tipuri de coordonate expresiile coeficienților lui Cristoffel necesari deducerii derivatelor secunde a vectorului de poziție $\mathbf{R}$ care apar în expresiile

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{11} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{R}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{R}_2 + D_{11}\mathbf{r}_3\\ \mathbf{R}_{12} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{R}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{R}_2 + D_{12}\mathbf{r}_3\\ \mathbf{R}_{22} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{R}_1 + \Gamma_{22}\mathbf{R}_2 + D_{22}\mathbf{r}_3.\end{aligned} \tag{VII.11}$$

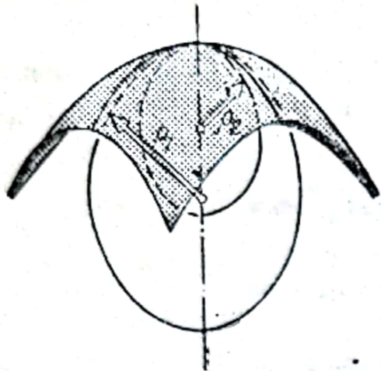


Fig. VII.20

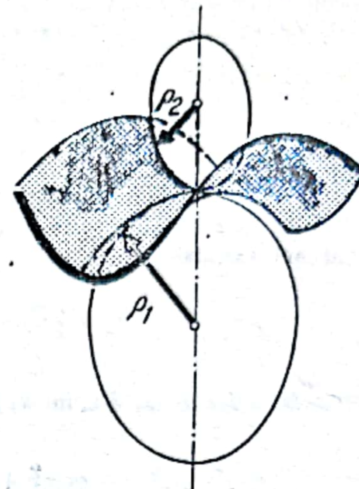


Fig. VII.21

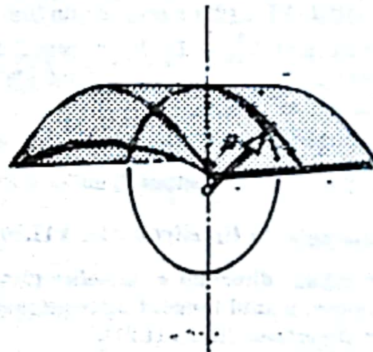


Fig. VII.22

Se observă că în coordonatele carteziene $D_{11} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $D_{12} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ şi $D_{22} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

în membrul drept introducîndu-se notaţiile lui Monge. Cu aceste notaţii realizantul ecuaţiei direcţiilor asimptotice este

$$D_{12}^2 - D_{11}D_{22} = \frac{s^2 - rt}{1+p^2+q^2}. \qquad \text{(VII.12)}$$

Tabelul VII.3

Coeficienții lui Cristoffel de speța a doua pentru suprafețe raportate la coordonate carteziene rectangulare și curbilinii ortogonale

$$\mathbf{R}_{11} = \Gamma_{11}^{1}\mathbf{R}_1 + \Gamma_{11}^{2}\mathbf{R}_2 + D_{11}\mathbf{r}_3 \qquad \mathbf{R}_{12} = \Gamma_{12}^{1}\mathbf{R}_1 + \Gamma_{12}^{2}\mathbf{R}_2 + D_{12}\mathbf{r}_3 \qquad \mathbf{R}_{22} = \Gamma_{22}^{1}\mathbf{R}_1 + \Gamma_{22}^{2}\mathbf{R}_2 + D_{22}\mathbf{r}_3$$

În coordonate carteziene rectangulare	În coordonate curbilinii ortogonale
$\Gamma_{11}^{1} = \frac{pr}{1+p^2+q^2}$	$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha x_1 \partial_{\alpha\alpha} x_1 + \partial_\alpha x_2 \partial_{\alpha\alpha} x_2 + \partial_\alpha x_3 \partial_{\alpha\alpha} x_3}{g_{11}}$
$\Gamma_{11}^{2} = \frac{qr}{1+p^2+q^2}$	$\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha x_1 \partial_{\alpha\beta} x_1 + \partial_\alpha x_2 \partial_{\alpha\beta} x_2 + \partial_\alpha x_3 \partial_{\alpha\beta} x_3}{g_{11}}$
$\Gamma_{12}^{1} = \frac{sp}{1+p^2+q_2}$	$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\beta x_1 \partial_{\alpha\beta} x_1 + \partial_\beta x_2 \partial_{\alpha\beta} x_2 + \partial_\beta x_3 \partial_{\alpha\beta} x_3}{g_{11}}$
$\Gamma_{12}^{2} = \frac{sq}{1+p^2+q^2}$	$\Gamma_{11}^{2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\beta x_1 \partial_{\alpha\beta} x_1 + \partial_\beta x_2 \partial_{\alpha\beta} x_2 + \partial_\beta x_3 \partial_{\alpha\beta} x_3}{g_{22}}$
$\Gamma_{22}^{1} = \frac{tp}{1+p^2+q^2}$	$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\beta x_1 \partial_{\alpha\beta} x_1 + \partial_\beta x_2 \partial_{\alpha\beta} x_2 + \partial_\beta x_3 \partial_{\alpha\beta} x_3}{g_{22}}$
$\Gamma_{22}^{2} = \frac{tq}{1+p^2+q^2}$	$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\beta x_1 \partial_{\beta\beta} x_1 + \partial_\beta x_2 \partial_{\beta\beta} x_2 + \partial_\beta x_3 \partial_{\beta\beta} x_3}{g_{22}}$
$D_{11} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\frac{1+p^2}{\rho_x}$	$D_{11} = -\frac{g_{11}}{\rho_\alpha} = \frac{[\partial_\alpha x_2 \partial_\beta x_3 - \partial_\alpha x_3 \partial_\beta x_2]\partial_{\alpha\alpha} x_1 + [\partial_\beta x_1 \partial_\alpha x_3 - \partial_\beta x_3 \partial_\alpha x_1]\partial_{\alpha\alpha} x_2 + [\partial_\alpha x_1 \partial_\beta x_2 - \partial_\alpha x_2 \partial_\beta x_1]\partial_{\alpha\alpha} x_3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$
$D_{12} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{\rho_{xy}}$	$D_{12} = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\rho_{\alpha\beta}} = \frac{[\partial_\alpha x_2 \partial_\beta x_3 - \partial_\alpha x_3 \partial_\beta x_2]\partial_{\alpha\beta} x_1 + [\partial_\beta x_1 \partial_\alpha x_3 - \partial_\beta x_3 \partial_\alpha x_1]\partial_{\alpha\beta} x_2 + [\partial_\alpha x_1 \partial_\beta x_2 - \partial_\alpha x_2 \partial_\beta x_1]\partial_{\alpha\beta} x_3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$
$D_{22} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\frac{1+q^2}{\rho_y}$	$D_{22} = -\frac{g_{22}}{\rho_\beta} = \frac{[\partial_\alpha x_2 \partial_\beta x_3 - \partial_\alpha x_3 \partial_\beta x_2]\partial_{\beta\beta} x_1 + [\partial_\beta x_1 \partial_\alpha x_3 - \partial_\beta x_3 \partial_\alpha x_1]\partial_{\beta\beta} x_2 + [\partial_\alpha x_1 \partial_\beta x_2 - \partial_\alpha x_2 \partial_\beta x_1]\partial_{\beta\beta} x_3}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$

3. CALCULUL ÎNVELITORILOR SUBȚIRI

Învelitorile subțiri se tratează astăzi, în cadrul teoriei elasticității, ca o *problemă plană* depinzînd de doi parametri ξ_1, ξ_2 (coordonatele curbilinii care definesc vectorul de poziție al unui punct de pe suprafața mediană a învelitorii).

Reducerea problemei de calcul de la una *tridimensională*, care consideră stările de eforturi și deformații ale punctelor materiale cuprinse în învelitoare, independente între ele și caracterizate de 3 variabile (ξ_1, ξ_2 definite mai înainte și ξ_3 măsurat pe normalele la suprafața mediană), la *problemă bidimensională* este o aproximație de un ordin mic de mărime în raport cu precizia cu care se lucrează tehnic și ea stă la baza concepției actuale privind comportarea mecanică a învelitorilor subțiri.

Această trecere se poate face prin *mai multe metode* reprezentînd fiecare un anumit grad de aproximație, corelat cu simplificările pe care le oferă pentru a se ajunge la soluții explicite. Aceste metode relativ numeroase se pot clasifica în două tipuri :

— primul ar cuprinde procedeele de calcul, care introduc *ipoteze mecanice* suplimentare privind *variația eforturilor sau a deformațiilor* pe intervalul grosimii învelitorii ; astfel, ipoteza de calcul cea mai răspîndită se datorește lui Kirchhoff și ea este cuprinsă în formulările date de Love [23], Flügge [8], Novojilov [32], Lurie [25] ; Koiter [18] a pus la punct cu ajutorul calculului variațional o teorie care figurează starea de deformații într-un mod similar ipotezei lui Kirchhoff ;

— al doilea tip de aproximație pentru deducerea teoriei învelitorilor subțiri se bazează pe ideea aplicării unor *metode de integrare asimptotică* sistemului tridimensional de ecuații diferențiale.

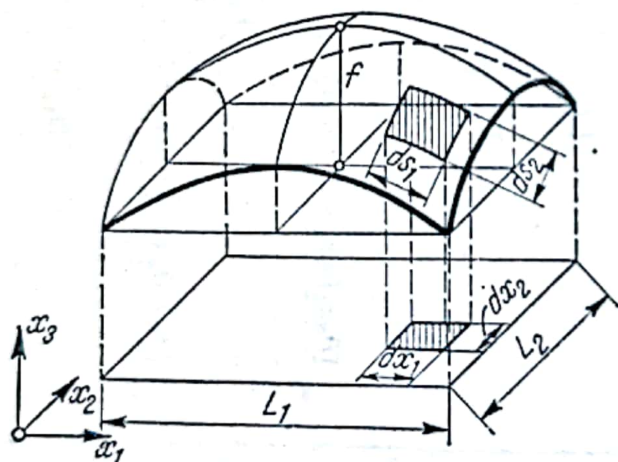


Fig. VII.23

În cuprinsul acestei secțiuni se expun numai formulări care sînt bazate sau care confirmă ipoteza lui Kirchhoff, tratările referindu-se în principal la două modele fizice compatibile cu această ipoteză, și anume :

a) teoria de membrană, dedusă după M. Lecornu considerînd învelitoarea perfect flexibilă (v. fig. VII.15) ;

b) teoria de încovoiere, dezvoltată în acord cu postulatele elasticității pe calea indicată de Love, în care învelitoarea se presupune rigidă la încovoiere (v. fig. VII.16).

Pentru a reuși scrierea unor rezultate explicite în cadrul teoriei de încovoiere, V. Z. Vlasov [49] a introdus suplimentar o considerație geometrică simplificatoare, valabilă practic la *învelitorile pleoștite, aproximînd metrica pe suprafața învelitorii egală cu aceea măsurată în planul de bază* (fig. VII.23).

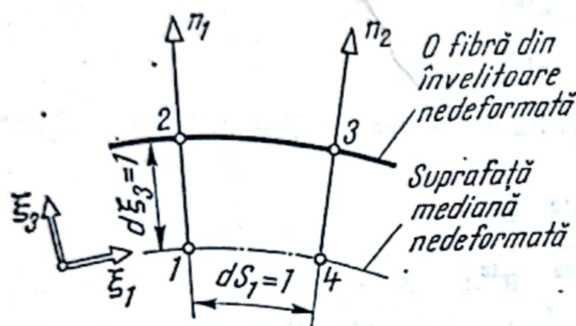
La învelitorile *cilindrice lungi cu profil deschis* se pot obține rezultate cu o bună corespondență practică calculînd eforturile pe baza *teoriei de grindă, completată de V. Z. Vlasov* pentru solicitările din *torsiune*.

3.1. Ipotezele lui Kirchhoff-Love

1) *Punctele care se găsesc pe o aceeaşi normală la suprafața mediană nedeformată se vor găsi pe o aceeaşi normală la suprafața mediană deformată* (fig. VII.24).

Această afirmație se transcrie conform notațiilor de la pag. 1048 astfel (v. fig. VII. 24):

$$\frac{\partial u^1}{\partial \xi_3} = \frac{\partial u^2}{\partial \xi_3} = 0. \qquad \text{(VII.13)}$$



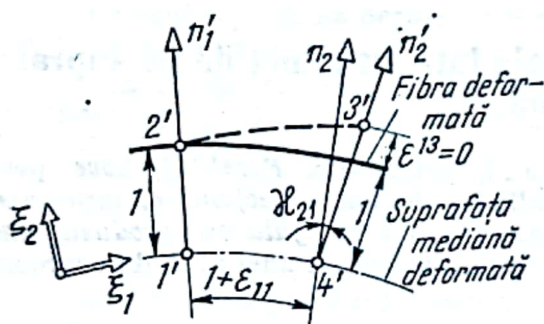


Fig. VII.24

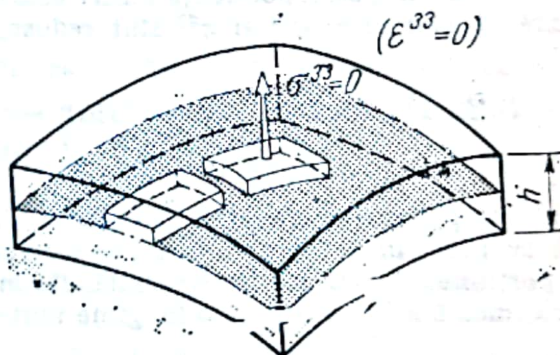


Fig. VII.25

Expresiile eforturilor de lunecare rezultă în consecință:

$$\sigma^{13} = G\frac{\partial u^3}{\partial \xi_1}; \qquad \sigma^{23} = G\frac{\partial u^3}{\partial \xi_2}; \qquad \text{(VII.14)}$$

2) *Efectul eforturilor unitare normale la suprafața mediană poate fi neglijat în relațiile dintre eforturi și deformații.*

Acest lucru se exprimă prin: $\sigma^{33} = 0$ (fig. VII. 25).

3) *Deplasările pe direcțiile normalelor la suprafața mediană sînt aproximativ egale pentru toate punctele situate pe o aceeaşi normală* (v. fig. VII. 25) *considerînd deci* $\varepsilon^{33} = 0$.

4) *Cu toate că se permit deplasări relativ mari, se presupune că deformațiile rămîn în toate cazurile mici*, condiție impusă de teoria de ordinul 1 în cadrul căreia se tratează problema învelitorilor subțiri.

5) Calculele efectuîndu-se în cadrul teoriei elasticității, *relațiile dintre eforturile unitare și deformații sînt exprimate în conformitate cu legea lui Hooke generalizată.*

— La învelitorile de beton armat admițîndu-se ca eforturile de întindere să fie preluate în întregime de către armături, *se poate considera neglijabil*, în anumite situații, coeficientul de contracție al lui Poisson, care dealtfel la beton este destul de redus $\mu = 0{,}07 \ldots 0{,}15$.

— În dezvoltările expresiilor analitice s-a apreciat că poate fi de mare eficiență în multe cazuri neglijarea termenilor h/ρ_i care sînt mici față de unitate.

Pe baza celor arătate mai înainte, *tensorul deformațiilor unitare* într-un punct din cuprinsul învelitorii se consideră că nu conține decît 4 componente

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} \end{vmatrix}$$

iar tensorul de eforturi unitare se presupune avînd o matrice dreptunghiulară cu 6 termeni

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \end{vmatrix}$$

Observînd corespondența dintre cele două matrice se conchide că deformațiile provocate de eforturile σ^{13} și σ^{23} sînt reduse, practic neglijabile.

3.2. Deducerea eforturilor secționale într-un punct de pe suprafața mediană

Simplificările efectuate în conformitate cu ipotezele lui *Kirchhoff-Love* permit să se pună în evidență o serie de eforturi rezultante denumite *secționale*, raportate la o porțiune de secțiune transversală din învelitoare avînd *aria egală cu produsul* dintre grosimea h a învelitorii și o lungime unitară, măsurată în lungul unei linii de coordonate

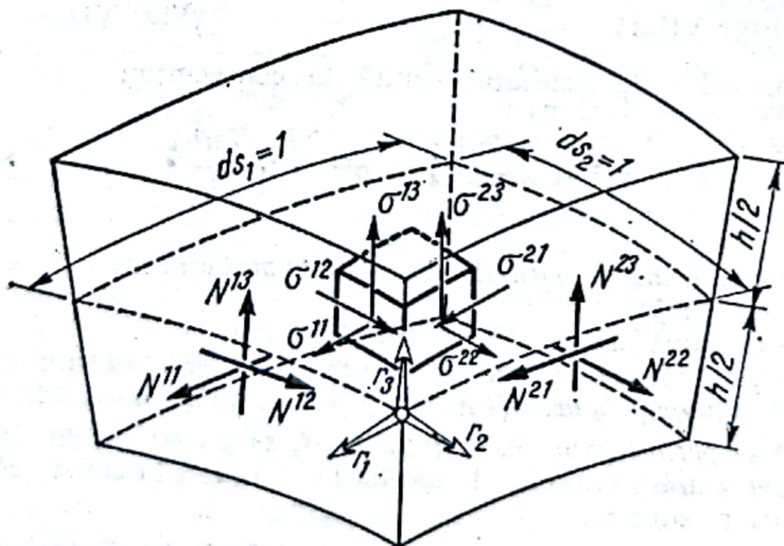


Fig. VII.26

de pe suprafața mediană a învelitorii. Astfel, pentru un punct de pe suprafața mediană $A(x_1, x_2)$ eforturile secționale sînt (fig.VII.26)

$$N^{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{11} dx_3; \quad N^{12} = N^{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{12} dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{21} dx_3; \quad N^{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{22} dx_3$$

$$M^{12} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{11} x_3 dx_3; \quad M^{11} = M^{22} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{12} x_3 dx_3 = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{21} x_3 dx_3; \qquad \text{(VII.15)}$$

$$M^{21} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{22} x_3 dx_3$$

$$N^{13} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{13} dx_3; \quad N^{23} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma^{23} dx_3.$$

În aceste expresii s-a neglijat influența termenului h/ρ în conformitate cu prevederile de la paragraful precedent.

— În *teoria de membrană*, eforturile unitare considerîndu-se constante pe înălțimea secțiunii h, rezultă următoarele expresii pentru eforturile secționale:

$$N^{11} = \sigma^{11} h; \quad N^{22} = \sigma^{22} h; \quad N^{12} = N^{21} = \sigma^{12} h = \sigma^{21} h$$

$$N^{13} = \sigma^{13} h; \quad N^{23} = \sigma^{23} h.$$

La deducerea acestor formule nu a fost necesar să se neglijeze termenii conținînd pe $\frac{h}{\rho_i}$.

3.3. Eforturile secționale rezultante corespunzătoare segmentelor de arce aferente variabilelor x_1 și x_2

Unui punct $A(x_1, x_2)$ aflat pe suprafața mediană a învelitorii i se asociază trivectorul $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ (vezi notațiile de la pag. 1048), $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$ fiind versorii tangenți la liniile de coordonate trecînd prin A.

Delimitînd pe aceste *linii* segmente de *lungime infinitezimală* corespunzătoare unor creșteri date variabilelor $dx_1 = 1$ și $dx_2 = 1$, unitatea putînd fi oricît de mică, *eforturile rezultante de extensiune* (v. fig.VII.5) plasate în centrul articulațiilor *cilindrice aferente*, vor fi:

$$\alpha_2 \mathbf{N}^1 = \mathbf{n}^1 = n^{11}\mathbf{R}_1 + n^{12}\mathbf{R}_2 + n^{13}\mathbf{r}_3$$
$$\alpha_1 \mathbf{N}^2 = \mathbf{n}^2 = n^{21}\mathbf{R}_1 + n^{22}\mathbf{R}_2 + n^{23}\mathbf{r}_3. \qquad \text{(VII.16)}$$

Acceptînd următoarele semnificaţii :

$$n^{11} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} N^{11}; \quad n^{12} = N^{12}; \quad n^{13} = \alpha_2 N^{13}$$

(VII.17)

$$n^{21} = N^{21}; \quad n^{22} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} N^{22}; \quad n^{23} = \alpha_1 N^{23}$$

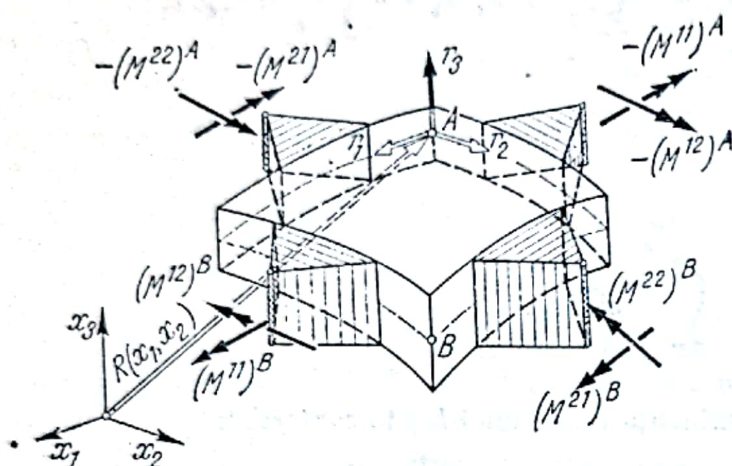


Fig. VII.27

în care N^{ij} sînt componentele eforturilor secţionale; cînd vectorii $\mathbf{R}_1$ şi $\mathbf{R}_2$ înscriu între ei un unghi oblic $\varkappa$ componentele eforturilor secţionale se deduc astfel :

$$N^{11} = \mathbf{N}^1\mathbf{R}^1; \; N^{12} = \mathbf{N}^1\mathbf{R}^2;$$

$$N^{13} = \mathbf{N}^1\mathbf{r}_3$$

(VII.18)

$$N^{21} = \mathbf{N}^2\mathbf{R}^1; \; N^{22} = \mathbf{N}^2\mathbf{R}^2;$$

$$N^{23} = \mathbf{N}^2\mathbf{r}_3$$

Momentele rezultante scrise în accepţiunea teoriei de încovoiere vor fi (fig.VII.27)

$$\alpha_2\mathbf{M}^1 = \mathbf{m}^1 = m^{11}\mathbf{R}_1 - m^{12}\mathbf{R}_2$$

(VII.19)

$$\alpha_1\mathbf{M}^2 = \mathbf{m}^2 = m^{21}\mathbf{R}_1 - m^{22}\mathbf{R}_2$$

cu semnificaţiile :

$$m^{11} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} M^{11}; \quad m^{12} = M^{12}; \quad m^{21} = M^{21}; \quad m^{22} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} M^{22}. \qquad \text{(VII.20)}$$

În cazul axelor $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ oblice între ele, momentele secţionale m^{ij} se deduc :

$$m^{11} = \mathbf{M}^1\mathbf{R}^1; \qquad m^{12} = \mathbf{M}^1\mathbf{R}^2$$

(VII.21)

$$m^{21} = \mathbf{M}^2\mathbf{R}^1; \qquad m^{22} = \mathbf{M}^2\mathbf{R}^2.$$

3.4. Ecuaţiile de echilibru scrise vectorial

După cum se ştie, *teoria elasticităţii* se aplică corect numai cînd *deformaţiile mediului solid* au o variaţie lentă de la punct la punct. Mai exact se apreciază că *teoria mediului continuu* este valabilă în cazul unui corp solid, dacă deformaţiile sînt uniforme pe intervalul a cel puţin 10Å(10^{-7} cm).

În această ipoteză decupînd din învelitoare un element mic avînd un vîrf în A (x_1, x_2) şi altul în B (x_1+dx_1, x_2+dx_2) eforturile pe laturile aferente punctului B se pot dezvolta

(funcțiile fiind continue), în serii Taylor, luînd ca bază valorile eforturilor și derivatele lor de pe laturile aferente punctului A. În cazul teoriei liniare dezvoltările se opresc la derivatele (fig.VII.28) de ordinul întîi.

Încărcarea exterioară se prezintă prin cîmpul vectorial

$$\mathbf{P} = P^1\mathbf{r}_1 + P^2\mathbf{r}_2 + P^3\mathbf{r}_3. \qquad \text{(VII.22)}$$

Aferent elementului diferențial desenat în fig. VII. 28 se deduce sarcina rezultantă care se exprimă prin

$$\mathbf{p} = \alpha_1\alpha_2 \sin\chi\mathbf{P} = p^1\mathbf{R}_1 + \\ + p^2\mathbf{R}_2 + p^3\mathbf{r}^3 \qquad \text{(VII.23)}$$

iar cuplul rezultant prin

$$\mathbf{m} = \alpha_1\alpha_2 \sin\chi\mathfrak{M} = m^1\mathbf{R}_1 + m^2\mathbf{R}_2; \qquad \text{(VII.24)}$$

în care:

$$p^1 = \alpha_2 \sin\chi P^1;$$
$$p^2 = \alpha_1 \sin\chi P^2$$
$$p^3 = \alpha_1\alpha_2 \sin\chi P^3$$
$$m^1 = \alpha_2 \sin\chi\mathfrak{M}^1; \qquad \text{(VII.25)}$$
$$m^2 = \alpha_1 \sin\chi\mathfrak{M}^2.$$

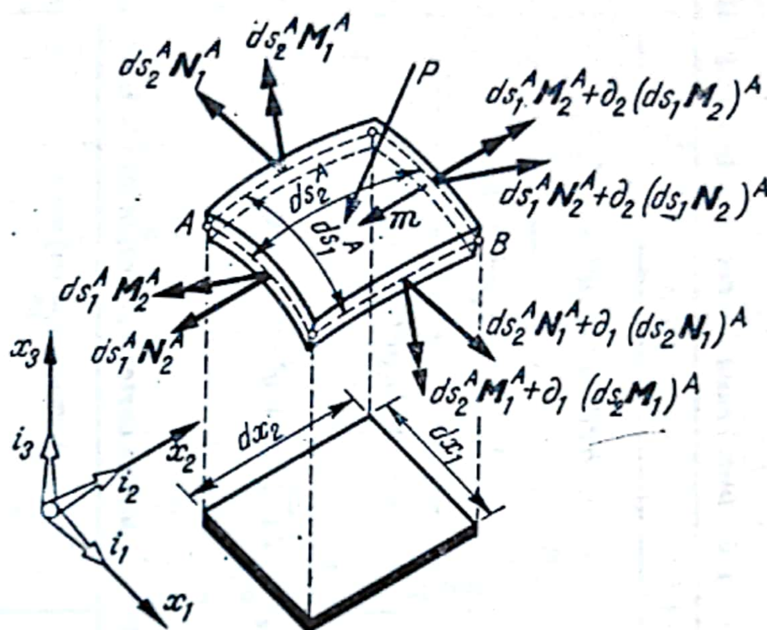


Fig. VII.28

În continuare, observînd echilibrul la deplasări și rotiri al elementului mic AB rezultă două ecuații vectoriale care sînt

$$\begin{aligned} &\partial_1\mathbf{n}^1 + \partial_2\mathbf{n}^2 + \mathbf{p} = 0 \\ &\partial_1\mathbf{m}^1 + \partial_2\mathbf{m}^2 + \mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{n}^1 + \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{n}^2 + \boldsymbol{m} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(VII.26)}$$

3.5. Ecuațiile scalare de echilibru în teoria de membrană

În ipoteza de membrană $\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}^2 = 0$, ecuația a doua vectorială (VII.26) se transcrie scalar sub forma a trei ecuații din care se deduce:

$$n^{13} = n^{23} = 0; \quad N^{12} = N^{21}.$$

Transcriind în relații scalare prima ecuație vectorială (VII. 26) se obține tabelul VII. 4 în care apar *coeficienții lui Cristoffel*. Folosind expresiile coeficienților lui Cristoffel în coordonate carteziene din tabelul VII. 3, ecuațiile din tabelul VII. 4 se pot rescrie înlocuind în primele două ecuații, cîte un grup de termeni, prin ecuația a treia obținîndu-se astfel ecuațiile cu forma concentrată expusă în tabelul VII.5.

Tabelul VII.4

Ecuațiile scalare de echilibru în teoria de membrană în coordonate curbilinii

	$\partial_1 \mathbf{n}^1$	$\partial_2 \mathbf{n}^2$	$\mathbf{P}$	
Proiecție pe $\mathbf{R}_1$	$\partial_1 n^{11} + \Gamma^1_{11} n^{11} + \Gamma^1_{12} n^{12}$	$+ \partial_2 n^{21} + \Gamma^1_{21} n^{21} + n^{22}\Gamma^1_{22}$	$+ X_1$	$= 0$
Proiecție pe $\mathbf{R}_2$	$\partial_1 n^{12} + \Gamma^2_{11} n^{11} + \Gamma^2_{12} n^{12}$	$+ \partial_2 n^{22} + \Gamma^2_{21} n^{21} + \Gamma^2_{22} n^{22}$	$+ X_2$	$= 0$
Proiecție pe $\mathbf{r}_3$	$D_{11} n^{11} + D_{12} n^{12}$	$+ D_{12} n^{21} + D_{22} n^{22}$	$+ X_3$	$= 0$

$$X_1 = P_1 \frac{1}{\alpha_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}; \qquad X_2 = P_2 \frac{1}{\alpha_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}; \qquad X_3 = P_3 \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Tabelul VII.5

Ecuațiile de echilibru în teoria de membrană în coordonate carteziene, raportate la triedrul $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{r}_3$

	Componentele vectorului $\mathbf{n}^1$	Componentele vectorului $\mathbf{n}^2$	Componentele încărcării	
Proiecția pe $\mathbf{R}_1$	$\partial_1 n^{11}$	$+ \partial_2 n^{21}$	$+ \mathfrak{J}_1$	$= 0$
Proiecția pe $\mathbf{R}_2$	$\partial_1 n^{12}$	$+ \partial_2 n^{22}$	$+ \mathfrak{J}_2$	$= 0$
Proiecția pe $\mathbf{r}_3$	$r n^{11} + s n^{12}$	$+ s n^{21} + t n^{22}$	$+ \mathfrak{J}_3$	$= 0$

$$\mathfrak{J}_1 = X_1 - pP_3; \quad \mathfrak{J}_2 = X_2 - qP_3; \quad \mathfrak{J}_3 = (1 + p^2 + q^2) P_3$$

$$X_1 = P_1 \frac{1}{\alpha_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}; \qquad X_2 = P_2 \frac{1}{\alpha_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

3.6. Ecuațiile scalare de echilibru în teoria de încovoiere scrise în coordonate carteziene

În cadrul teoriei de încovoiere, în sensul formulării lui Love, ecuațiile scalare de echilibru se scriu concentrat sub forma dată în tabelul VII.6.

3.7. Ecuațiile scalare de echilibru în teoria de încovoiere în aproximația lui V.Z.Vlasov

Pentru învelitori pleoștite caracterizate prin raportul $\frac{f}{L_i} \lhd \frac{1}{5}$ (v. fig. VII.23), în care f este săgeata și L_i deschiderea cea mai mare a învelitorii, considerînd după *V. Z. Vlasov* metrica de pe suprafața mediană egală cu metrica din planul de referință x_1Ox_2, se afirmă că:

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + p^2} = 1; \quad \alpha_2 = \sqrt{1 + q^2} = 1, \tag{VII.27}$$

ceea ce presupune

$$\left.\begin{aligned} p^2 = q^2 = 0 \text{ și } \partial_1(p^2) = 2pr = 0;\ \partial_1(q^2) = 2qs = 0 \\ \partial_2(p^2) = 2ps = 0;\ \partial_2(q^2) = 2qt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{VII.28}$$

Unghiul liniilor de coordonate este la sistemele de axe rectangulare: $\chi = \pi/2$ iar coeficienții lui Cristoffel devin $\Gamma^i_{ij} = 0 (i, j = 1, 2)$ pentru coordonate carteziene rectangulare iar:

$$D_{11} = r; \quad D_{12} = s; \quad D_{22} = t. \tag{VII.29}$$

În tabelul VII.7 sînt date expresiile ecuațiilor diferențiale de echilibru.

3.8. Deformațiile învelitorilor subțiri, relații între deformații și deplasări în teoria de membrană

Conform notațiilor de la pag. 1048 cîmpul vectorial al deplasărilor se exprimă prin ecuația

$$\mathbf{u}_1 = u^1\mathbf{R}_1 + u^2\mathbf{R}_2 + u^3\mathbf{r}_3. \tag{VII.30}$$

În cadrul *teoriei de membrană,* tensorul deformațiilor specifice de extensiune este format din următorii doi vectori

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^1 &= \varepsilon^{11}\mathbf{R}_1 + \varepsilon^{12}\mathbf{R}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \varepsilon^{21}\mathbf{R}_1 + \varepsilon^{22}\mathbf{R}_2. \end{aligned} \tag{VII.31}$$

Aplicînd principiul lucrului mecanic al forțelor virtuale rezultă

$$\int_A (\alpha_1\boldsymbol{\varepsilon}^1 \cdot \delta\mathbf{n}^1 + \alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}^2 \cdot \delta\mathbf{n}^2)\, dx_1 dx_2 = \int_A (\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{p})\, dx_1 dx_2. \tag{VII.32}$$

Tabelul VII.6

Ecuaţiile de echilibru în teoria de încovoiere în coordonate carteziene, raportate la triedrul $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{r}_3$

	Componentele vectorului $\mathbf{n}^1$	Componentele vectorului $\mathbf{n}^2$	Componentele încărcării	
Proiecţia pe $\mathbf{R}_1$	$\partial_1 n^{11} - \dfrac{pqs - r\alpha_2^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} n^{13}$	$+ \partial_2 n^{21} - \dfrac{pqt - s\alpha_2^2}{(1+p^2+q^2)} n^{23}$	$+ pP_3 + X_1$	$= 0$
Proiecţia pe $\mathbf{R}_2$	$\partial_1 n^{12} - \dfrac{pqr - s\alpha_1^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} n^{13}$	$+ \partial_2 n^{22} - \dfrac{pqs - t\alpha_1^2}{(1+p^2+q^2)} n^{23}$	$+ qP_3 + X_2$	$= 0$
Proiecţia pe $\mathbf{r}_3$	$rn^{11} + sn^{12} - (1+p^2+q^2)\partial_1 n^{13}$	$+ tn^{22} + sn^{21} - (1+p^2+q^2)\,\partial_2 n^{23}$	$+ \mathfrak{Z}_3$	$= 0$

	Componentele vectorului $\mathbf{m}_1$	Componentele vectorului $\mathbf{m}_2$	Componentele $\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{R}_1$	Componentele $\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{R}_2$	Componentele încărcării	
Proiecţia pe $\mathbf{R}_1$	$\partial_1 m_{11}$	$\partial_2 m_{21}$	$+ n^{13} \operatorname{cotg} \chi$	$+ n^{23} \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 \sin \chi}$	$+ \alpha_1\alpha_2 \sin \chi \, \mathfrak{M}^1$	$= 0$
Proiecţia pe $\mathbf{R}_2$	$-\partial_1 m_{12}$	$-\partial_2 m_{22}$	$- n^{13} \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 \sin \chi}$	$- n^{23} \operatorname{cotg} \chi$	$+ \alpha_1\alpha_2 \sin \chi \, \mathfrak{M}^2$	$= 0$
Proiecţia pe $\mathbf{r}_3$	$m_{11}D_{11} - m_{12}D_{12}$	$- m_{22}D_{22} + m_{21}D_{12}$	$+ \alpha_1\alpha_2 N^{12}$	$- \alpha_1\alpha_2 N^{12}$	$+ \alpha_1\alpha_2 \sin \chi \, \mathfrak{M}^3$ *	$= 0$

* $\mathfrak{M}^3 = 0$ prin ipoteză.

Tabelul VII.7

Ecuațiile de echilibru în teoria de încovoiere în aproximația Vlasov în coordonate curbilinii raportate la triedrul $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$

	Componentele vectorului $\mathbf{n}^1$	Componentele vectorului $\mathbf{n}^2$	Componentele încărcării	
Proiecția pe $\mathbf{r}_1$	$+ \partial_1 n^{11}$	$+ \partial_2 n^{21}$	$+ X_1$	$= 0$
Proiecția pe $\mathbf{r}_2$	$+ \partial_1 n^{12}$	$+ \partial_2 n^{22}$	$+ X_2$	$= 0$
Proiecția pe $\mathbf{r}_3$	$+ rn^{11} + sn^{12} + \partial_1 n^{13}$	$+ sn^{21} + rn^{22} + \partial_2 n^{23}$	$+ X_3$	$= 0$

	Componentele vectorului $\mathbf{m}_1$	Componentele vectorului $\mathbf{m}_2$	Componentele vectorului $\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{r}_1$	Componentele vectorului $\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{r}_2$	Componentele încărcării	
Proiecția pe $\mathbf{r}_1$	$+ \partial_1 m_{11}$	$+ \partial_2 m_{21}$		$+ n^{23}$	$+ \mathfrak{M}_1$	$= 0$
Proiecția pe $\mathbf{r}_2$	$- \partial_1 m_{12}$	$- \partial_2 m_{22}$	$- n^{13}$		$+ \mathfrak{M}_2$	$= 0$
Proiecția pe $\mathbf{r}_3$	$rm_{11} - sm_{12}$	$+ sm_{21} - tm_{22}$	$+ n^{12}$	$- n^{21}$		$= 0$

Înlocuind conform primei relații (VII.26)

$$\delta \mathbf{p} = -\partial_1(\delta \mathbf{n}^1) - \partial_2(\delta \mathbf{n}^2) \qquad \text{(VII.33)}$$

în membrul doi al ecuației (VII.32) și efectuînd integrarea prin părți a membrului doi, cunoscînd că $\delta \mathbf{n}^1$ și $\delta \mathbf{n}^2$ pe contur sînt egali cu zero, se obține egalitatea

$$\int (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{p}) dx_1 dx_2 = \int (\delta \mathbf{n}^1 \cdot \partial_1 \mathbf{u} + \delta \mathbf{n}^2 \cdot \partial_2 \mathbf{u}) dx_1 dx_2. \qquad \text{(VII.34)}$$

Trecînd noua formă a membrului doi în partea din stînga a egalității (VII.32) și grupînd termenii cu același factor comun se găsește:

$$\int \{\delta \mathbf{n}^1(\alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \partial_1 \mathbf{u}) + \delta \mathbf{n}^2(\alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \partial_2 \mathbf{u})\} dx_1 dx_2 = 0. \qquad \text{(VII.35)}$$

Întrucît $\delta \mathbf{n}^i$ $(i = 1,2)$ pot avea orice valori, pentru a satisface în toate cazurile egalitatea scrisă, trebuie ca factorii care îi multiplică să se anuleze.

Se obțin astfel două ecuații vectoriale:

$$\alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \partial_1 \mathbf{u}; \qquad \alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \partial_2 \mathbf{u} \qquad \text{(VII.36)}$$

care dau loc la patru ecuații scalare:

$$\varepsilon^{11} = \frac{\partial_1 \mathbf{u}\, \mathbf{R}^1}{\alpha_1}; \qquad \varepsilon^{21} = \frac{\partial_2 \mathbf{u}\, \mathbf{R}^1}{\alpha_2}$$

$$\varepsilon^{12} = \frac{\partial_1 \mathbf{u}\, \mathbf{R}^2}{\alpha_1}; \qquad \varepsilon^{22} = \frac{\partial_2 \mathbf{u}\, \mathbf{R}^2}{\alpha_2}. \qquad \text{(VII.37)}$$

Recunoscînd semnificația de componente contravariante a expresiilor de la numărătorul ecuațiilor (VII.37), se obțin pentru vectorii primelor derivate ale deplasărilor următoarele expresii:

$$\partial_1 \mathbf{u} = (\alpha_1 \varepsilon^{11}) \mathbf{R}_1 + (\alpha_1 \varepsilon^{12}) \mathbf{R}_2$$

$$\partial_2 \mathbf{u} = (\alpha_2 \varepsilon^{21}) \mathbf{R}_1 + (\alpha_2 \varepsilon^{22}) \mathbf{R}_2. \qquad \text{(VII.38)}$$

Expresiile dezvoltate ale deformațiilor specifice ε^{11}, ε^{12}, ε^{21} și ε^{22} precum și rotirile $\varkappa^{11}$, $\varkappa^{12}$ și $\varkappa^{22}$, funcție de componentele deplasărilor u^i $(i = 1, 2, 3)$, în teoria de încovoiere, aproximația Vlasov, sînt:

Deformații de extensiune:

$$\varepsilon^{11} = \partial_1 u^1 - u^3 r$$

$$\varepsilon^{22} = \partial_2 u^2 - u^3 t$$

$$\varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} = \gamma^{12} = \partial_1 u^2 + \partial_2 u^1 - 2u^3 s. \qquad \text{(VII.39)}$$

Deformații de rotire:

$$\varkappa^{11} = +\partial_{11} u^3$$

$$\varkappa^{12} = +2\partial_{12} u^3$$

$$\varkappa^{22} = +\partial_{22} u^3. \qquad \text{(VII.40)}$$

3.9. Relaţii între deformaţii şi deplasări în teoria de încovoiere

În cadrul *teoriei de încovoiere* se consideră deplasările compuse din două cîmpuri vectoriale (fig. VII. 29, *a*) ; **u**, caracterizînd translaţiile şi Φ rotirile (fig. VII. 29, *b*), expresiile lor sînt :

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{R}_1 + u^2\mathbf{R}_2 + u^3\mathbf{r}_3 ; \qquad \mathbf{\Phi} = \Phi^1\mathbf{R}_1 + \Phi^2\mathbf{R}_2 + \varphi^3\mathbf{r}_3 ; \qquad \text{(VII.41)}$$

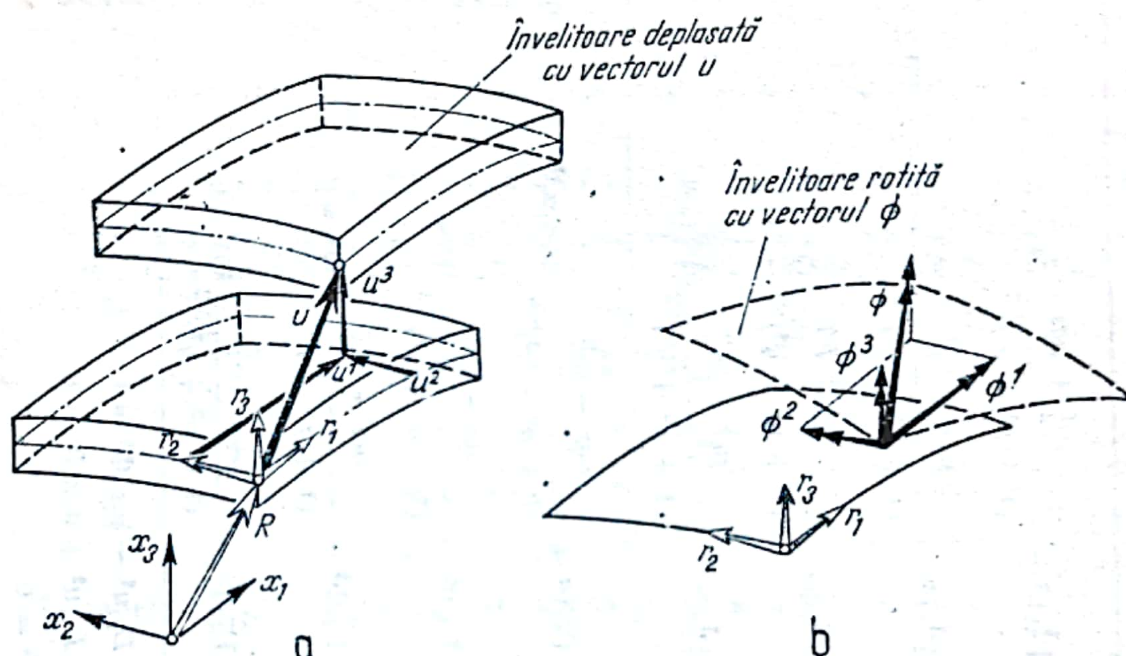


Fig. VII.29

tensorul deformaţiilor specifice de extensiune este format tot din doi vectori care de data aceasta sînt

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \varepsilon^{11}\mathbf{R}_1 + \varepsilon^{12}\mathbf{R}_2 + \varepsilon^{13}\mathbf{r}_3 ; \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \varepsilon^{21}\mathbf{R}_1 + \varepsilon^{22}\mathbf{R}_2 + \varepsilon^{23}\mathbf{r}_3 ; \qquad \text{(VII.42)}$$

tensorul deformaţiilor specifice de încovoiere este format din următorii doi vectori :

$$\boldsymbol{\varkappa}^1 = \varkappa^{11}\mathbf{R}_1 - \varkappa^{12}\mathbf{R}_2 ; \qquad \boldsymbol{\varkappa}^2 = \varkappa^{21}\mathbf{R}_1 - \varkappa^{22}\mathbf{R}_2 . \qquad \text{(VII.43)}$$

Aplicînd principiul lucrului mecanic al forţelor virtuale rezultă

$$\int (\alpha_1\boldsymbol{\varepsilon}^1\cdot\delta\mathbf{n}^1 + \alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}^2\cdot\delta\mathbf{n}^2 + \alpha_1\boldsymbol{\varkappa}^1\cdot\delta\mathbf{m}^1 + \alpha_2\boldsymbol{\varkappa}^2\cdot\delta\mathbf{m}^2)\,dx_1dx_2 =$$

$$= \int (\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{p} + \mathbf{\Phi}\delta\mathbf{m})dx_1dx_2 ; \qquad \text{(VII.44)}$$

Tabelul VIII.8

Ecuații de deformații și deplasări în teoria de încovoiere

Proiecții pe $\mathbf{R}_1$	$\alpha_1\varepsilon^{11} - \partial_1 u^1 - \Gamma_{11}^1 u^1 - \Gamma_{21}^1 u^2 - \dfrac{-r\alpha_2^2 + pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} u^3 = 0$ $\alpha_2\varepsilon^{21} - \partial_2 u^1 - \Gamma_{12}^1 u^1 - \Gamma_{22}^1 u^2 - \dfrac{pqs - \alpha_1^2 t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} u^3 - \Phi^3\alpha_1\alpha_2 \sin\chi = 0$ $\alpha_1\varkappa^{11} - \partial_1\Phi^1 - \Gamma_{11}^1\Phi^1 - \Gamma_{21}^1\Phi^2 - \dfrac{-r\alpha_2^2 + pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\Phi^3 = 0$ $\alpha_2\varkappa^{12} - \partial_2\Phi^1 - \Gamma_{12}^1\Phi^1 - \Gamma_{22}^1\Phi^2 - \dfrac{pqt - s\alpha_2^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\Phi^3 = 0$
Proiecții pe $\mathbf{R}_2$	$\alpha_1\varepsilon^{12} - \partial_1 u^2 - \Gamma_{11}^2 u^1 - \Gamma_{21}^2 u^2 - \dfrac{pqr - s\alpha_1^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} + \alpha_1\alpha_2\Phi^3 \sin\chi = 0$ $\alpha_2\varepsilon^{22} - \partial_2 u^2 - \Gamma_{12}^2 u^1 - \Gamma_{22}^2 u^2 - \dfrac{pqs - \alpha_1^2 t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} u^3 = 0$ $\alpha_1\varkappa^{12} - \partial_1\Phi^2 - \Gamma_{11}^2\Phi^1 - \Gamma_{21}^2\Phi^2 - \dfrac{pqr - s\alpha_1^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\Phi^3 = 0$ $\alpha_2\varkappa^{22} - \partial_2\Phi^2 - \Gamma_{12}^2\Phi^1 - \Gamma_{22}^2\Phi^2 - \dfrac{pqs - \alpha_1^2 t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\Phi^3 = 0$
Proiecții pe $\mathbf{r}_3$	$\alpha_1\varepsilon^{13} - \partial_1 u^3 - D_{11}u^1 - D_{21}u^2 - \alpha_1\alpha_2\Phi^2 = 0$ $\alpha_2\varepsilon^{23} - \partial_2 u^3 - D_{12}u^1 - D_{22}u^2 + \alpha_1\alpha_2\Phi = 0$ $+ \partial_1\Phi^3 + D_{11}\Phi^1 + D_{21}\Phi^2 = 0$ $+ \partial_2\Phi^3 + D_{12}\Phi^1 + D_{22}\Phi^2 = 0$

înlocuind conform relațiilor (VII. 26) în membrul doi al relației de mai înainte, expresiile

$$\delta \mathbf{p} = -\partial_1(\delta \mathbf{n}^1) - \partial_2(\delta \mathbf{n}^2)$$
$$\delta \mathbf{m} = -\partial_1(\delta \mathbf{m}^1) - \partial_2(\delta \mathbf{m}^2) - \mathbf{R}_1 \wedge \delta \mathbf{n}^1 - \mathbf{R}_2 \wedge \delta \mathbf{n}^2$$

și efectuînd integrarea prin părți a membrului doi se obține, după trecerea rezultatelor în membrul întîi gruparea de factori

$$\int \{\delta \mathbf{n}^1(\alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \partial_1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\Phi} \wedge \mathbf{R}_1) + \delta \mathbf{n}^2(\alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \partial_2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\Phi} \wedge \mathbf{R}_2) + + \delta \mathbf{m}^1(\alpha_1 \boldsymbol{\varkappa}^1 - \partial_1 \boldsymbol{\Phi}) + \delta \mathbf{m}^2(\alpha_2 \boldsymbol{\varkappa}^2 - \partial_2 \boldsymbol{\Phi}) dx_1 dx_2. \qquad \text{(VII.45)}$$

Întrucît vectorii $\delta \mathbf{n}^1$, $\delta \mathbf{n}^2$, $\delta \mathbf{m}^1$, $\delta \mathbf{m}^2$ sînt independenți între ei și pot fi arbitrar aleși, parantezele care înmulțesc fiecare din acești termeni trebuie să se anuleze. Se obțin astfel 4 ecuații vectoriale

$$\begin{aligned} \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \partial_1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\Phi} \wedge \mathbf{R}_1 &= 0 \\ \alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \partial_2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\Phi} \wedge \mathbf{R}_2 &= 0 \\ \alpha_1 \boldsymbol{\varkappa}^1 - \partial_1 \boldsymbol{\Phi} &= 0 \\ \alpha_2 \boldsymbol{\varkappa}^2 - \partial_2 \boldsymbol{\Phi} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII.46)}$$

În tabelul VII.8 s-au explicitat și detaliat ecuațiile de mai sus.

3.10. Relații de compatibilitate

1) Pe baza *principiului lucrului mecanic virtual* se pot pune în evidență și *relațiile de compatibilitate* între deformații sau între deplasări, necesare să confirme continuitatea corpului deformat.

Considerînd *învelitoarea subțire neîncărcată*, pentru *creșteri diferite date eforturilor secționale*, lucrul mecanic total în situații de compatibilitate trebuie să se anuleze, ceea ce se scrie

$$\int (\alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 \cdot \delta \mathbf{n}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 \cdot \delta \mathbf{n}^2 + \alpha_1 \boldsymbol{\varkappa}^1 \cdot \delta \mathbf{m}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{\varkappa}^2 \cdot \delta \mathbf{m}^2)\, dx_1 dx_2 = 0. \qquad \text{(VII.47)}$$

Relațiile de echilibru (VII.26) în acest caz devin

$$\begin{aligned} \partial_1(\delta \mathbf{n}^1) + \partial_2(\delta \mathbf{n}^2) &= 0 \\ \partial_1(\delta \mathbf{m}^1) + \partial_2(\delta \mathbf{m}^2) + \mathbf{R}_1 \wedge \delta \mathbf{n}^1 + \mathbf{R}_2 \wedge \delta \mathbf{n}^2 &= 0; \end{aligned} \qquad \text{(VII.48)}$$

ele pot fi identic satisfăcute după *Lurie* [25], de două funcții vectoriale

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F^1 \mathbf{R}_1 + F^2 \mathbf{R}_2 + F^3 \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{H} &= H^1 \mathbf{R}_1 + H^2 \mathbf{R}_2 + H^3 \mathbf{r}_3 \end{aligned} \qquad \text{(VII.49)}$$

definite prin relaţiile de legătură

$$\partial_2\mathbf{F} = \delta\mathbf{n}^1; \qquad \partial_1\mathbf{F} = -\,\delta\mathbf{n}^2$$

$$\partial_2\mathbf{H} = \delta\mathbf{m}^1 + \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{F} \tag{VII.50}$$

$$\partial_1\mathbf{H} = -\,\delta\mathbf{m}^2 - \mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{F}.$$

Înlocuind eforturile prin expresiile echivalente (VII.50), ecuaţia (VII.47) devine

$$\int\{\alpha_1\boldsymbol{\varepsilon}^1\cdot\partial_2\mathbf{F} - \alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}^2\cdot\partial_1\mathbf{F} + \alpha_1\boldsymbol{\varkappa}^1(\partial_2\mathbf{H} - \mathbf{R}_2\wedge\mathbf{F}) - \alpha_2\boldsymbol{\varkappa}^2\cdot(\partial_1\mathbf{H} + \mathbf{R}_1\wedge\mathbf{F})\}\,dx_1dx_2 = 0.$$

În continuare, integrînd prin părţi, dînd factor comun funcţiile vectoriale **F** şi **H**, care pot fi arbitrar alese, în sensul că pot fi date valori independente celor 6 scalari F_1, F_2, F_3 ş :H_1, H_2, H_3, se obţin două ecuaţii vectoriale de condiţie care sînt

$$\begin{aligned}&\partial_1(\alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}^2) - \partial_2(\alpha_1\boldsymbol{\varepsilon}^1) + \alpha_2\mathbf{R}_1\wedge\boldsymbol{\varkappa}^2 - \alpha_1\mathbf{R}_2\wedge\boldsymbol{\varkappa}^1 = 0\\ &\partial_1(\alpha_2\boldsymbol{\varkappa}^2) - \partial_2(\alpha_1\boldsymbol{\varkappa}^1) = 0.\end{aligned} \tag{VII.51}$$

Este de observat că în cazul problemei Love scalarii F_i şi H_i ($i = 1, 2, 3$) sînt corelaţi suplimentar prin două ecuaţii care, exprimă că trebuie să fie nule componentele momentelor după direcţiile normalelor la învelitoare, ceea ce se scrie

$$\delta\mathbf{m}^1\cdot\mathbf{r}_3 = \delta\mathbf{m}^2\cdot\mathbf{r}_3. \tag{VII.52}$$

Înlocuind pe $\delta\mathbf{m}^1$ şi $\delta\mathbf{m}^2$ prin relaţiile deduse din ecuaţiile (VII. 50) se pun în evidenţă două ecuaţii scalare de legătură între H^1, H^2, H^3 şi F^1, F^2 care sînt

$$\begin{aligned}&\partial_2H^3 + H^1D_{12} + H^2D_{22} + \alpha_1\alpha_2F^2 = 0\\ &\partial_1H^3 + H^1D_{11} + H^2D_{12} + \alpha_1\alpha_2F^1 = 0.\end{aligned} \tag{VII.53}$$

Rezolvate în raport cu H_1 şi H_2 relaţiile (VII. 53) devin

$$\begin{aligned}H^1 &= \frac{1}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}}\,[\partial_1H^3D_{22} - \partial_2H^3D_{12} - \alpha_1\alpha_2(F^1D_{22} - F^2D_{12})]\\ H^2 &= \frac{1}{D_{12}^2 - D_{11}D_{22}}\,[\partial_2H^3D_{11} - \partial_1H^3D_{12} + \alpha_1\alpha_2(F^1D_{12} + F^2D_{11})].\end{aligned} \tag{VII.54}$$

Transcriind în ecuaţia (VII. 50) vectorii **F** şi **H** prin ecuaţiile lor funcţie de componente scalare şi în continuare înlocuind pe H^1 şi H^2 cu expresiile (VII. 54) se vor putea grupa termenii sub semnul integral în raport cu 4 factori comuni F^1, F^2, F^3 şi H^3, obţinînd în interiorul parantezelor cele *4 ecuaţii de compatibilitate necesare*, ca împreună cu cele *6 ecuaţii de echilibru* să permită determinarea celor 10 eforturi interioare necunoscute.

3) Pentru aproximaţia lui V. Z. Vlasov, relaţiile (VII. 39) permit punerea în evidenţă a *relaţiei de compatibilitate* între *deformările de extensiune* şi *deplasările pe direcţia normalei* la suprafaţa mediană; ea se deduce prin sumarea celor trei ecuaţii care au fost în prealabil derivate, aplicînd în ordine fiecăreia unui din operatorii: ∂_{22}, ∂_{11}, $-\partial_{12}$, rezultînd

$$\partial_{22}\varepsilon^{11} + \partial_{11}\varepsilon^{22} - \partial_{12}\varepsilon^{12} = -D(u^3). \qquad \text{(VII.55)}$$

3.11. Relaţii între eforturi şi deformaţii

În *teoria de membrană* starea locală de eforturi este static determinată; pentru a cunoaşte deformaţiile pe care le suferă învelitoarea sub acţiunea acestor eforturi este necesar să se precizeze un număr de relaţii fizice numite şi *constitutive*, egal cu cel al deformaţiilor suprafeţei în planul ei (provocînd *extensiunea* sau *contractarea*); în cadrul elasticităţii liniare, pe baza modelului fizic al lui *Hooke*, relaţiile dintre deformaţiile specifice şi eforturile secţionale sînt:

$$\varepsilon^{11} = \frac{1}{Eh}(N^{11} - \mu N^{22});\ \varepsilon^{2} = \frac{1}{Eh}(N^{22} - \mu N^{11});\ \gamma^{12} = \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} = \frac{2(1+\mu)}{Eh}N^{12}. \qquad \text{(VII.56)}$$

Eforturile pot fi scrise explicit funcţie de deformaţii, astfel:

$$N^{11} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon^{11} + \mu\varepsilon^{22});\ N^{22} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon^{22} + \mu\varepsilon^{11});\ N^{12} = N^{21} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma^{12}. \qquad \text{(VII.57)}$$

În cazul *problemei Love*, ecuaţiile de echilibru în număr de 6 conţin 10 necunoscute), componentele scalare ale vectorilor $\mathbf{N}^i$ şi $\mathbf{M}^i (i = 1, 2)$; pentru precizarea lor se mai pot defini *4 ecuaţii de continuitate sau compatibilitate între deformaţii şi deplasări* (conform § 3.10); aceste ecuaţii introduc însă alte *10 necunoscute scalare*, componentele vectorilor $\overline{\varepsilon}^i$, $\overline{\varkappa}^i$ $(i = 1, 2)$ astfel încît *relaţiile fizice* între eforturi şi deformaţii în număr de 10 devin absolut necesare rezolvării problemei. Folosind acelaşi model al lui *Hooke* se scrie în completarea ecuaţiilor (VII. 57) următoarele relaţii între momente şi rotiri ale suprafeţei mediane:

$$M^{12} = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{h^3}{12}(\varkappa^{12} + \mu\varkappa^{21});\quad M^{21} = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{h^3}{12}(\varkappa^{21} + \mu\varkappa^{12})$$
$$M^{22} = \frac{E}{1+\mu}\,\frac{h^3}{12}\varkappa^{22};\qquad M^{11} = \frac{E}{1+\mu}\,\frac{h^3}{12}\varkappa^{11}. \qquad \text{(VII.58)}$$

Eforturile N^{13} şi N^{23}, din cauza ipotezelor Kirchhoff care stabilesc că: $\varepsilon^{13} = \varepsilon^{23} = 0$, nu dau loc la deformaţii independente şi ca urmare pentru ele nu se scriu relaţii de legătură.

4. REZOLVAREA PROBLEMEI ÎNVELITORILOR SUBȚIRI

Cu ajutorul expresiilor deduse în capitolele precedente se pot preciza stările de eforturi și de deformații la învelitori subțiri în cadrul *teoriei de membrană* sau a *teoriei de încovoiere*.

În cele ce urmează se expun cazurile generale de rezolvare pentru cele două trepte de aproximație.

4.1. Starea de eforturi în teoria de membrană

1) Cunoscînd sistemul de trei ecuații expus în tabelul VII. 5 se introduce o funcție scalară de forțe F legată de eforturile secționale din *teoria de membrană* prin relațiile:

$$\begin{aligned} n^{11} &= \partial_{22}F + \int (pP_3 - X_1)\mathrm{d}x_1 \\ n^{12} &= -\,\partial_{12}F \\ n^{22} &= \partial_{11}F + \int (qP_3 - X_2)\mathrm{d}x_2. \end{aligned} \tag{VII.59}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuațiile din tabelul VII.4 primele două sînt identic satisfăcute, iar ecuația a treia devine:

$$D_{11}\partial_{22}F - 2D_{12}\partial_{12}F + D_{22}\partial_{11}F + \mathfrak{Z} = 0 \tag{VII.60}$$

în care:

$$\mathfrak{Z} = +\,(1 + p^2 + q^2)P_3 + \\ + r\int (pP_3 - X_1)\mathrm{d}x_1 + t\int (qP_3 - \\ - X_2)\mathrm{d}x_2. \tag{VII.61}$$

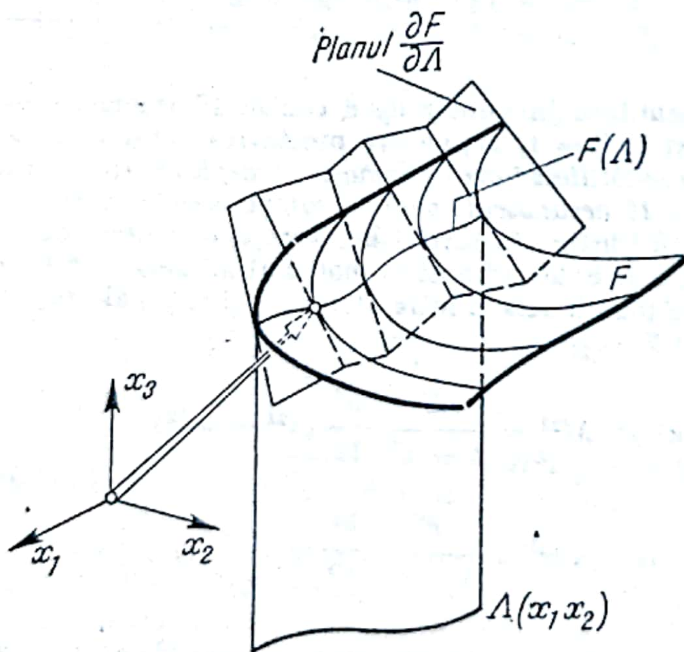


Fig. VII.30

Ecuația diferențială (VII.60) este de ordinul doi, coeficienții D_{11}, D_{12}, D_{22} depinzînd exclusiv de x_1 și x_2 în conformitate cu notațiile de la pag. 1069.

Rezolvarea ecuației (VII. 60) constă în a defini o *suprafață* integrală, a cărei ecuație evident trebuie să *verifice* ecuația diferențială și în același timp pentru a fi bine *precizată*, să satisfacă o serie de *condiții de contact fixate pe margini*, sau *la limită pe o curbă oarecare.*

Aceste condiții se pun după *Cauchy* în lungul unei curbe precizată în spațiul dat asupra valorilor funcției căutate F, precum și a derivatelor ei $\partial_1 F$ și $\partial_2 F$; Cauchy a arătat că pentru a determina o soluție unică, condițiile de contact nu pot fi oricum alese și a denumit *caracteristice* seria de elemente, pentru care nu poate fi determinată o *suprafață integrală unică și bine definită* (problema devine nedeterminată), (fig. VII.30).

Hadamard s-a preocupat a ști condițiile care, adăugate ecuației diferențiale, sînt proprii pentru a descrie *o soluție integrală unică și bine precizată*, denumind *probleme bine puse* sau *corect puse*, pe cele care pot conduce la asemenea rezultate.

În continuare, este de arătat că imposibilitatea de a avea o soluție bine determinată, în cazul problemei lui Cauchy, apare atunci cînd este satisfăcută ecuația

$$D_{22}\mathrm{d}x_2^2 + 2D_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + D_{11}\mathrm{d}x_1^2 = 0. \qquad \text{(VII.62)}$$

Această relație (VII.62) diferențială ordinară în x_1 și x_2 coincide cu ecuația (VII.10) a direcțiilor asimptotice la suprafața mediană punînd în evidență *corespondența remarcabilă* [28] dintre *proprietățile geometrice diferențiale* ale punctelor de pe *suprafața mediană a învelitorii* și *caracterul ecuației rezolvante*, care exprimă în aceleași puncte echilibrul static în *teoria de membrană*.

2) Tipurile soluțiilor $(\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1)$ rezultînd din rezolvarea ecuației (VII.62) se clasează în trei cazuri, funcție de valoarea eliminantului ecuației (VII. 62) care apare mai evident scriind această ecuație sub forma

$$D_{22}\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^2 + 2\,D_{12}\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right) + D_{11} = 0. \qquad \text{(VII.63)}$$

Cînd $D_{12}^2 - D_{11}D_{22} < 0$ *direcțiile caracteristice* precum și cele ale *asimptotelor sînt imaginare*. Învelitoarea de *tip elastic* și ecuația rezolvantă (VII.60) este tot de *tip eliptic*.

$D_{12}^2 - D_{11}D_{22} > 0$ *direcțiile caracteristice* și cele *asimptotice sînt reale*. Învelitoarea și ecuația diferențială sînt de *tip hiperbolic*.

$D_{12}^2 - D_{11}D_{22} = 0$ *direcțiile caracteristice* la fel cu *liniile asimptotice* de pe suprafața mediană sînt *reale și confundate*; ecuația diferențială ca și suprafața mediană este de *tip parabolic*.

3) În cazul simplu al *suprafețelor de gradul doi* descrise de ecuația generală

$$x_3 = \frac{r}{2}\,x_1^2 + \frac{t}{2}\,x_2^2 + s x_1 x_2 \qquad \text{(VII.64)}$$

la care derivatele secunde: $\partial_{22}x_3 = r$; $\partial_{12}x_3 = s$; $\partial_{11}x_3 = t$ sînt constante, se expun tipurile de rezolvări posibile în cele trei cazuri definite mai înainte.

4) Cînd $s^2 - rt < 0$ *direcțiile caracteristice* sînt imaginare, expresiile lor în termeni finiți fiind

$$x_2 = \left[-\frac{s}{t} - \frac{i\sqrt{rt - s^2}}{t}\right]x_1 + X_1(x_2)$$
$$x_2 = \left[-\frac{s}{t} + \frac{i\sqrt{rt - s^2}}{t}\right]x_1 + X_2(x_2). \qquad \text{(VII.65)}$$

Ecuațiile (VII.65) s-au obținut prin integrarea celor două soluții $\frac{dx_2}{dx_1}$ date de ecuația (VII.63).

Notînd partea reală $x_2 + \frac{s}{t} x_1 = \xi_1$ și partea imaginară $t\sqrt{rt - s^2}\, x_1 = i\xi_2$, dacă se raportează ecuația (VII.60) la noile variabile ξ_1 și ξ_2, se obține forma canonică

$$\frac{rt - s^2}{t} \left[\partial_{\xi_1\xi_1} F + \partial_{\xi_2\xi_2} F\right] = \mathfrak{F} \qquad \text{(VII.66)}$$

Direcțiile ξ_1 și ξ_2, așa cum rezultă din înlocuirile făcute, sînt ortogonale între ele și orientate după liniile principale de curbură ale suprafeței mediane. Scriind mai departe conform ecuațiilor (VII.59).

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_1,\xi_1} F &= n^{\xi_2,\xi_2} + f_1(\xi_1, \xi_2) \\ \partial_{\xi_2,\xi_2} F &= n^{\xi_1,\xi_1} + f_2(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \qquad \text{(VII.67)}$$

f_1 și f_2 fiind cunoscute date de încărcarea de pe învelitoare și înlocuind în relația (VII.66) expresiile (VII.67) se constată că echilibrul local este asigurat numai prin prezența eforturilor secționale normale $n^{\xi_1\xi_1}$ și $n^{\xi_2\xi_2}$ *dirijate după liniile principale de curbură* (fig. VII.31, *a*), suma valorii acestor eforturi rezultînd direct din ecuația (VII.66) care are toate elementele cunoscute. În continuare, la învelitorile de *tip eliptic* se pune problema departajării valorilor $n^{\xi_1\xi_1}$ și $n^{\xi_2\xi_2}$ precum și determinarea eforturilor $n^{\xi_1\xi_2}$. Pentru aceasta este necesar să se precizeze în ansamblu soluția integrală funcție de condițiile de contur.

Dacă *linia de contur este închisă*, se poate pune *problema lui Dirichlet generalizată*, care constă în a *determina suprafața integrală în interiorul unui domeniu A limitat de contur închis ales arbitrar C*, cînd se dau în lungul lui valorile funcției necunoscute F, astfel încît să reprezinte o linie continuă (fig. VII.31, *b*).

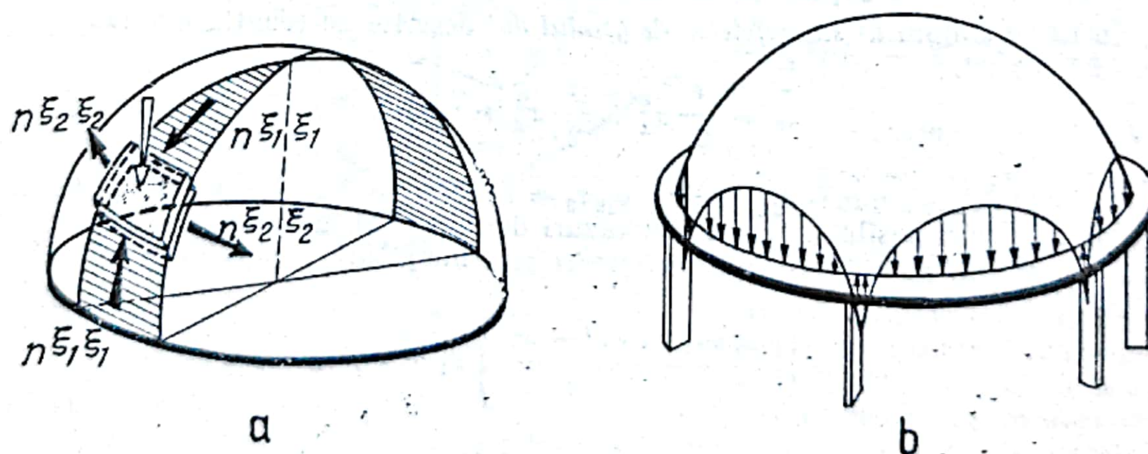


Fig. VII.31

Evident, precizarea valorilor funcției necunoscute F trebuie astfel făcută încît rezultanta eforturilor de pe contur să echilibreze încărcarea totală de pe învelitoare (de notat că eforturile normale de pe contur sînt date de expresia):

$$n^c = \partial_{\eta_2\eta_2}F - \int (pP_3 + X_i)\mathrm{d}\eta_1 \qquad \text{(VII.68)}$$

în care η_1 este pe direcția normală la linia conturului iar η_2 se măsoară în lungul conturului.

5) Soluția integrală se poate construi și cînd în lungul conturului C se cunosc valorile derivatei normale $(\partial F/\partial\eta_1)_C$ a funcției necunoscute (*Problema lui Neumann generalizată*). Precizarea valorilor pentru $\partial F/\partial\eta_1$ trebuie să se facă și în acest caz astfel încît *rezultanta eforturilor date* de expresia (VII. 68) să coincidă cu *rezultanta încărcării* exterioare.

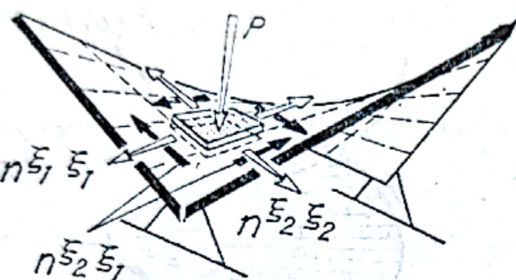


Fig. VII.32

6) Cînd $s^2 - rt > 0$ *liniile caracteristice ca și cele asimptotice sînt reale* (fig. VII.32).

Revenind la cele două expresii care dau soluțiile $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$ rezultate din ecuația (VII.62) se obțin prin integrare

$$x_2 + \left[\frac{s}{t} + \frac{\sqrt{s^2 - rt}}{t}\right]x_1 = \xi_1$$
$$x_2 + \left[\frac{s}{t} - \frac{\sqrt{s^2 - rt}}{t}\right]x_1 = \xi_2 \qquad \text{(VII.69)}$$

se aleg noi variabile ξ_1 și ξ_2 ceea ce reprezintă un sistem de axe format din două linii asimptotice și se raportează ecuația (VII.60) la aceste axe obținînd forma canonică

$$4\,\frac{rt - s^2}{t}\,\partial_{\xi_1\xi_2}F = +\,\mathfrak{I}\,. \qquad \text{(VII.70)}$$

Ținînd seama de semnificația $-\partial_{\xi_1\xi_2}F = n^{\xi_1\xi_2}$ ecuația (VII.70) pune în evidență posibilitatea de a echilibra local elementul diferențial de învelitoare numai prin intervenția eforturilor tangențiale $n^{\xi_1\xi_2}$; se constată astfel că la învelitorile de *tip hiperbolic* eforturile $n^{\xi_1\xi_2}$ sînt *primordinale*, valoarea lor rezultînd în fiecare punct direct din ecuația algebrică (v. fig. VII.32)

$$n^{\xi_1\xi_2} = -\frac{\mathfrak{I}t}{4(s^2 - rt)}\,. \qquad \text{(VII.71)}$$

Eforturile normale $n^{\xi_1\xi_1}$ și $n^{\xi_2\xi_2}$ se determină în continuare pe baza soluției integrale F a ecuației (VII.60); pentru determinarea ei se pun, în conformitate cu clasificarea făcută de *Piccard*, următoarele probleme:

Problema 1. Determinarea *soluției integrale* cunoscînd valorile funcției F pe două *curbe caracteristice secante* de familii diferite (fig.VII.33).

Problema 2. Se determină integrala cunoscînd valorile F precum și valorile uneia din derivatele parțiale ∂_1F sau ∂_2F pe o curbă C necaracteristică. (fig. VII.34).

Problema 3. Se dau valorile funcției F în lungul unei *curbe caracteristice* și a unei *curbe necaracteristice* (fig. VII.35) condiții suficiente pentru a determina *soluția integrală* F.

Problema 4. Se precizează valorile *funcției integrale căutate* F pe două curbe *necaracteristice de aceeași familie*, adică cuprinse în același cadran al sistemului de axe, format de *liniile asimptotice de pe* suprafață (fig. VII.36).

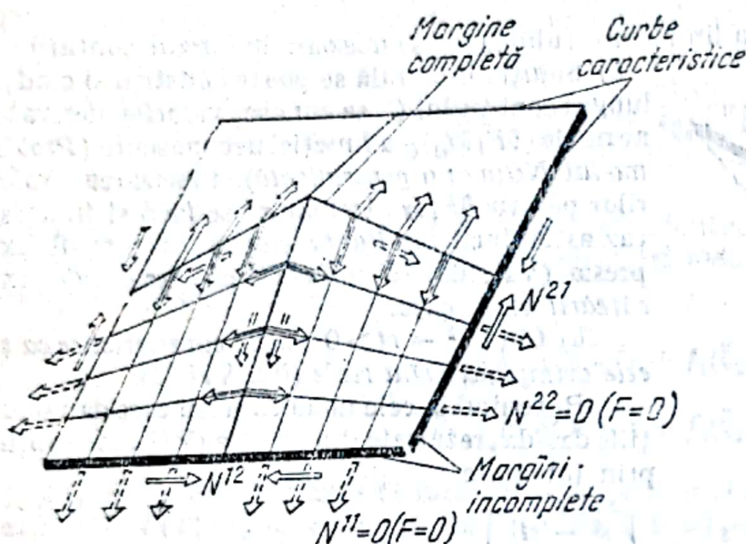


Fig. VII.33

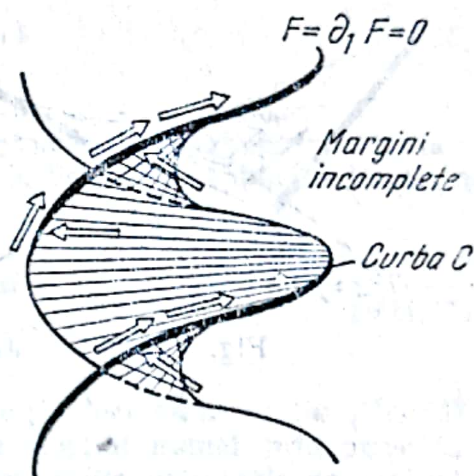


Fig. VII.34

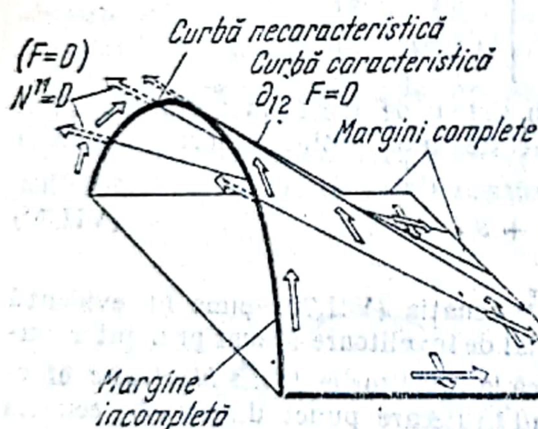


Fig. VII.35

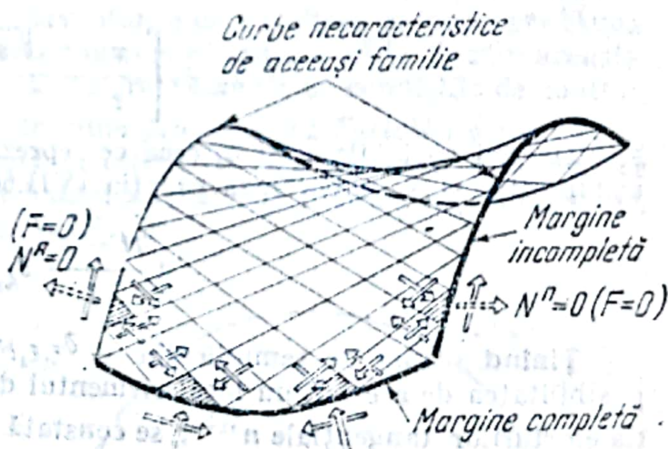


Fig. VII.36

7) Cînd $s^2 - rt = 0$ *direcțiile caracteristice* sînt reale și confundate. În acest caz, ecuația celor două direcții caracteristice confundate, în termeni finiți, este

$$x_2 + \frac{s}{t}\,x_1 = \zeta_1.$$

Alegînd noi variabile: $\xi_1 = \dfrac{x_1 t - x_2 s}{\sqrt{s^2 + t^2}}$ și $\xi_2 = \dfrac{x_1 t + x_2 s}{\sqrt{s^2 + t^2}}$,

ceea ce reprezintă raportarea la un sistem de axe, în care ξ_1 se măsoară în lungul unei direcții asimptotice (generatoarea cilindrului), iar ξ_2 perpendicular pe ξ_1. În cosecință ecuația (VII.60) devine

$$(r + t)\partial_{\xi_1\xi_1}F = \mathfrak{F} \qquad \text{(VII.72)}$$

întrucît $\partial_{\xi_1\xi_1}F = n^{\xi_2\xi_2} - \int (qP_3 + X_2)d\xi_2$ ecuația (VII.72) se poate scrie

$$(r + t)n^{\xi_2\xi_2} = \mathfrak{F} - (r + t)\int (qP_3 + X_2)\, d\xi_2 \qquad \text{(VII.73)}$$

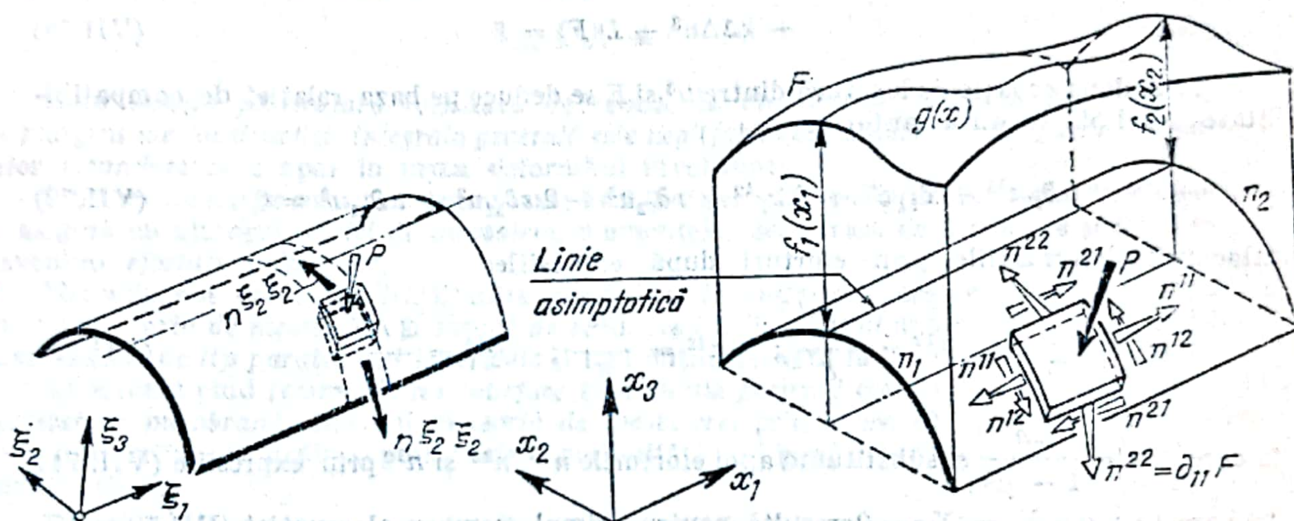


Fig. VII.37 Fig. VII.38

punind în evidență că echilibrul local se asigură prin intervenția *eforturilor normale tangente la liniile principale de curbură* (fig. VII.37).

În acest caz se poate determina o soluție integrală precizînd valorile f_1 și f_2 în lungul a două curbe necaracteristice n_1 și n_2 (fig. VII.38).

În partea a doua a acestei secțiuni se expun pentru diferite tipuri de învelitori, soluționări încadrate într-una din problemele expuse mai înainte.

4.2. Starea de eforturi în teoria de încovoiere pentru învelitori pleoștite

1) În cadrul aproximației lui *V. Z. Vlasov* după care metrica pe învelitoare se aproximează a fi egală cu metrica din plan, s-au dedus ecuațiile scalare de echilibru în teoria de încovoiere (v. tabelul VII.7).

Introducînd o funcție scalară de eforturi F și una de deformații u^3, față de care eforturile și momentele secționale se pot exprima prin:

$$n^{11} = \partial_{22}F - \int X_1 dx_1\, ;\; n^{22} = \partial_{11}F - \int X_2 dx_2\, ;\; n^{12} = n^{21} = -\partial_{12}F \qquad \text{(VII.74)}$$

$$m^{11} = k\partial_{11}u^3\, ;\; m^{22} = k\partial_{22}u^3\, ;\; m^{12} = k\partial_{12}u^3 \qquad \text{(VII.75)}$$

în care :

$$k = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \qquad \text{(VII.76)}$$

ecuațiile 1, 2 și 4, 5 din tabelul VII. 7 sînt identic satisfăcute, iar ecuația 3 din același tabel devine

$$+ r\partial_{22}F - 2\,s\partial_{12}F + t\partial_{11}F - k(\partial_{1111}u^3 + \partial_{1122}u^3 + \partial_{2222}u^3) = \mathfrak{Z} \qquad \text{(VII.77)}$$

sau, folosind notațiile operaționale indicate la pag. 1048, se transcrie

$$- k\Delta\Delta u^3 + D(F) = \mathfrak{Z} \qquad \text{(VII.78)}$$

2) A doua ecuație de legătură dintre u^3 și F se deduce pe baza relației de compatibilitate (VII.55) dedusă anterior

$$\partial_{22}\varepsilon^{11} + \partial_{11}\varepsilon^{22} - \partial_{12}\gamma^{12} + r\partial_{22}u^3 - 2\,s\partial_{12}u^3 + t\,\partial_{11}u^3 = 0 \qquad \text{(VII.79)}$$

înlocuind deformațiile prin eforturi după expresiile

$$\varepsilon^{11} = \frac{n^{11}}{d}; \qquad \varepsilon^{22} = \frac{n^{22}}{d}; \qquad \gamma^{12} = \frac{2\,n^{12}}{d} \qquad \text{(VII.80)}$$

în care: $d = \dfrac{Eh}{1-\mu^2}$ și substituind apoi eforturile n^{11}, n^{22} și n^{12} prin expresiile (VII. 74) în care se iau: $X_1 = X_2 = 0$ rezultă pentru primul membru al ecuației (VII.79)

$$\frac{1}{d}(\partial_{2222}F + 2\,\partial_{1122}F + \partial_{1111}F) = \frac{1}{d}\,\Delta\Delta F. \qquad \text{(VII.81)}$$

În continuare se înlocuiește rezultatul (VII.81) în ecuația (VII.79), care devine

$$\frac{1}{d}\,\Delta\Delta F + Du^3 = 0. \qquad \text{(VII.82)}$$

Introducînd o nouă funcție scalară V, prin intermediul căreia eforturile și deplasările se definesc

$$F = d\mathrm{D}V; \qquad u^3 = -\,\Delta\Delta V.$$

relația (VII.82) este identic satisfăcută iar ecuația (VII.78) se transformă în

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\,V + \frac{d}{k}\,DDV = \mathfrak{Z} \qquad \text{(VII.83)}$$

Ecuația (VII,83) este cu derivate parțiale de ordinul 8 în general cu *coeficienții variabili*; coeficienții ecuației sînt constanți la învelitori cu suprafața mediană de gradul doi (*paraboloizi de rotație, paraboloizi hiperbolici, învelitori cilindrice circulare*).

În ecuația (VII. 83) *primul termen din stînga reprezintă efectul momentelor încovoietoare* care se dezvoltă în placa învelitorii, iar următorul *acțiunea eforturilor de membrană* (axiale și tangențiale) cuprinse în fiecare punct în planul tangent la suprafața mediană.

Cele două stări de eforturi după cum reiese din ecuația de legătură dintre ele, sînt complet distincte, fiecare în parte în anumite condiții de margini putînd asigura echilibrul învelitorii.

3) Soluția ecuației (VII.83) se compune din *integrala generală a ecuației omogene asociate*, la care se adaugă integrala particulară a ecuației complete; se observă că pentru încărcările obișnuite în construcții, care sînt funcții cel mult de ordinul doi în x_1x_2, soluția particulară se poate obține cu ajutorul teoriei de membrană întrucît ea verifică identic expresia

$$\Delta\Delta\Delta\Delta V = 0. \tag{VII.84}$$

Cînd *soluția particulară* furnizată de teoria de membrană îndeplinește *condițiile de margini ale construcției, integrala generală este neglijabilă* ea reprezentînd *efectul momentelor secundare* care apar în urma deformării învelitorii.

Cînd *rezemarea pe contur* nu corespunde însă *ipotezei de membrană, echilibrul învelitorii* se asigură cu ajutorul *teoriei de încovoiere*, momentele secționale de *încovoiere și torsiune* devenind *eforturi principale*.

Nerealizarea compatibilității între *condițiile de margini* necesare construirii unei soluții în *teoria de membrană și modul de rezemare efectiv realizat* apare mai ales în cazul învelitorilor de *tip parabolic și hiperbolic* și mai puțin frecvent la învelitorile de *tip eliptic*.

4) Atunci cînd *rezemarea nu satisface în anumite porțiuni* condițiile corespunzătoare *ipotezei de membrană*, calculul în *teoria de încovoiere*, prin aceea că apare ca integrala unei diferențiale de ordin superior, oferă posibilități mai largi pentru a asigura echilibrul învelitorii.

Eforturile în acest caz rezultă din rezolvarea ecuației omogene asociate.

$$\Delta\Delta\Delta\Delta V + \frac{d}{k} DDV = 0. \tag{VII.85}$$

Caracterul acestei ecuații fiind dat de derivatele de ordinul cel mai mare este independent de forma suprafeței, care afectează numai operatorii D.

Cînd derivatele r, s, t sînt constante, ecuația se poate rezolva prin metoda separării variabilelor care conduce la *ecuații diferențiale cu coeficienți constanți de ordinul 8*. Metoda va fi expusă la învelitorile *cilindrice*, *învelitorile de translație* și *paraboloizi hiperbolici*.

4.3. Rezemarea învelitorilor pe contur

Pentru a satisface *teoria de membrană*, *reazemele* trebuie astfel concepute încît să poată prelua în fiecare punct de pe contur eforturile, situate în planul tangent la învelitoare, *normale și tangențiale*.

În acest sens, două situații pot interveni pe conturul învelitorii realizîndu-se:

— *margini complete* capabile să se încarce cu eforturi normale și tangențiale (fig. VIII.39,*a*);

— *margini incomplete* care pot prelua numai eforturi tangențiale aceasta fiind cea mai simplă rezemare posibilă (fig. VII.39, *b*) compatibilă cu *teoria de membrană*.

1) Ținînd seama de expunerea de la paragraful 4.1, pct. 2, rezultă că pentru învelitori de *tip eliptic* rezemarea trebuie făcută prin *margini complete sau incomplete*, proiectantul avînd latitudinea de a fixa cît mai convenabil variația reacțiunilor în lungul conturului, bineînțeles astfel încît rezultanta să echilibreze sarcinile exterioare.

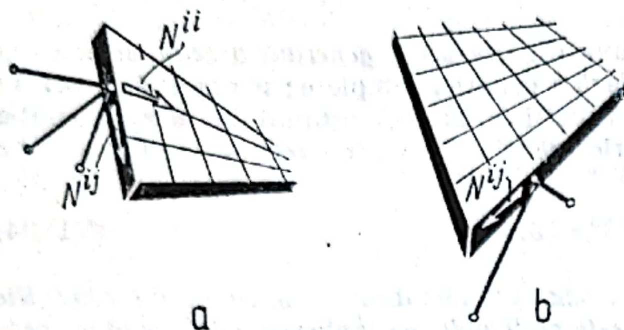


Fig. VII.39

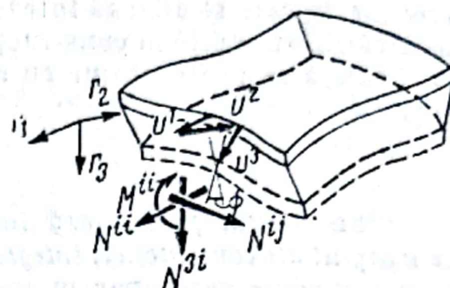


Fig. VII.40

— La învelitorile de *tip hiperbolic*, toate marginile trebuie construite astfel încît să preia eforturile *tangențiale* ce le revin, rămînînd de ales numai laturile pe care rezemarea trebuie să fie completă în conformitate cu problemele expuse la paragraful 4.1, pct. 5.

— Pentru *învelitorile de tip parabolic*, în porțiunile de contur limitate de generatoare, marginile trebuie să fie *complete*; în regiunile curbe ale conturului rezemarea poate fi *completă* sau *incompletă*, după cum convine din punct de vedere constructiv, determinînd în consecință eforturile din învelitoare.

2) În cadrul teoriei de încovoiere ecuația problemei fiind de *ordinul 8*, dacă rezemarea învelitorii se face după o *linie deschisă* (fig. VII.40), integrarea ecuației în lungul ei impune precizarea în fiecare punct a *8 constante* (care se referă la cele 4 eforturi acționînd în secțiunea de contact cu elementul marginal N^{ii}, N^{ij}, M^{ii}, N^{3i} și 4 deplasări u_1, u_2, u_3 și rotirea Φ).

3) Cînd *conturul este o linie închisă*, marginile trebuie astfel construite, încît să permită determinarea în fiecare punct a 4 constante (fig. VII.41), necesare cunoașterii eforturilor din secțiunea de contact N^{ii}, N^{ij}, M^{ij} și forța tăietoare generalizată de Kirchhoff $\bar{N}^{3i}$.

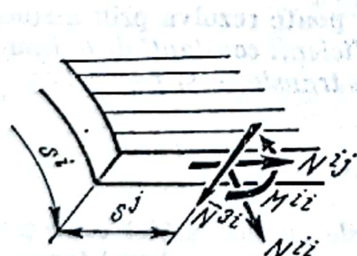


Fig. VII.41

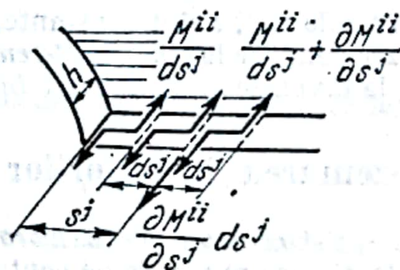
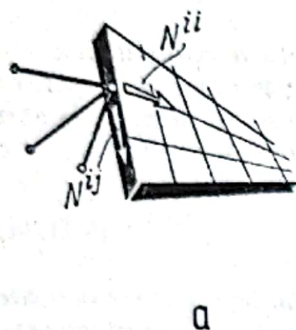


Fig. VII.42

Trebuie precizat că simplificările în rezolvarea problemei, prin neglijarea deformațiilor date de eforturile unitare $\tau^{\alpha_1\alpha_2}$, $\tau^{\alpha_2\alpha_3}$ nu permit să se pună condiții pentru cele 5 eforturi de margini (ecuația ar fi trebuit să fie de ordinul 10) și este necesar ca *momentele de răsucire* M^{ii} să fie determinate *aproximativ*, odată cu forțele tăietoare. Astfel, înlocuind momentele de răsucire prin cupluri avînd brațul ds pe linia de contur (fig. VII.42), într-o secțiune

1) Ținînd seama de expunerea de la paragraful 4.1, pct. 2, rezultă că pentru învelitori de *tip eliptic* rezemarea trebuie făcută prin *margini complete sau incomplete*, proiectantul avînd latitudinea de a fixa cît mai convenabil variația reacțiunilor în lungul conturului, bineînțeles astfel încît rezultanta să echilibreze sarcinile exterioare.



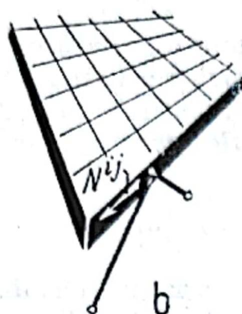


Fig. VII.39

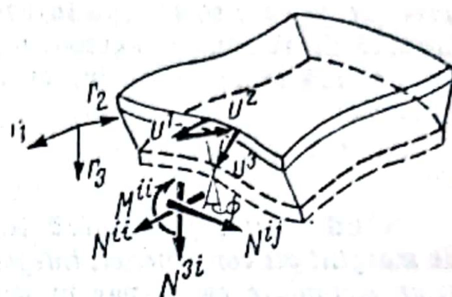


Fig. VII.40

— La învelitorile de *tip hiperbolic*, toate marginile trebuie construite astfel încît să preia eforturile *tangențiale* ce le revin, rămînînd de ales numai laturile pe care rezemarea trebuie să fie completă în conformitate cu problemele expuse la paragraful 4.1, pct. 5.

— Pentru *învelitorile de tip parabolic*, în porțiunile de contur limitate de generatoare, marginile trebuie să fie *complete*; în regiunile curbe ale conturului rezemarea poate fi *completă* sau *incompletă*, după cum convine din punct de vedere constructiv, determinînd în consecință eforturile din învelitoare.

2) În cadrul teoriei de încovoiere ecuația problemei fiind de *ordinul 8*, dacă rezemarea învelitorii se face după o *linie deschisă* (fig. VII.40), integrarea ecuației în lungul ei impune precizarea în fiecare punct a *8 constante* (care se referă la cele 4 eforturi acționînd în secțiunea de contact cu elementul marginal N^{ii}, N^{ij}, M^{ii}, N^{3i} și 4 deplasări u_1, u_2, u_3 și rotirea Φ).

3) Cînd *conturul este o linie închisă*, marginile trebuie astfel construite, încît să permită determinarea în fiecare punct a 4 constante (fig. VII.41), necesare cunoașterii eforturilor din secțiunea de contact N^{ii}, N^{ij}, M^{ij} și forța tăietoare generalizată de Kirchhoff $\overline{N}^{3i}$.

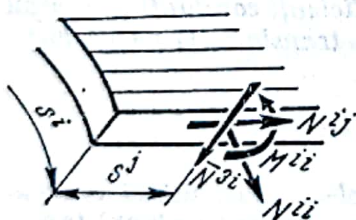


Fig. VII.41

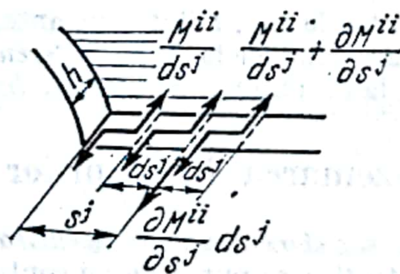


Fig. VII.42

Trebuie precizat că simplificările în rezolvarea problemei, prin neglijarea deformațiilor date de eforturile unitare $\tau^{x_1x_3}$, $\tau^{x_2x_3}$ nu permit să se pună condiții pentru cele 5 eforturi de margini (ecuația ar fi trebuit să fie de ordinul 10) și este necesar ca *momentele de răsucire* M^{ii} să fie determinate *aproximativ*, odată cu forțele tăietoare. Astfel, înlocuind momentele de răsucire prin cupluri avînd brațul ds pe linia de contur (fig. VII.42), într-o secțiune

Tabelul VII.9

Condiții de margini pentru rezolvarea ecuației omogene $\Delta\Delta\Delta\Delta V + \frac{d}{k} DDV = 0$

Învelitoare rezemată pe contur închis

Latura *i* este:		Condiții în eforturi pentru marginea *i*	Condiții în deplasări pentru marginea *i*
Complet liberă		$\overline{\overline{N}}^{ii} = -N^{ii}$ $\overline{\overline{N}}^{ij} = -N^{ij}$ $M^{ij} = \overline{\overline{N}}^{3i} = 0$	—
Rezemată articulat netasabil		$\overline{\overline{N}}^{ii} = -N^{ii}$ $\overline{\overline{N}}^{ij} = -N^{ij}$ $M^{ij} = 0$	$u^3 = 0$
Rezemată articulat tasabil		$\overline{\overline{N}}^{ii} = -N^{ii}$ $\overline{\overline{N}}^{ij} = -N^{ij}$ $M^{ij} = 0$	$u^3 = f_1(s)$
Rezemată parțial (încastrat, tasabil)		$\overline{\overline{N}}^{ii} = -N^{ii}$ $\overline{\overline{N}}^{ij} = -N^{ij}$	$u^3 = f_1(s)$ $\frac{\partial u^3}{\partial s} = f_2(s)$
Rezemată fix (încastrat netasabil)		$\overline{\overline{N}}^{ii} = -N^{ii}$ $\overline{\overline{N}}^{ij} = -N^{ij}$	$u^3 = 0$ $\frac{\partial u^3}{\partial s} = 0$

$\overline{\overline{N}}^{ii}$, $\overline{\overline{N}}^{ij}$ sînt eforturile axiale și tangențiale corespunzătoare teoriei de încovoiere.
N^{ii}, N^{ij} sînt eforturile axiale și tangențiale corespunzătoare teoriei de membrană.

oarecare forța cuplului elementar din stînga diferă de aceea din dreapta cu o cîtime egală cu $\frac{\partial M^{ij}}{\partial s}$, care adunată la forța tăietoare din aceeași secțiune dă așa-numita forță tăietoare generalizată.

$$\bar{\bar{N}}^{3i} = N^{3i} + \frac{\partial M^{ii}}{\partial s}. \qquad \text{(VII.86)}$$

Precizarea a 4 constante în lungul unui contur închis fiind suficientă pentru rezolvarea ecuației (VII.85), condițiile în eforturi se pot înlocui după împrejurări prin condiții în deplasări.

În tabelul VII.9 se arată condițiile de margini corespunzătoare la cîteva situații caracteristice de rezemare.

5. REZOLVAREA PRIN METODE NUMERICE A PROBLEMEI ÎNVELITORILOR SUBȚIRI

Mediul continuu bidimensional de formă curbă, care profilează în esență modelul matematic al comportării mecanice a *învelitorilor subțiri*, se poate studia numai în puține cazuri, integrînd direct sistemul de ecuații diferențiale scris funcție de eforturi sau deplasări.

În numeroase aplicații, singurele metode abordabile pentru construirea soluțiilor sînt cele *numerice* bazate în fond pe ideea *discretizării* funcțiilor continue, operație care poate fi condusă prin două procedee:

— unul de *tip matematic*, constînd în înlocuirea derivatelor funcțiilor continue din ecuațiile diferențiale prin expresii corespunzătoare scrise în diferențe finite

— celălalt de *natură fizică*, în cadrul căruia învelitoarea curbă se aproximează cu un *ansamblu de elemente de mărime finită* de diferite forme: *pătrate, dreptunghiulare, triunghiulare*.

În continuare se expun trăsăturile specifice celor două procedee, care conduc în final la *sisteme de ecuații*, rezolvabile cu ajutorul *calculatoarelor tranzistorizate*.

5.1. Metoda relaxării pentru rezolvarea ecuațiilor în diferențe finite

Trecerea de la derivatele parțiale la expresiile corespunzătoare în serie Taylor, aplicabilă funcțiilor continue în vecinătatea oricărui punct regulat al domeniului. Conform fig. VII.43, construind în vecinătatea punctului *0* dezvoltările în serii Taylor pentru punctele *1* și *3* situate pe o linie de coordonată $x_2 =$ const. se obține

$$F_1 = F(x_1 + a; x_2) = F_0(x_1; x_2) + a(\partial_1 F)_0 + \frac{a^2}{2!}\partial_{11}F + \frac{a^3}{3!}\partial_{111}F + \frac{a^4}{4!}\partial_{1111}F$$

$$\text{(VII.87)}$$

$$F_3 = F(x_1 - a; x_2) = F_0(x_1; x_2) - a(\partial_1 F)_0 + \frac{a^2}{2!}\partial_{11}F - \frac{a^3}{3!}\partial_{111}F + \frac{a^4}{4!}\partial_{1111}F$$

scăzînd și adunînd ecuațiile (VII.87) rezultă

$$(\partial_1 F)_0 = \frac{F_1 - F_3}{2a} - \frac{a^2}{6}(\partial_{111} F)_0 \approx \frac{F_1 - F_3}{2a}$$

(VII.88)

$$(\partial_{11} F)_0 = \frac{F_1 + F_3 - 2F_0}{a^2} - \frac{a^2}{12}(\partial_{1111} F_0) \approx \frac{F_1 + F_3 - 2F_0}{a^2}.$$

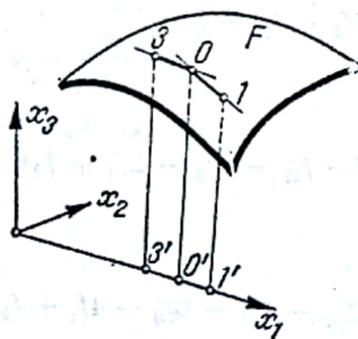


Fig. VII.43

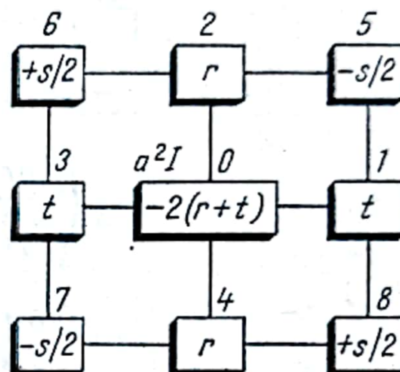


Fig. VII.44

Termenii $\frac{a^2}{6}\partial_{111}F$ și $\frac{a^2}{12}\partial_{1111}F$ reprezintă aproximația cu care s-a făcut trecerea de la *derivatele parțiale* la expresiile corespunzătoare în diferențe finite și explică de ce se recomandă micșorarea pasului rețelei.

În tabelul VII.10 sînt date pentru diferite tipuri de derivate expresiile în diferențe finite pentru rețele *rectangulare, triunghiulare* și *oblice.*

1) În cadrul *teoriei de membrană* înlocuind în ecuația (VII.60) derivatele parțiale prin relații cu diferențe finite conform tabelului VII.10 se scriu pentru fiecare *nod al unei rețele pătrate* cu dimensiunea ochiului egală cu *a* cîte o *ecuație algebrică* cu 9 necunoscute, care sînt valorile *funcției de forțe F* în cele 9 puncte situate pe domeniul aferent fiecărui nod reprezentat în schema din fig. VII.44 cu cifra *0*, forma acestor ecuații fiind

$$r(F_2 + F_4) + t(F_4 + F_3) - s(F_5 + F_7 - F_6 - F_8) - 2(r + t)F_0 + a^2\mathfrak{Z} = 0. \quad \text{(VII.89)}$$

Numărul de ecuații este egal cu cel al nodurilor în care valoarea lui F_0 nu este precizată ca dată inițială sau condiție la limită.

Sistemul de ecuații se poate rezolva cu ajutorul mașinilor de calcul.

Este interesant de subliniat că atunci cînd învelitoarea este de *tip eliptic*, sistemul de ecuații se poate rezolva printr-o *metodă de iterație*, operațiile fiind convergente.

Tabelul VII.10

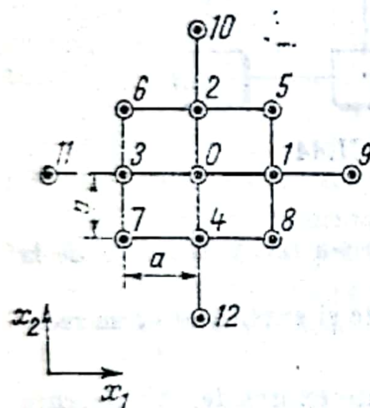
Aproximarea operatorilor diferențiali uzuali prin ecuații cu diferențe finite în diverse sisteme de rețele

A. Rețea rectangulară

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \approx \frac{1}{2a}(f_1 - f_3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0 \approx \frac{1}{a^2}(f_1 + f_3 - 2f_0)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}\right)_0 \approx \frac{1}{2a^3}(- f_{11} - 2f_3 - 2f_1 + f_9)$$



$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4}\right)_0 \approx \frac{1}{a^4}(f_{11} - 4f_3 + 6f_0 - 4f_1 + f_9)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \approx \frac{1}{2a}(f_2 - f_4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0 \approx \frac{1}{a^2}(f_2 + f_4 - 2f_0)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}\right)_0 \approx \frac{1}{2a^3}(f_{10} - 2f_2 + 2f_4 - f_{12})$$

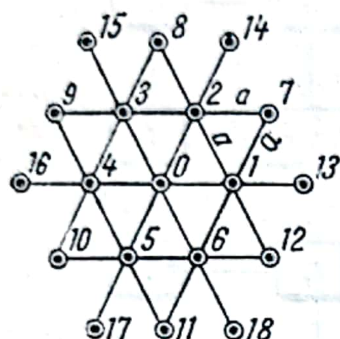
$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}\right)_0 \approx \frac{1}{a^4}(f_{10} - 4f_2 + 6f_0 - 4f_4 + f_{12})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 \approx \frac{1}{4a^2}(f_3 + f_7 - f_6 - f_8)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} \approx \frac{1}{a^4}[f_9 + f_{10} - 4(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + 12f_0 + f_{11} + f_{12}]$$

Tabelul VII.10 **(continuare)**

B. Rețea triunghiulară



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \approx \frac{1}{2a}(f_1 - f_4)$$

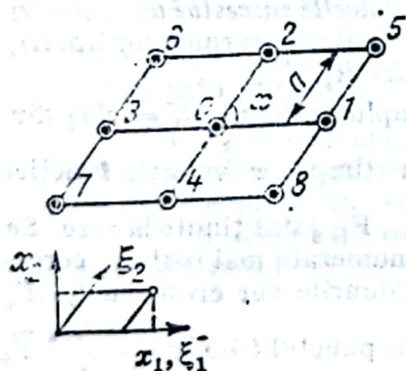
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0 \approx \frac{1}{a^2}(f_1 + f_4 - 2f_0)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \approx \frac{f_2 + f_3 - (f_5 + f_6)}{2\sqrt{3}a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0 \approx \frac{2(f_2 + f_3 + f_5 + f_6) - f_1 - f_4 - 6f_0}{3a^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \approx \frac{2(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6)-12f_0}{3a^2}$$

C. Rețea oblică



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \approx \frac{f_1 - f_3}{2a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} \approx \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{a^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = c\frac{\partial f}{\partial x_1} + s\frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \frac{f_2 - f_4}{2a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 2cs\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = c\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} + s\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \approx \frac{f_5 - f_6 + f_7 - f_8}{4a^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} - 2c\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^2}\left[\frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0}{a^2} - \frac{2c(f_5 - f_6 + f_7 - f_8)}{4a^2}\right]$$

2) În continuare se expune organizarea calculului iterativ după procedeul lui Southwell [2, 45] numit și *metoda relaxării*, care se bazează pe două tipuri de operatori reprezentați în fig. VII.45 numiți *operatori reziduali* și *operatori de relaxare*.

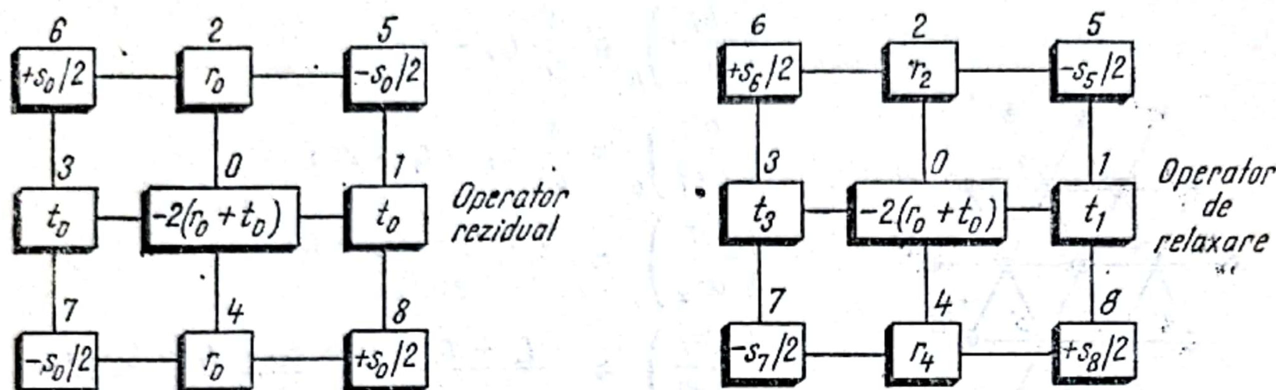


Fig. VII.45

După cum reiese din fig. VII. 45, operatorul rezidual se exprimă funcție de *coeficienții* r, s, t calculați în nodurile din centrul fiecărui operator care sînt notați cu *0*, iar valorile trecute în dreptunghiurile din schemă reprezintă *modificarea reziduului* (termenului liber) din aceste noduri *0* cînd funcțiilor din punctele vecine $F_i(i = 1, \ldots, 8)$ li se atribuie o valoare unitară; astfel, reziduul total sub influența valorilor F_i este

$$R_0 = r(F_2 + F_4) + t(F_1 + F_3) - s(F_5 + F_7 - F_6 - F_8) - 2(r + t)F_0 - a^2\mathfrak{I}. \quad \text{(VII.90)}$$

Operatorul de relaxare conține coeficienții r, s și t calculați în nodurile vecine fiecărui nod central notat cu *0*, valorile trecute în dreptunghiurile schemei reprezentînd modificările reziduurilor din nodurile vecine $i = (1, 2, \ldots, 8)$ inclusiv nodului central *0*, cînd funcției F_0 i se atribuie o valoare unitară.

Calculul se conduce pe o diagramă, conținînd întreaga rețea de puncte (fig. VII.46) scriindu-se la fiecare nod i: în sfertul de cadran din *stînga sus, valorile succesive ale funcției* F_i, în sfertul de cadran din *dreapta sus, reziduurile inițiale* (valorile termenilor liberi), iar în *sfertul de cadran din dreapta jos modificările de reziduuri* R_i.

Se începe printr-o *operație de relaxare* anulînd de exemplu reziduul $R_i = a^2 I_i$ din nodul i, prin atribuirea lui F_i a valorii $\overline{F}_i = \dfrac{a^2 I_i}{2(r_i + t_i)}$ în timp ce valorile funcției în nodurile vecine F_{i+1}, F_{i+2}, F_{i+3}, F_{i+4}, F_{i+5}, F_{i+6}, F_{i+7}, F_{i+8} sînt ținute la zero. Se calculează apoi modificările reziduurilor în punctele vecine enumerate mai înainte, corespunzător valorii lui $\overline{F}_i$; astfel în punctele $i + 1$; $i + 3$ reziduurile vor crește cu $t_{i+1}\overline{F}_i$ și $t_{i+3}\overline{F}_i$, în punctele $i + 2$ și $i + 4$ cu $r_{i+2}\overline{F}_i$ și $r_{i+4}\overline{F}_i$, iar în punctul $i+5$, cu $\dfrac{-s_{i+5}}{2}\overline{F}_i$ (v. fig.VII.46).

Se trece la alt punct de exemplu $i + 1$, pentru care se operează mai întîi anularea reziduului dînd lui $\overline{F}_{i+1}$ valoarea

$$\overline{F}_{i+1} = \frac{a^2 I_{i+1}}{2(r_{i+1} + t_{i+1})} + \frac{r_{i+1}\overline{F}_i}{2(r_{i+1} + t_{i+1})}$$

şi apoi se evaluează modificările de reziduuri ce se produc în nodurile învecinate corespunzător lui $\overline{F}_{i+1}$. După ce s-au efectuat operaţii similare în toate nodurile, se trece la o nouă etapă de aproximaţie anulînd succesiv noile reziduuri $\overline{R}_i$ prin valori $\overline{\overline{F}}_i = \dfrac{\overline{R}_i}{2(r_i + t_i)}$ şi de această dată se determină noi reziduuri în nodurile vecine $\overline{\overline{R}}_i$ după care într-o nouă

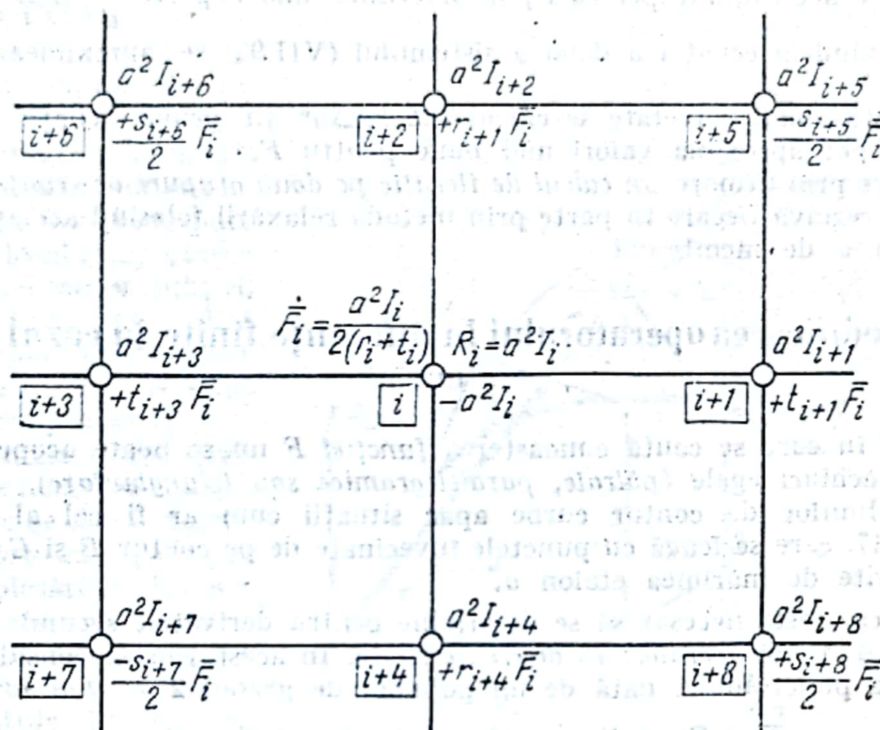


Fig. VII.46

etapă se evaluează cîtimile $\overline{\overline{\overline{F}}}_i = \dfrac{\overline{\overline{R}}_i}{2(r_i + t_i)}$. Operaţiile se termină cînd se apreciază că valorile reziduurilor au devenit destul de mici faţă de valorile iniţiale şi atunci se obţin prin sumare valorile totale ale funcţiei necunoscute în diferite puncte : $F_i = \overline{F}_i + \overline{\overline{F}}_i + \overline{\overline{\overline{F}}}_i + \cdot\cdot$ Ecuaţia în diferenţe finite se recomandă să se deducă plecînd de la ecuaţia diferenţială scrisă într-o formă *canonică*. La capitolul învelitori de translaţie se expune un calcul complet prin metoda relaxării.

3) În cadrul *teoriei de încovoiere* s-a dedus în cadrul aproximaţiei lui *V. Z. Vlasov* [49] sistemul de două ecuaţii diferenţiale de ordinul IV, *rezolvante ale problemei* care sînt

$$- k\Delta\Delta u^3 + DF + \mathfrak{Z} = 0 \qquad \text{(VII.91)}$$

$$\frac{1}{d}\Delta\Delta F + Du^3 = 0. \qquad \text{(VII.92)}$$

După cum se ştie, soluţia integrală se obţine adăugînd *integralei generale* a sistemului de *ecuaţii omogen*, o *integrală particulară* a sistemului de *ecuaţii complet*. *Integrala particulară* poate fi furnizată de *teoria de membrană* şi în consecinţă interesează numai precizarea soluţiei generale considerînd sistemul de mai înainte în care $\mathfrak{Z}$ se anulează.

Presupunînd în a doua ecuaţie (VII.92) valorile lui F *egale cu zero*, se determină valorile u^3 în interiorul domeniului învelitorii cunoscînd pe cele ale lui u^3 situaţie pe linia de contur; se trece apoi la prima ecuaţie (VII.91) în care cunoscîndu-se valorile lui u^3 se calculează $k\Delta\Delta u^3$ în diferite puncte şi în continuare se aproximează prin metoda relaxării valorile funcţiei F, considerîndu-se în acest scop condiţii de margini date.

Cu valorile determinate *pentru* F, se determină mai departe $\frac{1}{d}\,\Delta\Delta F$ în punctele reţelei şi revenind la ecuaţia a doua a sistemului (VII.92) se aproximează noi valori pentru u^3.

Cu aceste valori corectate se calculează $k\Delta\Delta u^3$ în prima ecuaţie (VII.91) şi în consecinţă se pot aproxima valori mai bune pentru F.

Se conduce prin urmare *un calcul de iteraţie pe două grupuri de ecuaţii cu diferenţe finite*, care se rezolvă fiecare în parte prin metoda relaxării folosind acelaşi operator D, definit în teoria de membrană.

5.2. Modificarea operatorului în diferenţe finite în cazul marginilor curbe

Domeniul în care se caută cunoaşterea *funcţiei* F nu se poate acoperi totdeauna cu reţele cu ochiuri egale (*pătrate, paralelogramice sau triunghiulare*).

În cazul liniilor de contur curbe apar situaţii cum ar fi cel al punctului A din fig. VII. 47, care se leagă cu punctele învecinate de pe contur B şi C prin distanţe a_B şi a_C diferite de mărimea etalon a.

În acest caz, este necesar să se determine pentru derivatele secunde $\partial_{11}F$, $\partial_{22}F$ şi $\partial_{12}F$ în punctul A noi *operatori în diferenţe finite*. În acest sens se consideră *funcţia* F în vecinătatea punctului A dată de un polinom de gradul 2

$$F = F_A + C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_1^2 + C_4x_2^2 + C_5x_1x_2 \qquad \text{(VII.93)}$$

precizat astfel încît pentru punctul de origine $A(x_1 = x_2 = 0)$ să se obţină

$$F = F_A;\ (\partial_{11}F)_A = 2C_3;\ (\partial_{22}F)_A = 2C_4;\ (\partial_{12}F)_A = C_5. \qquad \text{(VII.94)}$$

Constanta C_3 se defineşte cu ajutorul ecuaţiilor furnizate de scrierea polinomului în punctele F^E şi F^D obţinîndu-se prin eliminarea lui C_1

$$2C_3 = (\partial_{11}F)^A = 2\,\frac{(F^B - F^A)a + (F^D - F^A)\,a^B}{aa^B(a + a^B)}\ ; \qquad \text{(VII.95)}$$

analog, C_4 rezultă scriind expresia lui F în punctele F^C şi F^E prin eliminarea lui C_2

$$2C_4 = (\partial_{22}F)^B = 2\,\frac{(F^C - F^A)\,a + (F^E - F^A)\,a^C}{aa^C(a + a^C)}\,. \qquad \text{(VII.96)}$$

Fig. VII.47

Determinînd în continuare pe C_1 din ecuaţiile F^B şi F^D şi C_2 din ecuaţiile F^C şi F^E se scrie expresia lui F^F în care înlocuind valorile C_1, C_2, C_3 şi C_4 rezultă expresia lui C_5.

5.3. Metoda elementului finit

Mediul solid continuu se discretizează împărţind învelitoarea în mod arbitrar într-un număr de elemente, fiind de dorit ca elementele să fie pe cît posibil de un număr redus de tipuri. La prima vedere pare că, cu cît *mărimea elementelor* care (fig. VII. 48) subdivid suprafaţa este *mai mică*, cu atît rezultatele se apropie *cantitativ mai mult* de cele calculate pe forma continuă.

În cadrul metodei se desprind următoarele etape principale:

1) Modelarea (*aproximarea*) învelitorii reale printr-un sistem de *unităţi componente*, concepute să idealizeze local comportarea mecanică a înelitorilor subţiri. În tabelul VII.11 se indică tipurile principale de elemente precum şi stările de eforturi pe care le pot prezenta.

2) Elementele se presupun *legate între ele* numai la *noduri*, puncte în care se scriu *condiţiile de echilibru ale problemei* în metoda deplasărilor. Aceasta implică să se cunoscă *matricele de rigiditate* ale elementelor în dreptul fiecărui nod de conexiune, operaţiile în vederea calculului matricelor de rigiditate grupîndu-se la rîndul lor în trei faze:

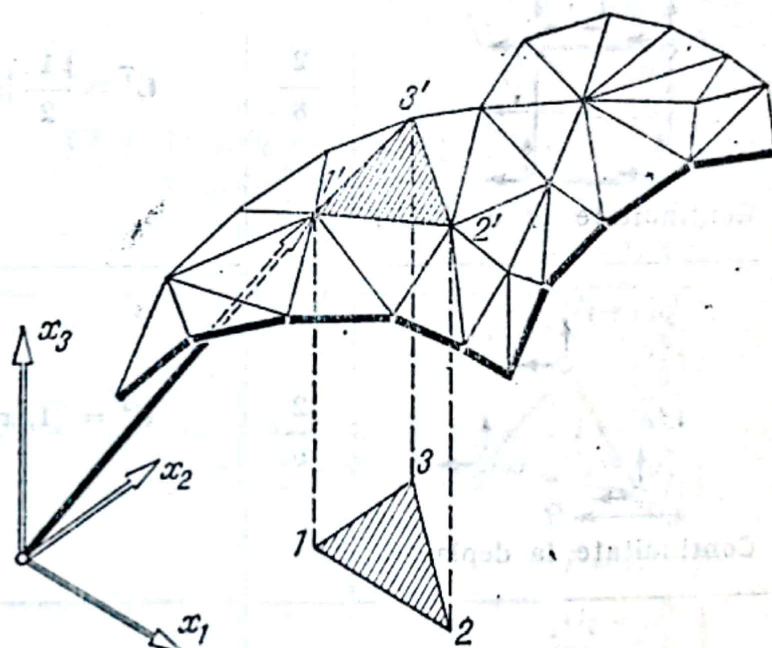


Fig. VII.48

— Mai întîi se dau *nodurilor unui element finit* cîte un *grup de deplasări*, compatibil cu ipotezele de *comportare mecanică* şi se alege una sau mai multe *funcţii de influenţă*, care să redea geometric corespondenţa dintre deplasările nodurilor şi cele ale punctelor din interiorul elementului finit. Precizarea lor constituie cea mai dificilă activitate din cadrul metodei, întrucît funcţiile trebuie să fie astfel încît să satisfacă atît condiţiile de compatibilitate ale deplasărilor la noduri cît şi pe cele admise pentru deplasările în lungul liniilor de demarcaţie dintre elemente.

În tabelul VII.11 sînt date tipuri de funcţii polinomiale folosite pentru a exprima starea de deplasări la diferite forme de elemente şi stări de eforturi.

— În continuare, se derivează funcţiile deplasărilor punînd în evidenţă deformaţiile specifice în diferitele puncte ale elementului care, multiplicate cu caracteristicile mecanice ale materialului de construcţie, permit să se reprezinte starea de eforturi pe domeniu elementului finit.

— Aplicînd *principiul lucrului mecanic virtual* se deduc matricele de rigidităţi la noduri, egalînd integrala *lucrului mecanic* dat de forţele interioare cu travaliul efectuat de forţele exterioare aplicate la noduri, cînd nodurilor li se dau deplasări unitare.

Tabelul VII.11

Tipuri de elemente finite și funcțiile de influență corespunzătoare

Tipul elementului și deplasări	Deplasări pe nod / Deplasări pe ansamblu	$U_i = \lvert G^T \rvert V_i$ $V_i = \lvert G^T \rvert^{-1} U_i$	U_i
Continuitate la deplasări	$\frac{2}{8}$	$U^T = \frac{1}{2} \lvert 1, x_1, x_2, x_1 x_2 \rvert$	$U_i = \lvert u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i \rvert$ $i = 1,2$
Continuitate la deplasări	$\frac{2}{6}$	$U^T = \lvert 1, x_1, x_2 \rvert$	$U_i = \lvert u_1^i, u_2^i, u_3^i \rvert$ $i = 1,2$
Continuitate la deplasări	$\frac{2}{12}$	$U^T = \lvert 1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2 \rvert$	$U_i = \lvert u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i, u_5^i, u_6^i \rvert$ $i = 1,2$
Continuitate la deplasări	$\frac{2}{18}$	$U^T = \lvert 1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3 \rvert$	$U_i = \lvert u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i, u_5^i, u_6^i, u_7^i, u_8^i, u_9^i \rvert$ $i = 1,2$

Tabelul VII.11 (continuare)

Tipul elementului și deplasări	Deplasări pe nod / Deplasări pe ansamblu	$U_i = \|G^T\| V_i$ $V_i = \|G^T\|^{-1} U_i$	U_i
Continuitate la deplasări și rotiri	$\frac{6}{18}$	$U^T = \|1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3\|$	$U_i = \|u_i^1, u_{i,1}^1, u_{i,2}^1, u_i^2, u_{i,1}^2, u_{i,2}^2\|$ $i = 1, 2, 3$
Continuitate la deplasări și rotiri	$\frac{3+2}{9+6}$	$U^T = \|1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4$	$U_i = \|u_i^3, u_{i,1}^3, u_{i,2}^3\|$ $i = 1,2,3$ $U_j = \|u_j^3, u_{j,n}^3\|$ $j = 4, 5, 6$
Continuitate la deplasări și rotiri Originea axelor în c.g. al triunghiului	$\frac{6+1}{18+3}$	$U^T = \|1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4, x_1^5, x_1^4 x_2, x_1^3 x_2^2, x_1^2 x_2^3, x_1 x_2^4, x_2^5\|$	$U_i = \|u_i^3, u_{i,1}^3, u_{i,2}^3, u_{i,11}^3, u_{i,12}^3, u_{i,22}^3\|$ $i = 1, 2, 3$ $U_j = \|u_{j,n}^3\|$ $j = 4, 5, 6$
Continuitate la deplasări și la rotiri	$\frac{5}{20}$	$Ux_1x_2 = \|G_1^T\| q_1 + \left\| \frac{U_0^T}{0} \right\| \left. \frac{0}{U_3^T} \right\| q_0 \quad i = 1,2$ $[U_0^T] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, x_2, 0, x_1 x_2, 0 \\ 0, x_1, x_2, 0, x_1x_2 \end{vmatrix}$ $[U_3^T] = \frac{1}{2} \| x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, x_1^3 x_2, x_1 2_2^3\|$	$U_i = \|u_i^1, u_i^2, u_i^3, u_{i,1}^3, u_{i,2}^3\|$ $i = 1,2,3,4$

NOTĂ

La deplasările U_j^i indicele superior „i" indică direcția deplasării; indicele inferior „j" indică nodul care se deplasează. Derivata parțială s-a marcat prin,. V_i reprezintă deplasările generalizate ale elementului.

Matricele $|G^T|$, $|U_0^T|$, $|U_3^T|$ se obțin înlocuind în matricele U^T coordonatele nodurilor.

3) În cele ce urmează se arată fazele deducerii *matricei de rigidități* pentru un *element de învelitoare, pleoștit, de tip eliptic, hiperbolic sau parabolic,* care acoperă un contur de formă pătrată, compus din segmente de linii de coordonate (fig. VII.49).

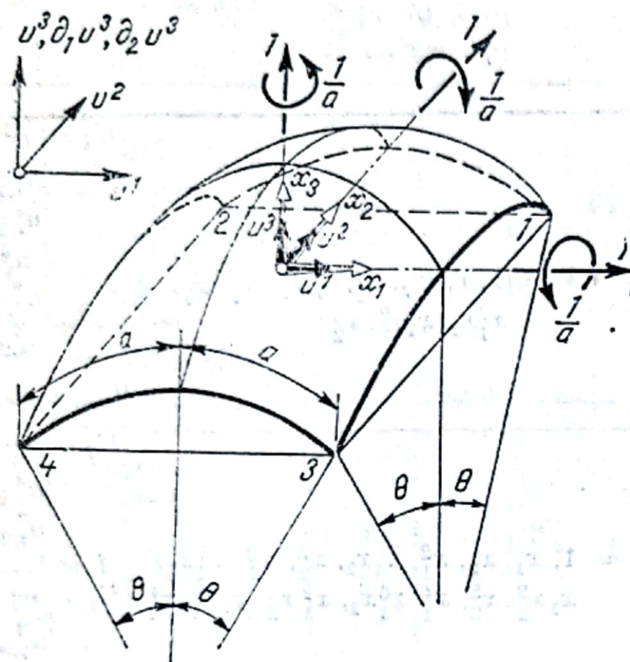


Fig. VII.49

Pentru un punct al elementului relațiile dintre deformații și deplasări scrise în coordonate carteziene rectangulare sînt în acest caz:

$$\varepsilon^{11} = \partial_1 u^1 - ru^3 \,;\ \varepsilon^{22} = \partial_2 u^2 - tu^3$$

$$\gamma^{12} = \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} = \partial_2 u^1 + \partial_1 u^2 - 2su^3$$

$$\varkappa^{11} = -\partial_{11} u^3 \,;\ \varkappa^{22} = -\partial_{22} u^3 \,;$$

$$\varkappa^{12} = -2\partial_{12} u^3 \tag{VII.97}$$

ele găsindu-se în două matrice:

$$\mathbf{e} = \left\| \begin{matrix} \varepsilon^{11} \\ \varepsilon^{22} \\ \gamma^{12} \end{matrix} \right\| \tag{VII.98}$$

$$\mathbf{c} = \left\| \begin{matrix} \varkappa^{11} \\ \varkappa^{22} \\ \varkappa^{12} \end{matrix} \right\| \tag{VII.99}$$

Trebuie deci pentru a pune în evidență deformațiile și apoi eforturile să se cunoască în fiecare punct vectorul deplasări $\mathbf{u}_i^T = |u_i^1 \,;\ u_i^2 \,;\ u_i^3|$, care corespunde matricei coloană, cuprinzînd toate deplasările independente ale celor 4 noduri. Acceptînd că legăturile de continuitate împiedică în fiecare nod 5 deplasări posibile (3 translații și 2 rotiri), matricea **u** devine cu 20 termeni:

$$\mathbf{u}^T = [u_1^1,\ u_2^1,\ u_3^1,\ u_4^1,\ u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2,\ u_4^2,\ u_1^3,\ u_2^3,\ u_3^3,\ u_4^3\,;$$
$$\partial_1 u_1^3,\ \partial_1 u_2^3,\ \partial_1 u_3^3,\ \partial_1 u_4^3,\ \partial_2 u_1^3,\ \partial_2 u_2^3,\ \partial_2 u_3^3,\ \partial_2 u_4^3]$$

Pentru simplificarea calculului se trece la o nouă matrice-coloană **V**, în care primii șase termeni grupați sub notația $\mathbf{V}_1$ reprezintă cele 6 modificări de poziție în spațiu ale elementului în ansamblu (considerat corp rigid), iar următorii termeni grupați sub notația $\mathbf{V}_2$ reprezintă cele 14 (20−6) deplasări ale nodurilor, care apar numai în condițiile corpului deformabil și provoacă deci stări de deformații și eforturi.

Între **u** și **V** există corespondența:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{G}_1^T,\ \mathbf{G}_2^T] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \tag{VII.100}$$

matricele $\mathbf{G}_1^T$ și $\mathbf{G}_2^T$ au următoarea formă :

$$
\mathbf{G}_1^T = \begin{bmatrix}
\cos\theta & 0 & -\sin\theta & \frac{R}{a}\sin^2\theta & \frac{R}{a}(1-\cos\theta) & -\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
\cos\theta & 0 & -\sin\theta & \frac{R}{a}\sin^2\theta & \frac{R}{a}(1-\cos\theta) & \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
\cos\theta & 0 & \sin\theta & \frac{R}{a}\sin^2\theta & \frac{R}{a}(1-\cos\theta) & -\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
\cos\theta & 0 & \sin\theta & -\frac{R}{a}\sin^2\theta & \frac{R}{a}(1-\cos\theta) & \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
0 & \cos\theta & -\sin\theta & -\frac{R}{a}(1-\cos\theta) & \frac{R}{a}\sin^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
0 & \cos\theta & \sin\theta & -\frac{R}{a}(1-\cos\theta) & -\frac{R}{a}\sin^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
0 & \cos\theta & -\sin\theta & -\frac{R}{a}(1-\cos\theta) & -\frac{R}{a}\sin^2\theta & -\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
0 & \cos\theta & \sin\theta & -\frac{R}{a}(1-\cos\theta) & \frac{R}{a}\sin^2\theta & -\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \\
\cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & \frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_4 & \frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_5 & \frac{\sin\theta}{\theta}(-\cos\theta_1+\cos\theta_2) \\
\cos\theta_1 & -\cos\theta_2 & \cos\theta_3 & -\frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_4 & -\frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_5 & \frac{\sin\theta}{\theta}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \\
-\cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & \frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_4 & \frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_5 & \frac{\sin\theta}{\theta}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \\
-\cos\theta_1 & -\cos\theta_2 & \cos\theta_3 & -\frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_4 & \frac{2R}{a}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta_5 & \frac{\sin\theta}{\theta}(-\cos\theta_1+\cos\theta_2) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{VII.101}
$$

$$\mathbf{G}_2^T = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{rrrrr:rrrrrrrrr}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & & & & & & & & & \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & & & & & & & & & \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & & & & & 0 & & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & & & & & & & & & \\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & & & & & & & & & \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
\hdashline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 & & & & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
\hdashline
 & & & & & 2/a & 1/a & 0 & 3/a & 2/a & 1/a & 0 & 3/a & 1/a \\
 & & 0 & & & 2/a & -1/a & 0 & 3/a & -2/a & 1/a & 0 & -3/a & -1/a \\
 & & & & & -2/a & 1/a & 0 & 3/a & -2/a & 1/a & 0 & 3/a & 1/a \\
 & & & & & -2/a & -1/a & 0 & 3/a & 2/a & 1/a & 0 & -3/a & -1/a \\
\hdashline
 & & & & & 0 & 1/a & 2/a & 0 & 1/a & 2/a & 3/a & 1/a & 3/a \\
 & & & & & 0 & 1/a & -2/a & 0 & 1/a & -2/a & 3/a & 1/a & 3/a \\
 & & & & & 0 & -1/a & 2/a & 0 & 1/a & -2/a & 3/a & -1/a & -3/a \\
 & & & & & 0 & -1/a & -2/a & 0 & 1/a & 2/a & 3/a & -1/a & -3/a
\end{array}\right] \tag{VII.102}$$

Relaţia (VII.100) poate fi inversată

$$\mathbf{v} = [\mathbf{G}_1^T,\ \mathbf{G}_2^T]^{-1}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{B}^T\mathbf{u} \tag{VII.103}$$

Matricea $\mathbf{B}^T$ se calculează ca inversa matricei $[\mathbf{G}_1^T, \mathbf{G}_2^T]$. Legătura dintre vectorul *deplasărilor locale* $\mathbf{u}_i$ şi $\mathbf{v}$ se scrie mai departe:

$$\mathbf{u}_i = \begin{vmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{1T} \\ \bar{\mathbf{u}}^{2T} \\ \bar{\mathbf{u}}^{3T} \end{vmatrix}\cdot\mathbf{v}_1 + \begin{Vmatrix} \mathbf{u}_0^T & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_3^T \end{Vmatrix}\cdot\mathbf{v}_2 \tag{VII.104}$$

Pentru matricele $\mathbf{u}_0^T$ şi $\mathbf{u}_3^T$ s-au ales expresiile

$$\mathbf{u}_0^T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & 0, & \xi_1\xi_2, & 0 & \\ 0, & \xi_1, & \xi_2, & 0 & \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} \tag{VII.105}$$

$$\mathbf{u}_3^T = \frac{1}{2}|\,\xi_1^2,\ \xi_1\xi_2,\ \xi_2^2,\ \xi_1^3,\ \xi_1^2\xi_2,\ \xi_1\xi_2^2,\ \xi_2^3,\ \xi_1^3\xi_2,\ \xi_1\xi_2^3\,|$$

Înlocuind expresia (VII.104) în matricele (VII.98) și (VII.99) se constată că $\bar{\mathbf{u}}_1^T$, $\bar{\mathbf{u}}_2^T$, $\bar{\mathbf{u}}_3^T$ *fiind constante*, derivatele lor se anulează și ca urmare, în expresiile deformațiilor $\mathbf{e}$ și $\mathbf{c}$ nu apar decît termenii multiplicați cu $\mathbf{V}_2$, care conțin derivatele expresiilor $\mathbf{u}_0^T, \mathbf{u}_3^T$ și expresia $\mathbf{u}_3^T$ adică:

$$\mathbf{e} = [\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2]\,\mathbf{V}_2 \quad \text{și} \quad \mathbf{c} = [0,\ \mathbf{P}_3]\,\mathbf{V}_2 \tag{VII.106}$$

$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ și $\mathbf{P}_3$ au următoarele expresii:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{\xi_2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{\xi_1}{a} \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 & \frac{\xi_1}{a} & \frac{\xi_2}{a} \end{bmatrix} \tag{VII.107}$$

$$\mathbf{P}_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} r\xi_1^2 & r\xi_1\xi_2 & r\xi_2^2 & r\xi_1^3 & r\xi_1^2\xi_2 & r\xi_1\xi_2^2 & r\xi_2^3 & r\xi_1^3\xi_2 & r\xi_1\xi_2^3 \\ t\xi_1^2 & t\xi_1\xi_2 & t\xi_2^2 & t\xi_1^3 & t\xi_1^2\xi_2 & t\xi_1\xi_2 & t\xi_2^3 & t\xi_1^3\xi_2 & t\xi_1\xi_2^3 \\ 2s\xi_1^2 & 2s\xi_1\xi_2 & 2s\xi_2^2 & 2s\xi_1^3 & 2s\xi_1^2\xi_2 & 2s\xi_1\xi_2^2 & 2s\xi_2^3 & 2s\xi_1^3\xi_2 & 2s\xi_1\xi_2^3 \end{bmatrix} \tag{VII.108}$$

$$\mathbf{P}_3 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & \frac{6\xi_1^2}{a^2} & \frac{2\xi_2}{a^2} & 0 & 0 & \frac{6\xi_1\xi_2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & \frac{2\xi_1}{a^2} & \frac{6\xi_2}{a^2} & 0 & \frac{6\xi_1\xi_2}{a^2} \\ 0 & \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & \frac{4\xi_1}{a^2} & \frac{4\xi_2}{a_2} & 0 & \frac{6\xi_1^2}{a^2} & \frac{6\xi_2^2}{a^2} \end{bmatrix} \tag{VII.109}$$

Eforturile rezultate în cazul corpului elastic se deduc imediat

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}\mathbf{e} \quad \text{și} \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{c} \tag{VII.110}$$

în care:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \end{vmatrix} \tag{VII.111}$$

În vederea aplicării *principiului lucrului mecanic virtual*, se definește un *vector coloană* Q avînd componente forțele generalizate, care se dezvoltă la nodurile elementului finit, astfel încît să provoace deplasările caracterizate de $\mathbf{V}$. Este de observat că numai componentele $\mathbf{Q}_2$ dezvoltă *lucrul mecanic exterior* descriind deplasările $\mathbf{V}_2$. Concomitent, în interiorul elementului se produce un lucru mecanic obținut ca produs între deformațiile reprezentate de $\mathbf{e}$ și $\mathbf{c}$ și eforturile notate cu $\mathbf{N}$ și $\mathbf{M}$ ecuația de legătură fiind:

$$\mathbf{V}_2^T\mathbf{Q}_2 = \int_A (\mathbf{e}^T\mathbf{N} + \mathbf{c}^T\mathbf{M})\,\mathrm{d}A \tag{VII.112}$$

în care: *A este aria unui element finit și* d*A elementul infinitezimal.*

Înlocuind în (VII.112) eforturile **N** și **M** prin ecuațiile (VII.110) și apoi deformațiile **e** și **c** cu formulele (VII.106) se obține

$$\mathbf{V}_2^T\,\mathbf{Q}_2 = \mathbf{V}_2^T \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T\mathbf{E}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_1^T\mathbf{E}\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2^T\mathbf{E}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2^T\mathbf{E}\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3^T\mathbf{D}\mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \mathrm{d}A \cdot \mathbf{V}_2. \qquad \text{(VII.113)}$$

Simplificînd cu $\mathbf{V}_2^T$, matricea $\mathbf{Q}_2$ se poate defini

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{K}_2\mathbf{V}_2$$

în care $\mathbf{K}_2$ este matricea de rigiditate propriu-zisă avînd expresia:

$$\mathbf{K}_2 = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T\mathbf{E}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_1^T\mathbf{E}\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2^T\mathbf{E}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2^T\mathbf{E}\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3^T\mathbf{D}\mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \mathrm{d}A. \qquad \text{(VII.114)}$$

Expresiile termenilor $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ și $\mathbf{P}_3$ din $\mathbf{K}_2$ au fost date mai înainte, (VII.107), (VII.108) și (VII.109), iar expresiile lui **E** și **D** sînt:

$$\mathbf{E} = \frac{hE}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.115)}$$

$$\mathbf{D} = \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.116)}$$

În mod general se mai poate scrie:

$$Q = \mathbf{K}\mathbf{V}$$

în care matricea de rigiditate este:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 \end{vmatrix}$$

În final, dacă se urmărește a pune în evidență matricea de rigidități pentru deplasările **u**, se poate folosi expresia de corespondență (VII.103) dintre **u** și **V**, scriind apoi că lucrul mecanic exterior dat de deplasările **u** și cel dat de deplasările **V** este egal, adică

$$\mathbf{u}^T\mathbf{s} = \mathbf{V}^T\mathbf{Q}$$

în care **s** reprezintă vectorul de forțe care se dezvoltă la nodurile elementului cînd se împiedică deplasările **u**; ca urmare, înlocuind pe $\mathbf{V}^T$ și **Q** prin expresiile echivalente se poate scrie

$$\mathbf{u}^T\mathbf{s} = \mathbf{u}^T\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{B}^T\mathbf{u}$$

și în consecință,

$$s = BKB^T u$$

Matricea de rigiditate k scrisă în corespondență cu deplasările u egale cu unitatea fiind în consecință;

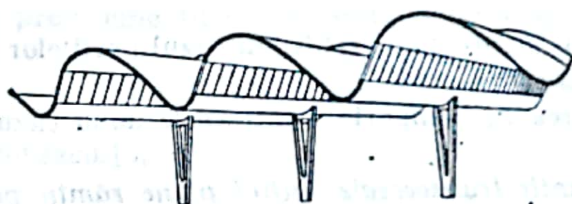
$$k = BKB^T$$

Matricele de rigidități se calculează în diferitele puncte de pe suprafața mediană a învelitorii, care limitează elementele finite. Ca urmare, în ecuațiile de echilibru pe nod se pot introduce direct matricele de rigidități fără vreo prealabilă transformare a sistemului de coordonate.

6. GRINZI CU PEREȚI SUBȚIRI

Ideea de a valorifica capacitatea de rezistență a materialului distribuit în elemente de închidere (acoperișuri, pereți, conducte) a condus la formularea problemei grinzilor cu pereți subțiri.

O serie de acoperișuri (fig. VII.50, *a*), conducte (fig. VII.50, *b*), buncăre, pasarele sau pereți diafragme la clădiri înalte (fig. VII.51) se comportă static ca grinzi cu pereți subțiri.



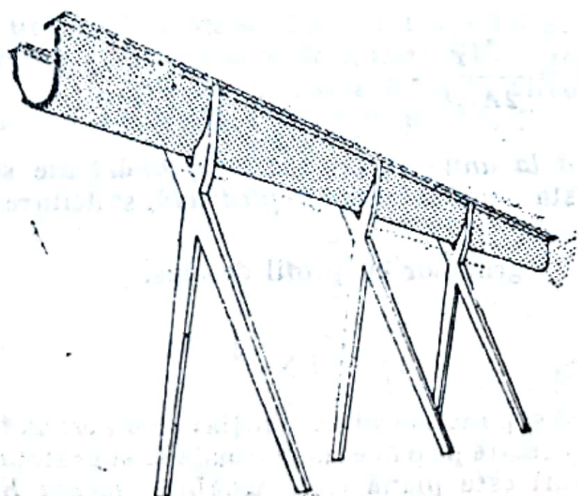


Fig. VII.50

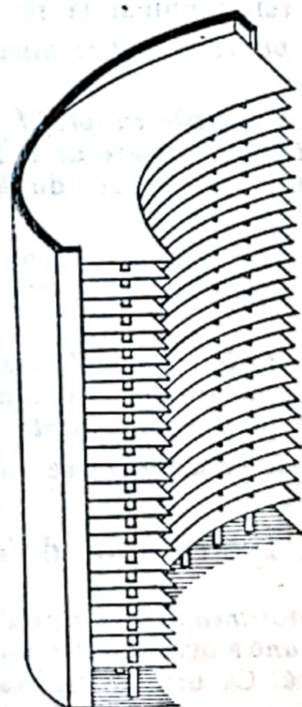


Fig. VII.51

6.1. Definiții

1) Grinzile cu pereți subțiri se asimilează cu bare avînd secțiunea transversală alcătuită sub forma unui profil cu grosime mică; ele se caracterizează prin valorile reduse ale raportului dintre grosimea peretelui h și lungimea generatoarei L, care se cuprind în cazul elementelor de beton armat (fig. VII.52) între:

$$\frac{1}{250} < \frac{h}{L} < \frac{1}{100}.$$

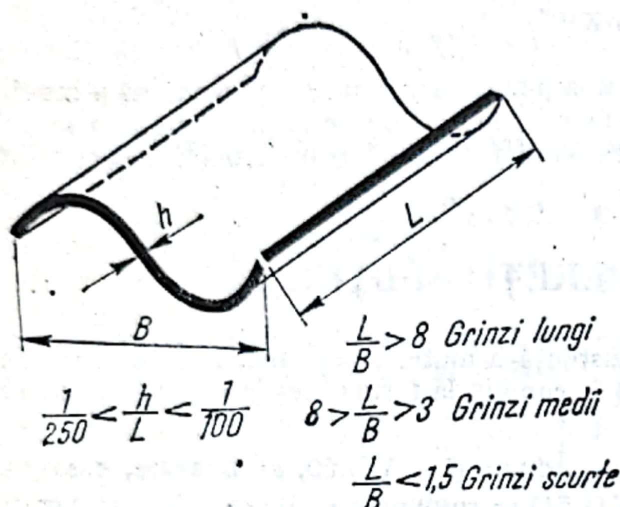


Fig. VII.52

2) Notînd cu B dimensiunea caracteristică a secțiunii transversale, măsurată după una din axele principale de inerție, și comparînd-o cu L, grinzile cu profil subțire se pot grupa după V. Z. Vlasov [49] în 3 categorii (v. fig. VII. 52):

— grinzi lungi, în care $\frac{L}{B} > 8$;

— grinzi medii, în care $3 < \frac{L}{B} < 8$;

— grinzi scurte, în care $\frac{L}{B} < 1{,}5$.

3) Grinzile cu pereți subțiri au profilul închis sau deschis. În cazul profilelor închise ne vom referi numai la profilele dublu conexe.

Din punct de vedere mecanic, deosebirea de comportare între cele două cazuri este esențială:

— *La grinzile cu profil închis, secțiunile transversale inițial plane rămîn plane și după solicitare*, oricare ar fi forma secțiunii transversale. Calculul la torsiune în teoria de ordinul 1 se conduce după formula lui Bredt care este

$$\sigma = \frac{M_T}{2A_{bs}h}.$$

— *Grinzile cu profil deschis suferă la anumite încărcări deplanări* ale secțiunilor inițial plane, care oprite dau naștere la starea de *torsiune împiedicată*, solicitare în cadrul căreia se produc *bimomente*.

În cele ce urmează se va trata cazul grinzilor cu profil deschis.

6.2. Ipoteze de deformare

1) *Grosimea învelitorii nu se modifică* și punctele situate inițial pe o *normală la suprafața mediană* a învelitorii rămîn după deformare pe o aceeași normală la suprafața mediană deformată. Ca urmare, starea de eforturi este plană (este valabilă *ipoteza Kirchhoff*).

2) La solicitarea *din încovoiere simplă sau oblică* se consideră că profilul secțiunii transversale se deformează în conformitate cu ipoteza *secțiunilor plane*.

3) *În cazul torsiunii*, deformarea unghiulară (distorsiunea) a elementului infinitezimal situat pe peretele învelitorii se consideră nulă, adică (fig. VII.53):

$$\partial_3 u^s + \partial_s u^3 = 0 \text{ sau } \partial_3 u^s = -\partial_s u^3 \qquad \text{(VII.117)}$$

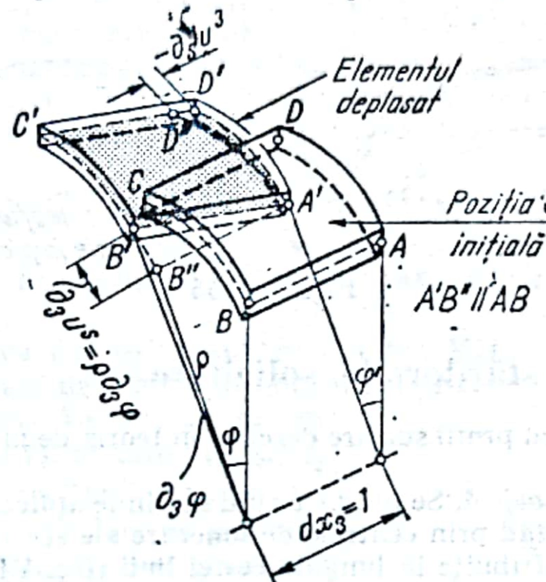


Fig. VII.53

4) Lungimea profilului transversal al învelitorii rămîne constantă în timpul solicitării, ceea ce presupune în cazul materialelor elastice

$$\varepsilon^s = \frac{1}{E}(\sigma^{ss} - \mu\sigma^{33}) = 0; \; \sigma^{ss} = \mu\sigma^{33}$$

și, în consecință,

$$\varepsilon^3 = \frac{1}{E}(\sigma^{33} - \mu\sigma^{ss}) = \frac{1-\mu^2}{E}\sigma^{33}.$$

În cele ce urmează se va neglija influența lui μ.

5) Peretele grinzii se consideră *flexibil* pe *direcția generatoarelor și rigid la încovoiere* în sensul liniei directoare. În consecință, în direcția transversală pot apărea momente încovoietoare și forțe tăietoare (M^{3s} și N^{sn}) fig. VII.54.

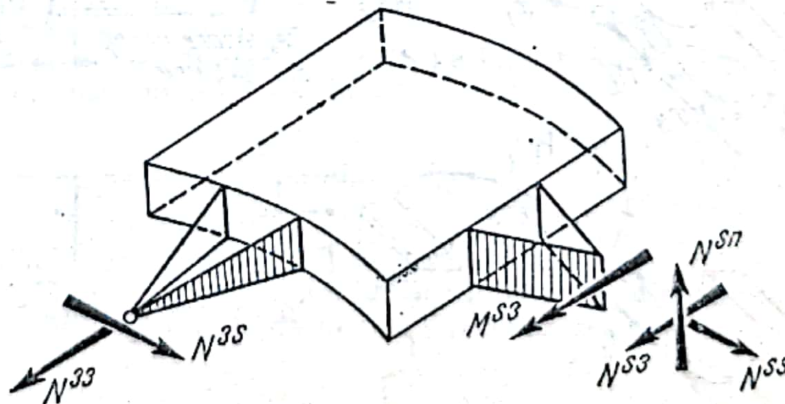


Fig. VII.54

6) Profilul transversal al grinzii se consideră liber să se deplaseze în timpul solicitării, orice împiedicare producînd perturbări ale stării de eforturi deduse în conformitate cu teoria de grindă (fig. VII.55).

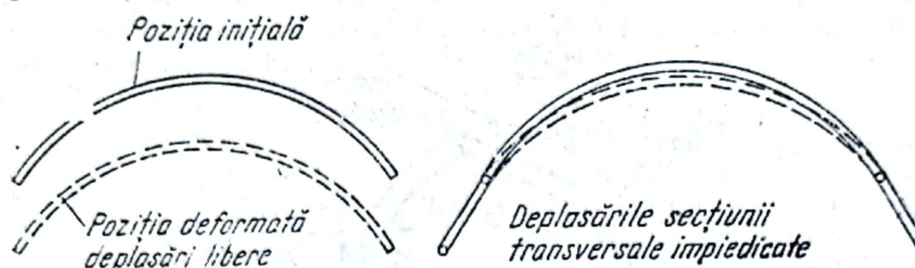


Fig. VII.55

6.3. Clasificarea stărilor de solicitare

La calculul grinzilor cu profil subţire deschis, în teoria de grindă, intervin trei situaţii de solicitare:

Încovoiere simplă sau oblică. Se produce cînd sarcinile aplicate pe suprafaţa învelitorii se reduc faţă de linia trecînd prin centrele de lunecare ale secţiunilor transversale, la un şir de forţe rezultante distribuite în lungul acestei linii (fig. VII.56, *a*)

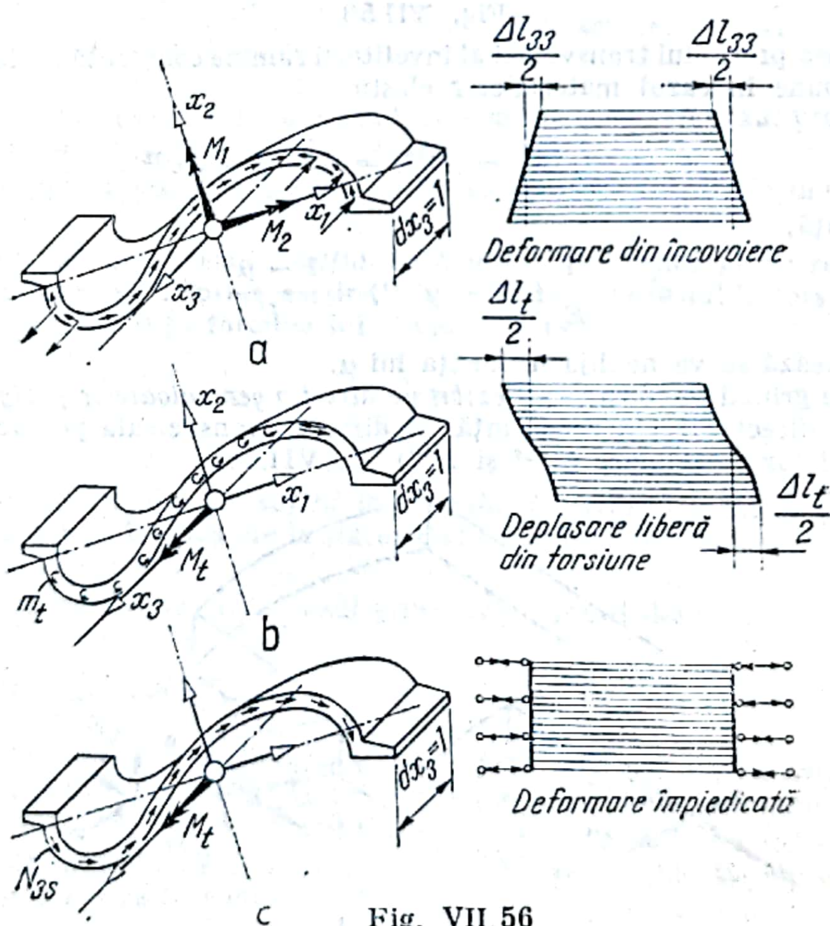


Fig. VII.56

Încovoiere cu torsiune liberă uniformă. Operînd reducerea arătată mai înainte, dacă pe lîngă forțe rezultante se obțin și momente rezultante de răsucire, starea de solicitare se zice cu *torsiune liberă* cînd momentele de torsiune solicitare sînt constante în lungul grinzii, iar secțiunile de capăt se pot *deplana liber* (fig. VII.56, *b*).

Încovoiere cu torsiune neuniformă (împiedicată). Într-o situație similară de încărcare cu aceea descrisă anterior, se poate produce solicitarea de încovoiere cu torsiune neuniformă dacă se mai realizează suplimentar una din următoarele condiții:

— momentele de torsiune solicitare (fig. VII.56, *c*) sînt variabile în lungul grinzii sau

— secțiunile de capăt sînt împiedicate să se deplaneze liber (v. fig. VII.56, *c*).

6.4. Calculul la încovoiere simplă sau oblică

1) Considerînd grinda cu pereți subțiri din fig. VII.57 se determină centrul de greutate și axele principale de inerție ale profilului transversal; s-a presupus profilul simetric față de aceste axe. Alegînd un sistem de coordonate (fig. VII.57), în care x_1 și x_2 sînt pe axele principale ale secțiunii transversale, iar x_3 confundată cu linia centrelor de greutate ale secțiunilor succesive, prin ipoteză s-a admis că sarcina de pe grindă se poate reduce la un șir de rezultante — forțe distribuite în lungul axei x_3 (v. fig. VII.57).

2) Descompunînd rezultantele din diferitele secțiuni în componente P_1 și P_2 față de axele x_1 și x_2 ale secțiunilor transversale, se calculează momentele încovoietoare M_1 și M_2, avînd axele perpendiculare pe x_3, după care se determină eforturile în diferite puncte ale fiecărei secțiuni transversale cu formula Navier

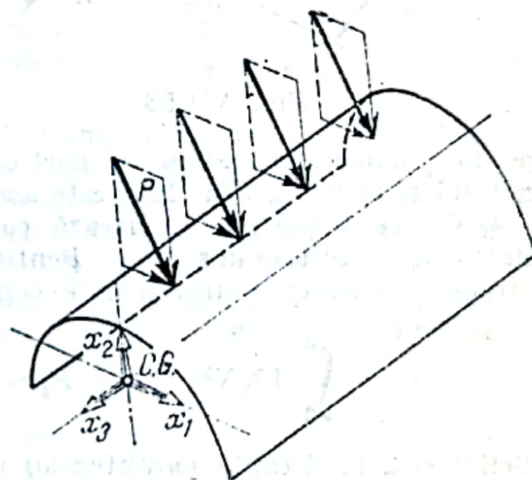


Fig. VII.57

$$N^{33} = h\left(\frac{M_1x_1}{I_{11}} + \frac{M_2x_2}{I_{22}}\right); \qquad \text{(VII.118)}$$

x_1 și x_2 poziționează numai punctele așezate pe linia mediană a profilului transversal.

În formula de mai înainte s-a notat:

$$I_{11} = \int_0^m hx_1^2\mathrm{d}s; \quad I_{22} = \int_0^m hx_2^2\ \mathrm{d}s$$

în care m este lungimea totală a liniei mediane.

3) Observînd echilibrul unei porțiuni de învelitoare avînd lungimea în lungul arcului director s, iar lățimea $\mathrm{d}x_3 = 1$, conform fig. VII.58 se deduce

$$N^{3s} = -\int_0^s \partial_3\, N^{33}\mathrm{d}s. \qquad \text{(VII.119)}$$

În expresia (VII.118) a lui N^{33}, numai momentele încovoietoare sînt derivabile în raport cu x_3, conducînd la

$$\partial^3 M_1 = T_1; \qquad \partial_3 M_2 = T_2.$$

În consecință relația (VII.119) devine

$$N^{3s} = -\frac{T_1}{I_{11}}\int_0^s x_1 h\,ds - \frac{T_2}{I_{22}}\int_0^s x_2 h\,ds = -$$

$$= -\frac{T_1}{I_{11}} S_1 - \frac{T_2}{I_{22}} S_2 \qquad \text{(VII.120)}$$

în care T_1 și T_2 sînt componentele forțelor tăietoare pe direcția axelor x_1 și x_2, întrucît s-a notat:

$$S_1 = \int_0^s x_1 h\,ds \text{ și } S_2 = \int_0^s x_2 h\,ds$$

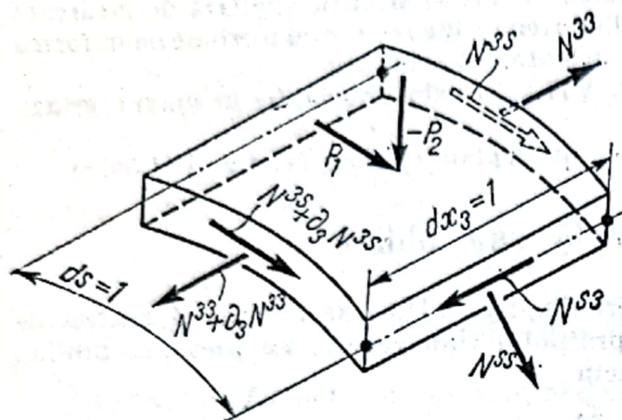


Fig. VII.58

care sînt momentele statice ale porțiunii din secțiunea transversală situată deasupra punctului *s*. Formula (VII.120) este aceea dată pentru prima dată de Juravschi.

4) Ca verificare, se analizează corespondența între sarcinile exterioare aplicate și eforturile dezvoltate în secțiuni. Pentru o fîșie de grindă de lungime $dx_3 = 1$ se observă că trebuie satisfăcute următoarele condiții de echilibru la deplasări:

$$\int_0^m [\partial_3 N^{3s}\,ds]_1 + P_1 = 0; \qquad \int_0^m [\partial_3 N^{3s}\,ds]_2 + P_2 = 0 \qquad \text{(VII.121)}$$

indicii 1 și 2 în dreapta parantezelor indică componentele după axele x_1 respectiv x_2.

Înlocuind derivatele $\partial_3 N^{3s}$ cu expresia rezultînd din (VII.120) și observînd că $ds\cos\alpha = dx_1$, iar $ds\sin\alpha = dx_2$, în care α este unghiul tangentei într-un punct la profil cu axa x_1, relațiile (VII.121) se transformă în identități:

$$-\frac{P_1}{I_{11}}\int_0^m S_1 dx_1 - \frac{P_2}{I_{22}}\int_0^m S_2 dx_1 + P_1 = 0$$

$$-\frac{P_1}{I_{11}}\int_0^m S_1 dx_2 - \frac{P_2}{I_{22}}\int_0^m S_2 dx_2 + P_2 = 0 \qquad \text{(VII.122)}$$

întrucît se recunoaște:

$$\int_0^m S_1 dx_1 = I_{11}; \qquad \int_0^m S_2 dx_1 = I_{12} = 0$$

$$\int_0^m S_2 dx_2 = I_{22}; \qquad \int_0^m S_1 dx_2 = I_{21} = 0.$$

5) Pentru echilibru la rotiri se verifică pe rînd stările de eforturi date de P_1 și P_2. Pentru încărcările cu P_1 și respectiv P_2 derivatele eforturilor de lunecare sînt:

$$(\partial_3 N^{3s})_1 = -\frac{P_1 S_1}{I_{11}}; \quad (\partial_3 N^{3s})_2 = -\frac{P_2 S_2}{I_{22}}. \qquad \text{(VII.123)}$$

Scriind momentele eforturilor de mai înainte față de centrul de greutate al secțiunii transversale, rezultă:

$$\begin{aligned} -\int_0^m (\partial_3 N^{3s})_1 \rho ds &= +\frac{P_1}{I_{11}}\int_0^m S_1 \rho\, ds \\ -\int_0^m (\partial_3 N^{3s})_2 \rho ds &= +\frac{P_2}{I_{22}}\int_0^m S_2 \rho\, ds; \end{aligned} \qquad \text{(VII.124)}$$

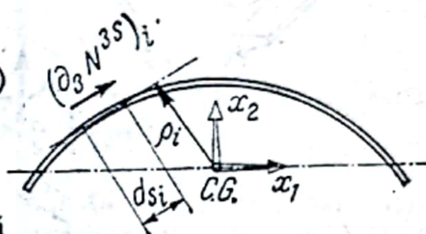


Fig. VII.59

conform fig. VII.59 ρ este distanța de la $\partial_3 N^{3s}$ măsurată pe perpendiculara la tangenta corespunzătoare punctului de aplicație a lui $\partial_3 N^{3s}$.

Rotirea s-a considerat pozitivă cînd are sensul trigonometric. Fiecare din cele două integrale din membrul doi se anulează cînd profilul este simetric față de axa în raport cu care s-a luat momentul static S (fig. VII.59 ambele axe fiind de simetrie).

În cazul profilelor asimetrice, integralele din ecuația (VII.124) conduc la valori finite, reprezentînd momente interioare de răsucire în jurul centrului de greutate. Acțiunea acestor momente poate fi compensată deplasînd rezultanta încărcare într-un punct numit *centru de lunecare* ale cărui coordonate e_1 și e_2 se obțin anulînd pe rînd momentele totale față de centrul de greutate, astfel:

$$\begin{aligned} +\frac{P_2}{I_{22}}\int_0^m S_2 \rho ds - P_2 e_1 = 0; \quad & e_1 = +\frac{\int_0^m \rho\, ds \int_0^s h x_2\, ds}{I_{22}} \\ +\frac{P_1}{I_{11}}\int_0^m S_1 \rho ds + P_1 e_2 = 0; \quad & e_2 = -\frac{\int_0^m \rho\, ds \int_0^s h x_1\, ds}{I_{11}}. \end{aligned} \qquad \text{(VII.125)}$$

În fig. VII.60 s-a figurat poziția centrului de lunecare C. L.

De observat: poziția *centrului de lunecare* depinde numai de *parametrii geometrici ai secțiunii transversale* și a fost definită în corespondență cu acțiunea forțelor de lunecare N^{3s} calculate cu formula Juravski.

Caracteristicile geometrice sectoriale ale secțiunilor subțiri. La determinarea centrului de lunecare s-a folosit integrala $\int_{A_0}^{A} \rho\, ds = \Omega$ care reprezintă, plecînd de la un punct inițial de pe profil A_0 pînă într-un punct A, dublul suprafeței triunghiului măturat de raza ρ, perpendiculară permanent pe tangentele la linia mediană (fig. VII.61); această

caracteristică se numește *coordonată sectorială* și se consideră pozitivă cînd vectorul care reprezintă rotirea, conform convenției de la dreapta la stînga, este pozitiv adică orientat în direcția crescătoare a lui x_3.

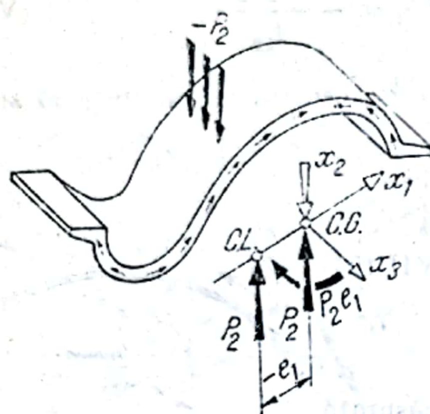


Fig. VII.60

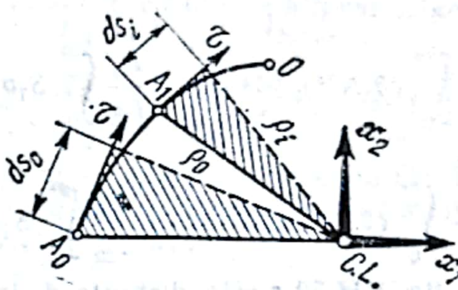


Fig. VII.61

Pentru definirea coordonatelor sectoriale trebuie precizat:

a) *un pol* situat în planul secțiunii transversale care în cele ce urmează va fi centru de lunecare și

b) *un punct de origine* 0 situat pe linia mediană a profilului care se poate alege astfel încît raportat la el, *momentul static sectorial* al întregului profil să fie nul, adică să se verifice ecuația

$$S_{\bar{\Omega}} = \int_0^m h\bar{\Omega}\, ds = 0 \qquad \text{(VII.126)}$$

$\bar{\Omega}$ fiind noua coordonată sectorială definită în raport cu O.

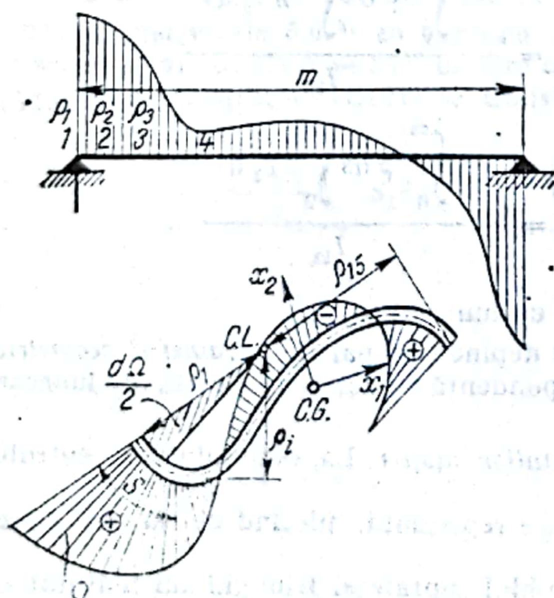


Fig. VII.62

Punctul O se poate determina folosind o analogie observată de Timoshenko [47]: rectificînd curba mediană a profilului și considerînd-o *grindă simplu rezemată la capete*, de *lungimea m* și încărcată cu o sarcină fictivă normală egală cu ρ (măsurat în fiecare punct), *poziția lui O* pe arcul rectificat va corespunde punctului în care se anulează *forța tăietoare calculată* pentru sarcina fictivă definită mai înainte (fig. VII.62).

Plecînd de la un capăt al profilului, coordonta sectorială a punctului nul se poate determina cu expresia

$$\bar{\Omega}_0 = \frac{1}{m}\int_0^m \Omega\, ds\,; \qquad \text{(VII.127)}$$

în continuare se poate defini :

— *momentul static sectorial* pentru un punct al profilului

$$S_{\overline{\Omega}} = \int_0^A h\overline{\Omega}\, ds\,; \tag{VII.128}$$

— *momentul de inerție sectorial* al întregului profil

$$I_{\overline{\Omega}} = \int_0^m h\overline{\Omega}^2\, ds. \tag{VII.129}$$

6.5. Determinarea eforturilor N^{ss}, M^{s3}, N^{sn} care apar în sens transversal pe direcția arcului director

Pe o fișie de învelitoare cilindrică avînd lungimea măsurată în sensul generatoarei ($dx_3 = 1$) într-una din situațiile *static determinate* pentru învelitori izolate (fig. VII.63) se consideră aplicate sarcinile de suprafață date și suplimentar, componentele derivatelor eforturilor de lunecare; în continuare se determină eforturile N^{ss}, M^{3s} și N^{sn}, care apar în sens transversal, întocmai ca la o grindă cu formă curbă, așezată pe un mediu elastic cînd se cunosc valorile reacțiunilor date de acest mediu.

Calculul se ordonează în raport cu axele principale x_1 și x_2, împărțind profilul în segmente și determinînd în centrele de greutate ale fiecărui segment rezultantele încărcărilor totale avînd componentele pe cele două axe

$$\overline{p}^1 = p^1 + (\partial_3 N^{3s})^1\,; \quad \overline{p}^2 = p^2 + (\partial_3 N^{3s})^2\,; \tag{VII. 130}$$

se calculează apoi în fiecare rost i dintre segmente suma forțelor situate în stînga lui

$$P_i^1 = \sum_1^i \overline{p}_k^1\,; \quad P_i^2 = \sum_1^i \overline{p}_k^2.$$

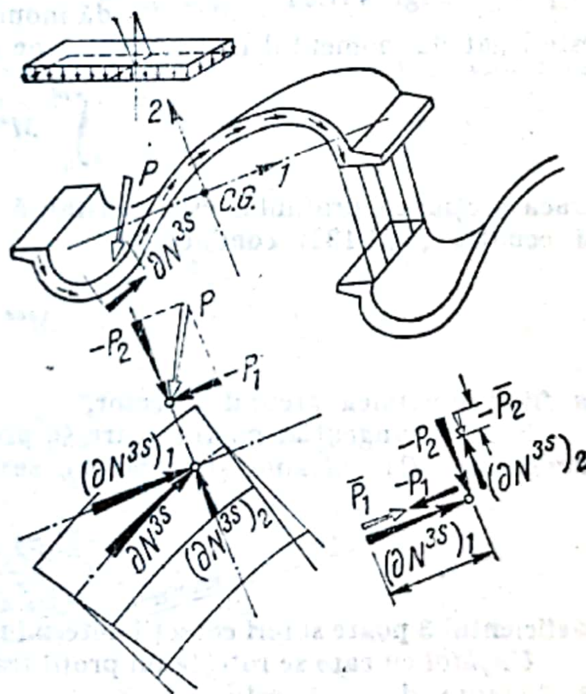


Fig. VII.63

Proiectînd aceste componente pe direcția tangentei și a normalei din i se determină eforturile N^{ss} și N^{sn} din această secțiune i.

Momentele încovoietoare transversale se determină în aceleași secțiuni i cu expresia

$$M_i^{3s} = \sum_0^i P_i^1 \Delta x_2 + \sum_0 P_i^2 \Delta x_1. \tag{VII.131}$$

Originea s-a presupus la un capăt al învelitorii unde încărcarea pe contur este nulă.

6.6. Încovoiere cu torsiune liberă

Această *stare de solicitare* apare cînd, reducînd încărcarea $p(x_1, x_2)$ aplicată pe suprafața învelitorii, față de linia centrelor de lunecare a grinzii, se obține o rezultantă forță $\mathfrak{Q}(x_3)$ și un moment de răsucire $\mathfrak{M}_T(x_3)$ distribuite în lungul liniei x_3. Eforturile din acțiunea lui $\mathfrak{Q}(x_3)$ se calculează conform celor arătate la paragraful 3. 4 și 3. 5.

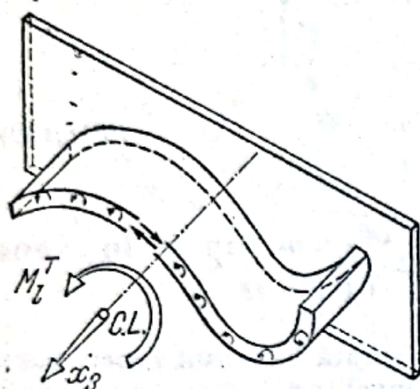


Fig. VII.64

Momentele $\mathfrak{M}_T(x_3)$ de încărcare, provoacă apariția *momentelor de torsiune solicitare* M_T. Cînd aceste momente sînt constante în lungul grinzii și deplanarea secțiunilor este liberă, solicitarea este de *torsiune liberă* (definite de *Saint-Venant*).

În acest caz, secțiunile transversale se încarcă numai cu eforturi tangențiale, paralele cu suprafața mediană; rezultanta eforturilor pe grosimea învelitorii dă momentul interior secțional M^{ss} (fig. VII.64), care este legat de momentul interior total pe secțiune M_T prin relația

$$\int_0^m M^{ss} ds = M_T \tag{VII.132}$$

Dacă secțiunea profilului este constantă, M^{ss} este constant în lungul arcului director și ecuația (VII.132) conduce la

$$M^{ss} = \frac{M_T}{m} \tag{VII.133}$$

m fiind lungimea arcului director.

Efortul tangențial maxim, care se produce pe cele două suprafețe care delimitează învelitoarea (la extrados și intrados), se obține prin relația

$$\sigma^{3s} = \frac{3M_T}{mh^2};$$

coeficientul 3 poate suferi corecții determinate experimental în funcție de forma profilului.

Unghiul cu care se rotește un profil transversal de învelitoare față de secțiunea aflată la distanța $dx_3 = 1$ este

$$\partial_3\varphi = \frac{M_T}{GI_T}$$

în care $I_T = \frac{1}{3} mh^3$ este momentul de inerție la torsiunea liberă a unui profil deschis. Coeficientul 3 poate suferi modificări pentru diferite forme de profil. Se poate nota în consecință cu M_l^T momentul interior rezistent la torsiune liberă dat de expresia

$$M_l^T = GI_T\partial_3\varphi. \tag{VII.134}$$

Deplanarea (ieșirea din plan) unei secțiuni transversale se pune în evidență cunoscînd variația lui u^3 în sensul generatoarei.

Conform celor stabilite anterior la paragraful 6.2, pct. 3, expresia care permite să se calculeze u^3 este

$$u^3 = -\int_0^s \partial_3\varphi\, \rho ds \quad \text{sau} \quad u^3 = -\partial_3\varphi\overline{\Omega}. \tag{VII.135}$$

6.7. Încovoiere cu torsiune împiedicată

Solicitarea apare în două cazuri: cînd pe lîngă momente de încovoiere se produc și momente de torsiune variabile în lungul grinzii, sau cînd momentele de torsiune fiind constante în lungul grinzii, *secțiunile de capăt sînt împiedicate să se deplaneze.*

Cunoscînd conform expresiei (VII.135) valorile lui u^3, întrucît alungirile sînt împiedicate, se pot imediat pune în evidență eforturile N^{33} care apar normal pe diferitele curbe ale suprafeței mediane, și anume:

$$N^{33} = -Eh\varepsilon^{33} = -Eh\partial_{33}\varphi\overline{\Omega}_s \tag{VII.136}$$

Revenind la ecuația scalară de echilibru scrisă pentru deplasarea pe direcția generatoarelor pentru un element diferențial (fig. VII.65) care este

$$\partial_3 N^{33} + \partial_s N^{s3} = 0$$

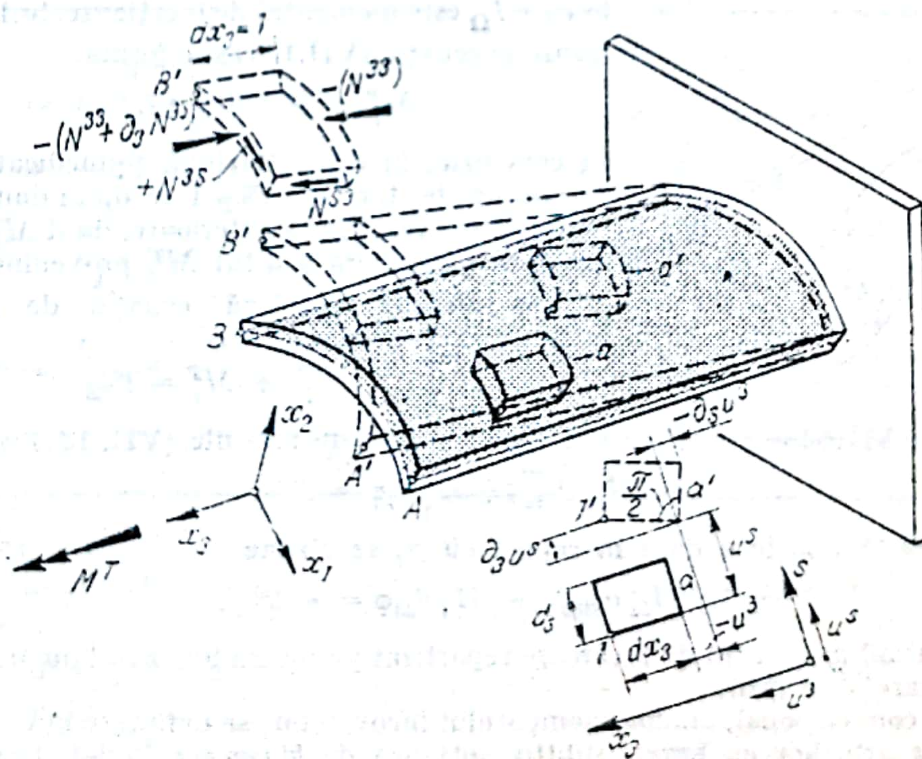


Fig. VII.65

se deduce

$$N^{s3} = -\int_0^s \partial_3 N^{33} = +E\partial_{333}\varphi \int \overline{\Omega}_S \, dA$$

sau recunoscînd că

$$S_{\overline{\Omega}} = \int_0^s \overline{\Omega}_S \, dA$$

este momentul static sectorial al porţiunii de suprafaţă, aparţinînd profilului transversal al învelitorii situat în stînga sau în dreapta punctului considerat, efortul N^{s3} se poate transcrie:

$$N^{s3} = E\partial_{333}\varphi S_{\overline{\Omega}}. \tag{VII.137}$$

Calculînd acum momentul interior de răsucire dat de eforturile N^{s3}, faţă de centrul de lunecare al profilului transversal, se scrie

$$M_i^T = -E\,\partial_{333}\,\varphi \int_0^l S_{\overline{\Omega}}\, \rho ds; \tag{VII.138}$$

semnul minus se datoreşte sensului invers faţă de cel trigonometric cu care M_i^T roteşte secţiunea în raport cu centrul de lunecare (fig. VII.66).

Recunoscînd că

$$\int_0^l S_{\overline{\Omega}}\, \rho ds = \int_0^l S_{\overline{\Omega}}\, d\Omega = \int \overline{\Omega}^2 dA = I_{\overline{\Omega}},$$

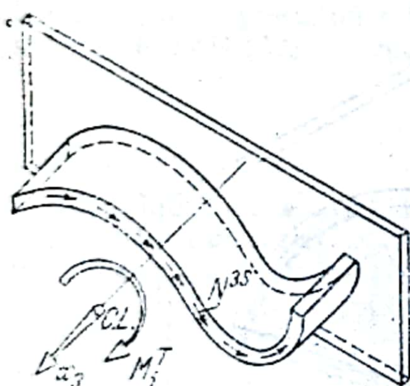


Fig. VII.66

în care I_{Ω} este momentul de inerţie sectorial, se poate transcrie ecuaţia (VII.138) sub forma

$$M_i^T = -E\,\partial_{333}\,\varphi\, I_{\overline{\Omega}}. \tag{VII.139}$$

În concluzie, în cazul torsiunii împiedicate, solicitării exterioare de torsiune $\mathfrak{M}_T$ i se opun două momente reprezentînd reacţiunile interioare, unul M_l^T provenind din torsiunea liberă şi altul M_i^T provenind din împiedicarea torsiunii, astfel că ecuaţia de echilibru la torsiune este în acest caz

$$M_l^T + M_i^T = \mathfrak{M}_T \tag{VII.140}$$

sau ţinînd seama de relaţiile (VII. 134) şi (VII.139);

$$-EI_{\overline{\Omega}}\,\partial_{333}\varphi + GI_T\partial_3\varphi = \mathfrak{M}_T. \tag{VII.141}$$

Derivînd această relaţie o dată în raport cu x_3 se obţine

$$EI_{\overline{\Omega}}\,\partial_{3333}\varphi - GI_T\partial_{33}\varphi = -\mathfrak{M}_T, \tag{VII.142}$$

$\mathfrak{M}_T$ reprezentînd momentul de încărcare repartizat pe metru liniar în lungul liniei centrelor de lunecare a grinzii.

În mod convenţional, analog momentului încovoietor, se defineşte în cazul solicitării la torsiune a grinzilor cu pereţi subţiri noţiunea de *bimoment* B dat de expresia

$$B = EI_{\overline{\Omega}}\,\partial_{33}\varphi. \tag{VII.143}$$

Cu ajutorul noțiunii de bimoment se pot exprima : momentul interior rezultat din împiedicarea răsucirii M_i^T precum și efortul axial N^{33} care apare cu această solicitare; pe baza relațiilor anterioare (VII.136) și (VII.139) și în conformitate cu (VII.143) rezultă

$$M_i^T = -\partial_3 B; \quad N^{33} = \frac{hB}{I_{\overline{\Omega}}}\overline{\Omega}.$$

Înlocuind mai departe în ecuație (VII.142) termenii care conțin rotirea φ, prin expresiile echivalente funcție de B, rezultă

$$\partial_{33}B - \frac{GI_T}{EI_{\overline{\Omega}}}B = -\mathfrak{M}_T. \qquad \text{(VII.144)}$$

Cînd învelitoarea are peretele de grosime mică, se poate neglija în ecuația (VII.144) termenul reprezentînd rezistența la torsiune liberă a profilului transversal, scriind deci

$$\partial_{33}B = -\mathfrak{M}_T. \qquad \text{(VII.145)}$$

În tabelul 12 apare figurată corespondența dintre solicitările de torsiune împiedicată și încovoierea pură care rezultă pe baza ecuației după H. Lundgreen [24].

Tabelul VII.12

Corespondența dintre încovoiere și torsiune împiedicată în cazul învelitorilor subțiri cilindrice

Încovoiere simetrică	Torsiune împiedicată
$Q^3 = -\partial_3 M^{3s}$	$M_i^T = -\partial_3\mathscr{B}$
$p^2 = \partial_3 Q^3 = -\partial_{33}M^{3s}$	$\mathfrak{M}_T = \partial_3 M_T = -EI_{\overline{\Omega}}\,\partial_{33}\mathscr{B}$
$M^{3s} = -EI_1\,\partial_{33}u^3$	$\mathscr{B} = EI_{\overline{\Omega}}\,\partial_{33}\varphi$
$N^{33} = \dfrac{M^{3s}}{I_1}\,x_2 h$	$N^{33} = \dfrac{\mathscr{B}}{I_{\overline{\Omega}}}\,\overline{\Omega}\,h$
$N^{3s} = \dfrac{Q^3}{I_1}\,S_1^n$	$N^{3s} = -\dfrac{M_i^T}{I_{\overline{\Omega}}}\,S_{\overline{\Omega}}$
Condiții de margine	
Simplă rezemare: $u^3 = M^{3s} = 0$	$\varphi = \mathscr{B} = 0$
Încastrare: $u^3 = \partial_3 u^3 = 0$	$\varphi = \partial_3\varphi = 0$
Margine liberă: $Q^3 = -\partial_3 M^{3s} = 0$	$M_i^T = -\partial_3\mathscr{B} = 0$

NOTĂ. Notațiile i reprezintă direcția vectorului confundat cu axa x_i.

7. INSTABILITATEA ÎNVELITORILOR SUBȚIRI

7.1. Teoria voalării. Considerații energetice

În cadrul teorei de membrană se presupune forma învelitorii, condițiile de margini şi natura încărcării date astfel încît starea de echilibru să fie în vecinătatea unui fenomen de instabilitate, energia interioară de deformație fiind dată *in acest caz* de expresia

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\int [n_0^{11}\varepsilon_0^{11} + n_0^{22}\varepsilon_0^{22} + n_0^{12}\varepsilon_0^{12}]\mathrm{d}A\,; \qquad \text{(VII.146)}$$

indicele 0 marchează această situație.

Pentru a cerceta dacă *starea de echilibru* a ajuns la *limita de stabilitate*, se modifică configurația învelitorii, asociind fiecărui punct de pe suprafața mediană un vector deplasare u.

În consecință, se vor produce eforturi suplimentare de membrană δn şi momente încovoietoare δm, cărora le corespund o serie de deformații de extensiune notate cu $\Delta\varepsilon$ şi deformații de încovoiere notate cu $\Delta\varkappa$, energie interioară în această situație fiind

$$\mathscr{E}_i + \Delta\mathscr{E}_i = \frac{1}{2}\int_A [(n_0^{11} + \Delta n^{11})(\varepsilon_0^{11} + \Delta\varepsilon^{11}) + (n_0^{22} + \Delta n^{22})(\varepsilon_0^{22} + \Delta\varepsilon^{22}) +$$

$$+ (n_0^{12} + \Delta n^{12})(\varepsilon_0^{12} + \Delta\varepsilon^{12}) + \Delta m^{11}\Delta\varkappa^{11} + \Delta m^{22}\Delta\varkappa^{22} + 2\Delta m^{12}\Delta\varkappa^{12}]\mathrm{d}A. \qquad \text{(VII.147)}$$

Efectuind produsele şi scăzînd ecuația (VII.146) din expresia (VII.147), observînd apoi că datorită comportării linear-elastice a materialului se poate scrie

$$\Delta n^{11}\varepsilon_0^{11} + \Delta n^{22}\varepsilon_0^{22} + \Delta n^{12}\varepsilon_0^{12} = n_0^{11}\Delta\varepsilon^{11} + n_0^{22}\Delta\varepsilon^{22} + n_0^{12}\Delta\varepsilon^{12}. \qquad \text{(VII.148)}$$

Se obține în continuare:

$$\Delta\mathscr{E}_i = \int_A (n_0^{11}\Delta\varepsilon^{11} + n_0^{22}\Delta\varepsilon^{22} + n_0^{12}\Delta\varepsilon^{12})\mathrm{d}A +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_A (\Delta n^{11}\Delta\varepsilon^{11} + \Delta n^{22}\Delta\varepsilon^{22} + \Delta n^{12}\Delta\varepsilon^{12})\mathrm{d}A +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_A (\Delta m^{11}\Delta\varkappa^{11} + \Delta m^{22}\Delta\varkappa^{22} + 2\Delta m^{12}\Delta\varkappa^{12})\mathrm{d}A. \qquad \text{(VII.149)}$$

Considerînd cum s-a mai arătat că starea de echilibru instabil se produce la *valori ale eforturilor unitare* pentru care materialul se comportă *elastic*, se exprimă relațiile dintre creşterile eforturilor şi deformațiilor în forma mai simplă care este

$$\begin{Vmatrix} \Delta n^{11} \\ \Delta n^{22} \\ \Delta n^{12} \end{Vmatrix} = d \begin{Vmatrix} \Delta\varepsilon^{11} \\ \Delta\varepsilon^{22} \\ \frac{1}{2}\Delta\varepsilon^{12} \end{Vmatrix}; \quad \text{şi} \quad \begin{Vmatrix} \Delta m^{11} \\ \Delta m^{22} \\ \Delta m^{12} \end{Vmatrix} = k \begin{Vmatrix} \Delta\varkappa^{11} \\ \Delta\varkappa^{22} \\ \Delta\varkappa^{12} \end{Vmatrix}$$

în care

$$d = \frac{Eh}{1-\mu^2} \quad \text{şi} \quad k = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

În continuare, înlocuind în ecuaţia (VII.149) creşterile eforturilor secţionale prin deformaţiile corespunzătoare, se transcrie

$$\Delta\mathscr{E}_i = \int_A (n_0^{11}\Delta\varepsilon^{11} + n_0^{22}\Delta\varepsilon^{22} + n_0^{12}\Delta\varepsilon^{12})\mathrm{d}A +$$
$$+ \frac{d}{2}\int_A \left[(\Delta\varepsilon^{11})^2 + (\Delta\varepsilon^{22})^2 + \frac{1}{2}(\Delta\varepsilon^{12})^2\right]\mathrm{d}A + \qquad \text{(VII.150)}$$
$$+ \frac{k}{2}\int_A [(\Delta\varkappa^{11})^2 + (\Delta\varkappa^{22})^2 + 2(\Delta\varkappa^{12})^2]\mathrm{d}A.$$

Notînd acum energia exterioară produsă de forţele exterioare, datorită modificării formei cu $\Delta\mathscr{E}_e$, în virtutea principiului lucrului mecanic virtual, întrucît există o stare de echilibru, energia totală produsă de sistem la transformarea făcută se anulează

$$\Delta\pi = \Delta\mathscr{E}_e + \Delta\mathscr{E}_i = 0. \qquad \text{(VII.151)}$$

Analizînd această ecuaţie energetică trebuie observat că termenii care o compun conţin două tipuri de mărimi, de ordinul 1 şi de ordinul 2, mărimile separîndu-se astfel:

$$\Delta\pi = \bar{\Delta}\pi + \bar{\bar{\Delta}}\pi = \bar{\Delta}\mathscr{E}_e + \bar{\Delta}\mathscr{E}_i + \bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_e + \bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_i. \qquad \text{(VII.152)}$$

Mărimile de ordinul 1 s-au barat o dată, iar cele de ordinul doi, de două ori. În cazul *stării de echilibru stabil*, ecuaţia (VII.152) rămîne valabilă numai la nivelul *mărimilor de ordinul 1*, adică:

$$\bar{\Delta}\pi = \bar{\Delta}\mathscr{E}_e + \bar{\Delta}\mathscr{E}_i \qquad \text{(VII.153)}$$

suma dată de cîtimile de ordinul 2 fiind pozitivă

$$\bar{\bar{\Delta}}\pi = \bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_e + \bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_i > 0. \qquad \text{(VII.154)}$$

Dacă *echilibrul este indiferent* (marcînd astfel limita de instabilitate) şi suma cîturilor de ordinul doi din ecuaţia (VII.152) se anulează, adică:

$$\bar{\bar{\Delta}}\pi = \bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_e + \bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_i = 0. \qquad \text{(VII.155)}$$

Pentru a stabili mărimile de ordinul doi în compunerea energiei interioare, se separă şi creşterile deformaţiilor în mărimi de ordinul 1 şi 2, astfel:

$$\Delta\varepsilon^{ij} = \bar{\Delta}\varepsilon^{ij} + \bar{\bar{\Delta}}\varepsilon^{ij} \text{ şi } \Delta\varkappa^{ij} = \bar{\Delta}\varkappa^{ij} + \bar{\bar{\Delta}}\varkappa^{ij}. \qquad \text{(VII.156)}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţia (VII.150) şi grupînd termenii pe ordine de mărime, se obţine

$$\bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_i = \int_A (n_0^{11}\bar{\bar{\Delta}}\varepsilon^{11} + n^{22}\bar{\bar{\Delta}}\varepsilon^{22} + n^{12}\bar{\bar{\Delta}}\varepsilon^{12})\mathrm{d}A +$$

$$+ \frac{d}{2}\int[(\bar{\Delta}\varepsilon^{11})^2 + (\bar{\Delta}\varepsilon^{22})^2 + (\bar{\Delta}\varepsilon^{12})^2]\mathrm{d}A +$$

$$+ \frac{k}{2}\int_A [(\bar{\Delta}\varkappa^{11})^2 + (\bar{\Delta}\varkappa^{22})^2 + 2(\bar{\Delta}\varkappa^{12})^2]\mathrm{d}A. \qquad \text{(VII.157)}$$

Cele trei integrale se notează succesiv cu $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$ ecuaţia (VII.157) devenind

$$\bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_i = \mathfrak{I}_1 + \frac{d}{2}\mathfrak{I}_2 + \frac{k}{2}\mathfrak{I}_3. \qquad \text{(VII.158)}$$

Criteriul de stabilitate se poate scrie cu aceste notaţii

$$\bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_e + \mathfrak{I}_1 + \frac{d}{2}\mathfrak{I}_2 + \frac{k}{2}\mathfrak{I}_3 > 0. \qquad \text{(VII.159)}$$

Se recunoaşte că integralele $\mathfrak{I}_1$ şi $\mathfrak{I}_3$ nu depind de încărcarea învelitorii şi cînd ele nu se anulează, au fiecare separat semnul pozitiv.

Termenii $\Delta\mathscr{E}_e$ şi $\mathfrak{I}_1$ sînt proporţionali cu valoarea sarcinilor şi în corelaţie cu tipul deplasărilor, de semn pozitiv sau negativ.

În cazul învelitorilor subţiri se pot accepta şi situaţii în care $\mathfrak{I}_2 = 0$, adică deformaţiile de extensiune sînt identic nule $\varepsilon^{ij} = 0$, condiţia de echilibru indiferent, care marchează limita de stabilitate devenind

$$-\frac{2}{k}(\Delta\mathscr{E}_e + \mathfrak{I}_1) = \mathfrak{I}_3. \qquad \text{(VII.160)}$$

Ecuaţia demonstrează, ţinînd seama de natura membrului doi, că în acest caz configuraţia de instabilitate nu depinde de grosimea învelitorii, ci numai de forma ei geometrică.

În practică, învelitorile subţiri datorită reazemelor rigide nu ajung la stări de flambaj inexstensibil şi în acest caz inegalitatea (VII.159) se transformă în ecuaţia

$$-(\bar{\bar{\Delta}}\mathscr{E}_e + \mathfrak{I}_1) = \frac{d}{2}\mathfrak{I}_2 + \frac{k}{2}\mathfrak{I}_3. \qquad \text{(VII.161)}$$

care pune în evidenţă dependenţa formelor de instabilitate şi de grosimea învelitorii. Dacă grosimile de învelitoare sînt mici, termenul $\mathfrak{I}_3 \frac{k}{2}$ devine neglijabil şi trebuie căutate tipurile de deplasări pentru care $\mathfrak{I}_2$ devine mic, iar cînd învelitoarea are placa de grosimi mai mari, termenul $\frac{k}{2}\mathfrak{I}_3$ devine preponderent şi trebuie căutate configuraţii de instabilitate care să minimizeze pe $\mathfrak{I}_3$.

7.2. Voalarea învelitorilor cu curburi constante

1) La învelitori de tip *eliptic și parabolic* cu *curburi constante*, Wansleben a stabilit ecuaţiile diferenţiale pentru starea critică de voalare pe baza următoarelor aproximaţii :

— *liniile de coordonate de pe suprafaţă* (x_1 = const şi x_2 = const, x_i fiind axe carteziene rectangulare) se asimilează cu *liniile principale de curbură*, ele intersectîndu-se sub un unghi $\chi = \frac{\pi}{2}$ (fig. VII.67), iar razele de curbură normale ρ_1 şi ρ_2 pe direcţiile x_1 şi x_2 sînt constante;

— *zona de voalare se întinde pe o arie cu dimensiuni reduse faţă de mărimea razelor de curbură* ale suprafeţei mediane a învelitorii;

— *încărcarea exterioară normală la suprafaţă p şi grosimea învelitorii h* se consideră constante pe întreaga porţiune de învelitoare limitată în planul de referinţă x_1x_2 de conturul dreptunghiular avînd laturile $\Delta x_1 = l_1$ şi $\Delta x_2 = l_2$.

2) Sarcina p dezvoltă în învelitoare o stare de eforturi de membrană notată cu $\mathbf{n}^{10}$ şi $\mathbf{n}^{20}$ în care evident scalarii n_0^{12} şi $n_0^{21} = 0$; în consecinţă, ecuaţia de echilibru după normala la suprafaţa mediană se exprimă în orice punct al învelitorii prin

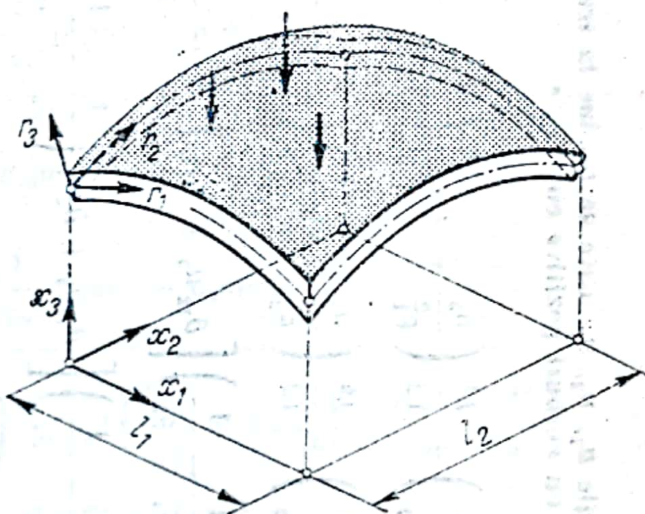


Fig. VII.67

$$\frac{n_0^{11}}{\rho_1} + \frac{n_0^{22}}{\rho_2} = -p \qquad \text{(VII.162)}$$

eforturile n_0^{11} şi n_0^{22} sînt constante pe întreaga învelitoare pentru că p, ρ_1 şi ρ_2 rămîn aceleaşi în interiorul domeniului.

Cînd se ajunge la $p = p_{critic}$, *învelitoarea se găseşte la limita de stabilitate* şi în acest moment trecînd la o formă infinit vecină de echilibru, învelitoarea suferă deplasări u_1, u_2, u_3 pe direcţiile versorilor $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ (v. fig. VII.29, *a*), care provoacă o stare de eforturi cu valori infinit mici caracterizată prin vectorii $\mathbf{n}^1$, $\mathbf{n}^2$, $\mathbf{m}^1$ şi $\mathbf{m}^2$ eforturi secţionale care se exprimă funcţie de u_1, u_2 şi u_3 şi care sînt date în tabelul VII.13.

3) Ecuaţiile diferenţiale de echilibru pentru elementul aparţinînd *configuraţiei de voalare în număr de cinci* reprezintă trei din ele echilibrul la deplasări şi două echilibrul la rotiri. Pe baza ultimelor două ecuaţii de rotiri se deduc expresiile forţelor tăietoare în funcţie de momentele încovoietoare şi de torsiune, care introduse în primele ecuaţii conduc la aşa-numitele *ecuaţii de condiţii* pentru trecerea într-o formă de instabilitate; acestea sînt date în tabelul VII.14.

Înlocuind în aceste ecuaţii expresiile eforturilor în funcţie de deplasări, conform tabelului VII.13, şi folosind suplimentar notaţiile

$$N_0^{11} = -\frac{1-\mu^2}{Eh}\, n_0^{11}; \quad N_0^{22} = -\frac{1-\mu^2}{Eh}\, n_0^{22}; \quad \lambda = \frac{h^2}{12} \qquad \text{(VII.163)}$$

Tabelul VII.13

Eforturile secționale elastice calculate pentru deplasările u_1, u_2, u_3, care se produc la trecerea într-o figură de instabilitate, la învelitori cu curburi pozitive constante

$$n^{11} = d\left[\partial_1 u_1 + \mu\partial_2 u_2 + u_3\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{u_3}{\rho_1^2} + \partial_{11}u_3\right)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\right]$$

$$n^{22} = d\left[\mu\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + u_3\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{u_3}{\rho_2^2} + \partial_{22}u_3\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\right]$$

$$n^{12} = d\frac{1-\mu}{2}\left\{\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\left[\partial_{12}u_3 + \partial_1 u_2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\right]\right\}$$

$$n^{21} = d\frac{1-\mu}{2}\left\{\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left[\partial_{12}u_3 + \partial_2 u_1\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\right]\right\}$$

$$m^{12} = k\left[-\frac{1}{\rho_2}(\partial_1 u_1 + \mu\partial_2 u_2) + \partial_{11}u_3 + \mu\partial_{22}u_3 + \frac{u_3}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\right]$$

$$m^{21} = k\left[-\frac{1}{\rho_1}(\mu\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \partial_{22}u_3 + \mu\partial_{11}u_3 + \frac{u_3}{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\right]$$

$$m^{11} = k\frac{1-\mu}{2}\left[-\frac{1}{\rho_1}\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2\left(\frac{2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) + 2\partial_{12}u_3\right]$$

$$m^{22} = k\frac{1-\mu}{2}\left[-\partial_2 u_1\left(\frac{2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) - \frac{1}{\rho_2}\partial_1 u_2 + 2\partial_{12}u_3\right]$$

$$d = \frac{Eh}{1-\mu^2}\ ; \qquad k = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Tabelul VII.14

Ecuațiile de echilibru pentru elementul deformat la învelitori cu raze de curbură pozitive și constante

Proiecția pe $\mathbf{r}_1$	$n_0^{11}\left(\partial_{12}u_2 + \frac{1}{\rho_2}\partial_1 u_3\right) + n_0^{22}\,\partial_{22}u_1 + \partial_1 n^{11} + \partial_2 n^{12} = \frac{1}{\rho_1}(\partial_1 m^{12} + \partial_2 m^{22})$
Proiecția pe $\mathbf{r}_2$	$n_0^{11}\,\partial_{11}u_2 + n_0^{22}\left(\partial_{12}u_1 + \frac{1}{\rho_1}\partial_2 u_3\right) + \partial_1 n^{12} + \partial_2 n^{22} = \frac{1}{\rho_2}(\partial_1 m^{11} + \partial_2 m^{21})$
Proiecția pe $\mathbf{r}_3$	$n_0^{11}\left(\frac{u_3}{\rho_1^2} + \partial_{11}u_3\right) + n_0^{22}\left(\frac{u_3}{\rho_2^2} + \partial_{22}u_3\right) = \frac{n^{11}}{\rho_1} + \frac{n^{22}}{\rho_2} + \partial_{11}m^{12} + \partial_{22}m^{21} + \partial_{12}m^{11} + \partial_{12}m^{22}$

se obțin relațiile diferențiale de voalare exprimate funcție de deplasări; ele apar în tabelul VII.15.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații din tabelul VII.15 se poate sugera o soluție particulară scriind pentru deplasări

$$u^1 = A_1\cos\alpha_1 x_1 \sin\alpha_2 x_2;\quad u^2 = A_2\sin\alpha_1 x_1\cos\alpha_2 x_2;\qquad \text{(VII.164)}$$
$$u^3 = A_3\sin\alpha_1 x_1\sin\alpha_2 x_2,$$

în care A_1, A_2 și A_3 sînt constante ce urmează a se determina, iar $\alpha_1 = \frac{n_1\pi}{l_1}$ și $\alpha_2 = \frac{n_2\pi}{l_2}$ în care n_1 și n_2 sînt numere întregi pozitive arătînd cîte semiunde de voalare s-au produs pe direcțiile x_1 și x_2 în interiorul dreptunghiului $l_1 l_2$. Expresiile (VII.164) mai pun în evidență satisfacerea următoarelor condiții de margini pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = l_1$

$$u^2 = u^3 = \partial_1 u^1 = \partial_2 u^2 = \partial_{11}u^3 = \partial_{22}u^3 = 0;\quad u^1 \neq 0$$

pentru $x_2 = 0$ și $x_2 = l_2$

$$u^1 = u^3 = \partial_1 u^1 = \partial_2 u^2 = \partial_{11}u^3 = \partial_{22}u^3 = 0;\quad u^2 \neq 0.$$

Tabelul VII.15

Ecuațiile diferențiale de compatibilitate între deplasări la apariția voalării pe o suprafață de tip eliptic sau parabolic cu curburi constante

$$\partial_{22}u_1\left\{N_0^{22}-\frac{1-\mu}{2}\left[1+\lambda\left(\frac{1}{\rho_2^2}-\frac{3}{\rho_1\rho_2}+\frac{3}{\rho_1^2}\right)\right]\right\}-\partial_{11}u_1\left(1+\frac{\lambda}{\rho_1\rho_2}\right)+\partial_{12}u_2\left[N_0^{11}-\frac{1+\mu}{2}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda}{\rho_1\rho_2}\right)\right]+\frac{1}{\rho_2}\partial_1u_3\left[N_0^{11}-\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}+\mu\right)\right]+\frac{\lambda}{\rho_2}\left\{\partial_{111}u_3+\frac{1}{2}\partial_{122}u_3\left[(3-\mu)\frac{\rho_2}{\rho_1}-(1-\mu)\right]\right\}=0$$

$$\partial_{12}u_1\left[N_0^{22}-\frac{1+\mu}{2}\left(1+\frac{\lambda}{\rho_1\rho_2}\right)\right]+\partial_{11}u_2\left\{N_0^{11}-\frac{1-\mu}{2}\left[1+\lambda\left(\frac{1}{\rho_1^2}-\frac{3}{\rho_1\rho_2}+\frac{3}{\rho_2^2}\right)\right]\right\}-\partial_{22}u_2\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\rho_1\rho_2}\right)+\frac{1}{\rho_1}\partial_2u_3\left[N_0^{22}-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}+\mu\right)\right]+\frac{\lambda}{\rho_1}\left\{\partial_{222}u_3+\frac{1}{2}\partial_{112}u_3\left[(3-\mu)\frac{\rho_1}{\rho_2}-(1-\mu)\right]\right\}=0$$

$$\partial_1u_1\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{\mu}{\rho_2}\right)-\lambda\left\{\frac{\partial_{111}u_1}{\rho_2}+\frac{1}{2}\partial_{122}u_1\left[(3-\mu)\frac{1}{\rho_1}-\frac{(1-\mu)}{\rho_2}\right]\right\}+\partial_2u_2\left(\frac{1}{\rho_2}+\frac{\mu}{\rho_1}\right)-\lambda\frac{\partial_{222}u_2}{\rho_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\partial_{112}u_2\left[(3-\mu)\frac{1}{\rho_2}-\frac{(1-\mu)}{\rho_1}\right]\Bigg\}+N_0^{11}\left(\frac{u_3}{\rho_1^2}+\partial_{11}u_3\right)+N_0^{22}\left(\frac{u_3}{\rho_2^2}+\partial_{22}u_3\right)+u_3\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{2\mu}{\rho_1\rho_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho_2^2}\right)\left[1+\lambda\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2\right]+\lambda\left[\partial_{1111}u_3+2\,\partial_{1122}u_3+\partial_{2222}u_3+2\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2}\partial_{22}u_3-\frac{1}{\rho_1}\partial_{11}u_3\right)\right]=0$$

Se observă că pe contur deplasările normale la învelitoare sînt complet împiedicate, fiind permise rotiri în plane normale la suprafața mediană (reazeme articulate); deplasările pe margini situate în plane tangente sînt împiedicate numai cele care acționează în lungul marginii, și anume $u^2 = 0$ pe direcțiile liniilor de contur $x_1 = 0$ și $x_1 = l_1$ și $u^1 = 0$ pe direcțiile liniilor $x_2 = 0$ și $x_2 = l_2$. Ca urmare, elementele așezate pe frontiera domeniului trebuie să fie rigide la încovoiere în plane normale la învelitoare și trebuie să fie fără rigiditate în plane tangente la învelitoare.

Înlocuind deplasările (VII.164) în ecuațiile din tabelul 15 rezultă un sistem omogen de trei ecuații cu trei necunoscute A_1, A_2, A_3; după cum se știe, soluții diferite de zero pentru aceste necunoscute (care exprimă starea de echilibru indiferent) se obțin numai dacă determinantul sistemului se anulează. Scriind această condiție, se obține după simplificările unor termeni de ordin de mărime mic, următoarea ecuație de condiție la apariția voalării

$$N_0^{11}\left\{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2\left(\alpha_1^2-\frac{1}{\rho_1^2}\right)+\frac{\alpha_1^2}{\rho_2}\left[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1-\mu)\left(\frac{\alpha_1^2}{\rho_2}+\frac{\alpha_2^2}{\rho_1}\right)\right]\right\}+$$
$$+N_0^{22}\left\{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2\left(\alpha_2^2-\frac{1}{\rho_2^2}\right)+\frac{\alpha_2^2}{\rho_1}\left[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1-\mu)\left(\frac{\alpha_1^2}{\rho_2}+\frac{\alpha_2^2}{\rho_1}\right)\right]\right\}= \tag{VII.165}$$
$$=-Eh\left(\frac{\alpha_1^2}{\rho_2}+\frac{\alpha_2^2}{\rho_1}\right)^2-k\left\{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2\left[\left(\alpha_1^2-\frac{1}{\rho_1^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\alpha_2^2-\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]^2+2(1-\mu)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\left[\left(\frac{\alpha_1^2}{\rho_2}+\frac{\alpha_2^2}{\rho_1}\right)^2-\right.$$
$$\left.\left.-\alpha_1^2\alpha_2^2\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2\right]\right\}$$

în care: $k = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

La capitolul învelitorilor eliptice se indică soluția rezolvantă a problemei.

ACOPERIȘURI PENTRU HALE INDUSTRIALE, ATELIERE ȘI SĂLI DE ÎNTRUNIRE

8. ÎNVELITORI DE TIP ELIPTIC

Învelitorile de tip eliptic, sub forma *cupolelor de rotație* cu bază circulară, au apărut prima dată în construcțiile romane (Pantheonul lui Hadrian construit între anii 115

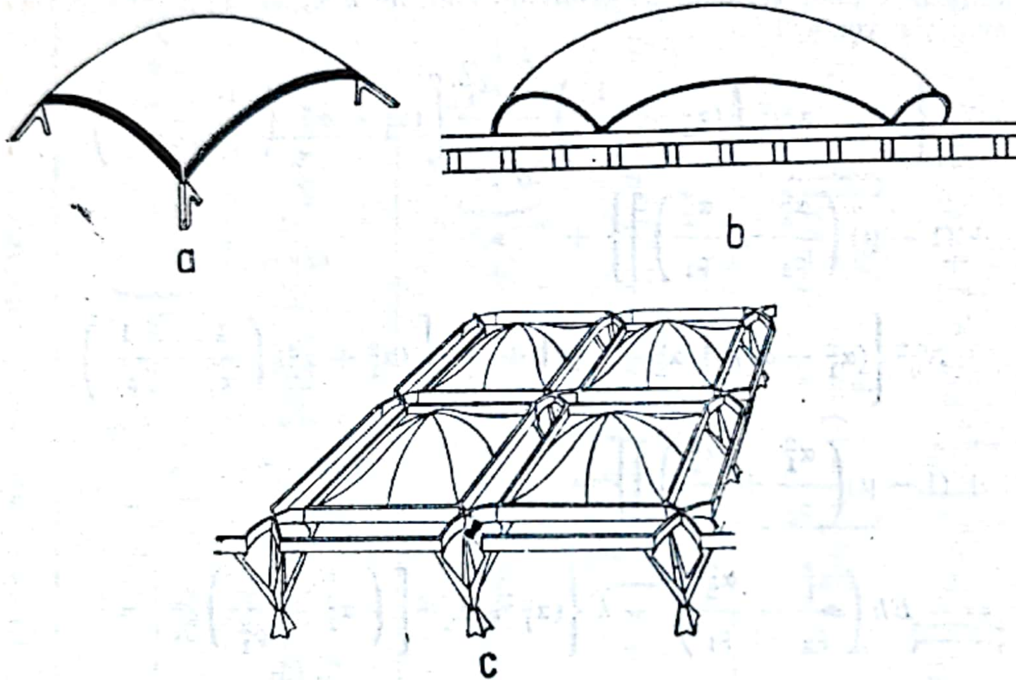


Fig. VII.68

și 125 e.n.), servind de atunci pînă astăzi la acoperirea *sălilor mari* cu *caracter monumental*. În ultimul timp, pentru acoperirea traveelor de formă *drepunghiulară* indicate la *hale de montaj* (fig. VII.68, *a* și *b*) și *hangare de avioane* au fost preferate învelitorile de translație. Pentru săli de expoziție s-au folosit și învelitori în formă de *paraboloid cu contur pătrat* (fig. VII.68, *c*).

8.1. Învelitori de rotație cu bază circulară calculate în teoria de membrană

8.1.1. Teoria de membrană. Teoria de membrană se aplică în următoarele condiții:

Încărcarea și ecuația generatoarei împreună cu primele *derivate să fie continue* (fig. VII.69); *nici o tangență* să nu formeze cu o perpendiculară pe axa de rotație un unghi mai mare decît 90°.

— *Acțiunea reazemelor* să fie *plasată în plane tangente* la învelitoare: *rotirile și deplasările corespunzătoare* stării de *echilibru de membrană* să nu fie împiedicate pe

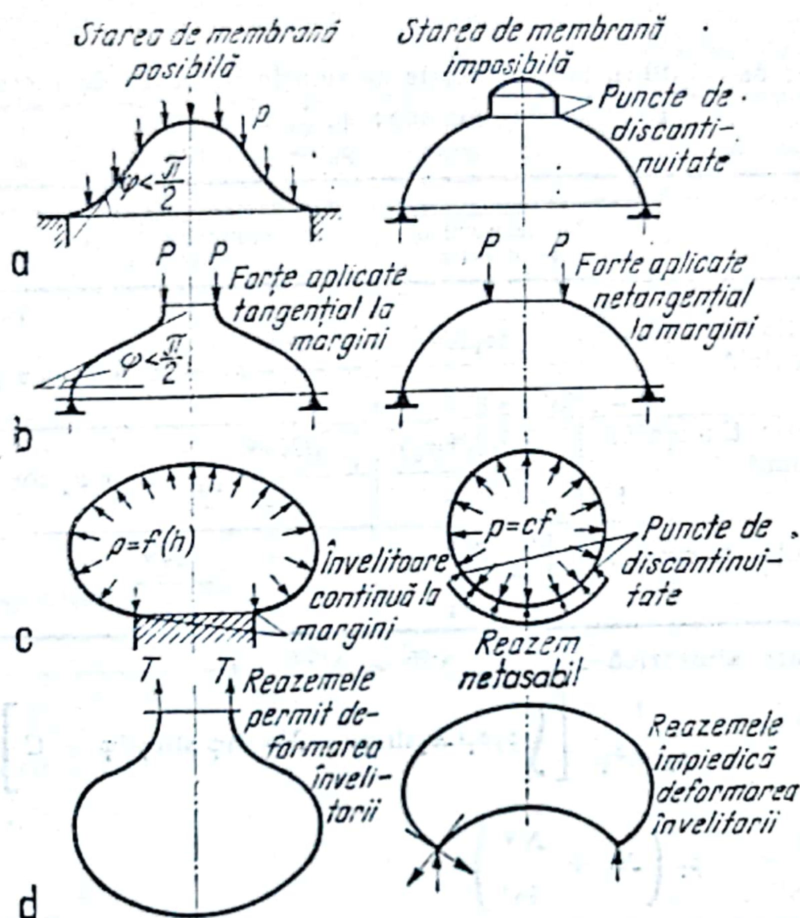


Fig. VII.69

învelitoare și la margini (fig. VII.69, *a,b,c,d*).

În coordonate sferice se fac notațiile (fig. VII.70):

ρ_1, ρ_2 — razele de curbură după meridian și paralel;

$\rho_0 = \rho_2 \sin\varphi$ — raza cercului paralel;

ψ — unghiul unui *plan meridian* cu planul *meridian origine*;

φ — *unghiul normalei la suprafață* cu axa de rotație;

N^{φ}, N^{ψ} și $N^{\varphi\psi} = N^{\psi\varphi}$ sînt *eforturile de membrană* după direcțiile *curbei meridiane* și a *cercului paralel* (v. fig. VII.70);

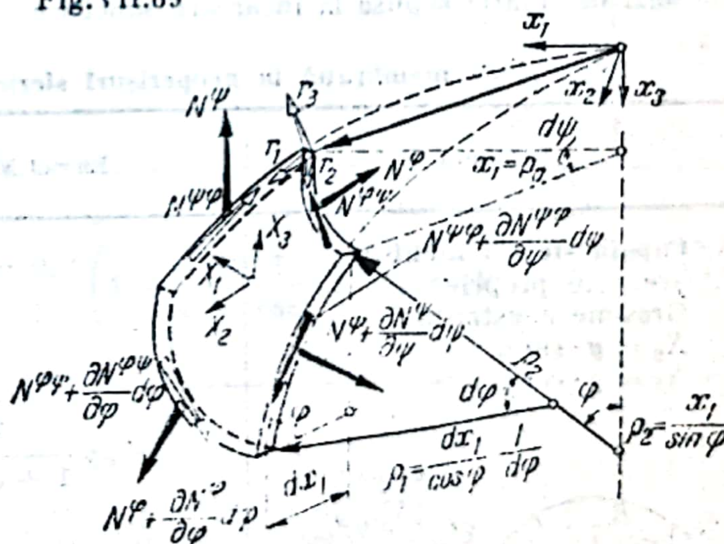


Fig. VII.70

X_1, X_2, X_3 sînt componentele încărcării *P* pe *direcțiile curbei paralele, a curbei meridiane* și a *normalei la suprafață*. Ecuațiile de echilibru în teoria de membrană apar în tabelul VII.16.

Tabelul VII.16

Ecuațiile de echilibru la învelitorile de rotație în teoria de membrană

Coordonate sferice: φ, ψ, ρ_2

$\rho_0 = \rho_2 \sin \varphi$

	Componentele vectorului de pe direcția φ	Componentele vectorului de pe direcția ψ	Componentele încărcării p
Proiecția pe direcția tangentei la linia paralelă x_1	$+\dfrac{\partial(\rho_0 N^{\varphi\psi})}{\partial\varphi}$	$+\dfrac{\partial N^{\psi}}{\partial\psi}\rho_1 + N^{\varphi\psi}\rho_1 \cos\varphi$	$+X_1\rho_0\rho_1 = 0$
Proiecția pe direcția tangentei la meridian x_2	$+\dfrac{\partial(N^{\varphi}\rho_0)}{\partial\varphi}$	$+\dfrac{\partial N^{\psi\varphi}}{\partial\psi}\rho_1 - N^{\psi}\rho_1\cos\varphi$	$+X_2\rho_0\rho_1 = 0$
Proiecția pe direcția normalei x_3	$+\dfrac{N^{\varphi}}{\rho_1}$	$+\dfrac{N^{\psi}}{\rho_2}$	$+X_3 = 0$

8.1.2. **Încărcare simetrică** $X_1 = 0,\ N^{\varphi\psi} = N^{\psi\varphi} = 0$

$$N^{\varphi} = -\frac{1}{\rho_2 \sin^2\varphi}\left[\int \rho_1\rho_2(X_2\sin\varphi + X_3\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi + C\right]$$

$$N^{\psi} = -\rho_2\left(X_3 + \frac{N^{\varphi}}{\rho_1}\right) \tag{VII.166}$$

În tabelul VII.17 și VII.18 apar expresiile eforturilor pentru învelitori sferice și elipsoizi de rotație supuse la încărcări simetrice

Tabelul VII.17

Eforturi de membrană la acoperișuri sferice încărcate simetric $X_1 = 0$

Încărcarea	Efortul N^{φ}	Efortul N^{ψ}	Rostul de rupere $N^{\psi} = 0$
A. Cupola sferică închisă 1. Greutate proprie Grosime constantă $X_2 = g \cdot \sin\varphi$ $X_3 = g \cdot \cos\varphi$	$-g\rho\dfrac{1}{1+\cos\varphi}$	$-g\rho\left(\cos\varphi - \dfrac{1}{1+\cos\varphi}\right)$	$\varphi = 51°49'$

Tabelul VII.17 (continuare)

Încărcarea	Efortul N^{φ}	Efortul N^{ψ}	Rostul de rupere $N^{\psi}=0$
2. Geutatea proprie pentru grosime variabilă $h=h_0(1+\varepsilon\varphi^2)$ γ — greutatea specifică a materialului	$-\frac{-\gamma\rho h_0}{1+\cos\varphi}\Big[1+ +\varepsilon\frac{2\cos\varphi+2\varphi\sin\varphi-\varphi^2}{1-\cos\varphi}\cos\varphi-2\Big]$	$-N^{\varphi}-\gamma\rho h_0(1+ +\varepsilon\varphi^2)\cos\varphi$	
3. Zăpadă: $p=p_0$ $X_2=p_0\sin\varphi\cos\varphi$ $X_3=p_0\cos^2\varphi$	$-\frac{1}{2}p\rho$	$-\frac{1}{2}p\rho\cos 2\varphi$	$\varphi=45°$
4. Zăpadă: $p=p_0\cos\varphi$ $X_2=p_0\sin\varphi\cos^2\varphi$ $X_3=p_0\cos^3\varphi$	$\frac{-p_0\rho}{3}\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)$	$-p_0\rho\cos^3\varphi-N^{\varphi}$	$\varphi=$ $=40°18'$
5. Cupola cu inel de centură $H=-(N^{\varphi})_0\cos\varphi_0$	Efortul în inelul de bază $T=H\rho_0=-(N^{\varphi})_0\rho_0\cos\varphi_0$ $=-(N^{\varphi})_0\rho\sin\varphi_0\cos\varphi_0$		

Tabelul VII.17 (continuare)

Încărcarea	Efortul N^{φ}	Efortul N^{ψ}	Restul de rupere $N^{\psi}=0$
B. Cupola sferică deschisă 6. Greutate proprie Grosime constantă $X_2 = g\sin\varphi$ $X_3 = g\cos\varphi$	$-\rho g\dfrac{\cos\varphi_1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$\rho g\left(\dfrac{\cos\varphi_1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi}-\cos\varphi\right)$	
7. Zăpadă $X_2 = p_0\sin\varphi\cos\varphi$	$-\dfrac{\rho p_0}{2}\left(1-\dfrac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}\right)$	$\dfrac{\rho p_0}{2}\left(1-\dfrac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}-2\cos^2\varphi\right)$	
8. Încarcare cu lanternou $L = 2\pi\rho P\sin\varphi_1$	Efortul în inelul de lanternou $T = L\cdot\rho\cdot\cos\varphi_1$ $-L\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin^2\varphi}$	$L\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin^2\varphi}$	
9. Încărcare din lanternou L și greutate proprie g	$-\dfrac{1}{\sin^2\varphi}[g\rho(\cos\varphi_1-\cos\varphi)+L\sin\varphi_1]$	$\dfrac{1}{\sin^2\varphi}[g\rho(\cos\varphi_1-\cos\varphi)+L\sin\varphi_1]-g\rho\cos\varphi$ În figură eforturile sînt pentru $\varphi_1 = 20°$ și $L = 0{,}5\,g\rho$	

Tabelul VII.18

Eforturi de membrană la elipsoizi de rotație încărcați simetric

Ecuația elipsoidului meridian $\frac{\rho_0^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1$; $\rho_0 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x_3^2}$

Razele de curbură $\rho_1 = \frac{\sqrt{(b^4 + e^2x_3^2)^3}}{ab^4}$; $\rho_2 = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2x_3^2}$; $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

Cazul de încărcare	Eforturi N_φ	Eforturi N_ψ
1. Greutate proprie Grosime constantă g/m²	$-\frac{g s_\varphi \sqrt{b^4 + e^2x_3^2}}{2\pi a(b^2 - x_3^2)}$ $s_\varphi = 2\pi \int_{x_3}^{b} \eta \, ds = \pi \left[a^2 - x_3 \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4 + e^2x_3^2} + \frac{ab^2}{e} \ln \frac{b(a+e)}{ex_3 + \sqrt{b^4 + e^2x_3^2}} \right]$	$\frac{gab^2 s_\varphi}{2\pi(b^2 - x_3^2)\sqrt{b^4 + e^2x_3^2}} - g\frac{a^2}{b^2}x^3$
2. Zăpada uniform distribuită	$-\frac{pa}{2b^2}\sqrt{b^4 + e^2x_3^2}$	$\frac{pa^3(b^2 - 2x_3^2)}{2b^2\sqrt{b^4 + e^2x_3^2}}$

8.1.3. Încărcarea nesimetrică la învelitori sferice. Ecuațiile de echilibru din tabelul VII.16 devin

$$\frac{\partial N^{\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial N^{\psi\varphi}}{\partial \varphi} \sin \varphi + 2N^{\psi\varphi} \cos \varphi + X_1 \rho \sin \varphi = 0 \qquad \text{(VII.167)}$$

$$\frac{\partial N^{\psi\varphi}}{\partial \psi} - N^{\psi} \cos \varphi + \frac{\partial N^{\varphi}}{\partial \varphi} \sin \varphi + N^{\varphi} \cos \varphi + X_2 \rho \sin \varphi = 0 \qquad \text{(VII.168)}$$

$$N^{\psi} + N^{\varphi} + \rho X_3 = 0. \qquad \text{(VII.169)}$$

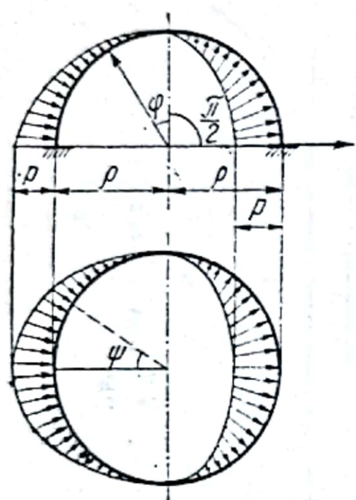


Fig. VII.71

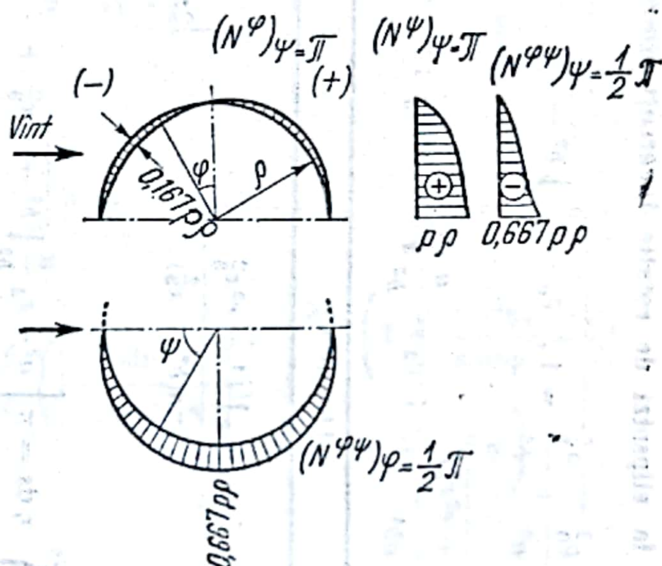


Fig. VII.72

În cazul acțiunii vîntului pentru

$$X_1 = X_2 = 0; \; X_3 = p \sin \varphi \cos \psi \text{ (fig. VII.71)}$$

în care p este presiunea maximă care apare în punctul $\varphi = \frac{\pi}{2}$ și $\psi = 0$, eforturile sînt (fig. VII.72)

$$N^{\varphi} = p\rho \left(-\frac{2}{3} + \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \cos \psi \qquad \text{(VII.170)}$$

$$N^{\psi\varphi} = p\rho \left(-\frac{2}{3} + \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \frac{\sin \psi}{\sin^3 \varphi} \qquad \text{(VII.171)}$$

$$N^{\psi} = p\rho \left(\frac{2}{3} \cos \varphi - \sin^2 \varphi - \frac{2}{3} \cos^4 \varphi \right) \frac{\cos \psi}{\sin^3 \varphi}. \qquad \text{(VII.172)}$$

8.1.4. Aplicarea principiului echivalenței maselor. *Eforturile unei învelitori de rotație* încărcată cu greutatea proprie, a cărei *ordonată* x_3 se deduce printr-un procedeu continuu din ordonata $\bar{x}_3$ corespunzătoare unei alte învelitori (luate de bază), se pot calcula din *eforturile învelitorii* de bază, dacă se consideră *grosimea variabilă* și astfel distribuită încît cele două *elemente* să aibă *volume egale* (*principiul echivalenței maselor*). Astfel, se pot calcula învelitori în formă de elipsoizi de rotație avînd grosimea peretelui variabilă cunoscînd eforturile care apar la învelitori sferice cu grosime constantă (fig. VII.73)

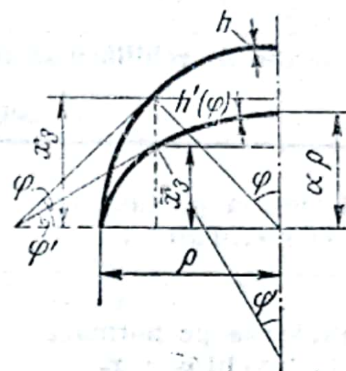


Fig. VII.73

8.2. Învelitori de rotație încărcate simetric calculate în teoria de încovoiere

8.2.1. Ecuațiile de echilibru. Conform fig. VII.74, *a*, *b*, *c* și *d* pe elementul de învelitoare, în afara încărcării simetrice, acționează eforturile interioare N^{φ}, N^{ψ} (eforturi de membrană) M^{φ}, M^{ψ} (momente), $N^{3\varphi} = N^{3}$ forța tăietoare; echilibrul se exprimă prin ecuațiile din tabelul VII. 19.

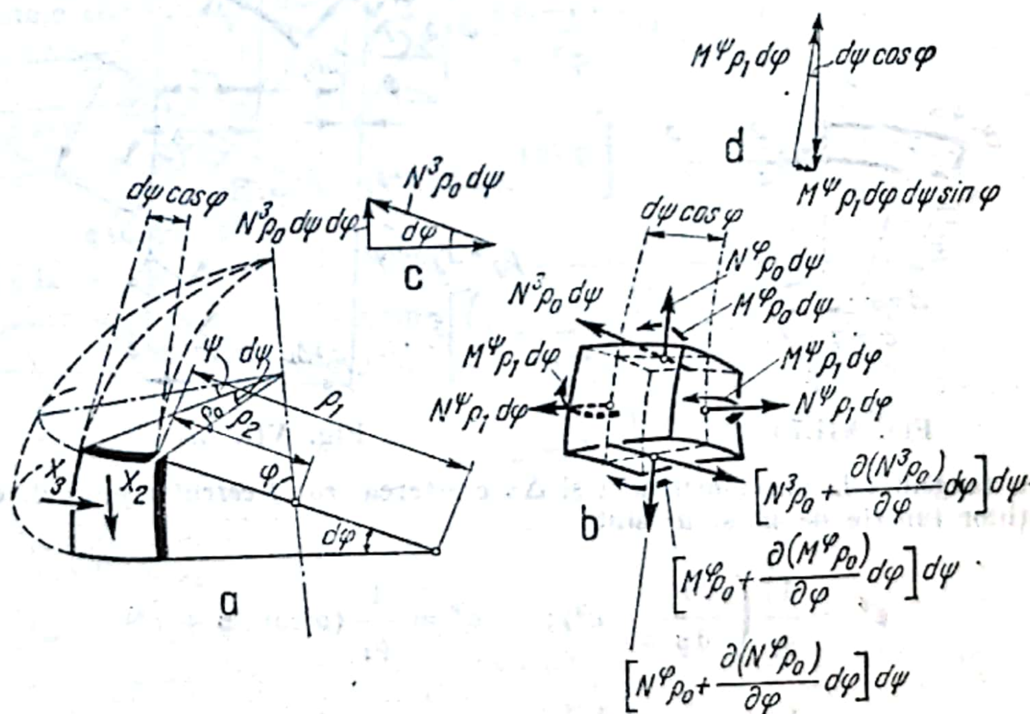


Fig. VII.74

Tabelul VII.19

Ecuațiile de echilibru în teoria de încovoiere la învelitori de rotație încărcate simetric

Coordonate sferice φ, ψ, ρ_2 $\rho_0 = \rho_2 \sin\varphi$

Proiecția pe tangenta la meridian x_2	$-N^{\psi}\rho_1\cos\varphi + \dfrac{d(N^{\varphi}\rho_0)}{d\varphi} - N^3\rho_0 + X_2\rho_0\rho_1 = 0$
Proiecția pe normala la învelitoare x_3	$+N^{\psi}\rho_1\sin\varphi + N^{\varphi}\rho_0 + \dfrac{d(N^3\rho_0)}{d\varphi} + X_3\rho_0\rho_1 = 0$
Momentele în jurul tangentei la cercul paralel	$-M^{\psi}\rho_1\cos\varphi + \dfrac{d(M^{\varphi}\rho_0)}{d\varphi} - N^3\rho_0\rho_1 = 0$

8.2.2. **Deformațiile.** Un punct pe suprafața mediană se deplasează cu $+u^2$ în *sensul meridianului* (φ crescător) și $+u^3$ în direcția *normalei de suprafață* (fig. VII.75). Notînd: ε^{φ} deformația specifică a curbei meridiane ε^{ψ} deformația specifică a cercului paralel,

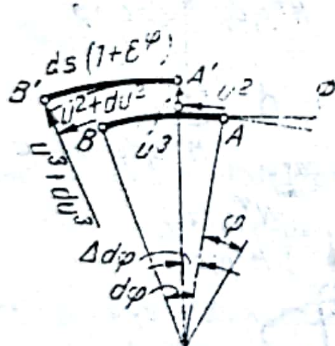


Fig. VII.75

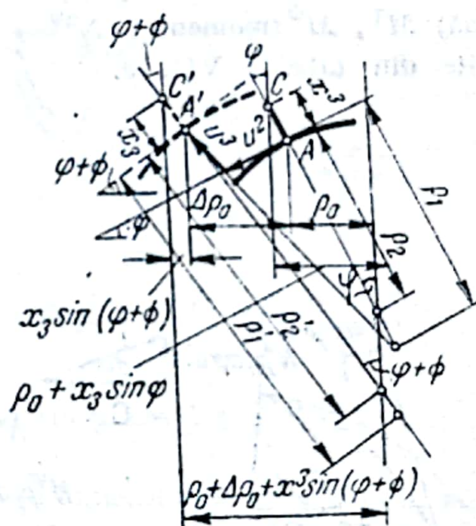


Fig. VII.76

Φ rotirea tangentei la arcul meridian și $\Delta\rho$ creșterea *razei cercului paralel*, expresiile deformațiilor funcție de u^1 și u^2 sînt

$$\varepsilon^{\varphi} = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{du^2}{d\varphi} + u^3\right); \qquad \varepsilon^{\psi} = \frac{1}{\rho_2}(u^2 \operatorname{cotg}\varphi + u^3)$$

$$\Phi = \frac{1}{\rho_1}\left(u^2 - \frac{du^3}{d\varphi}\right); \qquad \Delta\rho_0 = \rho_0\varepsilon^{\psi}. \tag{VII.173}$$

Tabelul VII.20

Deplasările cupolelor sferice încărcate simetric în teoria de membrană

Încărcarea	$\Delta\rho_0$	Φ
A. Cupola sferică închisă		
1. Greutate proprie. Grosime constantă g/m^2 (φ, φ_0, ρ, $\Delta\rho_0$, $\frac{\rho^2 g}{Eh}(1+\mu)$)	$\frac{\rho^2 g}{Eh}\sin\varphi\left(\frac{1+\mu}{1+\cos\varphi}-\cos\varphi\right)$	$-\frac{\rho g}{Eh}(2+\mu)\sin\varphi$
2. Încălzire uniformă	$\alpha_t t\rho\sin\varphi$	0
3. Zăpadă $p = p_0/m^2$ (φ_1, φ, ρ, $\Delta\rho_0$, $\frac{\rho^2 p_0}{Eh}(1+\mu)$)	$\frac{\rho^2 p_0}{Eh}\sin\varphi\left(\frac{1+\mu}{2}-\cos^2\varphi\right)$	$-\frac{\rho p_0}{2Eh}(3+\mu)\sin 2\varphi$
B. Cupola sferică deschisă		
4. Greutate proprie. Grosime constantă g/m^2 (φ_2, φ_1, ρ, $\Delta\rho_0$, $\frac{\rho^2 g}{Eh}(1+\mu)\cos\varphi_1$)	$\frac{\rho^2 g}{Eh}\sin\varphi\left[\frac{\cos\varphi_1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi}(1+\mu)-\cos\varphi\right]$	$-\frac{\rho g}{Eh}(2+\mu)\sin\varphi$
5. Zăpadă $p = p_0/m^2$ (φ_2, φ_1, ρ, $\Delta\rho_0$, $\frac{\rho^2 p_0}{2Eh}(1+\mu)\cos^2\varphi_1$)	$\frac{\rho^2 p_0\sin\varphi}{2Eh}\left[\left(1-\frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}\right)(1+\mu)-2\cos^2\varphi\right]$	$-\frac{\rho p_0}{2Eh}(3+\mu)\sin 2\varphi$
6. Încărcare lanternou $L = 2\pi\rho P\sin\varphi_1$ (P, P, φ_2, φ_1, ρ, $\Delta\rho_0$, $\frac{P\rho}{Eh}(1+\mu)\sin\varphi_1$)	$\frac{P\rho}{Eh}(1+\mu)\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}$	0

Un punct situat în învelitoare, pe normala la suprafața mediană la distanța x_3 (fig. VII.76), suferă următoarele deformații :

$$\varepsilon^{\varphi 3} = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{du^2}{d\varphi} + u^3 + x_3\frac{d\Phi}{d\varphi}\right);$$

$$\varepsilon^{\psi 3} = \frac{1}{\rho_2}(u^2 \operatorname{cotg}\varphi + u^3) + \frac{x_3}{\rho_1\rho_2}\operatorname{cotg}\varphi\left(u^2 - \frac{du^3}{d\varphi}\right) \qquad \text{(VII.174)}$$

În tabelul VII. 20 se dau expresiile deplasărilor pentru cîteva tipuri de învelitori și cazuri de încărcare.

8.2.3. **Relațiile între eforturi și deplasări :**

$$N^{\varphi} = d\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{du^2}{d\varphi} + u^3\right) + \frac{\mu}{\rho_2}(u^2 \operatorname{cotg}\varphi + u^3)\right] \qquad \text{(VII.175)}$$

$$N^{\psi} = d\left[\frac{1}{\rho_2}(u^2 \operatorname{cotg}\varphi + u^3) + \frac{\mu}{\rho_1}\left(\frac{du^2}{d\varphi} + u^3\right)\right] \qquad \text{(VII.176)}$$

$$M^{\varphi} = -k\left[\frac{1}{\rho_1}\frac{d\Phi}{d\varphi} + \frac{\mu}{\rho_2}\Phi \operatorname{cotg}\varphi\right] \qquad \text{(VII.177)}$$

$$M^{\psi} = -k\left[\frac{1}{\rho_2}\Phi \operatorname{cotg}\varphi + \frac{\mu}{\rho_1}\frac{d\Phi}{d\varphi}\right]. \qquad \text{(VII.178)}$$

8.2.4. **Influența deformării marginilor la cupola sferică încărcată simetric.** *Rezolvare aproximativă.* Soluția sistemului de ecuații diferențiale (v. tabelul VII.19) se compune dintr-o soluție particulară a sistemului complet, la care se adaugă soluția generală a sistemului de ecuații omogen ($X_1 = X_2 = X_3 = 0$). După cum s-a arătat, soluția particulară se poate calcula cu ajutorul teoriei de membrană; sistemul omogen se reduce considerînd $N^3 + \frac{\partial N^3}{\partial \varphi}$ și $\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ mici față de $\frac{\partial^2 N^3}{\partial \varphi^2}$ și respectiv $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$, la două ecuații

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\rho^2}{k}N^3 = 0; \quad \frac{\partial^2 N^3}{\partial \varphi^2} - 2d\Phi = 0 \qquad \text{(VII.179)}$$

în care : $d = \frac{Eh}{1-\mu^2}$; $k = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

Eliminînd pe Φ și notînd : $4\alpha^4 = 2d\frac{\rho^2}{k}$ se obține

$$\frac{d^4 N^3}{d\varphi^4} + 4\alpha^4 N^3 = 0 \qquad \text{(VII.180)}$$

a cărei ecuație caracteristică are rădăcinile

$$m_{1,2} = \pm(1 + i)\alpha; \qquad m_{3,4} = \pm(1 - i)\alpha$$

În consecință, soluția ecuației (VII.180) se scrie

$$N^3 = C_1 e^{-\alpha\omega}\cos(\alpha\omega + \beta_1) + C_2 e^{-\alpha\varphi}\cos(\alpha\varphi + \beta_2) \qquad \text{(VII.181)}$$

S-a notat : $\omega = \varphi_0 - \varphi$; φ_0 unghiul normalei de pe marginea inferioară cu axa de rotaţie, $C_{1,2}$ şi $\beta_{1,2}$ constante arbitrare. Soluţia N^3 reprezintă două *oscilaţii amortizate* : primul *termen influenţa marginii inferioare* (fig. VII,77) şi al doilea, *influenţa marginii superioare* (în cazul cupolei secţionate). Pentru o cupolă nesecţionată se dau în tabelul VII. 21 expresiile eforturilor şi deformaţiilor funcţie de constantele C_1 şi β_1 care se determină din condiţiile de margine [49].

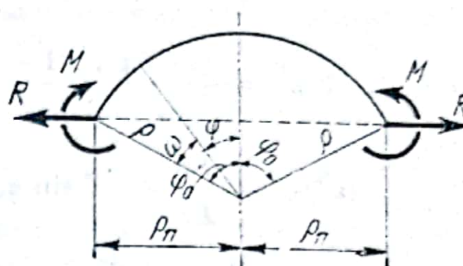


Fig. VII.77

Tabelul VII.21

Eforturi şi deplasări la învelitori sferice datorită deformării marginii inferioare

$$N^3 = C_1 e^{-\alpha\omega} \cos(\alpha\omega + \beta_1)$$

$$N^{\varphi} = C_1 e^{-\alpha\omega} \operatorname{cotg}\varphi \cos(\alpha\omega + \beta_1)$$

$$N^{\psi} = -C_1 \alpha \sqrt{2}\, e^{-\alpha\omega} \sin\left(\alpha\omega + \beta_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M^{\varphi} = C_1 \alpha \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\alpha\omega} \cos\left(\alpha\omega + \beta_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M^{\psi} = -\frac{C_1 h \operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\alpha\omega} \sin(\alpha\omega + \beta_1) + \mu M^{\varphi}$$

$$\Phi = \frac{\alpha^2}{Eh} C_1 e^{-\alpha\omega} \sin(\alpha\omega + \beta_1)$$

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = -\frac{\sqrt{2}\,\alpha^3}{Eh} C_1 e^{-\alpha\omega} \cos\left(\alpha\omega + \beta_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Marginea inferioară încărcată cu forţe radiale uniform distribuite R

Condiţii de margini :

pentru $\varphi = \varphi_0$, $N^{\varphi} = R\cos\varphi_0$; $(N^3)_0 = -R\sin\varphi_0$; $M^{\varphi} = 0$)

$$N_R^3 = -R\sqrt{2}\, e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \cos\left(\alpha\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(N^{\varphi})_R = \sqrt{2}\, R\, e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \operatorname{cotg}\varphi \cos\left(\alpha\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(N^{\psi})_R = 2R\alpha\, e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \cos\alpha\omega$$

$$(M^{\varphi})_R = \frac{2R\alpha h}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \sin\alpha\omega$$

$$(M^{\psi})_R = \frac{\sqrt{2}\, Rh}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \operatorname{cotg}\varphi \sin\left(\alpha\omega + \frac{\pi}{4}\right) + \mu(M^{\varphi})_R$$

Tabelul VII.21 (continuare)

$$(\Phi)_R = \frac{-R\rho\sqrt{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{2}\,Eh^2}\, e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \sin\left(\alpha\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(\varepsilon^{\psi})_R = \frac{R\alpha}{Eh}\, e^{-\alpha\omega} \sin\varphi_0 \cos\alpha\omega$$

$$\Delta\rho = \frac{R\alpha\rho}{Eh} \sin\varphi_0 \cos\alpha\omega$$

pentru $\omega = 0$; $(\Phi)_R^{\varphi_0} = -\dfrac{R\rho}{2Eh^2}\sqrt{3(1-\mu^2)}$

$$(\Delta\rho)_R^{\varphi_0} = \frac{\alpha\rho R}{Eh} \sin\varphi_0$$

Marginea inferioară încărcată cu momente uniform distribuite M

Condiții de margini :

pentru $\varphi = \varphi_0$, $N^{\varphi} = N^{3\varphi} = 0$; $M^{\varphi} = M$)

$$(N^3)_M = \frac{M}{\alpha h}\sqrt{3(1-\mu^2)}\; e^{-\alpha\omega} \sin\alpha\omega$$

$$(N^{\varphi})_M = -\frac{M}{\alpha h}\sqrt{3(1-\mu^2)}\; e^{-\alpha\omega} \operatorname{cotg}\varphi \sin\alpha\omega$$

$$(N^{\psi})_M = \frac{M}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}\; e^{-\alpha\omega} (\cos\alpha\omega - \sin\alpha\omega)$$

$$(M^{\varphi})_M = M e^{-\alpha\omega} (\sin\alpha\omega + \cos\alpha\omega)$$

$$(M^{\psi})_M = \frac{M}{\alpha}\, e^{-\alpha\omega} \operatorname{cotg}\varphi \cos\alpha\omega + \mu(M^{\varphi})_M$$

$$(\Phi)_M = -\frac{M\rho}{\alpha k}\, e^{-\alpha\omega} \cos\alpha\omega$$

$$(\varepsilon^{\psi})_M = \frac{M}{2Eh^2}\sqrt{3(1-\mu^2)}\; e^{-\alpha\omega} (\cos\alpha\omega - \sin\alpha\omega)$$

pentru $\varphi = \varphi_0$

$$(\Phi)_M^{\varphi_0} = -\frac{M\rho}{k\alpha}; \quad (\Delta\rho)_M^{\varphi_0} = \frac{M\rho}{2Eh^2}\sqrt{3(1-\mu^2)}$$

8.2.5. Ecuațiile de continuitate [49]. La marginea inferioară cupola are următoarele deformații (fig. VII.78):

$(\Delta\rho_0)_p^{\varphi_0}$ și $(\Phi)_p^{\varphi_0}$ calculate în teoria de membrană pentru sarcina dată;

$(\Delta\rho_0)_R^{\varphi_0}$ și $(\Phi)_R^{\varphi_0}$
$(\Delta\rho_0)_M^{\varphi_0}$ și $(\Phi)_M^{\varphi_0}$ } calculate în teoria de încovoiere funcție de R și respectiv M, eforturi static nedeterminate.

Reazemele cupolei suferă deformațiile:

$(\Delta\rho_0)_p^*$ și $(\Phi)_p^*$ pentru reacțiunile transmise de învelitoare și calculate în teoria de membrană;

$(\Delta\rho_0)_R^*$ și $(\Phi)_R^*$
$(\Delta\rho_0)_M^*$ și $(\Phi)_M^*$ } datorită reacțiunilor R și M static nedeterminate.

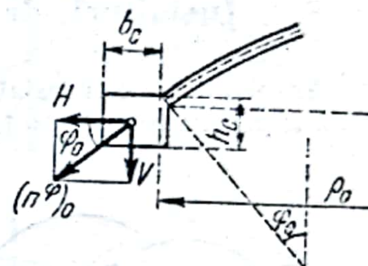


Fig. VII.78

În consecință, R și M se determină din ecuațiile liniare

$$(\Delta\rho_0)_p^{\varphi_0} + (\Delta\rho_0)_R^{\varphi_0} + (\Delta\rho_0)_M^{\varphi_0} = (\Delta\rho_0)_p^* + (\Delta\rho_0)_R^* + (\Delta\rho_0)_M^* \quad \text{(VII.182)}$$

$$(\Phi)_p^{\varphi_0} + (\Phi)_R^{\varphi_0} + (\Phi)_M^{\varphi_0} = (\Phi)_p^* + (\Phi)_R^* + (\Phi)_M^*. \quad \text{(VII.183)}$$

Deformațiile $(\Phi)_p$ și $(\Delta\rho_0)_p$ pentru soluția de membrană se determină cu ecuațiile:

$$(\Phi)_p = \frac{1}{Eh}\left[-\frac{dN^\psi}{d\varphi} + \mu\frac{dN^\varphi}{d\varphi} + (1+\mu)(N^\varphi - N^\psi)\operatorname{cotg}\varphi_0\right] \quad \text{(VII.184)}$$

$$(\Delta\rho_0)_p = \rho_0(\varepsilon^\psi)_0 = \frac{\rho_0}{Eh}(N^\psi - \mu N^\varphi). \quad \text{(VII.185)}$$

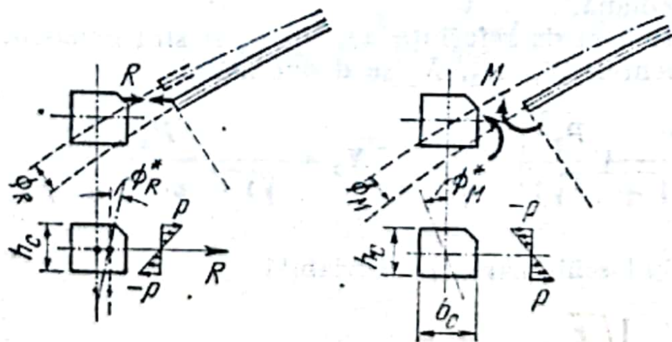


Fig. VII.79

Pentru centuri avînd secțiunea $A_c = h_c \times b_c$ conform fig. VII.79 se obține:

— la încărcarea cu R aplicată în centrul de greutate

$$(\Delta\rho_0)_p = \rho_0\varepsilon = \frac{R\rho_0^2}{Eb_ch_c}; \quad \text{(VII.186)}$$

— pentru eforturile static nedeterminate R și M

$$(\Delta\rho_0)^*_R = -\frac{4R\rho^2}{Eb_c h_c}; \qquad (\Phi)^*_R = -\frac{6R\,\rho^2}{Eb_c h_c^2} \qquad \text{(VII.187)}$$

$$(\Delta\rho_0)^*_M = \frac{6M\,\rho^2}{Eb_c h_c^2}; \qquad (\Phi)^*_M = \frac{12M\,\rho^2}{Eb_c h_c^2}. \qquad \text{(VII.188)}$$

8.3. Învelitori de translație

Învelitorile de translație sînt *formele cele mai indicate* din punct de vedere *constructiv* și *static* pentru acoperirea traveelor *pătrate* sau *dreptunghiulare* (fig. VII. 80) cu *dimensiuni mari* (avînd latura peste 30 m); în mod special se recomandă folosirea paraboloidului circular și a învelitorii generate prin translația unui cerc paralel cu el însăși pe alte două cercuri (ecuațiile acestor suprafețe sînt date în tabelul VII.2).

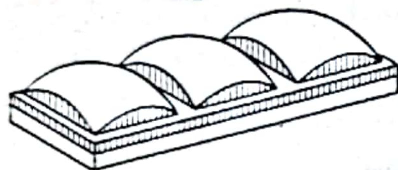


Fig. VII.80

În cadrul teoriei de membrană alegînd sistemul de referință astfel încît axele x_1 și x_2 să fie paralelele, prima cu liniile directoare și a doua cu curbele generatoare (fig. VII. 81 se deduc eforturile convenționale n^{ij}:

$$n^{11} = N^{11}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \qquad n^{22} = N^{22}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \qquad n^{12} = N^{12}. \qquad \text{(VII.189)}$$

Ecuația de echilibru după normala la suprafața mediană a învelitorii se scrie sub formă canonică

$$r\,\partial_{22}F + t\,\partial_{11}F = \mathfrak{Z} \qquad \text{(VII.190)}$$

în care: $\mathfrak{Z} = -(1 + p^2 + q^2)P_3 + r\int(pP_3 + X_1)\mathrm{d}x_1 + t\int(qP_3 + X_2)\mathrm{d}x_2;$

P_1, P_2, P_3 sînt componentele încărcării considerate față de trivectorul intrinsec r_1, r_2, r_3 raportate la unitatea de suprafață mediană.

Dacă încărcările sînt raportate la triedrul de referință x_1, x_2, x_3 și sînt cunoscute componentele P_1, P_2, P_3 atunci componentele X_1, X_2, X_3 se deduc astfel:

$$X_1 = \frac{P_1}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}; \qquad X_2 = \frac{P_2}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}; \qquad X_3 = \frac{P_3}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}$$

Împărțind ecuația (VII.190) cu t și făcînd schimbarea de variabilă

$$x_2 = \sqrt{\frac{r}{t}}\,\bar{x}_2, \qquad \text{(VII.191)}$$

se obţine forma izometrică

$$\partial_{11}F + \partial_{22}F = \frac{\vec{P}}{t}, \qquad \text{(VII.192)}$$

$\vec{P}$ fiind corespondentul lui P pentru schimbarea de variabilă operată.

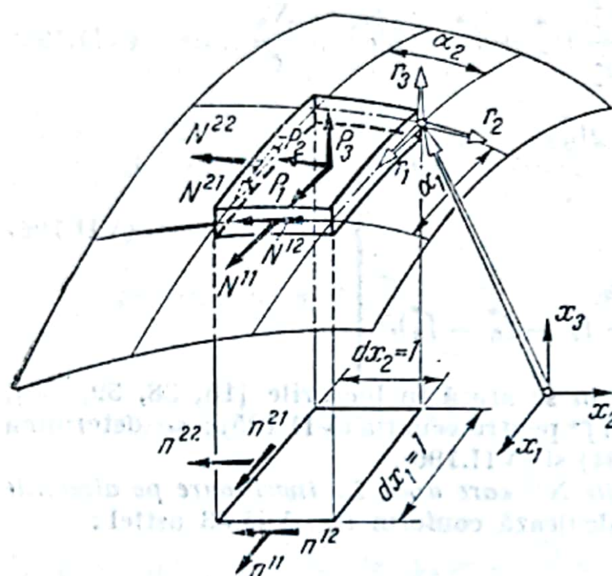


Fig. VII.81

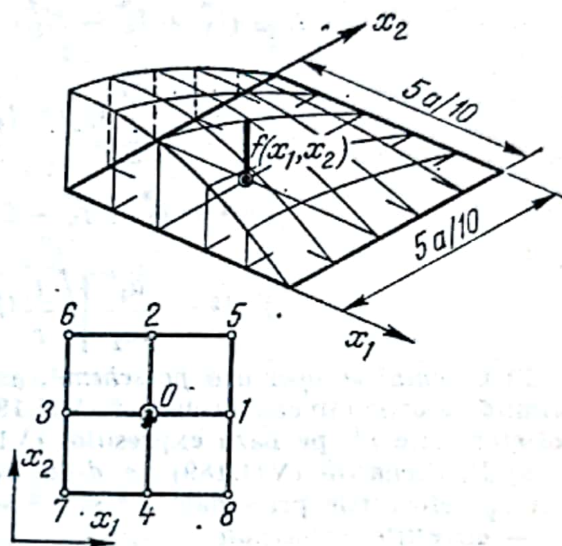


Fig. VII.82

Ecuaţia (VII. 192) *se rezolvă prin metoda relaxării în cazul încărcării*: $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 \neq 0$.

1) *Dacă suprafaţa de bază a învelitorii* se poate împărţi convenabil *în reţele cu ochiuri pătrate* încît pe fiecare latură să se înscrie un număr întreg de intervale, ecuaţia cu diferenţe finite şi expresiile eforturilor sînt (fig. VII.82)

$$R \equiv f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0 + a^2\frac{X_3}{t} \qquad \text{(VII.193)}$$

$$\left.\begin{aligned} n^{11} &= \frac{1}{a^2\rho}(f_2 + f_4 - 2f_0) \\ n^{12} &= \frac{1}{4a^2}\sqrt{\frac{t}{r}}(f_5 + f_7 - f_6 - f_8) \\ n^{22} &= \frac{1}{a^2}(f_1 + f_3 - 2f_0). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.194)}$$

2) Dacă suprafaţa de *bază* este *dreptunghiulară şi raportul* laturilor nu permite aranjarea în mod convenabil a unei *reţele pătrate cu ochiuri întregi*, se foloseşte o reţea

dreptunghiulară; calculul se poate sistematiza trecînd la variabile adimensionale definite prin

$$x_1 = \frac{a_1}{n} x_1^*; \qquad x_2 = \frac{a_2}{n} x_2^*; \qquad f = \frac{a_1^2}{n^2} f^*.$$

Ecuaţia cu diferenţe finite şi expresiile eforturilor în acest caz sînt

$$R \equiv (f_1^* + f_3^* - 2f_0^*) + \frac{a_1^2}{a_2^2}(f_2^* + f_4^* - 2f_0^*) + \frac{X_3}{t} \qquad \text{(VII.195)}$$

$$\left.\begin{aligned} n^{11} &= \frac{a_1^2 t}{a_2^2 r}(f_2^* + f_4^* - 2f_0^*) \\ n^{22} &= f_1^* + f_3^* - 2f_0^* \\ n^{12} &= \frac{a_1}{4a_2}\sqrt{\frac{t}{r}}(f_5^* + f_7^* - f_6^* - f_8^*). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.196)}$$

3) *Calculul se operează pe schemă*, aşa cum se arată în lucrările [16, 38, 39, 50], obţinînd valorile f în cazul ecuaţiei (VII.193) şi f^* pentru ecuaţia (VII.195); se determină apoi eforturile n^{ij} pe baza expresiilor (VII.194) şi (VII.196).

4) *Din ecuaţiile* (VII.189) *se deduc valorile* N^{ij} *care apar în invelitoare pe direcţiile* x_1 *şi* x_2; eforturile principale $\mathcal{N}^1$ şi $\mathcal{N}^2$ se calculează conform fig. VII.83 astfel:

— *direcţiile principale*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{N^{11}\sin 2\chi + 2N^{12}\sin\chi}{N^{11}\cos 2\chi + N^{22} + 2N^{12}\cos\chi}; \qquad \text{(VII.197)}$$

— *eforturile principale*

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{N}^1 &= \frac{1}{\sin\chi}[N^{11}\sin^2(\alpha+\chi) + N^{22}\sin^2\alpha + 2N^{12}\sin\alpha\sin(\alpha+\chi)] \\ \mathcal{N}^2 &= \frac{1}{\sin\chi}[N^{11}\cos^2(\alpha+\chi) + N^{22}\cos^2\alpha + 2N^{12}\cos\alpha\cos(\alpha+\chi)] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.198)}$$

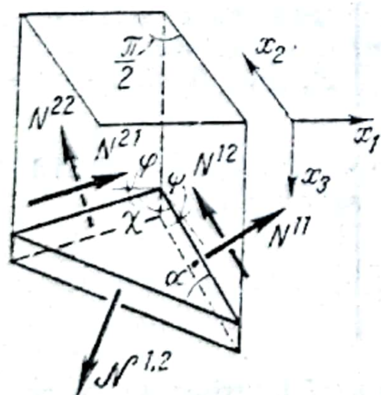


Fig. VII.83

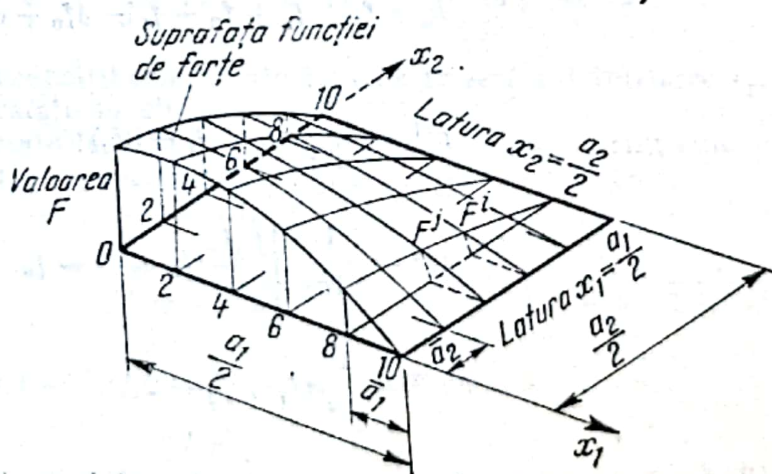


Fig. VII.84

χ este unghiul liniilor $x_1 = \text{const}$ şi $x_2 = \text{const}$ de pe suprafaţa mediană a învelitorii: $\sin\chi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi \sin^2\psi}$.

5) *Eforturile* N^{12} *pe marginea învelitorii* se determină presupunînd timpanele de margine, rigide în planul lor şi flexibile perpendicular. Rezultă condiţiile de margine: (fig. VII.84).

$$\left.\begin{aligned}
&-\text{ pentru: } x_1 = \pm\frac{a_1}{2}: && n^{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0,\\
&\quad\text{din ecuaţia (VII.190) se obţine: } && n^{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -\frac{\vartheta_3}{t};\\
&-\text{ pentru: } x_2 = \pm\frac{a_2}{2}: && n^{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0,\\
&\quad\text{rezultă din ecuaţia (VII.190)} && n^{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -\frac{\vartheta_3}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.199)}$$

În consecinţă, pe laturile $x_1 = \pm\dfrac{a_1}{2}$ se scrie (fig. VII.84):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{x_2 = x^i} = -\frac{\vartheta_3}{2r}\bar{a}_2 - \frac{1}{\bar{a}_2}\left(F^i\right)_{x_1 = \pm\left(\frac{a_1}{2} - \bar{a}_1\right)} \qquad \text{(VII.200)}$$

$$n^{12} = N^{12} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)_{x_2 = \frac{x_2^i + x_2^j}{2}} = \frac{1}{\bar{a}_1\bar{a}_2}\left[F^j - F^i\right]_{x_1 = \pm\left(\frac{a_1}{2} - \bar{a}_1\right)}. \qquad \text{(VII.201)}$$

Analog se procedează şi pe laturile $x_2 = \pm\dfrac{a_2}{2}$.

8.4. Instabilitatea învelitorilor sferice

Starea critică de instabilitate, la o sferă închisă încărcată cu o presiune uniformă din exterior a fost studiată de R. Zoelly plecînd de la condiţia de instabilitate [v. ecuaţia (VII.165)], în acest caz $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, iar efortul la limita de stabilitate este

$$N^{11} = N^{22} = -\frac{1}{2}\,p_{cr}\rho; \qquad \text{(VII.202)}$$

ca urmare, ecuația de instabilitate (VII.165) devine

$$\frac{p_{cr}\,\rho}{2E}\left[1-\frac{1+\mu}{\rho^2(\alpha^2+\beta^2)}\right]=\frac{h}{\rho^2(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{h^3(\alpha^2+\beta^2)}{12(1-\mu^2)}\left[1-\frac{2(1+\mu)}{\rho^2(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{4}{\rho^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] \qquad \text{(VII.203)}$$

Expresiile din paranteze nu diferă practic de 1 ; în consecință, și considerînd probabilă valoarea pentru care $\alpha=\beta$, rezultă

$$p_{cr}=\frac{Eh}{\rho}\left[\frac{1}{\rho^2\alpha^2}+\frac{\alpha^2h^2}{3(1-\mu^2)}\right]. \qquad \text{(VII.204)}$$

Valoarea minimă a lui p_{cr} rezultă din ecuația :

$$\frac{dp_{cr}}{d(\alpha^2)}=0$$

și în consecință

$$\alpha^2=\frac{1}{\rho h}\sqrt{3(1-\mu^2)} \qquad \text{(VII.205)}$$

$$p_{cr}=\frac{2E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2. \qquad \text{(VII.206)}$$

Formula (VII.206) presupune că instabilitatea se produce pentru eforturi unitare care nu depășesc rezistența admisibilă a materialului.

Dacă α^2 din expresia (VII.205) nu corespunde unui număr n întreg, atunci se ia pentru α^2 valoarea imediat superioară, care corespunde unui n întreg și se înlocuiește în expresia (VII.204).

9. ÎNVELITORI CONICE

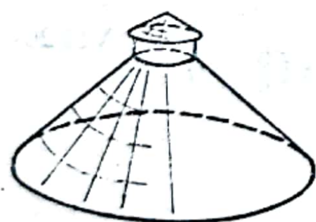


Fig. VII.85

Învelitorile conice reprezintă o soluție *indicată* pentru acoperirea *rezervoarelor cilindrice* și a *încăperilor circulare* avînd *diametre pînă la* 30 m; acoperișurile conice apar avantajoase mai ales atunci cînd din motive funcționale acoperișul trebuie prevăzut cu *luminător central* (fig. VII. 85).

9.1. Starea de eforturi la învelitorile conice în teoria de membrană

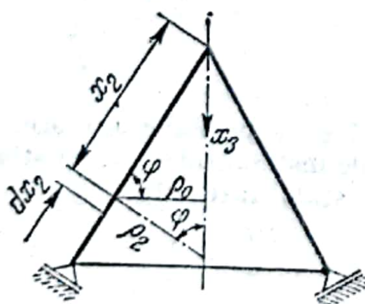


Fig. VII.86

Conform fig. VII. 86, $\rho_1=\infty$ și $\rho_2=x_2\operatorname{cotg}\varphi$, în consecință ecuațiile de echilibru în teoria de membrană au forma din tabelul VII. 22 ; eforturile de membrană pentru diferite tipuri de încărcări sînt date în tabelul VII. 23.

Tabelul VII.22

Ecuații de echilibru la învelitorile conice în teoria de membrană

	N^{φ}, $N^{\varphi\psi}$	N^{ψ}, $N^{\psi\varphi}$	Componentele încărcării
1. Încărcare nesimetrică			
Proiecția pe direcția tangentei la paralela x_1	$+ x_2 \dfrac{\partial N^{\varphi\psi}}{\partial x_2} + 2N^{\varphi\psi}$	$+ \dfrac{1}{\cos\varphi} \dfrac{\partial N^{\psi}}{\partial \psi}$	$+ x_2 X_1 = 0$
Proiecția pe direcția generatoarei x_2	$+ x_2 \dfrac{\partial N^{\varphi}}{\partial x_2} + N^{\varphi} + \dfrac{1}{\cos\varphi} \dfrac{\partial N^{\varphi\psi}}{\partial \psi}$	$- N^{\psi}$	$+ x_2 X_2 = 0$
Proiecția pe direcția normalei x_3		N^{ψ}	$+ x_2 \operatorname{cotg}\varphi\, X_3 = 0$
2. Încărcare rotațional simetrică			
Proiecția pe direcția tangentei la paralela x_1	$+ \dfrac{d(N^{\varphi\psi} x_2^2)}{dx_2}$		$+ x_2^2 X_1 = 0$
Proiecția pe direcția generatoarei x_2	$+ \dfrac{d(x_2 N^{\varphi})}{dx_2}$	$- N^{\psi}$	$+ x_2 X_2 = 0$
Proiecția pe direcția normalei x_3		$+ N^{\psi}$	$+ x_2 \operatorname{cotg}\varphi\, X_3 = 0$

Tabelul VII.23

Eforturi de membrană la acoperișuri conice încărcate simetric

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \text{const}; \qquad \rho_1 = \infty; \qquad \rho_2 = \frac{\rho}{\cos\alpha}$$

Încărcarea	N^{φ}	N^{ψ}	Observații
A. Învelitoare conică închisă			
1. Greutatea proprie, grosime constantă g/m^2	$\dfrac{-gx_3}{2\cos^2\alpha}$ dacă $\alpha = 30°$ $-\dfrac{2}{3}gx_3$	$-g\rho\,\mathrm{tg}\,\alpha$ sau $-gx_3\,\mathrm{tg}^2\alpha$ $-\dfrac{1}{3}gx_3$	
2. Zăpadă $p = p_0/m^2$	$\dfrac{-p_0x_3\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}$	$-p_0x_3\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin\alpha$	
B. Învelitoare conică deschisă			
3. Greutate proprie g/m^2	$\dfrac{-g(H_0+x_3)}{2\cos^2\alpha}\left[1-\left(\dfrac{H_0}{H_0+x_3}\right)^2\right]$	$-g(H_0+x_3)\,\mathrm{tg}^2\alpha$	
4. Sarcina luminătorului $G = 2\pi\rho_1 L$	$\dfrac{-G}{2\pi x_3\sin\alpha}$	0	

9.2. Învelitori conice încărcate simetric calculate în teoria de încovoiere

Vom folosi *teoria de încovoiere* la determinarea stării de eforturi, provenind din aplicarea pe marginea învelitorii, a unei încărcări formată în general de *eforturile static nedeterminate*, care apar cînd *rezemarea împiedică* deformarea liberă a învelitorii, determinată în teoria de membrană:

1) Ecuațiile generale (v. tabelul VII.19) pentru învelitori de *tip eliptic*, se simplifică la *învelitorile conice*, pe baza relațiilor geometrice: $\rho_2 d\varphi = dx_2$, $\rho_2 = x_2 \operatorname{cotg} \varphi$, devenind în cazul sistemului omogen, cînd $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ (fig. VII.87).

$$\frac{\partial(N^{\varphi} x_2)}{\partial x_2} - N^{\psi} = 0 \qquad \text{(VII.207)}$$

$$\frac{\partial(N^{3} x_2)}{\partial x_2} + N^{\psi} \operatorname{tg} \varphi = 0 \qquad \text{(VII.208)}$$

$$\frac{\partial(M^{\varphi} x_2)}{\partial x_2} - M^{\psi} - N^{3} x_2 = 0 \qquad \text{(VII.209)}$$

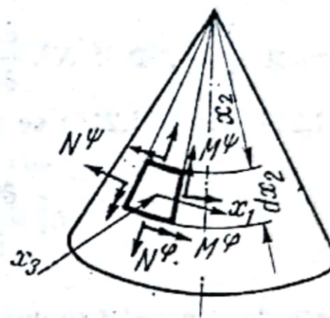


Fig. VII.87

Din primele două ecuații, eforturile N^{φ} și N^{ψ} se pot scrie funcție de *forța tăietoare* N^3 astfel:

$$N^{\varphi} = -N^{3} \operatorname{cotg} \varphi; \quad N^{\psi} = -\frac{\partial}{\partial x_2}(N^{3} x_2) \operatorname{cotg} \varphi. \qquad \text{(VII.210)}$$

2) *La învelitorile conice*, deformațiile se exprimă funcție de deplasări, astfel:

$$\varepsilon^{\varphi} = \frac{\partial u^2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon^{\psi} = \frac{u^2 - u^3 \operatorname{tg} \varphi}{x_2}; \quad \Phi = \frac{\partial u^3}{\partial x_2}. \qquad \text{(VII.211)}$$

Din combinarea acestor relații se obține

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\varepsilon^{\psi} \cdot x_2) = \varepsilon^{\varphi} - \Phi \operatorname{tg} \varphi. \qquad \text{(VII.212)}$$

Înlocuind deformațiile prin eforturi, conform relațiilor (scrise pentru $\mu = 0$)

$$\varepsilon^{\varphi} = \frac{1}{Eh} N^{\varphi}; \qquad \varepsilon^{\psi} = \frac{1}{Eh} N^{\psi} \qquad \text{(VII.213)}$$

în care N^{φ} și N^{ψ} au expresiile (VII. 210), ecuația (VII.212) devine

$$x_2^2 \frac{\partial^2 N^3}{\partial x_2^2} + 3x_2 \frac{\partial N^3}{\partial x_2} = \Phi Eh \operatorname{tg}^2 \varphi. \qquad \text{(VII.214)}$$

A doua ecuaţie se obţine înlocuind în egalitatea (VII.209) momentele funcţie de rotiri conform relaţiilor următoare în care s-a considerat $\mu = 0$.

$$M^{\varphi} = -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \quad M^{\psi} = -\frac{Eh^3}{12}\frac{\Phi}{x_2}. \tag{VII.215}$$

Astfel rezultă

$$x_2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\Phi}{x_2} = -12\frac{N^3 x_2}{Eh^3}. \tag{VII.216}$$

Întrucît $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$, Φ şi N^3, $\frac{\partial N^3}{\partial x_2}$ sînt mici faţă de derivatele $\frac{\partial^2 N^3}{\partial x_2^2}$ şi $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$, ecuaţiile (VII.214) şi (VII.216) se pot simplifica, devenind

$$x_2^2\frac{\partial^2 N^3}{\partial x_2^2} = \Phi\, Eh\, \mathrm{tg}^2\,\varphi \text{ şi } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -\frac{12}{Eh^3}N^3. \tag{VII.217}$$

Aceste două ecuaţii se pot reduce la una singură de ordinul IV

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} + \frac{4}{L^4}\Phi = 0. \tag{VII.218}$$

unde

$$L^4 = \frac{x_2^2 h^2}{3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}. \tag{VII.219}$$

L este funcţie de x_2; soluţia se poate determina în mod *aproximativ* înlocuind x_3 cu *valoarea corespunzătoare marginii a cărei acţiune se urmăreşte*. De exemplu, la învelitoarea conică deschisă, ecuaţia (VII.218) se scrie (fig. VII.88):

— *pentru marginea superioară*

$$\left.\frac{\partial^4 \Phi}{\partial s_1^4} + \frac{4}{L_1^4}\Phi = 0 \text{ în care } \begin{array}{l} s_1 = x_2 - a \\ \dfrac{1}{L_1} = \dfrac{3}{a^2h^2}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi; \end{array}\right\} \tag{VII.220}$$

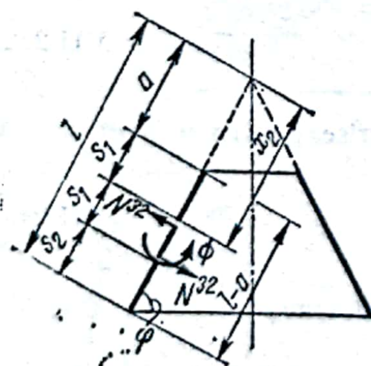


Fig. VII.88

— *pentru marginea inferioară*

$$\left.\frac{\partial^4 \Phi}{\partial s_2^4} + \frac{4}{L_2^4}\Phi = 0 \text{ în care } \begin{array}{l} s_2 = l - x_2 \\ \dfrac{1}{L_2} = \dfrac{3}{l^2h^2}\,\mathrm{tg}^2\varphi. \end{array}\right\} \tag{VII.221}$$

Tabelul VII.24

Deformații și eforturi la învelitori conice deschise, încărcate pe margini cu solicitări unitare în teoria de încovoiere

1. Încărcarea la marginea superioară

$$k = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \frac{s_1}{L_1} = \eta_1$$

$$L_1 = \sqrt{\frac{ah \operatorname{cotg} \varphi}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}}$$

$R_1 = 10$ kN

$$(\Delta\rho_0)_a^M = \frac{L_1^2}{2K} \sin\varphi; \quad (\Delta\rho_0)_a^R = \frac{2a^2}{L_1 Eh} \cos^2\varphi$$

$$\Phi = \frac{L_1^2}{2K} e^{-\eta_1} \sin\varphi (\sin\eta_1 + \cos\eta_1)$$

$$M^\varphi = L_1 e^{-\eta_1} \sin\varphi \sin\eta_1$$

$$N^3 = - e^{-\eta_1} \sin\varphi (\sin\eta_1 - \cos\eta_1)$$

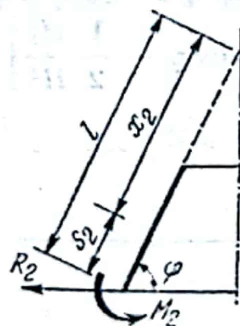
$M_1 = 10$ kNm

$$(\Phi)_a^R = \frac{L_1^2}{2K} \sin\varphi; \quad (\Phi)_a^M = \frac{L_1}{K}$$

$$\Phi = \frac{L_1}{K} e^{-\eta_1} \cos\eta_1; \quad M^\varphi = e^{-\eta_1} (\sin\eta_1 + \cos\eta_1)$$

$$N^3 = - \frac{2}{L_1} e^{-\eta_1} \sin\eta_1$$

2. Încărcarea la marginea inferioară



$$k = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \frac{s_2}{L_2} = \eta_2$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{lh \operatorname{cotg} \varphi}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}}$$

$R_2 = 10$ kN

$$(\Delta\rho_0)_l^M = - \frac{L_2^2}{2K} \sin\varphi; \quad (\Delta\rho_0)_l^R = + \frac{2l^2}{L_2 Eh} \cos^2\varphi$$

$$\Phi = - \frac{L_2^2}{2K} e^{-\eta_2} \sin\varphi (\sin\eta_2 + \cos\eta_2)$$

$$M^\varphi = L_2 e^{-\eta_2} \sin\varphi \sin\eta_2$$

$$N^3 = e^{-\eta_2} \sin\varphi (\sin\eta_2 - \cos\eta_2)$$

$M_2 = 10$ kNm

$$(\Phi)_l^R = - \frac{L_2^2}{2K} \sin\varphi; \quad (\Phi)_l^M = \frac{L_2}{K}$$

$$\Phi = \frac{L_2}{K} e^{-\eta_2} \cos\eta_2$$

$$M^\varphi = - e^{-\eta_2} (\sin\eta_2 + \cos\eta_2); \quad N^3 = - \frac{2}{L_2} e^{-\eta_2} \sin\eta_2$$

Tabelul VII.25

Deformaţiile învelitorilor conice încărcate simetric în teoria de membrană

Tipul învelitorii. Încărcarea	Deplasarea $\Delta\rho$	Rotirea Φ
A. Învelitoare conică închisă 1. Cazul general de încărcare	$\frac{H}{Eh}\operatorname{cotg}\varphi(N^{\psi}-\mu N^{\varphi})$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{Eh}\left[(1+\mu)(N^{\varphi}-N^{\psi})-x_2\frac{\partial}{\partial x_2}(N^{\psi}-\mu N^{\varphi})\right]$
2. Greutate proprie grosime constantă	$\mp\frac{gH^2}{Eh}\left(\operatorname{cotg}^3\varphi-\frac{\mu}{2}\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin^2\varphi}\right)$	$\mp\frac{gH}{Eh}\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{2}+\mu-(2+\mu)\cos^2\varphi\right]$
3. Încărcare uniform distribuită orizontală (zăpada) $p=\text{const}$	$\mp\frac{pH^2}{Eh}\left(\operatorname{cotg}^3\varphi\cos\varphi-\frac{\mu}{2}\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{\sin\varphi}\right)$	$\mp\frac{pH}{Eh}\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{\sin\varphi}\left[\frac{1}{2}+\mu-(2+\mu)\cos^2\varphi\right]$
B. Învelitoare conică deschisă 4. Greutate proprie Grosime Constantă g/m^2	$-\frac{gH^2}{Eh}\operatorname{cotg}^3\varphi\left[1-\frac{\mu}{2\cos^2\varphi}\left(1-\frac{H_1^2}{H^2}\right)\right]$	$-\frac{gH}{Eh}\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{2}+\mu-(2+\mu)\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{H_1^2}{H^2}\right]$
5. Încărcare din luminător $G=2\pi\rho_1 L$	$\frac{\mu G}{2\pi Eh\sin\varphi}$	$-\frac{G}{Eh}\frac{1}{2\pi H\sin\varphi}$

Notă. Semnul superior este pentru învelitoarea rezemată, cel inferior pentru cea suspendată.

Notînd $\frac{s_{1,2}}{L} = \eta_{1,2}$, soluţia ecuaţiei diferenţiale pentru învelitori conice, obţinută la fel ca la învelitorile sferice, se scrie:

$$\Phi = e^{-\eta_{1,2}} C_1 \cos(\eta_{1,2} + \delta_1) + f(C_2, \delta_2). \qquad \text{(VII.222)}$$

Constantele C_2 şi δ_2 sînt nule, întrucît pe motive de simetrie forţa tăietoare şi rotirea suprafeţei mediane trebuie să se anuleze în vîrful învelitorii; constantele C_1 şi δ_1 se determină din condiţiile de margini, şi anume:

— *rezemarea articulată* (nedeplasabilă) a marginii inferioare:

$$\varepsilon^{\psi} + \bar{\varepsilon}^{\psi} = 0; \qquad \Phi + \bar{\Phi} = 0. \qquad \text{(VII.223)}$$

Termenii baraţi reprezintă deformările în teoria de membrană. Rezultatele apar sistematizate în tabelul VII.24.

Cunoscînd expresia Φ (VII. 223), eforturile se deduc imediat

$$M^{\varphi} = -k\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \qquad M^{\psi} = -k\frac{\Phi}{x_2}; \qquad N^3 = -k\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \qquad \text{(VII.224)}$$

$$N^{\varphi} = -N^3 \operatorname{cotg} \varphi; \quad N^{\psi} = -\frac{\partial}{\partial x_2}(N^{\varphi} x_2). \qquad \text{(VII.225)}$$

Calculul se conduce la fel ca la cupolele sferice; pentru scrierea ecuaţiilor de continuitate, deplasările marginilor în teoria de membrană se calculează cu formulele din tabelul VII.25.

10. ÎNVELITORI RIGLATE

Învelitorile riglate strîmbe s-au aplicat mai întîi în Franţa [1, 32] apreciindu-se favorabil calităţile lor în ce priveşte siguranţa la fenomenele de instabilitate şi posibilităţile multiple de combinare pentru a realiza situaţii de rezemare avantajoase. Pentru acoperişuri se pretează în mod special *învelitorile cu două directoare şi plan director* [29], *conoizii*, [35] şi *paraboloizii hiperbolici* [1, 15, 17, 26, 34] (fig.VII. 89 — VII.92).

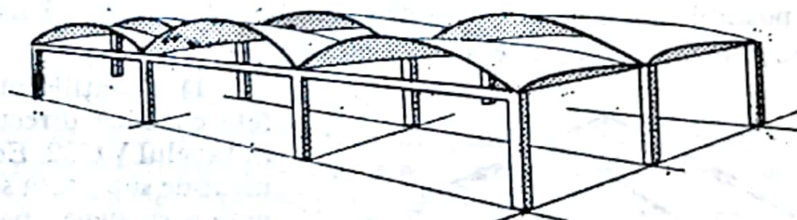


Fig. VII.89

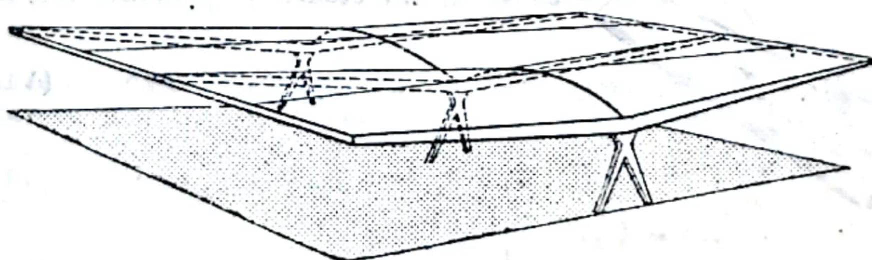


Fig. VII.90

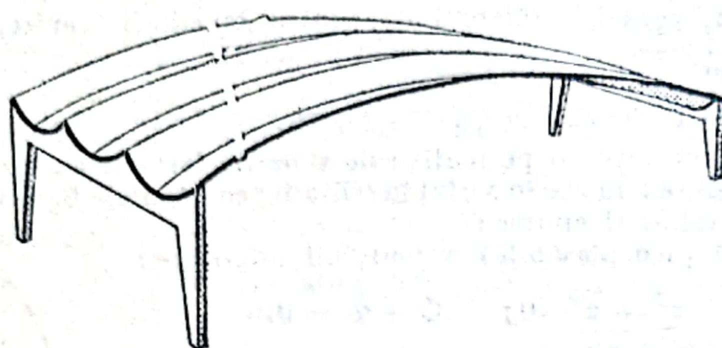


Fig. VII.91

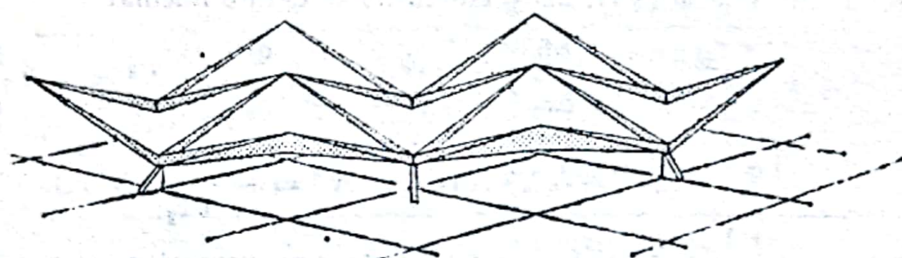


Fig. VII.92

10.1. Calculul învelitorilor cu două directoare şi plan director în teoria de membrană

La acoperişuri industriale aceste învelitori permit, din punct de vedere *funcţional,* realizarea tipului de atelier în *şed,* care asigură o luminare optimă în interior. Învelitoarele cu două directoare şi plan director sînt foarte indicate *la acoperişuri în consolă,* pentru că oferă posibilitatea ca rigiditatea de ansamblu a învelitorii să aibă în direcţia generatoarelor aceeaşi lege de variaţie ca solicitarea.

1) Ecuaţiile diferitelor tipuri de suprafeţe cu două directoare şi plan director apar în tabelul VII. 2. Echilibrul static al unui element de suprafaţă se poate exprima în coordonate carteziene, particularizînd sistemul de ecuaţii din tabelul VII. 5 la cazul învelitorilor cu două directoare şi plan director, scriind

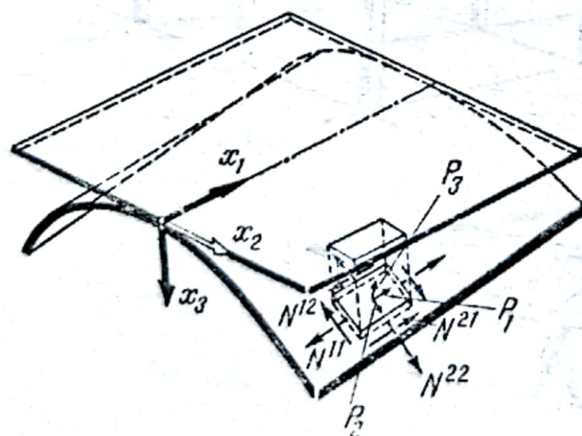


Fig. VII.93

$$\partial_1 n^{11} + \partial_2 n^{12} + \mathfrak{F}_1 = 0 \qquad \text{(VII.226)}$$

$$\partial_1 n^{12} + \partial_2 n^{22} + \mathfrak{F}_2 = 0 \qquad \text{(VII.227)}$$

$$t n^{22} + 2\, s n^{12} + \mathfrak{F}_3 = 0 \qquad \text{(VII.228)}$$

în care, după cum se știe, notațiile au semnificațiile (fig. VII.93).

$$n^{11}{}_1 = \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} N^{11}; \quad n^{22} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} N^{22}; \quad n^{12} = N^{12} \qquad \text{(VII.229)}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} P_1 - pP_3; \quad \mathfrak{P}_2 = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{1+q^2}} P_2 - qP_3 \qquad \text{(VII.230)}$$

$$\mathfrak{P}_3 = (1+p^2+q^2)P_3.$$

2) Sistemul de ecuații se poate rezolva folosind o metodă [29] *aplicabilă numai la încărcări așezate simetric pe învelitori în raport cu directoarea de vîrf* și care sînt constante în raport cu x_1 și variabile numai în raport cu x_2.
Din ecuația a treia (VII.228) se deduce

$$n^{12} = -\frac{\mathfrak{P}_3 + tn^{22}}{2s} \qquad \text{(VII.231)}$$

Considerînd că expresia $\mathfrak{P}_2$ este constantă în raport cu x_1, se derivează ecuația (VII.231) în raport cu x_1, și se înlocuiește expresia ∂n^{12} în ecuația a doua a sistemului, obținînd

$$t\,\partial_1 n^{22} - 2\,s\partial_2 n^{22} + \partial_1 t n^{22} - 2\,s\,\mathfrak{P}_2 = 0. \qquad \text{(VII.232)}$$

care este ecuație cu derivate parțiale de ordinul 1, liniară și neomogenă. Pentru a găsi integrala generală a acestei ecuații se asociază sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{t} = -\frac{dx_2}{2s} = \frac{dn^{22}}{2\,s\,\mathfrak{P}_2 - \partial_1 t n^{22}}.$$

Egalînd primele și ultimele două rapoarte se obțin două *integrale prime*, soluția generală exprimîndu-se ca o funcție de aceste integrale sub forma

$$n^{22} = \sqrt{s}\,\psi\left(\int_0^{x_2} \frac{t}{\sqrt{s}}\,dx_2\right) - \sqrt{s}\int_0^{x_2} \frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{s}}\,dx_2. \qquad \text{(VII.233)}$$

Datorită simetriei încărcărilor și a învelitorii față de generatoarea de vîrf, precum și datorită faptului că în lungul acestei generatoare $s = 0$, apare logic ca pe această linie efortul n^{12} să se anuleze; din ecuația (VII. 228) rezultă în consecință condiția

$$(n^{22})_{x_2=0} = -\frac{(\mathfrak{P}_3)_0}{t_0} \qquad \text{(VII. 234)}$$

(indicele 0 indică valorile funcțiilor pe linia generatoarei de vîrf). În continuare, pentru a satisface ecuația (VII.234) se impune condiția pentru expresia (VII.233) ca atunci cînd $x_2 \to 0$:

$$\psi\left(\int_0^{x_2} \frac{t}{\sqrt{s}}\,dx_2\right) \to \infty.$$

Astfel se poate determina funcția ψ și implicit expresia lui n^{22}, care este

$$n^{22} = \frac{\sqrt{s}}{\int_0^{x_2} A \frac{t}{\sqrt{s}} \mathrm{d}x_2} - \int_0^{x_2} \frac{\mathfrak{I}_2}{\sqrt{s}} \mathrm{d}x_2.$$

în care:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{ds}{\mathrm{d}x_2}\right)_0}{(\mathfrak{I}_3)_0}.$$

Efortul n^{11} se calculează introducînd expresia $\partial_2 n^{12}$ în prima ecuație a sistemului (VII. 226) după care se efectuează integrala expresiei $\partial_1 n^{11}$ obținînd

$$n^{11} = -\mathfrak{I}_1 x_1 + \frac{1}{2s} \int_0^{x_1} \partial_2(\mathfrak{I}_3 + tn^{22})\mathrm{d}x_1 - \frac{\partial_2 s}{2s^2} \mathfrak{I}_3 x_1 - \frac{\partial_2 s}{2s^2} \int_0^{x_1} tn^{22}\,\mathrm{d}x_1. \quad \text{(VII. 235)}$$

Constanta de integrare s-a precizat din condiția ca, pe directoarea de front, din cauza *rigidității transversale mici a arcului*, efortul normal pe planul lui n^{11} să se anuleze. Studiind *expresiile eforturilor* se constată că strîmbarea suprafeței reprezintă *proprietatea geometrică* cu rolul *static preponderent*; într-adevăr, *încărcarea în fiecare punct* este preluată de învelitoare prin intermediul eforturilor n^{12} *a căror mărime depinde de valoarea lui* s; eforturile n^{22} *care apar pe direcția arcelor directoare* au rolul să echilibreze numai *sarcina care încarcă generatoarea de vîrf* unde strîmbarea suprafeței anulîndu-se ($s = 0$), eforturile n^{12} nu pot fi active. *Eforturile* n^{22} cumulează în lungul generatoarelor diferențele $\partial_2 n^{12}$ din fiecare punct de învelitoare, valoarea lor depinzînd de condițiile de margini puse pe cele două timpane de capăt. *Constanta de integrare* se determină scriind una din condițiile reprezentate în fig. VII.94 conform căreia efortul n^{11} se anulează fie în dreptul unuia *dintre timpane*, fie în lungul unui *plan situat* între cele două timpane.

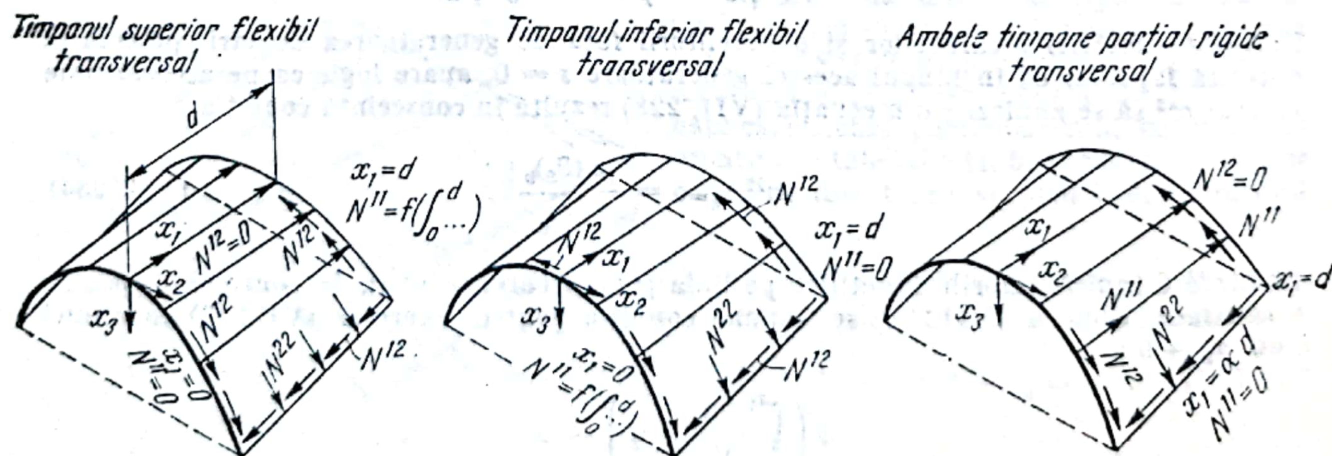


Fig. VII.94

10.2. Calculul învelitorilor în formă de paraboloid hiperbolic în teoria de membrană

1) Raportînd o suprafață în formă de paraboloid hiperbolic la sistemul de axe format de *generatoarele* și *normala* din *centrul învelitorii*, ecuația suprafeței este

$$x_3 = \gamma \sin \beta \, x_1 x_2 = s \, x_1 x_2 \tag{VII.236}$$

în care: β *reprezintă unghiul celor două generatoare trecînd prin origine și* $\gamma = 2\sqrt{a_1 a_2}$, a_1 și a_2 fiind parametrii parabolelor de curbură principală a suprafeței.

În acest caz, *sistemul de ecuații de echilibru* dat în tabelul VII.5 se exprimă astfel:

$$\begin{aligned} &\partial_1 n^{11} + \partial_2 n^{12} + \mathfrak{I}_1 = 0 \\ &\partial_1 n^{12} + \partial_2 n^{22} + \mathfrak{I}_2 = 0 \\ &2 s n^{12} + \mathfrak{I}_3 = 0. \end{aligned} \tag{VII.237}$$

Ținînd seama de ecuația suprafeței, eforturile pe învelitoare N^{11}, N^{12} și N^{22} sînt

$$N^{11} = \frac{\sqrt{1 + s^2 x_2^2}}{\sqrt{1 + s^2 x_1^2}} n^{11}; \quad N^{12} = n^{12}; \quad N^{22} = \frac{\sqrt{1 + s^2 x_1^2}}{\sqrt{1 + s^2 x_2^2}} n^{22}, \tag{VII.238}$$

iar caracteristicile de încărcare sînt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= P_1 - \frac{P_3(p - q \cos \beta)}{\sin \beta \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cos \beta + \sin^2 \beta}}; \\ \mathfrak{I}_2 &= P_2 - \frac{P_3(q - p \cos \beta)}{\sin \beta \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cos \beta + \sin^2 \beta}}; \\ \mathfrak{I}_3 &= - \frac{P_3 \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cos \beta + \sin^2 \beta}}{\sin \beta}. \end{aligned} \tag{VII.239}$$

2) ***Sistemul de ecuații se rezolvă,*** **obținînd din ecuația a treia a sistemului (VII.237)**

$$n^{12} = \frac{-\mathfrak{I}_3}{2s};$$

în continuare, se calculează $\partial_1 n^{12} = -\dfrac{\partial_1 \mathfrak{I}_3}{2s}$ și $\partial_2 n^{12} = -\dfrac{\partial_2 \mathfrak{I}_3}{2s}$ care se introduc în primele două ecuații, urmînd ca prin integrare să se deducă

$$\begin{aligned} n^{11} &= \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial_2 \mathfrak{I}_3}{2s} - \mathfrak{I}_1 \right) dx_1 + f_1(x_2) \\ n^{22} &= \int_0^{x_2} \left(\frac{\partial_1 \mathfrak{I}_3}{2s} - \mathfrak{I}_2 \right) dx_2 + f_2(x_1). \end{aligned} \tag{VII.240}$$

Eforturile n^{12} *rezultînd direct* funcție de încărcarea învelitorii, asupra lor nu se poate pune nici o condiție și în consecință *elementele marginale* trebuie să fie capabile să se încarce cu *eforturile tangențiale* ce le revin. Într-o situație *static determinată* avem *libertatea de a alege laturile pe care eforturile* n^{11} și n^{22} pot fi egale cu zero, sau pot avea anumite

Tabelul VII.23

Eforturi de membrană la paraboloidul hiperbolic pe contur oblic

A. Încărcarea din zăpadă:

n^{11}	n^{12}	n^{22}
0	$-\frac{p_z}{2s}$	0

B. Încărcarea din greutatea proprie:

p_z = încărcare pe m² suprafață orizontală

1. Marginea $x_1 = 0$; $x_2 = 0$

n^{11}	$\frac{gx_2}{2}\sin^2\beta \ln \frac{x_1 - x_2\cos\beta + \sqrt{(x_1 - x_2\cos\beta)^2 + \sin^2\beta\left(x_2^2 + \frac{1}{s^2}\right)}}{\sqrt{x_2^2 + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} - x_2\cos\beta} +$ $+ \frac{g\cos\beta}{2}\left[\sqrt{x_2^2 + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}\right]$
n^{12}	$-\frac{g}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}$
n^{22}	$\frac{gx_1}{2}\sin^2\beta \ln \frac{x_2 - x_1\cos\beta + \sqrt{(x_2 - x_1\cos\beta)^2 + \sin^2\beta\left(x_1^2 + \frac{1}{s_2}\right)}}{\sqrt{x_1^2 + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} - x_1\cos\beta} +$ $+ \frac{g\cos\beta}{2}\left[\sqrt{x_1^2 + \frac{\sin^2\beta\, s^2}{s^2}} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}\right]$

Tabelul VII.26 (continuare)

2. Marginea $x_1 = a; \quad x_2 = b$

n^{11}	$\frac{gx_2}{2}\sin^2\beta \ln \frac{x_1 - x_2\cos\beta + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}}{a - x_2\cos\beta + \sqrt{a^2 + x_2^2 - 2ax_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}} + \frac{g\cos\beta}{2}\left[\sqrt{a^2 + x_2^2 - 2ax_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} + n_0^{11}\right]$
n^{12}	$-\frac{g}{2s}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}$
n^{22}	$\frac{gx_1}{2}\sin^2\beta \ln \frac{x_2 - x_1\cos\beta + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s}}}{b - x_1\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2} - \sqrt{x_1^2 + b^2 - 2x_1b\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}}} + \frac{g\cos\beta}{2}\left[\sqrt{x_1^2 + b^2 - 2x_1b\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\beta + \frac{\sin^2\beta}{s^2}} + n_0^{22}\right]$

valori. Ca urmare, pe *laturile opuse* vor rezulta valori bine precizate pentru eforturile n^{11} și n^{22} care trebuie preluate prin elemente de margine dimensionate în consecință. În tabelul VII.26 s-au dat expresiile eforturilor la paraboloizii hiperbolici pentru două tipuri de încărcări: *uniform distribuită* în planul axelor de coordonate x_1Ox_2 și *variabilă*

(greutatea proprie) pentru învelitori la care planul axelor de coordonate este orizontal. În fig. VII.95 s-au figurat cîteva tipuri de asamblări ale paraboloizilor hiperbolici și eforturile pe care le transmit elementelor de margine.

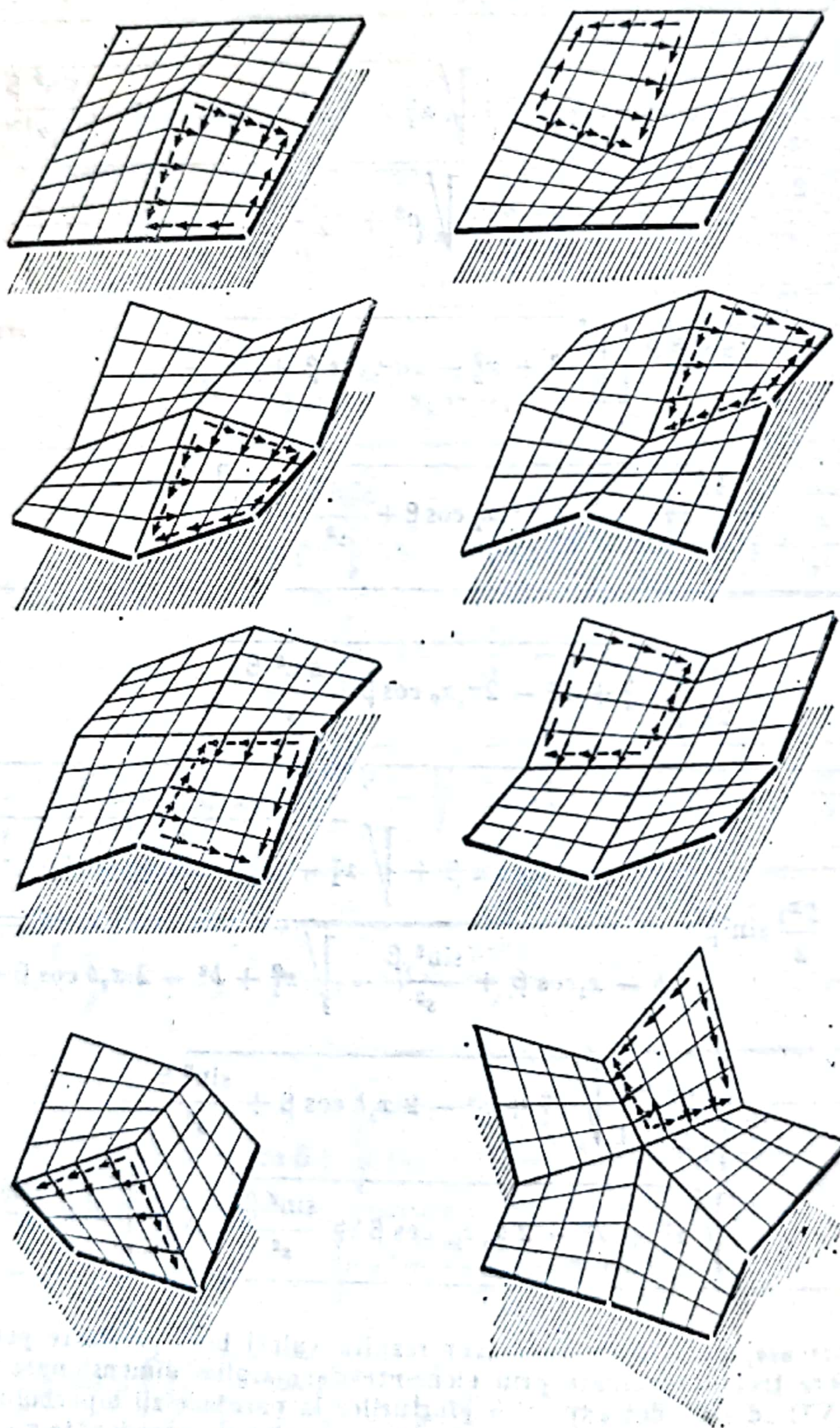


Fig. VII.95

10.3. Teoria de încovoiere la paraboloizi hiperbolici

1) *Ecuațiile problemei* în cadrul aproximației lui *V. Z. Vlasov* scrie față de un sistem de axe format de cele două generatoare trecînd prin vîrful învelitorii (fig. VII.96) sînt

$$
\begin{aligned}
\partial_1 n^{11} + \partial_2 n^{12} + \mathfrak{F}_1 &= 0\\
\partial_1 n^{12} + \partial_2 n^{22} + \mathfrak{F}_2 &= 0\\
2 s n^{12} + \partial_1 n^{13} + \partial_2 n^{23} + \mathfrak{F}_3 &= 0\\
\partial_1 m^{12} + \partial_2 m^{22} - n^{13} &= 0\\
\partial_1 m^{11} + \partial_2 m^{21} - n^{23} &= 0.
\end{aligned}
\qquad \text{(VII.241)}
$$

Conform fig. VII.96, eforturile n^{11}, n^{12} și n^{22} sînt eforturile normale și tangențiale pe direcțiile *1* și *2*, iar m^{12} și m^{21} sînt momentele încovoietoare, m^{11} și m^{22} momentele de răsucire.

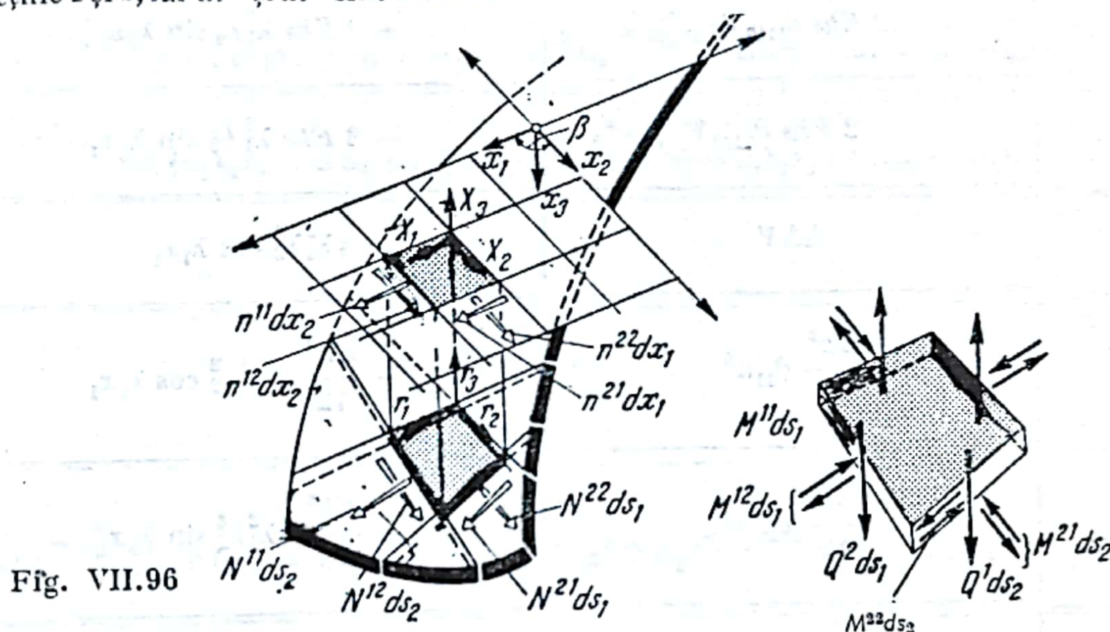


Fig. VII.96

După cum se știe, în cazul aproximației lui *V. Z. Vlasov* componentele eforturilor și încărcărilor de pe învelitoare sînt egale cu valorile proiecțiilor pe planul de coordonate x_1Ox_2 tangent în vîrful învelitorii. Procedînd ca la paragraful 4.2, sistemul de ecuații se reduce la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul 8 neomogenă cu coeficienți constanți. Integrala ei generală se compune dintr-o soluție particulară a ecuației complete care se poate obține în cadrul teoriei de membrană și integrala generală a ecuației omogene a cărei fomă în acest caz este

$$\Delta\Delta\Delta\Delta V + 4\gamma^4 \partial_{1122} V = 0 \qquad \text{(VII.242)}$$

în care:

$$\gamma^4 = s^2 \frac{d}{k}. \qquad \text{(VII.243)}$$

2) *Rezolvarea ecuației generale*:

a) *În cazul conturului limitat de generatoare* (forma seamănă cu un patrulater strîmb) soluția ecuației (VII. 242) se poate scrie în vecinătatea fiecărei laturi, sub formă de produs a două tipuri de funcții. Astfel, pe laturile $x_2 = \pm a_2$ funcția V se scrie sub formă de serie trigonometrică $V = \sum \cos \lambda_1 x_1 f(\lambda_2 x_2)$, în care $\lambda_1 = \dfrac{2n\pi}{l_1}$ iar $\lambda_2 = \dfrac{2n\pi}{l_2}$; l_1 și l_2 sînt lungimile laturilor, n fiind șirul numerelor

Eforturi la paraboloizii hiper

Efortul		Multiplicator
Simbol	Expresia $f(u)$	
N^{11}	$2\,Ehs\,\partial_{1222} V$	$-\,2\,Ehs\,\lambda_1\lambda_2^3 \sin \lambda_1 x_1$
N^{22}	$2\,Ehs\,\partial_{1112} V$	$+\,2\,Ehs\,\lambda_1^3\lambda_2 \sin \lambda_1 x_1$
N^{12}	$-\,2\,Ehs\,\partial_{1122} V$	$-\,2\,Ehs\,\lambda_1^2\lambda_2^2 \sin \lambda_1 x_1$
u^3	$\Delta\Delta V$	$s\,\lambda_1^2\lambda_2^2 \cos \lambda_1 x_1$
M^{12}	$\frac{Eh^3}{12}\,\partial_{11} u^3$	$-\,\frac{Eh^3}{12}\,s\lambda_1^4\lambda_2^2 \cos \lambda_1 x_1$
M^{21}	$\frac{Eh^3}{12}\,\partial_{22} u^3$	$-\,\frac{Eh^3}{12}\,s\lambda_1^2\lambda_2^4 \sin \lambda_1 x_1$
$M^{11} = M^{22}$	$\frac{Eh^3}{12}\,\partial_{12} u^3$	$\mp\,\frac{Eh^3}{12}\,s\lambda_1^3\lambda_2^3 \sin \lambda x$
Q^1	$\frac{Eh^3}{12}\,(\partial_{111} u^3 + \partial_{122} u^3)$	$-\,\frac{Eh^3}{12}\,s\lambda_1^7 \sin \lambda_1 x_1$
Q^2	$\frac{Eh^3}{12}\,(\partial_{222} u^3 + \partial_{112} u^3)$	$-\,\frac{Eh^3}{12}\,s\lambda_1^7 \cos \lambda_1 x_1$

Tabelul VII.27

bolici în teoria de încovoiere

Expresia $f(x_2)$
$\rho_1^{3/2} C_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 \lambda_2 x_2 - 3\varphi_1 + \omega_1) + \rho_2^{3/2} C_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 \lambda_2 x_2 - 3\varphi_2 + \omega_2)$
$\rho_1^{1/2} C_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 \lambda_2 x_2 - \varphi_1 + \omega_1) + \rho_2^{1/2} C_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 \lambda_2 x_2 - \varphi_2 + \omega_2)$
$\rho_1 C_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 \lambda_2 x_2 - 2\varphi_1 + \omega_1) + \rho_2 C_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 \lambda_2 x_2 - 2\varphi_2 + \omega_2)$
$\rho_1^3 C_1 D_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 \lambda_2 x_2 + \omega_1 - \delta_1 - 2\psi_1) + \rho_2^3 C_2 D_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 \lambda_2 x_2 + \omega_2 - \delta_2 - 2\psi_2)$
$\rho_1^{2/2} C_1 D_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 \lambda_2 x_2 + \omega_1 - \delta_1 - \psi_1) + \rho_2^{3/2} C_2 D_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 \lambda_2 x_2 + \omega_2 - \delta_2 - 2\psi_2)$
$\rho_1^2 C_1 D_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 x_2 + \gamma_1 - \delta_1) + \rho_2^2 C_2 D_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 x_2 + \gamma_2 - \delta_2)$ $\rho_1^3 C_1 D_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 x_2 + \gamma_1 - \delta_1 - 2\psi_1) + \rho_2^3 C_2 D_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 x_2 + \gamma_2 - \delta_2 - 2\psi_2)$
$\rho_1^{3/2} C_1 D_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_1 x_2 + \gamma_1 - \delta_1 - 3\psi_1) + \rho_2^{3/2} C_2 D_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 x_2 + \gamma_2 - \delta_2 - 2\psi_2)$ $\rho_1^{5/2} C_1 D_1 e^{-\chi_1 \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 x_2 + \gamma_1 - \delta_1 - \psi_1) + \rho_2^{5/2} C_2 D_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 x_2} \sin(\mu_2 x_2 + \gamma_2 - \delta_2 - 2\psi_2)$

întregi. Înlocuind soluția V în ecuația (VII. 242) se obține pentru termenul general ecuația
$\cos \lambda_1 x_1 [f^{(8)} - 4f^{(6)} + 6f^{(4)} - 4(1 + b^4)f^{(2)} + f] = 0$

în care
$$b^4 = \frac{1}{4} \frac{\gamma^4}{\lambda_1^4}. \tag{VII.244}$$

În paranteză apare o *ecuație diferențială de ordinul 8 cu coeficienți constanți*, căreia îi corespunde *ecuația caracteristică*

$$m^8 - 4\,m^6 + 6\,m^4 - 4(1 + b^4)m^2 + 1 = 0. \tag{VII.245}$$

Observind că ecuația (VII.245) este bipătrată, se înlocuiește $n = m^2$ și se obține

$$n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4(1 + b^4)n + 1 = 0 \tag{VII.246}$$

care se poate rezolva prin metoda *Descartes*, rădăcinile fiind toate imaginar conjugate. Calculul rădăcinilor precum și scrierea integralei generale se expun în continuare, la cazul paraboloidului limitat de parabole principale;

b) *paraboloidul limitat de parabole principale* (forma seamănă cu o șea ca în fig. VII.91); se aleg în vecinătatea fiecărei *laturi soluții ortogonalizate*.

Astfel, pentru liniile de contur $\xi_2 = 0$ și $\xi_2 = a_2$ soluțiile se pot scrie în serie trigonometrică

$$V = \sum \cos (\lambda_1 \xi_1)\, f(\lambda_2 \xi_2) \tag{VII.247}$$

în care:

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_2) - p_2; \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2) - p_1; \quad \lambda_1 = \frac{2n\pi}{l_1} \text{ și } \lambda_2 = \frac{2n\pi}{l_2}$$

Înlocuind expresia (VII.247) în ecuația (VII.242) se obține din nou o ecuație *diferențială de ordinul 8* pentru funcția $f(\lambda_2, \xi_2)$, ecuația ei caracteristică fiind

$$(m^2 - 1)^4 + 4b^4(m^2 + 1)^2 = 0 \tag{VII.248}$$

în care $b^4 = \dfrac{\gamma^4}{4\lambda_2^4}$.

Rădăcina ecuației (VII.248) se determină astfel: se înlocuiește mai întîi $m^2 = n$ și apoi scriind

$$\cos \delta = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 16}}; \quad \sin \delta = \frac{4}{\sqrt{b^4 + 16}}$$

$$\chi_{1,2} = 1 \pm b^2 \sqrt{b^4 + 16} \cos \frac{\delta}{2}; \quad \mu_{1,2} = b^2 \left(\sqrt{b^4 + 16} \sin \frac{\delta}{2} \pm 1 \right),$$

se obține
$$n_{1,2} = \chi_1 \pm i\mu_1; \quad n_{3,4} = \chi_2 \pm i\mu_2. \tag{VII.249}$$

Valorile lui $\chi^*_{1,2}$ și $\mu^*_{1,2}$ se determină, notînd în continuare

$$\delta_1^* = \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\chi_1}; \quad \delta_2^* = \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\chi_2};$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_1^* &= \sqrt{\chi_1^2 + \mu_1^2} \cos \frac{\delta_1^*}{2}; \quad & \mu_1^* &= \sqrt{\chi_1^2 + \mu_1^2} \sin \frac{\delta_1^*}{2} \\ \chi_2^* &= \sqrt{\chi_2^2 + \mu_2^2} \cos \frac{\delta_2^*}{2}; \quad & \mu_2^* &= \sqrt{\chi_2^2 + \mu_2^2} \sin \frac{\delta_2^*}{2} \end{aligned}\right\} \tag{VII.250}$$

şi, în consecinţă

$$\left.\begin{aligned} m_{1,2,3,4,} &= \pm \chi_1^* \pm \mu_1^* \\ m_{5,6,7,8,} &= \pm \chi_2^* \pm i\mu_2^*. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.251)}$$

Ţinînd seama că *rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt imaginar conjugate*, integrala ecuaţiei (VII.242) poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} V = \cos \lambda_1 \xi_1 \{ & C_1 e^{-\chi_1^* \lambda_2 \xi_2} \sin (\mu_1^* \lambda_2 \xi_2 + V_1) + \\ & + C_2 e^{-\chi_2^* \lambda_2 \xi_2} \sin (\mu_2^* \lambda_2 \xi_2 + V_2) + \\ & + C_3 e^{-\chi_1^* \lambda_2 (a_2 - \xi_2)} \sin [\mu_1^* \lambda_1 (a_2 - \xi_2) + V_3] + \\ & + C_4 e^{-\chi_2^* \lambda_2 (a_2 - \xi_2)} \sin [\mu_2^* \lambda_1 (a_2 - \xi_2) + V_4] \}. \end{aligned} \quad \text{(VII.252)}$$

Constantele C_1, C_2, V_1, V_2 se determină impunînd condiţiile de rezemare pe latura $\xi_2 = 0$, iar constantele C_3, C_4, V_3 şi V_4 punînd condiţiile de rezemare pe latura $\xi_2 = + a_2$. Procedeul de lucru este similar celui expus pentru învelitorile cilindrice circulare la cap. 11. Cunoscînd expresia lui, V, eforturile secţionale se deduc prin derivare, aşa cum sînt scrise în tabelul VII.27.

11. ÎNVELITORI CILINDRICE

Învelitorile cilindrice alcătuiesc în mod frecvent astăzi acoperişul *construcţiilor utilitare* fiindcă se pretează cel mai bine la acoperirea traveelor mari de formă *dreptunghiulară* (fig. VII.97 şi VII.98) necesare pentru *ateliere industriale şi hale de montaj, depouri*

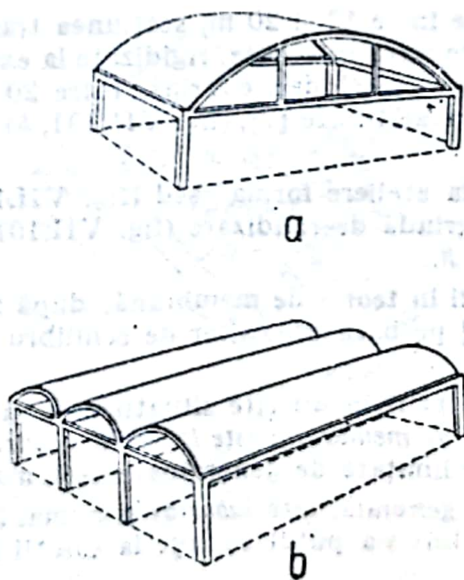


Fig. VII.97

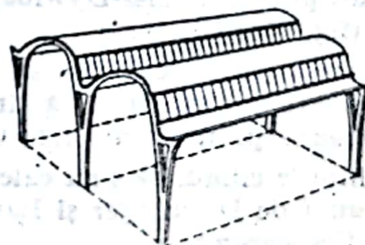


Fig. VII. 98

de autobuze şi tramvaie, săli de întrunire şi sport [7, 8, 24, 29]. Învelitorile cilindrice sînt uşor de construit, forma lor fiind indicată la *prefabricare* şi *precomprimare*, în schimb au dezavantajele :

— suprafaţa fiind desfăşurabilă sînt *mai sensibile la fenomenele de voalare*, de aceea folosirea lor este limitată la deschideri în jur de 40 m;

— realizarea *marginilor* limitate de generatoare este *costisitoare*.

11.1. Forma şi clasificarea învelitorilor cilindrice

La realizarea acoperişurilor cilindrice se urmăreşte din punct de vedere static utilizarea acţiunii spaţiale pe care o au *suprafeţele cilindrice rigidizate prin arce sau timpane* observînd că se pot distinge ca la bolţi două cazuri de solicitare :

— cînd *linia de presiune* pentru încărcarea dată coincide cu forma arcului median, învelitoarea, la fel ca o boltă, se încarcă numai cu eforturi axiale situate în planul arcului director ($N^{11} = N^{12} = 0$), rezemarea făcîndu-se *numai pe linia naşterilor* (fig. VII. 99, *a*);

— dacă *curba de presiune* diferă de forma *arcului*, la bolţi se produc în plus *momente încovoietoare*, iar la *învelitorile cilindrice* apar eforturi tangenţiale care încarcă timpanele şi eforturi axiale pe *direcţia generatoarelor* (fig.VII.99,*b*) [21, 29].

Pentru *acoperişurile cilindrice* situaţia a doua este mai avantajoasă pentru că eforturile se *distribuie pe două direcţii* încărcînd *timpanele* şi descărcînd pe cît posibil *grinzile de rigidizare* de pe marginile limitate *de generatoare*. În consecinţă, plecînd de la *forma lănţişorului* — linia de presiune pentru greutatea proprie — s-a căutat accentuarea *comportării spaţiale* folosind profilele supraînălţate (*arcul de cerc, arcul de cicloidă* şi la deschideri mari *semielipsa* schematizată în profilul Zeiss-Dywidag [7], (fig.VII.100).

Arcul de parabolă situat sub linia lănţişorului este mai puţin indicat întrucît pentru greutatea proprie conduce la eforturi de *întindere pe direcţia generatoarelor*, în timp ce *profilele supraînălţate* sînt solicitate pe aceeaşi direcţie la *compresiune*.

Din punct de vedere *constructiv*, formele mai adecvate pentru *acoperişurile cilindrice* sînt :

— la deschideri ale generatoarelor cuprinse între 12 şi 20 m, secţiunea transversală poate fi alcătuită din unul sau mai multe arce de cerc, adiacente, rigidizate la extremităţi prin grinzi de margine (fig. VII.101, *a*); pentru deschideri cuprinse între 20 şi 40 m, se pot folosi profilele Zeiss-Dywidag simple sau alăturate [7], (fig. VII.101, *b*) şi forma ondulată (fig. VII.101,*c*);

— din motive funcţionale se recomandă la ateliere forma şed (fig. VII.101, *d*, *e*) şi la hangare cilindrul cu două timpane şi o grindă de rigidizare (fig. VII.101, *f*), iar pentru peroane profilele din fig. VII.101, *g* şi *h*.

Învelitorile cilindrice s-au calculat mai întîi în teoria de membrană, după formulele puse la punct de Dischinger şi Bauersfeld [16] pe baza ecuaţiilor de echilibru scrise de Lamé şi Clapeyron.

Urmărind aplicarea largă a învelitorilor subţiri în diferite situaţii care intervin în practică, a reieşit că folosirea *exclusivă a teoriei de membrană este în multe cazuri necorespunzătoare*, mai ales cînd influenţa marginilor limitate de generatoare este mare.

Pe de altă parte, calculul condus în teoria generală, este *laborios* şi numai în puţine cazuri (cilindrul circular şi unele forme afine lui) s-a putut ajunge la soluţii integrale aplicabile imediat.

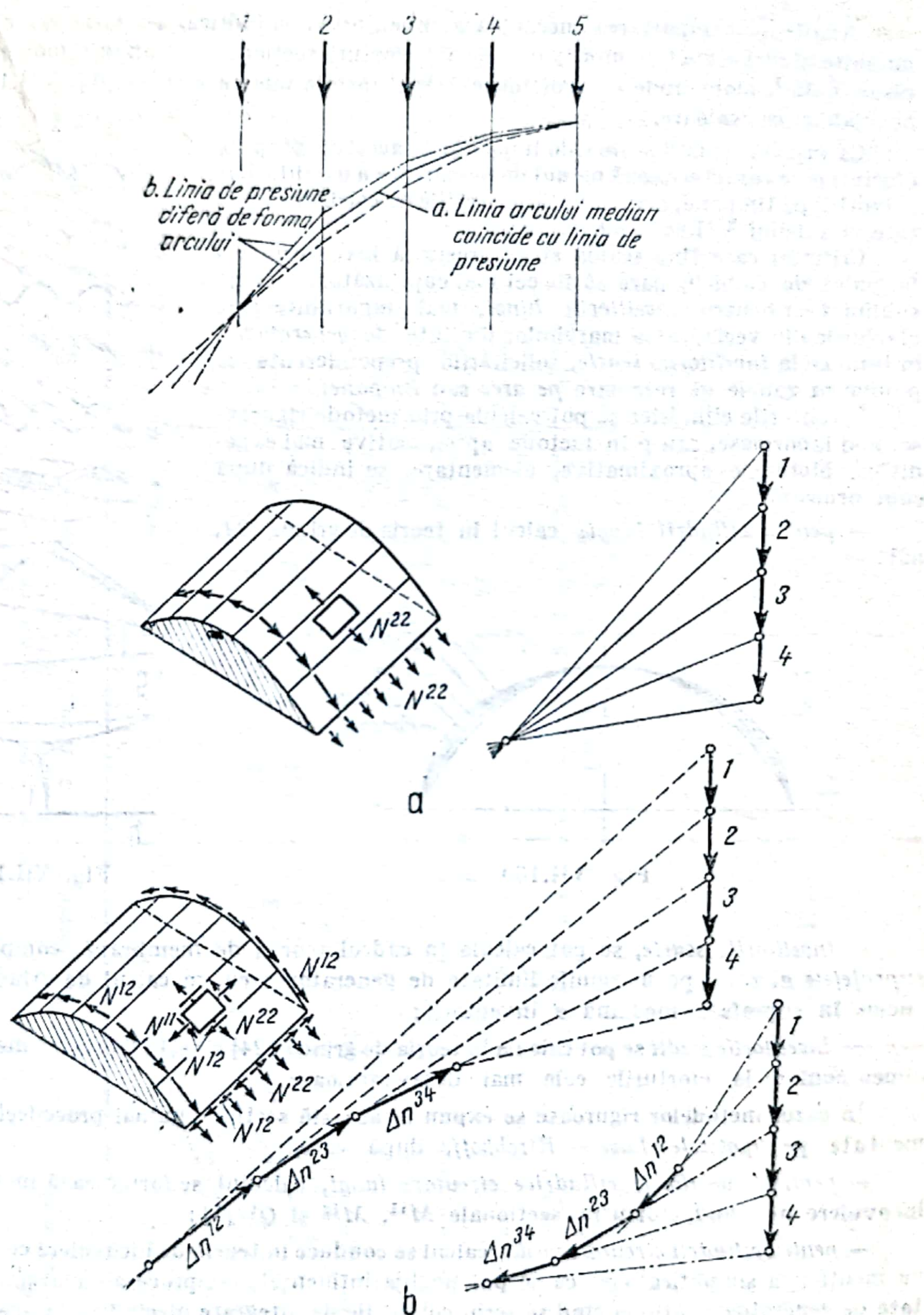

1
2
3
4
5
b. Linia de presiune diferă de forma arcului
a. Linia arcului median coincide cu linia de presiune
N^{22}
N^{22}
a
N^{12}
N^{12}
N^{11}
N^{22}
N^{12}
N^{22}
N^{12}
Δn^{12}
Δn^{23}
Δn^{34}
b

Fig. VII.99

Analizînd comportarea mecanică a învelitorilor cilindrice, s-a observat că pentru anumite tipuri (*lungi şi medii*) o serie de eforturi secţionale, şi anume momentele de răsucire M^{11}, momentele încovoietoare M^{12} şi forţele tăietoare Q^1 (v. fig. VII.105) sînt neglijabile ca valoare.

Ca urmare, ţinînd seama de importanţa acestui grup de eforturi care caracterizează modul de descărcare a învelitorilor cilindrice pe timpane, s-au enunţat criteriile de clasificare arătate în tabelul VII.28 [49, 52, 53].

Criteriul care ţine seama şi de grosimea învelitorii, cel formulat de Rabich, pare să fie cel mai cuprinzător. Trebuie subliniat că pentru *învelitorile lungi*, mai importante sînt eforturile din vecinătatea marginilor limitate de *generatoare*, în timp ce la *învelitorile scurte*, solicitările preponderente se produc în zonele de rezemare *pe arce* sau *timpane*.

Învelitorile cilindrice se pot calcula prin metode riguroase, mai laborioase, sau prin metode aproximative mai expeditive. Metodele aproximative, elementare, se indică după cum urmează:

— *pentru cilindrii lungi*, calcul în teoria de grindă [24, 52];

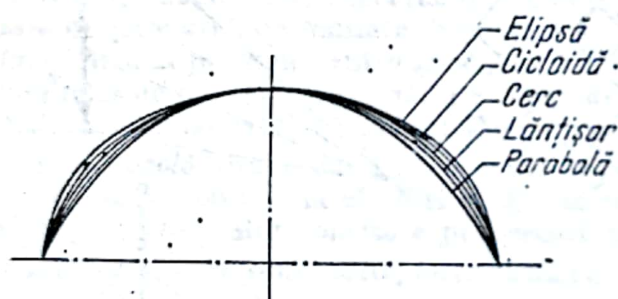


Fig. VII.100

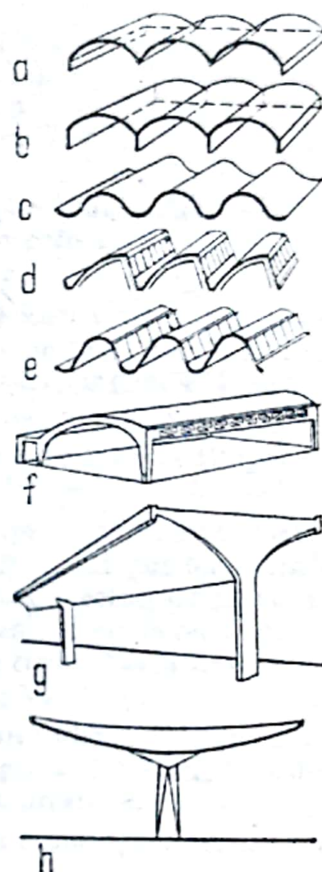


Fig. VII.101

— *învelitorile scurte*, se pot calcula în cadrul teoriei de membrană, completată la *suprafeţele deschise* pe marginile limitate de generatoare cu un calcul de grindă-perete inclus în suprafaţa mediană a învelitorii;

— *învelitorile medii* se pot calcula în teoria de grindă [24] cît şi în teoria de membrană, dimensionînd la eforturile cele mai dezavantajoase.

În cazul metodelor riguroase se expun în această secţiune numai procedeele fundamentate pe *ipotezele Love — Kirchhoff*, după care:

— *pentru învelitorile cilindrice circulare lungi*, calculul se formulează în teoria de încovoiere neglijînd eforturile secţionale M^{11}, M^{12} şi Q^1 [7];

— *pentru cilindrii circulari medii*, calcul se conduce în teoria de încovoiere completată cu menţiunea simplificatoare că se pot neglija influenţele reciproce ale marginilor limitate de generatoare, atunci cînd se scriu condiţiile de integrare plecînd de la aceste margini;

Tabelul VII.28

Criterii de clasificare a învelitorilor cilindrice

Tipul învelitorii	Autor				
	V. Z. Vlasov	R. Rabich	Gibson	Manual A.S.C.E.	Instrucţiuni Academia U.R.S.S.
Lungi	$\frac{l}{B} > 8$	$\frac{B}{\sqrt{l^2 \rho h}} < 3$	$\frac{l}{\rho} > 2,5$	$\frac{l}{\rho} > 1,66$	$\frac{l}{B} \geqslant 4$
Medii	$8 > \frac{l}{B} > 1,5$	$5 > \frac{B}{\sqrt{l^2 \rho h}} > 3$	$2,5 > \frac{l}{\rho} > 0,5$		$4 > \frac{l}{B} > 1$
Scurte	$\frac{l}{B} < 1,5$	$\frac{B}{\sqrt{l^2 \rho h}} > 5$	$\frac{l}{\rho} < 0,5$	$\frac{l}{\rho} < 1,66$	$\frac{l}{B} < 1$

— pentru *cilindri circulari scurți*, calculul în teoria de încovoiere nu suportă nici un fel de simplificare, eforturile de membrană și de încovoiere fiind la fel de importante pe cele două direcții principale, ale generatoarelor și curbei directoare [8].

La sfîrșitul capitolului se expune o metodă de calcul dedusă în cadrul ipotezelor teoriei de încovoiere pentru cilindrii cu raza de curbură variabilă [30].

11.2. Eforturi și deformații în teoria de membrană

11.2.1. Ecuațiile de echilibru. Conform fig.VII.102, în coordonate cilindrice:

x_1 — măsurat pe generatoare începînd de la timpanul din stînga;

φ — unghiul cu verticala al normalei la suprafață;

ρ — raza de curbură a suprafeței mediane pe linia φ, ecuațiile de echilibru sînt:

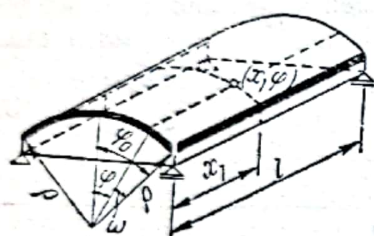


Fig. VII. 102

$$\left.\begin{aligned} &N^{22} = -X_3\rho \\ &\partial_1 N^{12} + \frac{1}{\rho}\,\partial_\varphi N^{22} = -X_2 \\ &\partial_1 N^{11} + \frac{1}{\rho}\,\partial_\varphi N^{21} = -X_1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.253)}$$

11.2.2. Integrarea ecuațiilor de echilibru. Integrarea în raport cu x_1 duce la

$$\left.\begin{aligned} &N^{22} = -X_3\rho \\ &N^{22} = -\int\left(X_2 + \frac{1}{\rho}\,\partial_\varphi N^{22}\right)\mathrm{d}x_1 + C_1(\varphi) \\ &N^{11} = -\int\left(X_1 + \frac{1}{\rho}\,\partial_\varphi N^{21}\right)\mathrm{d}x_1 + C_2(\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.254)}$$

C_1 și C_2 funcții de φ se determină din condițiile de margini.

11.2.3. Eforturile la acoperișurile cu o deschidere simplu rezemată. Aceste eforturi sînt date în tabelul VII.29. Învelitoarea s-a considerat *rezemată pe două timpane rigide* în planul lor și *flexibile în sens perpendicular*, capabile să preia eforturile N^{12}. Constantele $C_1(\varphi)$ și $C_2(\varphi)$ s-au determinat din condițiile: pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = l$, $N^{11} = 0$.

Dacă *cilindrul este deschis*, pe marginile limitate de generatoare trebuie introduse *elemente de rigidizare*. Primii constructori de acoperișuri cilindrice au realizat învelitorile cilindrice astfel încît tangentele pe marginile limitate de generatoare să fie verticale.

În acest caz, eforturile $N^{22} = 0$ şi nervurile de margini preiau numai eforturile tangenţiale N^{12} care produc, în condiţii de simetrie, o întindere maximă dată de expresia

$$S^{11} = -\int_0^{\frac{l}{2}} (N^{12})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \, dx_1. \tag{VII.255}$$

În cazul greutăţii proprii, pentru orice învelitoare cilindrică valoarea întinderii maxime pe generatoarea $\varphi = \frac{\pi}{2}$ este

$$S^{11} = \frac{gl^2}{4}. \tag{VII.256}$$

Dacă unghiul φ_0 *al generatoarei* de pe contur este *diferit de* $\pi/2$, eforturile N^{22} *au valoare finită* şi acţionează în planul tangent la suprafaţa mediană provocînd *încovoierea elementului de margine*; rigiditatea la încovoiere a învelitorii în planul tangent la margine fiind mare, dacă reazemele învelitorii sînt formate din grinzi obişnuite, eforturile de margine încarcă învelitoarea care acţionează ca grindă perete. În acest caz, braţul *cuplului compresiune — întindere* este $z = l/3$ şi trebuie să fie mai mic decît $\mathscr{B}/2$ ($\mathscr{B}$ este lungimea arcului director).
Secţiunea armaturii la partea întinsă după I. Pilaski [35] se deduce

$$A_{f_1} = \frac{cN^{22}l^2}{8\,z\,\sigma_c} \quad \text{sau} \quad A_{f_1} = \frac{N^{22}l^2}{8z\,R_a} \tag{VII.257}$$

c fiind coeficientul de siguranţă şi σ_c limita de curgere a oţelului, respectiv R_a, rezistenţa de calcul a oţelului.

La aceasta se mai adaugă armătura calculată din întinderea provocată de eforturile N^{12} după formula

$$A_{f_2} = \frac{c}{\sigma_c}\int_0^{l/2} (N^{12})_{\varphi=\varphi_0} dx_1 \quad \text{sau} \quad A_{f_2} = \frac{1}{R_a}\int_0^{l/2} (N^{12})_{\varphi=\varphi_0} dx_1. \tag{VII.258}$$

Calculul *elementelor de margine* efectuat mai sus nu ia în considerare *deformările învelitorii*; această aproximaţie se poate aplica numai la deschideri mici şi la învelitori scurte. Influenţa deformaţiilor se prinde riguros prin calculul în *teoria de încovoiere.*

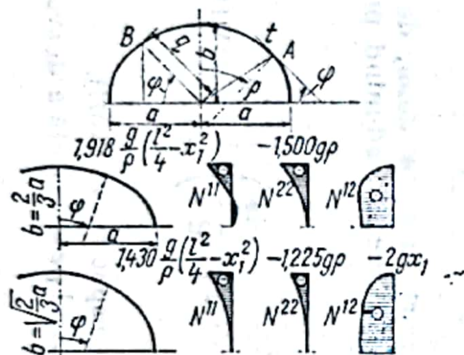
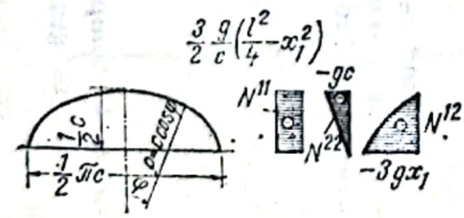
Tabelul VII.29

Eforturi la învelitori cilindrice în teoria de membrană

Tipul învelitorii	Încărcarea și raza de curbură a direcției	Eforturi		
		N^{22}	N^{12}	N^{11}
Învelitoare cilindrică circulară simplu rezemată; timpane la $x_1 = 0$ și $x = l$	1. $X_1 = 0$ X_2 și X_3 independente de x_1 $\rho = f(\varphi)$	$-X_3\rho$	$-\left(X_2 + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi N^{22}\right) x_1 + C_1(\varphi)$	$\frac{1}{\rho}\partial_\varphi\left(X_2 + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi N^{22}\right)\frac{x_1^2}{2} - \frac{1}{\rho}\partial_\varphi C_1 x_1 + C_2(\varphi)$
Idem	2. Numai pe marginile: $x_1 = 0$ și $x_1 = l$ acționează încărcarea $P(\varphi)$ continuă; $\rho = f(\varphi)$	0	0	$P(\varphi)$
Idem	3. Pe tot conturul acționează eforturi uniform distribuite N^{12} $\rho = f(\varphi)$	0	N^{12}	0

Cilindru circular	4. Încărcarea în cazul general $X_1=\sum_{n=0}^{\infty}X_{1n}\cos n\varphi$ $X_2=\sum_{n=1}^{\infty}X_{2n}\sin n\varphi$ $X_3=\sum_{n=0}^{\infty}X_{3n}\cos n\varphi$ $\rho=\text{const}$	$-X_{3n}\rho\cos n\varphi$	$-\sin n\varphi\int(X_{2n}+nX_{3n})\,dx_1+C_1(\varphi)$	$-\frac{1}{\rho}\cos n\varphi\int\left[\rho X_{1n}-n\int(X_{2n}+nX_{3n})dx_1\right]dx_1-\frac{1}{\rho}\partial_\varphi C_1(\varphi)x_1+C_2(\varphi)$
	Caz particular $C_1(\varphi)=A_1\sin n\varphi$ $C_2(\varphi)=A_2\cos n\varphi$	$-X_{3n}\rho\cos n\varphi$	$-[(X_{2n}+nX_{3n})x_1-A_1]\sin n\varphi$	$\left\{\frac{n}{\rho}\left[(X_{2n}+nX_{3n})\frac{x_1^2}{2}-A_1x_1\right]+A_2\right\}\cos n\varphi$

Tipul învelitorii	Încărcarea și raza de curbură a directoarei	Eforturi		
		N^{22}	N^{12}	N^{11}
Cilindru circular simplu rezemat	5. Greutate proprie $X_1 = 0$ $X_2 = g \sin \varphi$ $X_3 = g \cos \varphi$	$-g\rho \cos \varphi$	$g(l - 2x_1) \sin \varphi$	$\frac{-gx_1}{\rho}(l-x_1)\cos\varphi$
Idem	6. Încărcare cu zăpadă $X_1 = 0$ $X_2 = p \sin \varphi \cos \varphi$ $X_3 = p \cos^2 \varphi$	$-p\rho \cos^2\varphi$	$\frac{3p}{2}\left(\frac{l}{2} - 2x_1\right) \sin 2\varphi$	$\frac{-3p}{2\rho}x_1(l - x_1) \cos 2\varphi$

Cilindru eliptic simplu rezemat 	$\rho=\frac{q^3}{ab}$ $q=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}$ 7. Greutate proprie $X_1=0$ $X_2=g\sin\varphi$ $X_3=g\cos\varphi$	$-\frac{q^3}{ab}g\cos\varphi$ Pentru $\frac{a}{b}=\sqrt{3/2}$ și $\frac{a}{b}=1{,}5$ apar eforturile din figurile alăturate	$\frac{g}{2}(l-2x_1)\left[2+\frac{3(a^2-b^2)\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\right]\times\sin\varphi$	$-\frac{1}{2}gx_1(l-x_1)\left[\frac{2ab}{q^3}+\frac{3(a^2-b^2)}{abq}\left(\cos^2\varphi-\frac{2q^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)\right]\cos\varphi$
Idem	8. Zăpadă $X_1=0$ $X_2=p\sin\varphi\cos\varphi$ $X_3=p\cos^2\varphi$	$-\frac{pq^3}{ab}\cos^2\varphi$	$-3p(l-2x_1)\sin2\varphi\times\left[1+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}q^2\cos^2\varphi\right]$	$-\frac{3}{2}px_1(l-x_1)\left(\frac{ab}{q^3}+\frac{1}{dbq}(a^2-b^2)\cos^2\varphi\right)\left[\cos2\varphi-\frac{q^2}{qa^2b^2}(a^2-b^2)\sin^2 2\varphi\right]$
Cilindru având directoare cicloidă (simplu rezemat) 	$\rho=c\cos\varphi$ 9. Greutate proprie $X_1=0$ $X_2=g\sin\varphi$ $X_3=g\cos\varphi$	$-gc\cos^2\varphi$	$+\frac{3}{2}g(l-2x_1)\sin\varphi$	$-\frac{3}{2}\frac{g}{c}x_1(l-x_1)$

11.2.4. Deformațiile învelitorilor cilindrice. Conform fig. VII. 103. u^1, u^2, u^3, fiind deplasările unui punct de pe suprafața mediană pe direcțiile x_1 (după generatoare), x_2 (arcul director) și x_3 (normala la suprafață), expresiile deformațiilor sînt

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon^{11} = \partial_1 u^1;\; \varepsilon^{22} = \partial_2 u^2 + \frac{u^3}{\rho} = \frac{1}{\rho}(\sigma_\varphi u^2 + u^3) \\ &\varepsilon^{12} = \partial_1 u^2 + \partial_2 u^1 = \partial_1 u^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi u^1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.259)}$$

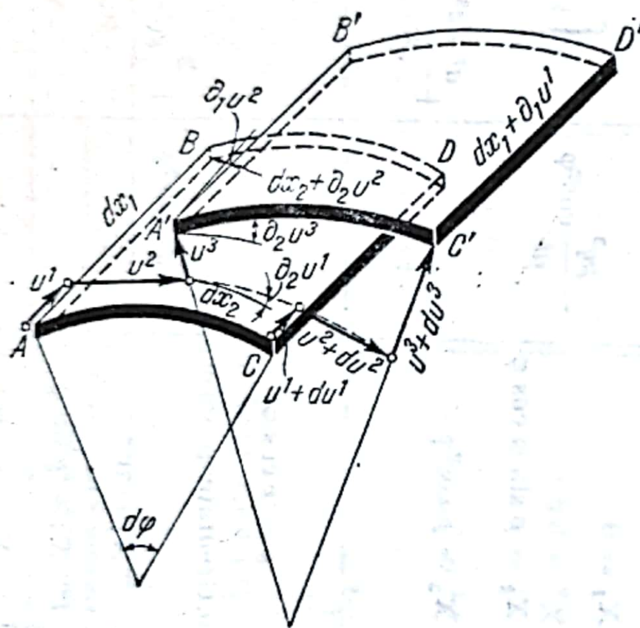


Fig. VII.103

Rotirea tangentei la directoare este

$$\chi = \frac{u^2}{\rho} - \partial_2 u^3 = \frac{1}{\rho}(u^2 - \partial_\varphi u^3). \qquad \text{(VII.260)}$$

În cazul betonului armat coeficientul lui Poisson se poate lua: $\mu = 0$ și dacă se notează $d = Eh$, pe baza legii lui Hooke, relațiile de mai înainte devin

$$\left.\begin{aligned} &\partial_1 u^1 = \frac{N^{11}}{d};\quad \partial_2 u^2 + \frac{u^3}{\rho} = \frac{N^{22}}{d} \\ &\partial_1 u^2 = \partial_2 u^1 = \frac{2N^{12}}{d} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.261)}$$

Derivînd convenabil prima ecuație de două ori în raport cu x_1, a doua, de două ori față de x_2 și ultima, o dată în raport cu x_1 și o dată în raport de x_2, adunînd primele două și scăzînd a treia ecuație se obține

$$\partial_{11}\left(\frac{u^3}{\rho}\right) = \partial_{22}\left(\frac{N^{11}}{d}\right) + \sigma_{11}\left(\frac{N^{22}}{d}\right) - 2\partial_{12}\left(\frac{N^{12}}{d}\right) \qquad \text{(VII.262)}$$

relație de compatibilitate între deplasări și deformații (respectiv eforturi).

În cazul general de încărcare (v. tabelul VII.29) considerînd pe o treaptă a dezvoltării în serie

$$X_{1n} = 0;\; X_{2n} = \text{const};\; X_{3n} = \text{const}, \qquad \text{(VII.263)}$$

se obţin pentru deplasări expresiile

$$u^1 = \frac{1}{d}\left\{\frac{n}{\rho}\left[(X_{2n}+nX_{3n})\frac{x_1^3}{6} - A_1\frac{x_1^2}{2}\right] + A_2x_1 + A_3\right\}\cos n\varphi\,; \qquad \text{(VII.264)}$$

$$u^2 = \frac{1}{d}\left\{(X_{2n}+nX_{3n})\left[\frac{n^2x_1^4}{24\rho^2} - x_1^2\right] - A_1\left[\frac{n^2x_1^3}{6\rho^2} - 2x_1\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho}\left(n\frac{x_1^2}{2}A_2 + nA_3x_1 + A_4\right)\right\}\sin n\varphi\,; \qquad \text{(VII.265)}$$

$$u^3 = -\frac{1}{d}\left\{\rho^2X_{3n} + n(X_{2n}+nX_{3n})\left[\frac{n^2x_1^4}{24\rho^2} - x_1^2\right] - A_1n\left[\frac{n^2x_1^3}{6\rho^2} - 2x_1\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{n}{\rho}\left(\frac{nx_1^2}{2}A_2 + nx_1A_3 + A_4\right)\right\}\cos n\varphi. \qquad \text{(VII.266)}$$

11.2.5. Cilindrul circular continuu pe două deschideri egale. Încărcarea are componentele

$$X_1 = 0\,;\; X_2 = X_{2n}\sin n\varphi\,;\; X_3 = X_{3n}\cos n\varphi \qquad \text{(VII.267)}$$

în care X_{2n} şi X_{3n} sînt constante. Dacă timpanele asigură o rezemare liberă la capete, atunci, conform fig. VII.104, scriind ecuaţiile de margini pentru $x_1 = 0$, $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ şi pentru $x_1 = l$, $N^{11} = u^2 = u^3 = 0$; eforturile sînt

$$N^{22} = -X_{3n}\,\rho\cos n\varphi\,;$$

$$N^{12} = -\left[(X_{2n}+nX_{3n})\,x_1 - \underbrace{\frac{(X_{2n}+nX_{3n})}{8}\,l\,\frac{5n^2l^2+24\rho^2}{n^2l^2+6\rho^2}}_{A_1}\right]\sin n\varphi$$

$$N^{11} = \left\{\frac{n}{\rho}\left[(X_{2n}+nX_{3n})\frac{x_1^2}{2} - x_1\overbrace{\frac{X_{2n}+nX_{3n}}{8}\,l\,\frac{5n^2l^2+24\rho^2}{n^2l^2+6\rho^2}}\right] + \right.$$
$$\left. + \underbrace{\frac{X_{2n}+nX_{3n}}{4}\,l\,\frac{n^3l^3}{2\rho(n^2l^2+6\rho^2)}}_{A_2}\right\}\cos n\varphi \qquad \text{(VII.268)}$$

Deplasările se deduc din expresiile (VII.264) – (VII.266) înlocuind valorile lui A_1, A_2 din ecuaţiile anterioare şi considerînd $A_3 = A_4 = 0$.

Expresia lui N^{12} se anulează pentru

$$(x_1)_0 = \frac{l}{8}\,\frac{5n^2l^2 + 24\rho^2}{n^2l^2 + 6\rho^2} \tag{VII.269}$$

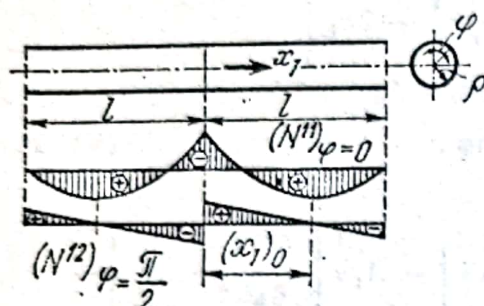


Fig. VII.104

— dacă $\frac{l}{2\rho}$ este foarte mare $(x_1)_0 \to \frac{5l}{8}$, obținînd aceeași valoare ca la grinzile continue de secțiune constantă;

— cînd $\frac{l}{2\rho}$ este foarte mic, $(x_1)_0 \to \frac{l}{2}$, valoarea coincizînd cu grinzile simplu rezemate.

Efectul de continuitate este influențat și de repartiția încărcării exprimat prin A_1; pentru $n=1$ punctul unde se anulează N^{12} se îndepărtează cel mai mult de poziția pe care o are la grinzile continue.

Este de subliniat că în *teoria de membrană* nu se pot satisface condițiile $u^3 = 0$ pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = l$ și în consecință apar *momente* și *forțe tăietoare* în vecinătatea timpanelor de capăt și intermediare.

11.3. Calculul în teoria de încovoiere

11.3.1. Ecuațiile problemei. *Rezolvarea riguroasă a învelitorilor cilindrice în cadrul* ipotezelor lui Kirchoff se obține, integrînd sistemul de ecuații cu derivate parțiale care exprimă pentru elementul mic satisfacerea condițiilor [8, 29, 30, 52]:

— *de echilibru între încărcarea exterioară și eforturile interioare*;

— *de compatibilitate între deformații și deplasări.*

Neglijînd termenii multiplicați cu h/ρ conform celor arătate la paragraful 3.1. ecuațiile de echilibru pentru cilindrul circular (fig. VII.105) se scriu

$$\partial_1 N^{11} + \partial_2 N^{21} + X_1 = 0 \tag{VII.270}$$

$$\partial_1 N^{12} + \partial_2 N^{22} + X_2 = 0 \tag{VII.271}$$

$$\frac{N^{22}}{\rho} + \partial_1 Q^1 + \partial_2 Q^2 + X_3 = 0 \tag{VII.272}$$

$$\partial_1 M^{12} + \partial_2 M^{22} - Q^1 = 0 \tag{VII.273}$$

$$\partial_1 M^{11} + \partial_2 M^{21} - Q^2 = 0 \tag{VII.274}$$

$$N^{12} - N^{21} + \frac{M^{22}}{\rho} = 0. \tag{VII.275}$$

Pentru că $\frac{M^{22}}{\rho}$ este foarte mic, vom considera din ecuația (VII.275) $N^{12} = N^{21}$. De asemenea, se poate aproxima: $M^{11} = M^{22}$.

Ecuaţia de compatibilitate devine în acest caz

$$\partial_{11}\left(\frac{u^3}{\rho}\right) = \partial_{22}\left(\frac{N^{11}}{d}\right) + \partial_{11}\left(\frac{N^{22}}{d}\right) - 2\partial_{12}\left(\frac{N}{d}\right). \qquad \text{(VII.276)}$$

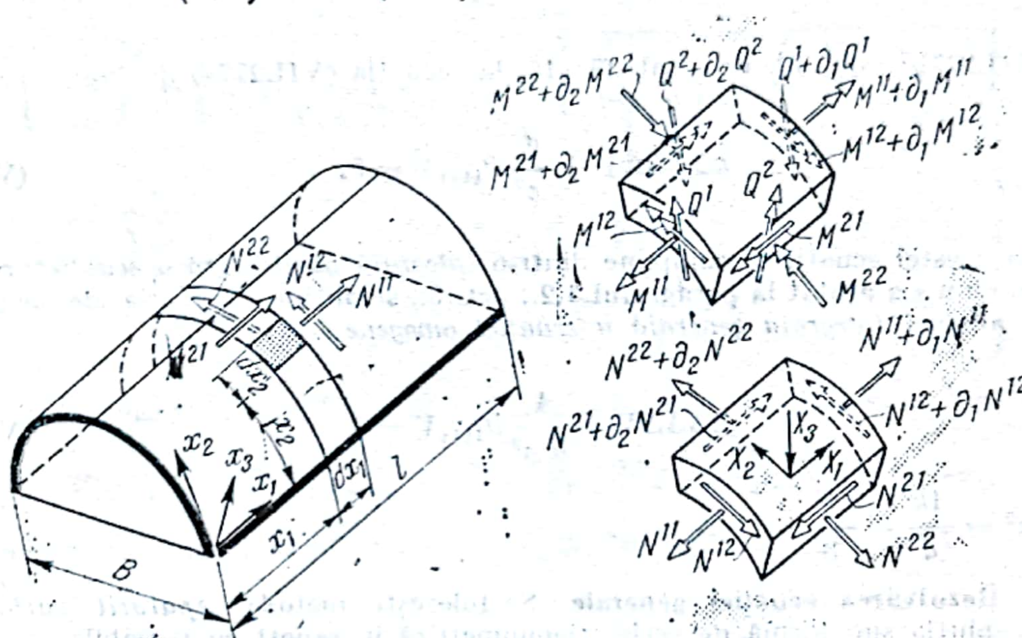


Fig. VII.105

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale de mai înainte vom introduce o funcţie de forţe (de tipul Airy) definită prin

$$N^{11} = \partial_{22}F - \int X_1 dx_1 ; \; N^{22} = \partial_{11}F - \int X_2 dx_2 ; \; N^{12} = - \partial_{12}F ;$$

unde componentele încărcării se consideră $X_1 = f(x_2, x_1^n)$ $X_2 = f(x_1, x_2^n)$ iar $X_3 = f(x_1^n, x_2^n)$. Cunoscînd relaţiile dintre momente şi deplasări

$$M^{12} = k\partial_{11}u^3 ; \; M^{21} = k\partial_{22}u^3 ; \; M^{11} = M^{22} = k\partial_{12}u^3$$

în care $k = \frac{Eh^3}{12}$ reprezintă rigiditatea plăcii la încovoiere, sistemul de ecuaţii (VII.270)— — (VII.276) se reduce la două relaţii

$$k\Delta\Delta\, u^3 + \frac{1}{\rho}\partial_{11}F = \mathfrak{Z} \qquad \text{(VII.277a)}$$

$$\frac{1}{d}\Delta\Delta F - \frac{1}{\rho}\partial_{11}u^3 = 0 \qquad \text{(VII.277b)}$$

în care: $\mathfrak{Z} = - X_3 + pX_1 + qX_2 + r\int X_1 dx_1 + t\int X_2 dx_2.$

Folosind o nouă funcție necunoscută V legată de F și u^3 prin relațiile

$$F = \frac{d}{\rho} \partial_{11} V \text{ și } u^3 = \Delta\Delta V \tag{VII.278}$$

ecuația (VII.277b) este identic satisfăcută, iar ecuația (VII.277a) devine

$$k\Delta\Delta\Delta\Delta V + \frac{d}{\rho^2} \partial_{1111} V = g_3 \tag{VII.279}$$

Soluția acestei ecuații se compune dintr-o *integrală particulară a ecuației complete* (care, după cum s-a arătat la paragraful 4.2., pct. 3., se obține din teoria de membrană) la care se adaugă *integrala generală a ecuației omogene*

$$\Delta\Delta\Delta\Delta V + \frac{4}{a^2\rho^2} \partial_{1111} V = 0 \tag{VII.280}$$

în care: $a^2 = \frac{4k}{d} = \frac{h^2}{3}$.

11.3.2. **Rezolvarea ecuației generale.** Se folosește metoda *separării variabilelor*, scriindu-se soluția sub formă de serie trigonometrică în raport cu variabila x_1

$$V = \sum_1^n f_i(x_2) \sin \lambda\, x_1 \tag{VII.281}$$

în care: $\lambda = \frac{n\pi}{l}$; $n = 1, 3, 5$.

Se observă că primul termen al seriei calculat pentru $n = 1$ oferă suficientă aproximație în practică. Înlocuind soluția în ecuația (VII.280) se obține

$$\frac{d^8 f}{dx_2^8} - 4\lambda^2 \frac{d^6 f}{dx_2^6} + 6\lambda^4 \frac{d^4 f}{dx_2^4} - 4\lambda^6 \frac{d^2 f}{dx_2^2} + \lambda^8 f + \frac{4\lambda^4}{\rho^2 a^2} = 0, \tag{VII.282}$$

o ecuație diferențială omogenă de ordinul 8, a cărei ecuație caracteristică este

$$(m^2 - \lambda^2)^4 + \frac{4\lambda^4}{\rho^2 a^2} = 0. \tag{VII.283}$$

Rădăcinile acestei ecuații se scriu

$$\begin{aligned} m_{1,2,3,4} &= \pm \chi_1 \pm i\mu_1 \\ m_{5,6,7,8} &= \pm \chi_1 \pm i\mu_2 \end{aligned} \tag{VII.284}$$

în care notațiile au următoarele semnificații:

$$\left.\begin{aligned}\chi_1 &= \sqrt{\rho_1}\cos\psi_1 \quad \mu_1 = \sqrt{\rho_1}\sin\psi_1\\ \chi_2 &= \sqrt{\rho_2}\cos\psi_2 \quad \mu_2 = \sqrt{\rho_2}\sin\psi_2\end{aligned}\right\} \tag{VII.285}$$

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}\right)^2 + \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}\right)^2}; \qquad \rho_2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}\right)^2 + \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}\right)^2}\\ &2\psi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}}{\lambda^2 + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}}; \qquad 2\psi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}}{\lambda^2 - \dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho a}}}.\end{aligned}\right\} \tag{VII.286}$$

Integrala generală a ecuației care exprimă influența marginii $x_2 = 0$ se scrie

$$V = [C_1 e^{-\chi_1 x_2}\sin(\mu_1 x_2 + \gamma_1) + C_2 e^{-\chi_2 x_2}\sin(\mu_2 x_2 + \gamma_2)]\sin\lambda x_1. \tag{VII.287}$$

Derivata de ordinul m în raport cu x_1 și de ordinul n în raport cu x_2 a lui V se scrie

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^{m+n}}{\partial x_1^m \partial x_2^n} V = (-1)^n \lambda^m [\rho_1^{\frac{n}{2}} C_1 e^{-\chi_1 x_2}\sin(\mu_1 x_2 + \gamma_1 - n\psi_1) +\\ &+ \rho_2^{\frac{n}{2}} C_2{}^{-\chi_2 x_2}\sin(\mu_2 x_2 + \gamma_2 - n\psi_2)]\sin\left(\lambda x_1 + m\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{VII.288}$$

Cu ajutorul acestei expresii s-au calculat formulele eforturilor și deplasărilor care sînt date în tabelul VII.30. Pentru scrierea condensată a expresiei lui V s-au definit următoarele constante

$$D_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sin 4\psi_{1,2}}{\lambda^4} - 2\frac{\sin 2\psi_{1,2}}{\rho_{1,2}\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_{1,2}^2} - 2\frac{\cos 2\psi_{1,2}}{\rho_{1,2}\lambda^2} + \frac{\cos 4\psi_{1,2}}{\lambda^4}\right)^2};$$

$$\delta_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\sin 4\psi_{1,2}}{\lambda^4} - 2\dfrac{\sin 2\psi_{1,2}}{\rho_{1,2}\lambda^2}}{\dfrac{1}{\rho_{1,2}} - 2\dfrac{\cos 2\psi_{1,2}}{\rho_{1,2}\lambda^2} + \dfrac{\cos 4\psi_{1,2}}{\lambda^4}}. \tag{VII.289}$$

Eforturile în *teoria de încovoiere*, care sînt sub influența unei margini depind de 4 constante de integrare C_1, C_2, γ_1 și γ_2 care se determină scriind condițiile ca *solicitările* și *deformațiile* obținute din teoria de membrană și de încovoiere să corespundă pe marginea considerată, condițiilor reale de rezemare.

Tabelul VII.30

Eforturile în teoria de încovoiere la învelitori cilindrice circulare
Efortul $f(V) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$

Efortul	Expresia $f(V)$	Multiplificator $f_1(x_1)$	Expresia $f_2(x_2)$
N^{11}	$\frac{Eh}{\rho}\partial_{1112}V$	$-\frac{Eh\lambda^2}{\rho}\sin\lambda x_1$	$\rho_1 C_1 e^{-\chi_1 x_2}\sin(\mu_1 x_2+\gamma_1-2\psi_1)+$ $+\rho_2 C_2 e^{-\chi_2 x_2}\sin(\mu_2 x_2+\gamma_2-2\psi_2)$
N^{22} (l, N^{22})	$\frac{Eh}{\rho}\partial_{1111}V$	$\frac{Eh\lambda^1}{\rho}\sin\lambda x_1$	$C_1 e^{-\chi_1 x_2}\sin(\mu_1 x_2+\gamma_1)+$ $+C_2 e^{-\chi_2 x_2}\sin(\mu_2 x_2+\gamma_2)$
N^{12} (N^{12})	$-\frac{Eh}{\rho}\partial_{1112}V$	$-\frac{Eh\lambda^3}{\rho}\cos\lambda x_1$	$\sqrt{\rho_1}C_1 e^{-\chi_1 x_2}\sin(\mu_1 x_2+\gamma_1-\psi_1)+$ $+\sqrt{\rho_2}C_2 e^{-\chi_2 x_2}\sin(\mu_2 x_2+\gamma_2-\psi_2)$
u^3	$\Delta\Delta V$	$\lambda^4\sin\lambda x_1$	$\rho_1^2 C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\sin(\mu_1 x_2+\gamma_1-\delta_1)+$ $+\rho_2^2 C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\sin(\mu_2 x_2+\gamma_2-\delta_2)$
M^{12}	$EI\partial_{11}u^3$	$-EI\lambda^6\sin\lambda x_1$	$-\rho_1^2 C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1)+$ $+\rho_2^2 C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2)$
M^{21} (M^{21})	$EI\partial_{22}u^3$	$EI\lambda^4\sin\lambda x_1$	$-\rho_1^3 C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1-2\psi_1)+$ $+\rho_2^3 C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2-2\psi_2)$
$M^{11}=M^{22}$	$EI\partial_{12}u^3$	$-EI\lambda^5\cos\lambda x_1$	$-\rho_1^{5/2} C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1-\psi_1)+$ $+\rho_2^{5/2}{}_2 C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2-\psi_2)$
Q^1	$EI(\partial_{111}u^3+$ $+\partial_{122}u^3)$	$-EI\lambda^7\cos\lambda x_1+$ $+EI\lambda^5\cos\lambda x_1$	$-\rho_1^2 C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1)+$ $+\rho_2^2 C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2)-$ $-\rho_1^3 C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1-2\psi_1)+$ $+\rho_2^3 C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2-2\psi_2)$
Q^2 (Q^2)	$EI(\partial_{222}u^3+$ $+\partial_{112}u^3)$	$-EI\lambda^4\sin\lambda x_1+$ $+EI\lambda^6\sin\lambda x_1$	$-\rho_1^{7/2} C_1 D_1 e^{-\chi_1 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1-3\psi_1)+$ $+\rho_2^{7/2} C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2-3\psi_2)-$ $-\rho_1^{5/2} C_1 D_1 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_1 x_2+\gamma_1-\psi_1)+$ $+\rho_2^{5/2} C_2 D_2 e^{-\chi_2 x_2}\cos(\mu_2 x_2+\gamma_2-\psi_2)$

11.3.3. Învelitori cilindrice cu rază de curbură variabilă, calculate în teoria de încovoiere. Ideea de a înălța la învelitori cilindrice linia profilului transversal față de curba de presiune dată de încărcare, pentru a obține pe direcția generatoarelor o comportare mecanică avantajoasă, explică rațiunea adoptării unor arce directoare cu rază de curbură variabilă [30].

Pentru o învelitoare cilindrică raportată la un sistem de axe (fig. VII.106) în care x_1 este măsurat în lungul generatoarei, x_2 în lungul arcului director, iar x_3 pe normala la suprafață în punctul de origine, ecuația rezolvantă a stării de eforturi se poate scrie funcție de deplasarea după normala la suprafața mediană, u^3, astfel:

$$\Delta\Delta(\rho\Delta\Delta u^3) + \frac{d}{\rho k}\partial_{1111}u^3 = \mathfrak{I} \tag{VII.290}$$

unde:

$$d = Eh; \quad k = EI = E\frac{h^3}{12}$$

$$\mathfrak{I} = -\frac{1}{k}\Delta\Delta\left(\rho X_3 - \int X_2 \mathrm{d}x_2\right).$$

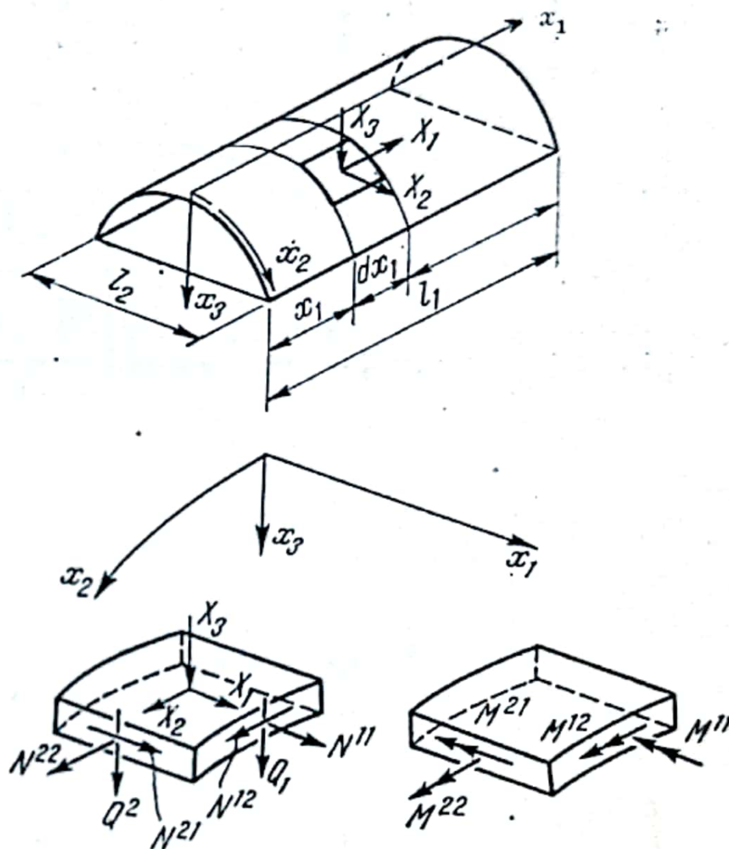


Fig. VII.106

Dezvoltînd în serii Fourier în raport cu variabila x_1 atît deplasarea u^3 cît și încărcarea exterioară $\mathfrak{I}$, ecuația cu derivate parțiale se transformă într-o serie de ecuații diferențiale scrise în raport cu variabila x_2, liniare și neomogene, avînd coeficienții variabili

$$u^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x_2)\sin\lambda x; \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}; \tag{VII.291}$$

Pentru termenul general din dezvoltarea în serie după x_1, ecuația diferențială este de următoarea formă generală

$$A_8(x_2)\,\Phi_n^{(8)} + A_7(x_2)\,\Phi_n^{(7)} + \ldots + A_1(x_2)\,\Phi_n^{(1)} + A_0(x_2)\,\Phi_n = \mathfrak{I}_n \tag{VII.292}$$

unde $A_8(x_2), A_7(x_2), \ldots, A_0(x_2)$ sînt coeficienții variabili ai ecuației, funcții de x_2, obținuți prin dezvoltarea în serii de puteri a razei de curbură $\rho\ (x_2)$ și a derivatelor ei în jurul punctului $x_2 = 0$.

Soluția ecuației se compune din soluția ecuației omogene reprezentînd influenți marginilor, la care se adaugă o soluție particulară care satisface ecuația diferențială și care poate să fie dată de soluțiile teoriei de membrană.

Ecuația diferențială omogenă, rezolvată prin metoda Frobenius, conduce la următoarele rezultate:

$$\Phi_n = B_0\left[1 - \frac{a_{08}}{8!\,a_{80}}x_2^8 - \frac{a_{0,10}a_{80} - a_{08}\left(\frac{a_{62}}{2} + a_{72} + a_{82}\right)}{A_{10}^8\,a_{80}^2}x_2^{10} + \ldots\right] +$$

$$+ B_1 x\left[1 - \frac{a_{08} + a_{18}}{9!\,a_{80}}x_2^8 - \frac{(a_{0,10} + a_{1,10})a_{80} - (a_{08} + a_{18})\left(\frac{a_{62}}{3!} + \frac{a_{62}}{2!} + a_{82}\right)}{A_{11}^8\,a_{80}^2}x_2^{10} + \ldots\right] +$$

$$+ B_2 x_2^2\left[1 - 2!\,\frac{a_{26}}{8!\,a_{80}}x_2^6 - 2!\,\frac{\left(\frac{a_{08}}{2} + a_{18} + a_{28}\right)a_{80} - a_{26}\left(\frac{a_{62}}{2} + a_{72} + a_{82}\right)}{A_{10}^8\,a_{80}^2}x_2^8 + \ldots\right] +$$

$$+ B_3 x_2^3\left[1 - 3!\,\frac{a_{26} + a_{36}}{9!\,a_{80}}x_2^6 - \right.$$

$$\left. -3!\,\frac{\left(\frac{a_{08}}{3!} + \frac{a_{18}}{2} + a_{28} + a_{38}\right)a_{80} - (a_{26} + a_{36})\left(\frac{a_{62}}{3!} + \frac{a_{72}}{2!} + a_{82}\right)}{A_{11}^8\,a_{80}^2}x_2^8 + \ldots\right] +$$

$$+ B_4 x_2^4\left[1 - 4!\,\frac{a_{44}}{8!\,a_{80}}x_2^4 - 4!\,\frac{\left(\frac{a_{26}}{2} + a_{36} + a_{46}\right)a_{80} - a_{44}\left(\frac{a_{62}}{2} + a_{72} + a_{82}\right)}{A_{10}^8\,a_{80}^2}x_2^6 + \ldots\right] +$$

$$+ B_5 x_2^5\left[1 - 5!\,\frac{a_{44} + a_{54}}{9!\,a_{80}}x_2^4 - \right.$$

$$\left. -5!\,\frac{\left(\frac{a_{26}}{3!} + \frac{a_{36}}{2!} + a_{46} + a_{56}\right)a_{80} - (a_{44} + a_{34})\left(\frac{a_{62}}{3!} + \frac{a_{72}}{2!} + a_{82}\right)}{A_{11}^8\,a_{80}^2}x_2^6 + \ldots\right]$$

$$+ B_6 x_2^6\left[1 - 6!\,\frac{a_{62}}{8!\,a_{80}}x_2^2 - 6!\,\frac{\left(\frac{a_{44}}{2} + a_{54} + a_{64}\right)a_{80} - a_{62}\left(\frac{a_{62}}{2} + a_{72} + a_{82}\right)}{A_{10}^8\,a_{80}^2}x_2^4 + \ldots\right] +$$

$$+B_7 x_2^7 \left[1 - 7! \frac{a_{62} + a_{72}}{9!\, a_{80}} x_2^2 - \right.$$

$$\left. - 7! \frac{\left(\frac{a_{44}}{3!} + \frac{a_{54}}{2!} + a_{64} + a_{74}\right) a_{80} - (a_{62} + a_{72}) \left(\frac{a_{62}}{3!} + \frac{a_{72}}{2!} + a_{82}\right)}{A_{11}^8\, a_{80}^2} x_2^4 + \ldots \right] \tag{VII.293}$$

în care coeficienţii a_{jk} pentru diferite curbe directoare sînt daţi în tabelele VII. 31, VII. 32 şi VII. 33, iar $B_0, B_2, \ldots, B_7$ sînt constante arbitrare care se determină punînd condiţiile de margine pe generatoare (4 + 4) conform tabelului VII.34.

Pentru cazuri practice de proiectare se obţine o exactitate suficientă păstrînd numai primii doi termeni din parantezele expresiei lui Φ_n.

Eforturile secţionale se determină cu relaţiile:

$$M^{12} = k\partial_{11}u^3 = -k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 \Phi_n \sin \lambda x_1; \tag{VII.294}$$

$$M^{11} = M^{22} = k\partial_{12}u^3 = k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \partial_2 \Phi_n \cos \lambda x_1; \tag{VII.295}$$

$$M^{21} = k\partial_{22}u^3 = k \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{22} \Phi_n \sin \lambda x_1; \tag{VII.296}$$

$$Q^1 = \partial_1(k\partial_{11}u^3) + \partial_2(k\partial_{12}u^3) = -k \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^3 \Phi_n - \lambda \partial_{22}\Phi_n) \cos \lambda x_1; \tag{VII.297}$$

$$Q^2 = \partial_1(k\partial_{12}u^3) + \partial_2(k\partial_{22}u^3) = -k \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^2 \partial_2 \Phi_n - \partial_{222}\Phi_n) \sin \lambda x_1; \tag{VII.298}$$

$$N^{22} = \partial_{11}F = -k\rho(\partial_{1111}u^3 + 2\partial_{1122}u^3 + \partial_{2222}u^3) =$$

$$= -k\rho \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^4 \Phi_n - 2\lambda^2 \partial_{22}\Phi_n + \partial_{2222}\Phi_n) \sin \lambda x_1; \tag{VII.299}$$

$$N^{12} = -\partial_{12}F = -k \sum_{n=1}^{\infty} \left[\partial_2 \rho \left(\lambda^3 \Phi_n - 2\lambda \partial_{22}\Phi_n + \frac{1}{\lambda} \partial_{2222}\Phi_n \right) + \right.$$

$$\left. + \rho \left(\lambda^3 \partial_2 \Phi_n - 2\lambda \partial_{222}\Phi_n + \frac{1}{\lambda} \partial_{22222}\Phi_n \right) \right] \cos \lambda x_1; \tag{VII.300}$$

Coeficienții a_{jk} din ecuația diferen

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
8	$4a$	0	$-\frac{1}{2!\,2^2a}$	0	$-\frac{7}{4!\;2^6a^3}$	0
7	0	0	$-\frac{1}{a}$	0	$-\frac{7}{3!\,2^4a^3}$	0
6	0	0	$-16\,a\lambda^2-\frac{6}{2^2\,a}$	0	$\frac{1}{2!}\left(\frac{4\,\lambda^2}{2^2a}-\frac{42}{2^6a^3}\right)$	0
5	0	0	0	0	$\frac{12\lambda^2}{2^2a}-\frac{7}{2^4a^3}$	0
4	0	0	0	0	$24\,a\lambda^4-\frac{14\,\lambda^2}{2^2a}-\frac{7}{2^6a^3}$	0
3	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Tabelul VII.31

ţială — cazul cicloidei

Ecuaţia cicloidei: $x_2 = a[t - \sin(t + \pi)]$
$x_3 = a[1 - \cos(t + \pi)]$

Raza de curbura: $r = 4a \sin \frac{t + \pi}{2}$

6	7	8	9
$-\frac{193}{6!\,2^{10}\,a^5}$	0	$-\frac{11\,791}{8!\,2^{14}\,a^7}$	0
$-\frac{193}{5!\,2^8\,a^5}$	0	$-\frac{11\,791}{7!\,2^{12}\,a^7}$	0
$\frac{1}{4!}\left(\frac{28\,\lambda^2}{2^6a^3} - \frac{193}{2^{10}a^5}\right)$	0	$\frac{1}{6!}\left(\frac{772}{2^{10}a^5} - \frac{11\,791}{2^{14}\,a^7}\right)$	0
$\frac{1}{3!}\left(\frac{84\,\lambda^2}{2^6a^3} - \frac{193}{2^8a^5}\right)$	0	$\frac{1}{5!}\left(\frac{193\cdot 12\,\lambda^2}{2^{10}\,a^5} - \frac{11\,791}{2^{12}\,a^7}\right)$	0
$\frac{1}{2!}\left(-\frac{6\lambda^4}{2^2a} + \frac{98\,\lambda^2}{2^6a^3} - \frac{193}{2^{10}a^5}\right)$	0	$\frac{1}{4!}\left(-\frac{42\,\lambda^4}{2^6a^3} + \frac{193\cdot 14\,\lambda^2}{2^{10}a^5} - \frac{11\,791}{2^{14}\,a^7}\right)$	0
$-\frac{3\,\lambda^4}{a} + \frac{7\lambda^4}{2^3\,a^3}$	0	$\frac{1}{3!}\left(-\frac{84\,\lambda^4}{2^6a^3} + \frac{193\,\lambda^2}{2^7a^5}\right)$	0
$-16\,a\lambda^6 - \frac{10\,\lambda^4}{2^2a} + \frac{7\lambda^2}{2^5a^3}$	0	$\frac{1}{2!}\left(\frac{4\,\lambda^6}{2^4\,a} - \frac{70\,\lambda^4}{2^6a^3} + \frac{193\,\lambda^2}{2^9a^5}\right)$	0
0	0	$\frac{4\,\lambda^6}{2^2a} - \frac{7\,\lambda^4}{2^4a^3}$	0
0	0	$4a\lambda^8 + \frac{\lambda^6}{2a} - \frac{7\,\lambda^4}{2^6a^3} + \frac{d\lambda^4}{2^2\,ak}$	0

Coeficienții $a_{j,k}$ din ecuația

j \ k	0	1	2	3	4	5
8	$\frac{1}{2a}$	0	$3a$	0	$3\,a^3$	0
7	0	0	$24a$	0	$48\,a^3$	0
6	0	0	$36\,a - \frac{2\lambda^2}{a}$	0	$216\,a^3 - 12\,a\,\lambda^2$	0
5	0	0	0	0	$288\,a^3 - 72\,a\lambda^2$	0
4	0	0	0	0	$\frac{3\lambda^4}{a} - 84\,a\lambda^2 + 72\,a^3$	0
3	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Tabelul VII.32

diferenţială — cazul parabolei

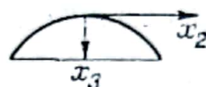
Ecuaţia parabolei: $x_3 = a x_2^2$

Raza de curbură: $r = \dfrac{(1 + 4a^2 x_2^2)}{2a}$

6	7	8	9
$-2a^5$	0	$3a^7$	0
$-48a^5$	0	$96a^7$	0
$-360a^5 - 12a^3\lambda^2$	0	$1008a^7 + 8\lambda^2 a^5$	0
$-960a^5 - 144a^3\lambda^2$	0	$4032a^7 + 144a^5\lambda^2$	0
$18a\lambda^4 - 504a^3\lambda^2 - 720a^5$	0	$18a^3\lambda^4 + 840a^5\lambda^2 + 5040a^7$	0
$72a\lambda^4 - 576a^3\lambda^2$	0	$144a^3\lambda^4 + 1920a^5\lambda^2$	0
$-\dfrac{2\lambda^6}{a} + 60a\lambda^4 - 144a^3\lambda^2$	0	$-12a\lambda^6 + 360a^3\lambda^4 + 1440a^5\lambda^2$	0
0	0	$-24a\lambda^6 + 288a^3\lambda^4$	0
0	0	$\dfrac{\lambda^8}{2^4} - 12a\lambda^3 + 72a^3\lambda^4 + \dfrac{2ad\lambda^4}{k}$	0

Coeficienții $a_{j,k}$ din ecuația

Ecuația lănțișorului :



Raza de curbură :

j \ k	0	1	2	3	4	5
8	a	0	$\frac{1}{a}$	0	$\frac{1}{3\,a^3}$	0
7	0	0	$\frac{8}{a}$	0	$\frac{16}{3\,a^3}$	0
6	0	0	$-4\,a\lambda^2+\frac{12}{a}$	0	$-\frac{4\,\lambda^2}{a}+\frac{24}{a^3}$	0
5	0	0	0	0	$-\frac{24\,\lambda^2}{a}+\frac{32}{a^3}$	0
4	0	0	0	0	$6\,a\lambda^4-\frac{28\,\lambda^2}{a}+\frac{8}{a^3}$	0
3	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Tabelul VII.33

diferențială — cazul lănțișorului

$$x_3 = a\left(\mathrm{ch}\,\frac{x_2}{a} - 1\right)$$

$$r = \frac{\left(1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x_2}{a}\right)^{3/2}}{\frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{x_2}{a}} = a\,\frac{1 + \mathrm{ch}\,2\,\frac{x_2}{a}}{2}$$

6	7	8	9
$\frac{2}{45\,a^5}$	0	$\frac{1}{315\,a}$	0
$\frac{16}{15\,a^5}$	0	$\frac{32}{315\,a^7}$	0
$-\frac{4\,\lambda^2}{3\,a^3} + \frac{24}{3\,a^5}$	0	$-\frac{8\,\lambda^2}{45\,a^5} + \frac{48}{45\,a^7}$	0
$-\frac{48\,\lambda^2}{3\,a^3} + \frac{64}{3\,a^5}$	0	$-\frac{48\,\lambda^2}{15\,a^5} + \frac{64}{15\,a^7}$	0
$\frac{6\,\lambda^4}{a} - \frac{56\,\lambda^2}{a^3} + \frac{16}{a^5}$	0	$\frac{6\,\lambda^4}{3\,a^3} - \frac{56\,\lambda^2}{3\,a^5} + \frac{16}{3\,a^7}$	0
$\frac{24\,\lambda^4}{a} - \frac{64\,\lambda^2}{a^3}$	0	$\frac{48\,\lambda^4}{3\,a^3} - \frac{128\,\lambda^2}{3\,a^5}$	0
$-4\,a\lambda^6 + \frac{20\,\lambda^4}{a} - \frac{16\,\lambda^2}{a^3}$	0	$-\frac{4\lambda^6}{a} + \frac{40\lambda^4}{a^3} - \frac{32\,\lambda^2}{a^5}$	0
0	0	$-\frac{8\,\lambda^6}{a} + \frac{32\,\lambda^4}{a^3}$	0
0	0	$a\lambda^8 - \frac{4\,\lambda^6}{a} + \frac{8\,\lambda^4}{a^3} + \frac{\lambda^4 d}{k}$	0

Tabelul VII.34

Condiții de rezolvare a învelitorilor cilindrice

Tipul rezemării		Condiții de margine în eforturi și deplasări
Marginea articulată netasabilă		$(N^{22})^m = -(N^{22})^i$ $(N^{12})^m = -(N^{12})^i$ $M^{22} = 0$ $u^3 = 0$
Margine liberă		$(N^{22})^m = -(N^{22})^i$ $(N^{12})^m = -(N^{12})^i$ $M^{22} = 0$ $Q^2 + \frac{\partial M^{21}}{\partial x_1} = 0$
Margine încastrată netasabilă		$(N^{22})^m = -(N^{22})^i$ $(N^{12})^m = -(N^{12})^i$ $\frac{\partial u^3}{\partial x_2} = 0$ $u^3 = 0$
Margine cu rotire împiedicată, cu deplasare liberă pe verticală		$(N^{22})^m = -(N^{22})^i$ $(N^{12})^m = -(N^{12})^i$ $\frac{\partial u^3}{\partial x_2} = 0$ $Q^2 + \frac{\partial M^{12}}{\partial x_1} = 0$

$$N^{11} = \partial_{22}F = k \sum_{n=1}^{\infty} \left[\partial_{22}\rho \left(\lambda^2\Phi_n - 2\partial_{22}\Phi_n + \frac{1}{\lambda^2}\, \partial_{2222}\Phi_n \right) + \right.$$
$$+ \rho \left(\lambda^2\partial_{22}\Phi_n - 2\partial_{2222}\Phi_n + \frac{1}{\lambda^2}\, \partial_{222222}\Phi_n \right) +$$
$$\left. + 2\partial_2\rho \left(\lambda^2\partial_2\Phi_n - 2\partial_{222}\Phi_n + \frac{1}{\lambda^2}\, \partial_{22222}\Phi_n \right) \right] \sin \lambda x_1. \qquad \text{(VII.301)}$$

Se observă că primul termen al seriilor trigonometrice ($n = 1$) oferă suficientă aproximație în aplicațiile practice.

11.4. Instabilitatea la încovoiere a învelitorilor cilindrice lungi. Fenomenul Brazier

O învelitoare cilindrică lucrînd ca grindă supusă la încovoiere poate ajunge prin *deformarea secțiunii transversale* într-o situație de instabilitate.

Acest fenomen este ușor de observat la tuburile de cauciuc sau la profilele metalice care pentru o anumită curbură produsă prin încovoiere își pierd forma; el a fost pus prima dată în evidență de Brazier [5] (fig. VII.107).

1) În cazul unui tub subțire cilindric circular, acționat numai la încovoiere, modificarea de formă a secțiunii transversale este dată conform teoriei lui Saint-Venant [47] de ecuațiile (v. fig. VII. 107)

$$u^{20} = \mu C x_2 x_3 \text{ și } u^{30} = \mu \frac{C}{2} (x_3^2 - x_2^2) \qquad \text{(VII.302)}$$

în care: u^{20} și u^{30} sînt deplasările pe direcțiile x_2 și x_3; $C = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$ este curbura în ansamblu a tubului datorită încovoierii; M — momentul încovoietor care solicită tubul; μ — coeficientul lui Poisson.

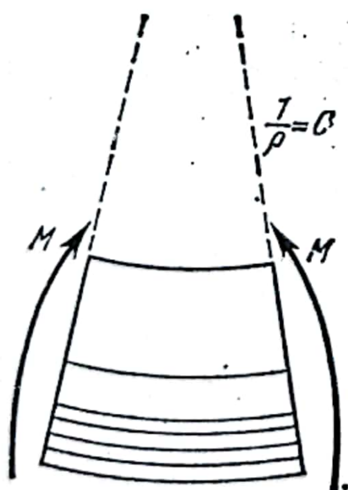


Fig. VII.107

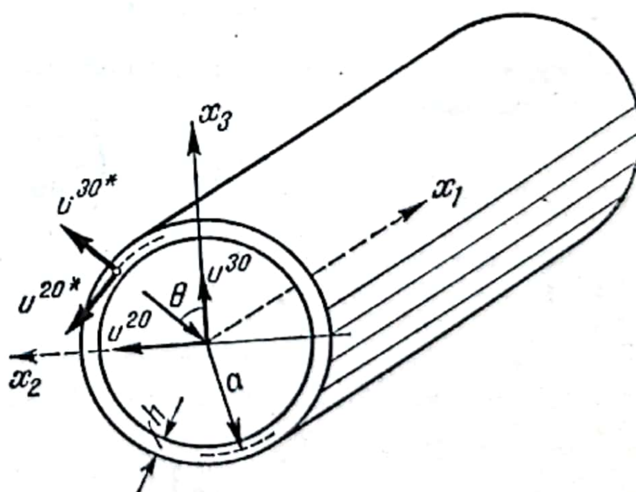


Fig. VII.108

S-a considerat numai *deformarea secțiunii transversale* produsă într-un *plan perpendicular pe axa tubului*; inelele transversale s-au presupus inițial într-o stare de echilibru, care conservă forma circulară.

Introducînd sistemul de coordonate cilindrice a, θ, x_2 (fig. VII.108), se notează cu u^{20*} deplasarea tangențială la profil și u^{30*} deplasarea radială, expresiile lor deducîndu-se din ecuația (VII.302); acestea sînt

$$u^{20*} = -\frac{C}{2}\mu a^2 \sin\theta; \quad u^{30*} = +\frac{C}{2}\mu a^2 \cos\theta. \qquad \text{(VII.303)}$$

2) *Fără să survină altă încărcare*, se poate presupune că secțiunea transversală se va deforma în continuare, dacă pentru un *sistem de deplasări suplimentare* $\bar{u}^2$ și u^3 (considerate inextensionate) tubul ajunge la o poziție *de energie minimă de deformare*.

Condiția ca $\bar{u}^2$ și $\bar{u}^3$ să producă o stare de deplasări inextensionate se exprimă prin relația

$$\bar{u}^3 = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial\theta}, \qquad \text{(VII.304)}$$

Deplasările totale sînt în acest caz

$$u^2 = u^{20*} + \bar{u}^2; \; u^3 = u^{30*} + \bar{u}^3. \qquad \text{(VII.305)}$$

Ținînd seama de relațiile (VII.303) și (VII.304) se obține

$$u^3 - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial\theta} = \frac{C}{2}\mu a^2 \cos\theta \qquad \text{(VII.306)}$$

și prin derivare

$$\frac{\partial^2 u^3}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^3 u^2}{\partial\theta^3} = -\frac{C}{2}\mu a^2 \cos\theta. \qquad \text{(VII.307)}$$

Curbura arcului de cerc din secțiunea transversală se modifică datorită deplasărilor u^2 și u^3 obținînd

$$C_L = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^3 u^2}{\partial\theta^3} + \frac{\partial u^3}{\partial\theta}\right). \qquad \text{(VII.308)}$$

Ținînd seama de deplasările u^2, u^3 distanța unui punct de pe învelitoare la axa neutră paralel cu axa x_3 este

$$x_3 = [a - u^3]\cos\theta - u^2 \sin\theta. \qquad \text{(VII.309)}$$

3) Energia potențială pe unitatea de lungime de tub este

$$U = \frac{1}{2}k\int_0^{2\pi} C_L^2 a d\theta + \frac{D}{2}\int_0^{2\pi} C^2 x_3^2 a d\theta \qquad \text{(VII.310)}$$

Înlocuind C_I și C conform expresiei (VII.303) și x_3 conform expresiei (VII.309) și cunoscînd $k = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ și $D = Eh(1-\mu)$, dacă se neglijează termenii mici, expresia U devine

$$U = \frac{E}{2}\left[\left[\frac{h^3}{(1-\mu^2)\,12a^3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^3 u^2}{\partial\theta^3} + \frac{\partial u^2}{\partial\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta\right] + \right.$$

$$\left. + ah\int_0^{2\pi} C^2\left\{\left[a^2 - 2a\left(\frac{\partial u^2}{\partial\theta} + a^2 C\mu\cos\theta\right)\right]\cos^2\theta - au^2\sin 2\theta\right\}\mathrm{d}\theta\right]. \quad \text{(VII.311)}$$

Aplicînd *calculul variațional*, valoarea energiei de deformație U este minimă pentru valoarea lui u^2 care apare ca soluție a ecuației Euler [5], aceasta fiind

$$\frac{\partial^6 u^2}{\partial\theta^6} + 2\frac{\partial^4 u^2}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial\theta^2} = -\frac{18\,C^2 a^5}{h^2}(1-\mu^2)\sin 2\theta. \quad \text{(VII.312)}$$

Soluția acestei ecuații se scrie

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial\theta^2} = (A + B\theta)\cos\theta + (H + \vartheta\theta)\sin\theta - \frac{Q}{9}\sin 2\theta \quad \text{(VII.313)}$$

în care: $Q = -\dfrac{18\,C^2 a^5}{h^2}(1-\mu^2)$.

Condițiile de simetrie și continuitate impun ca constantele B, ϑ și H să se anuleze, iar constanta A, care reprezintă deplasarea de corp rigid, se poate neglija; de asemenea, cele două constante care se introduc prin integrarea ecuației (VII.313) se anulează, și anume prima pe motiv de simetrie și a doua, care reprezintă deplasarea foarte mică de corp rigid. În consecință, integrarea ecuației (VII.313) conduce la

$$u^2 = \frac{Q}{36}\sin 2\theta \quad \text{(VII.314)}$$

și, în continuare,

$$\frac{\partial u^2}{\partial\theta} = \frac{Q}{18}\cos 2\theta \text{ și } u^3 = \frac{Q}{18}\cos 2\theta + C\mu a^2\cos\theta; \quad \text{(VII.315)}$$

termenul multiplicat cu coeficientul lui Poisson este mic și poate fi de asemenea neglijat.

Înlocuind soluția lui u^2 rezultă pentru energia de deformație (VII.311) următoarea ecuație:

$$U = \frac{E}{2}\pi a^3 h C^2\left\{1 - \frac{3}{4}\,\frac{a^4 C^2(1-\mu^2)}{h^2}\right\}. \quad \text{(VII.316)}$$

Momentul încovoietor transmis sub formă de cuplu unei secțiuni transversale a toroidului este

$$M = \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{E}{2}\pi a^3 h\left\{2C - \frac{3a^4C^3(1-\mu^2)}{h^2}\right\} \qquad \text{(VII.317)}$$

care are valoarea maximă cînd :

$$C^2 = \frac{2}{9}\,\frac{h^2}{a^4(1-\mu^2)}. \qquad \text{(VII.318)}$$

Fig. VII.109

Momentul încovoietor corespunzător acestei situații este

$$M_{max} = \frac{2\sqrt{2}}{9}\,\frac{E\pi a h^2}{\sqrt{1-\mu^2}}. \qquad \text{(VII.319)}$$

În consecință, din formula (VII. 315) rezultă valoarea deplasării la cheie

$$\frac{2}{9}a + \mu\frac{\sqrt{2}}{3}h \qquad \text{(VII.320)}$$

Figura VII.109 arată cum se transformă înainte de flambaj secțiunea circulară într-una eliptică.

PARTEA A TREIA

REZERVOARE

Învelitorile subţiri se pretează uşor a fi modelate după profilul optimal al diferitelor *tipuri de recipienţi*, aplicaţiile practice în acest caz fiind de cea mai mare eficienţă. Categoriile mai importante de recipienţi: *rezervoarele de lichide aşezate la sol* sau *îngropate*, *castelele de apă*, *buncărele* şi *silozurile* pentru *materiale pulverulente şi granulare*, au ca trăsătură comună tipul de încărcare axial-simetric.

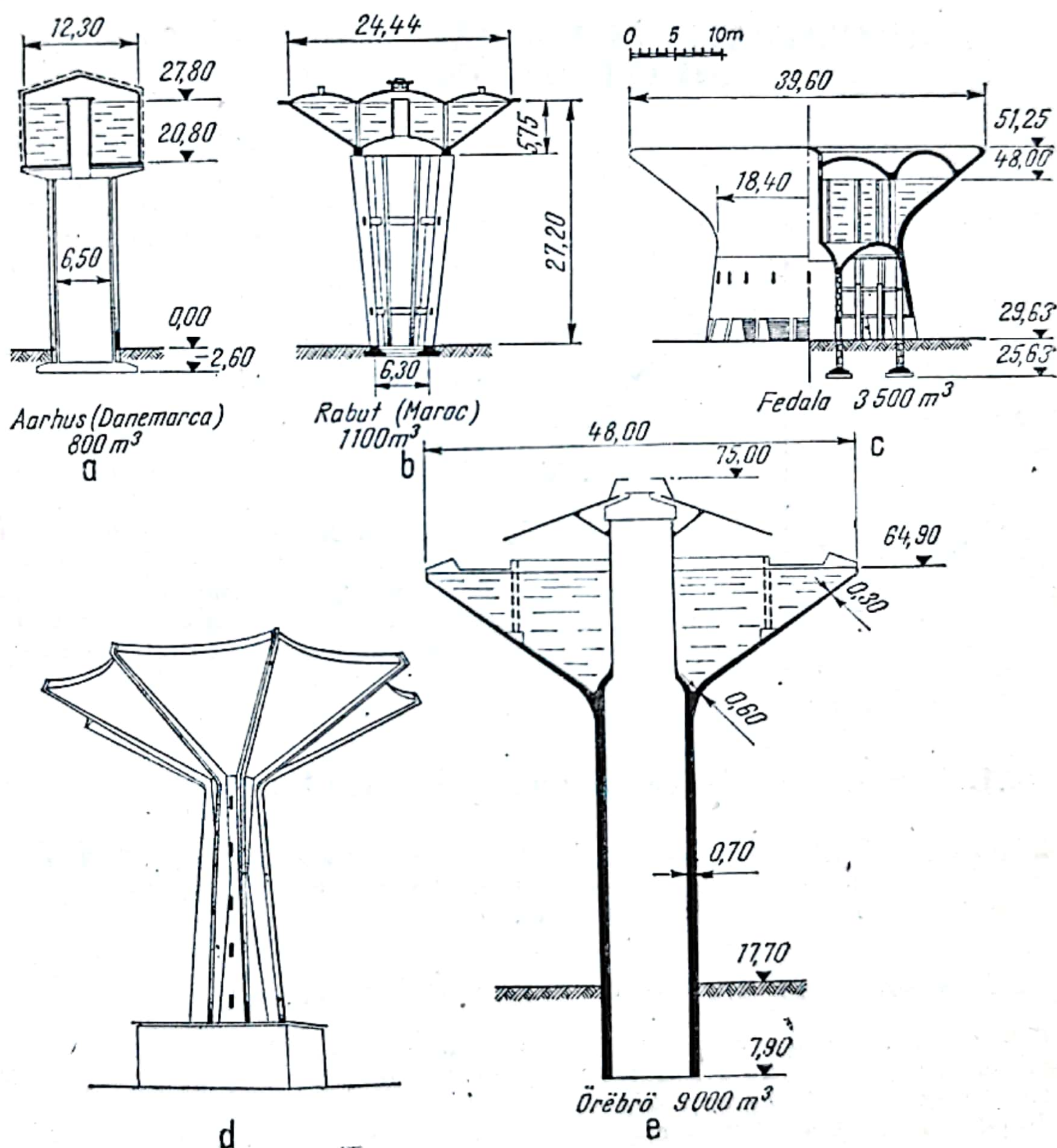


Fig. VII.110

Formele optimale se definesc funcție de caracteristicile mecanice ale materialelor de construcții folosite: pentru beton sînt indicate formele care duc la solicitările de compresiune (fiind recomandate învelitorile de *tip hiperbolic*), pentru metal se recomandă profilele care conduc numai la eforturi de întindere (învelitori de *tip eliptic*).

Învelitorile de *tip parabolic, cilindrice sau conice* se folosesc cu precădere în situațiile, în care se cere mai multă simplitate în execuție (recipenți de mică capacitate).

La castelele de apă rezemarea rezervorului pe structură turnului pune probleme de natură specială în ce privește realizarea elementului de bază.

În fig. VII.110 sînt date tipuri de forme pentru rezervoare și castele de apă realizate din beton.

12. REZERVOARE ÎN FORMĂ DE SUPRAFEȚE DE ROTAȚIE (de tip eliptic)

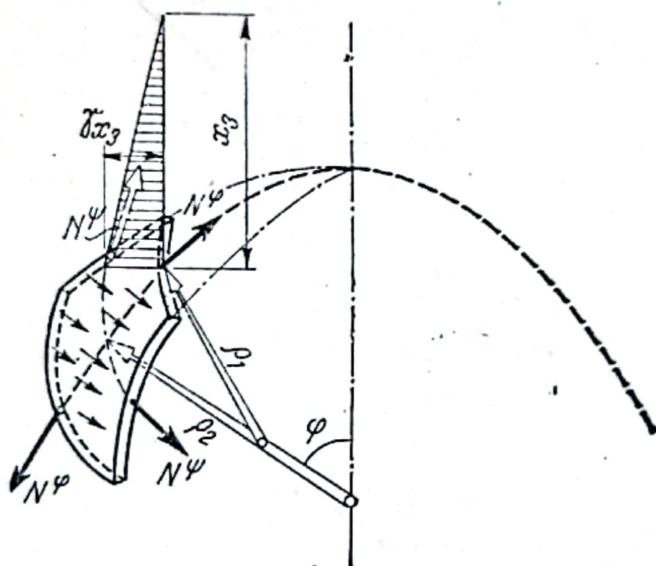


Fig. VII.111

Presiunea lichidului fiind o încărcare rotațional-simetrică față de o axă verticală, cele mai raționale rezervoare sînt în formă de învelitori de rotație [37], pentru care solicitarea conduce la eforturi principale în lungul curbelor meridiane și paralele.

Echilibrul în teoria de membrană se exprimă conform fig. VII. 111, prin ecuația

$$\frac{N^\varphi}{\rho_1} + \frac{N^\psi}{\rho_2} = -p_3 = -\gamma x_3 \quad \text{(VII.321)}$$

N^φ și N^ψ fiind eforturile după meridian și paralel; ρ_1 și ρ_2 — razele de curbură după meridian și paralel; p_3 — presiunea normală a lichidului pe unitatea de suprafață; γ — greutatea specifică a lichidului; x_3 — înălțimea de coloană a lichidului.

12.1. Rezervoare sferice în teoria de membrană

În cazul încărcării rotațional-simetrice, folosind ecuațiile eforturilor N^φ și N^ψ date la cap. 8, paragraful 8.1., s-au determinat în tabelul VII.35 eforturile pentru rezervoare sferice încărcate cu lichid de greutate specifică γ.

12.2. Rezervoare sferice în teoria de încovoiere

Calculul în teoria de încovoiere apare necesar cînd învelitoarea este împiedicată să se deformeze liber, pentru a pune în evidență eforturile secundare datorate încovoierii suprafeței mediane. Calculul se conduce ca la cap. 8, paragraful 8.2.

În tabelul VII.36 se dau expresiile deformărilor Φ și $\Delta\rho$ necesare scrierii ecuațiilor de continuitate.

Tabelul VII.35

Eforturile la rezervoare sferice încărcate cu lichid în teoria de membrană

Încărcare	N^{φ}	N^{ψ}
A. Fund rezemat 1. Încărcare completă de înălțime H_0	$-\frac{\gamma\rho^2}{6}\left[3\frac{H_0}{\rho}-2-2\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]$	$-\gamma\rho^2\left[\frac{H_0}{\rho}-\cos\varphi\right]-N^{\varphi}$
2. Înălțimea $H_0=2\rho$ 0,500 0,500 0,667 1,333 Multiplicator $\gamma\rho^2$	$-\frac{\gamma\rho^2}{6}\left[4-2\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]$	$-\gamma\rho^2[2-\cos\varphi]-N^{\varphi}$
3. Încărcare parțială H_0	Deasupra nivelului lichidului $N^{\varphi}=N^{\psi}=0$ Sub nivelul lichidului $-\frac{\gamma\rho^2}{6}\left\{\frac{H_0}{\rho}\left[\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{H_0}{\rho}\left(3-\frac{H_0}{\rho}\right)-3\right]+\left(1-2\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right\}$	$-\gamma\rho^2\left[(1-\cos\varphi)-\frac{H_0}{\rho}\right]-N^{\varphi}$
4. Încărcare parțială $H_0=\frac{\rho}{2}$ 0,021 0,479 Multiplicator $\gamma\rho^2$	Deasupra nivelului lichidului $N^{\varphi}=N^{\psi}=0$ Sub nivelul lichidului $-\frac{\gamma\rho^2}{6}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1.25}{\sin^2\varphi}-3\right]+\left(1-2\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right\}$	$-\gamma\rho^2[(1-\cos\varphi)-0.5]-N^{\varphi}$
5. Încărcare completă H	$-\frac{\gamma\rho^2}{2}\left[\frac{H}{\rho}+\frac{(1-\cos\varphi)(1+2\cos\varphi)}{3(1+\cos\varphi)}\right]$	$-\frac{\gamma\rho^2}{2}\left[\frac{H}{\rho}+\frac{(1-\cos\varphi)(5+4\cos\varphi)}{3(1+\cos\varphi)}\right]$

Tabelul VII.35 (continuare)

Încărcare	N^{φ}	N^{ψ}
B. Fund suspendat 6. Încărcare completă H_0	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{6}\left[+3\dfrac{H_0}{\rho}+2+2\dfrac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]$	$+\gamma\rho^2\left[\dfrac{H_0}{\rho}+\cos\varphi\right]-N^{\varphi}$
7. Încărcare completă $H_0=\rho$	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{6}\left[5+2\dfrac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]$	$+\gamma\rho^2(1+\cos\varphi)-N^{\varphi}$
8. Încărcare parțială H_0	Sub nivelul lichidului	
	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{6}\left[3\dfrac{H_0}{\rho}-1+2\dfrac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]$	$+\gamma\rho^2\left[\dfrac{H_0}{\rho}-1+\cos\varphi\right]-N^{\varphi}$
	Deasupra nivelului lichidului	
	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{6}\left(\dfrac{H_0}{\rho}\right)^2\left(3-\dfrac{H_0}{\rho}\right)\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$	$-N^{\varphi}$
9. Încărcare parțială $H_0=\dfrac{\rho}{2}$	Sub nivelul lichidului	
	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{6}\left[0{,}5+2\dfrac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]$	$+\gamma\rho^2(-0.5+\cos\varphi)-N^{\varphi}$
	Deasupra nivelului lichidului	
	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{9{,}6}\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$	$-\dfrac{\gamma\rho^2}{9{,}6}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$
10. Încărcare completă H_1	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{2}\left[\dfrac{H_1}{\rho}-\dfrac{(1-\cos\psi)(1+2\cos\psi)}{3(1+\cos\psi)}\right]$	$+\dfrac{\gamma\rho^2}{2}\left[\dfrac{H_1}{\rho}-\dfrac{(1-\cos\psi)(5+4\cos\psi)}{3(1+\cos\psi)}\right]$

Tabelul VII.36

Deformările rezervoarelor sferice sub acțiunea lichidului în teoria de membrană

Încărcarea	Rotirea Φ	Deplasarea $\Delta\rho$
A. Fund rezemat 1. Încărcare completă H_0	$\frac{\gamma\rho^2}{Eh}\sin\varphi$	$-\frac{\gamma\rho^3}{Eh}\frac{\sin\varphi}{6}\left[3(1-\mu)\frac{H_0}{\rho}-6\cos\varphi+2(1+\mu)\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right]$
2. Încărcare completă $H_0 = 2\rho$ $H_0=2\rho$; ρ; φ; $\Delta\rho$; ϕ; $1{,}223\rho^3$; ρ^2; Multiplicator $\frac{\gamma}{Eh}$	$\frac{\gamma\rho^2}{Eh}\sin\varphi$	$-\frac{\gamma\rho^3}{Eh}\frac{\sin\varphi}{6}\left[6(1-\mu)-6\cos\varphi+2(1+\mu)\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right]$
B. Fund suspendat 3. Încărcare completă H_0	$\frac{\gamma\rho^2}{Eh}\sin\varphi$	$\frac{\gamma\rho^3}{Eh}\frac{\sin\varphi}{6}\left[3(1-\mu)\frac{H_0}{\rho}+6\cos\varphi-2(1+\mu)\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right]$
4. Încărcare completă $H_0 = \rho$ $H_0=\rho$; ρ; $50°$; $0{,}4391$; $\Delta\rho$ $0{,}028\rho^3$; ϕ $1{,}0\rho^2$; Multiplicator $\frac{\gamma}{Eh}$	$\frac{\gamma\rho^2}{Eh}\sin\varphi$	$\frac{\gamma\rho^3}{Eh}\frac{\sin\varphi}{6}\left[3(1-\mu)+6\cos\varphi-2(1+\mu)\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)\right]$

12.3. Rezervoare de egală rezistență în teoria de membrană

Învelitori de egală rezistență cu grosimi constante se pot obține numai [17,49]:

1) În cazul unei presiuni constante interioare sau exterioare, cînd forma rezervorului este sferică sau tubulară, cu secțiune avînd diametrul constant sau variind periodic în lungul tubului (fig. VII.112).

Fig. VII.112

2) Cînd presiunea lichidului are o variație liniară pe înălțimea rezervorului după legea $p_3 = \gamma x_3$, în care γ este greutatea volumetrică, pentru recipienții metalici este foarte avantajos din punct de vedere economic să se proiecteze forme, care satisfac condiția ca eforturile inelar și meridian să fie egale

$$N^{\varphi} = N^{\psi} = \sigma h. \qquad \text{(VII.322)}$$

În acest caz, ecuația a treia din tabelul VII.4 devine

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \gamma \frac{x_3}{\sigma h}. \qquad \text{(VII.323)}$$

Cunoscînd expresiile razelor de curbură

$$\rho_1 = \frac{dx_1}{\cos\varphi}\frac{1}{d\varphi}; \qquad \rho_2 = \frac{x_1}{\sin\varphi}, \qquad \text{(VII.324)}$$

ecuația (VII. 323) se transcrie

$$\frac{d(\sin\varphi)}{dx_1} + \frac{\sin\varphi}{x_1} = \frac{\gamma}{\sigma h} x_3 \qquad \text{(VII.325)}$$

sau mai concentrat

$$\frac{d(x_1 \sin\varphi)}{x_1 dx_1} = \frac{\gamma}{\sigma h} x_3 \qquad \text{(VII.326)}$$

care este ecuația diferențială a profilului meridian. În această ecuație, necunoscutele sînt φ și x_3 funcții de x_1; pentru a determina problema este necesar să se mai scrie relația geometrică

$$\partial_1 x_3 = \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{(VII.327)}$$

Sistemul celor două ecuații se poate rezolva numai prin integrare numerică; notînd în continuare $\sin\varphi = y$, cele două ecuații devin:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\gamma}{\sigma h} x_3 - \frac{y}{x_1}; \qquad \partial_1 x_3 = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}. \qquad \text{(VII.328)}$$

În mod aproximativ, aceste ecuaţii se rezolvă astfel: cunoscînd că la cheie pentru $x_1 = 0$; $\rho_1 = \rho_2$ se deduce din ecuaţia (VII.323)

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{2\sigma h}{\gamma x_3^0} \tag{VII.329}$$

x_3^0 fiind înălţimea coloanei de lichid conform fig. VII.113 la cheie.

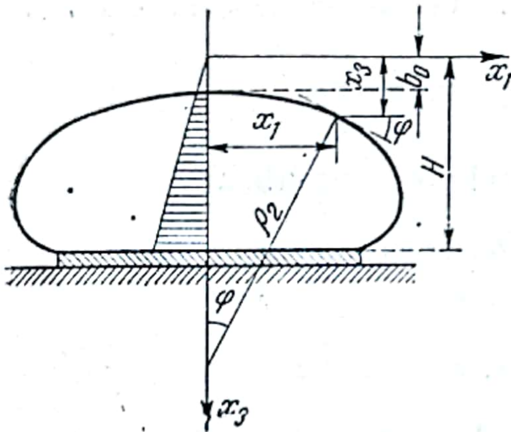


Fig. VII.113

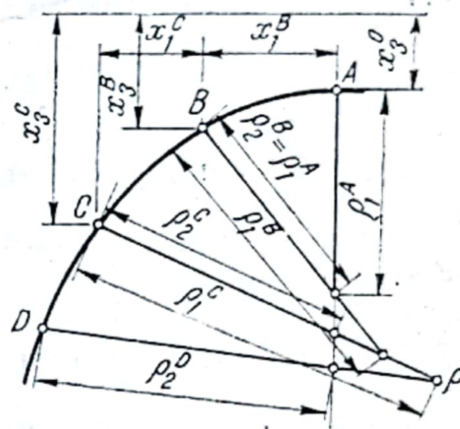


Fig. VII.114

În continuare, se deduce: $x_1 = \rho_2 \sin \varphi = \frac{2\sigma h}{\gamma x_3^0} y$; înlocuind în prima ecuaţie (VII.328) se obţine

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\gamma x_3^0}{2\sigma h} \quad \text{şi} \quad y = \frac{\gamma x_3^0 a_1}{2\sigma h}. \tag{VII.330}$$

Scriind:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{y}{x_1} = \frac{\gamma x_3^0}{2\sigma h} \tag{VII.331}$$

se obţine ecuaţia:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\gamma b_1}{\sigma h} - \frac{\gamma x_3^0}{2\sigma h}. \tag{VII.332}$$

Această deducere în trepte succesive a valorii lui ρ_1 se pretează la construcţia grafică din fig. VII.114. Într-adevăr, trasăm plecînd de la cheie pe verticală punctului A un arc de cerc cu raza ρ_1^A măsurînd un unghi la centru cuprins între 5° şi 10° ajungînd în B.

În punctul B unde se cunoaşte valoarea lui $(x_1)^B$ şi a lui φ se deduce ρ_2^B; în continuare, din ecuaţia (VII.329) se obţine

$$\rho_1^B = \frac{2\sigma h}{\gamma(2x_3^B - x_3^0)}; \tag{VII.333}$$

pe normala lui B se măsoară valoarea ρ_1^B şi se trasează cu această rază un nou arc de cerc pînă în C. Evident, şi în acest punct se cunoaşte unghiul φ^C şi distanţa x_3^C deducînd imediat ρ_2^C şi în continuare

$$\frac{1}{\rho_1^C} = \frac{\gamma x_3^C}{\sigma h} - \frac{1}{\rho_2^C}. \tag{VII.334}$$

Cu raza ρ_1^C se trasează aşezînd centrul pe normala lui C un nou arc de învelitoare.

13. REZERVOARE CONICE

13.1. Eforturi şi deformaţii în teoria de membrană

În tabelul VII.37 s-au calculat expresiile eforturilor şi deformaţiilor în teoria de membrană.

13.2. Calculul în teoria de încovoiere

Calculul în teoria de încovoiere se conduce la fel ca la acoperişurile conice sau sferice. Pentru scrierea ecuaţiilor de continuitate se folosesc expresiile deplasărilor date pentru presiunea lichidului în tabelul VII. 37 şi pentru încărcarea cu eforturi unitare pe margini, în tabelul VII. 24.

14. REZERVOARE CILINDRICE CIRCULARE

Din motive constructive majoritatea rezervoarelor se realizează cu formă cilindrică circulară.

14.1. Calculul rezervoarelor şi conductelor cilindrice în teoria de membrană

În tabelul VII.38 sînt date formulele pentru calculul rezervoarelor şi conductelor cilindrice în teoria de membrană.

14.2. Rezervoare cilindrice calculate în teoria de încovoiere

Presiunea lichidului fiind rotaţional-simetrică, la calculul rezervoarelor în teoria de încovoiere se pot neglija momentele de răsucire M^{11}, M^{22} şi forţele tăietoare Q^1, pe direcţia cercului director.

Scriind condiţiile de echilibru (fig. VII.115) la deplasare în sensul radial şi rotire în jurul tangentei la cercul inelar, se obţine

$$N^{\varphi} + \gamma \partial_3 Q^3 = \gamma(l - x_3) \tag{VII.335}$$

$$\partial_3 Q^3 = \partial_{33} M^3$$

Tabelul VII.37

Eforturi şi deformaţii sub acţiunea lichidului în teoria de membrană la învelitori conice

Cazul de încărcare	N^{φ}	N^{ψ}	$\Delta\rho$	Φ
1. Fund rezemat umplut total γ-Greutatea specifică a lichidului	$-\frac{\gamma x_3}{6}(3H_0+2x_3)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$-\gamma x_3(H_0+x_3)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$-\frac{\gamma x_3^2}{Eh}\frac{\cos^2\varphi}{6\sin^3\varphi}[3H_0(2-\mu)+2x_3(3-\mu)]$	$+\frac{\gamma x_3\cos^2\varphi}{Eh\,6\sin^3\varphi}(9H_0+16x_3)$
	Variaţia eforturilor dacă $H_0=H_1$ şi $\varphi=60°$ (figura de la cazul 1)			
2. Fund rezemat umplut parţial	Deasupra nivelului lichidului			
	0	0		
	Sub nivelul lichidului			
	$-\frac{\gamma}{6x_3}(H_0^3-3H_0x_3^2+2x_3^3)\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$-\gamma x_3(x_3-H_0)\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$		
	Variaţia eforturilor cînd $\varphi=60°$ şi $H_1=2H_0$ (figura de la cazul 2)			

Tabelul VII.37 (continuare)

Cazul de încărcare	N^{φ}	N^{ψ}	$\Delta\rho$	Φ
3. Fund suspendat umplut total N^{φ} N^{ψ} 0,111 60° H_0 x_3 Multiplicator γH_0^2	$+\frac{\gamma x_3}{6}[3H_0 - 2x_3]\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$+\gamma x_3(H_0 - x_3)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$+\frac{\gamma x_3^2}{Eh}\frac{\cos^2\varphi}{6\sin^3\varphi}[3H_0(2-\mu) - 2x_3(3-\mu)]$	$-\frac{\gamma x_3\cos^2\varphi}{Eh\,6\sin^3\varphi}(9H_0 - 16x_3)$
	Variația eforturilor și deformațiilor cînd $\varphi = 60°$ și $H_0 = 2H_1$ (figura de la cazul 3)			
4. Fund suspendat parțial umplut 0,056N^{φ} 60° H_0 $2H_0$ N^{ψ} 0,167 Multiplicator γH_0^2	Deasupra nivelului lichidului			
	$+\frac{\gamma H_0^3}{6x_3}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	0		
	Sub nivelul lichidului			
	$+\frac{\gamma x_3}{2}(3H_0 - 2x_3)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$+\gamma x_3(H_0 - x_3)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$		
	Variația eforturilor cînd $H_0 = 2H_1$ și $\varphi = 60°$ (figura de la cazul 4)			
5. Învelitoare conică deschisă, rezemare la partea inferioară φ H_0 H_1 x_3 φ	$N^{\varphi} = \frac{\gamma}{6x_3}[2(x_3^3 - H_1^3) - 3H_0(x_3^2 - H_1^2)]\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	$N^{\psi} = \gamma x_3(H_0 - x_3)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$		

Tabelul VII.38

Eforturi și deplasări în teoria de membrană la rezervoare și conducte circulare $\mu = 0$

Încărcare	Eforturi			Deplasări
	N^{11}	N^{12}	N^{22}	
1. Încărcare lichid de greutate γ/m^3 $H_0=r$, $H=3r$, r; γr^2, N^{22}, $4{,}0\gamma r^2$	Presiune din interior			
	0	0	$+\gamma r(H_0+X_1)$	$\Delta r = u^3 = \pm \frac{\gamma r^2}{Eh}(H_0 + X_1)$
	Presiune din exterior			
	0	0	$-\gamma r(H_0+X_1)$	Semnele superioare sînt pentru presiunea din interior și cele inferioare pentru presiunea din exterior
2. Încărcare greutate proprie de perete g/m² $H=3r$, r; N^{11}, $3gr$	gX_1	0	0	0

Tabelul VII38 (continuare)

Încărcare	Eforturi N^{11}	Eforturi N^{12}	Eforturi N^{22}	Deplasări
3. Încărcare din vînt $u^3 = p\cos\varphi/\mathrm{m}^2$	$\frac{1}{2}\frac{p x_1^2}{r}\cos\varphi$	$-p x_1 \sin\varphi$	$-pr\cos\varphi$	$\Delta r = u^3 = \left[-\frac{C_1}{r} - C_2 - \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{x_1^2}{r^2} + \frac{x_1^4}{24 r^4}\right)\right]\cos\varphi$ $u^1 = \left[C_1 + \frac{p}{Eh}\frac{x_1^3}{6r}\right]\cos\varphi$ $u^2 = \left[C_1\frac{x_1}{r} + C_2 + \frac{p x_1^2}{Eh}\left(\frac{x_1^2}{24 r^2} - 1\right)\right]\sin\varphi$ Constantele C_1, C_2 se determină din condiții de margine scrise pentru $x_1 = l$
4. Încărcare lichid de greutate γ/m^3	$-\frac{1}{2}\gamma x_1(l - x_1)\cos\varphi$	$\gamma r\left(\frac{1}{2}l - x_1\right)\sin\varphi$	$\gamma r(H - r\cos\varphi)$	$u^1 = -\frac{\cos\varphi}{2Eh}\gamma\left(\frac{l x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3}\right) + C_1(\varphi)$ $u^2 = -\frac{\sin\varphi}{2Ehr}\gamma\left[\frac{l x_1^3}{2} \quad \frac{x_1^4}{12} + 2r^2(l x_1 - x_1^2)\right]$ $u^3 = \frac{r\gamma(H - r\cos\varphi)}{Eh} + \frac{\cos\varphi}{2Ehr}\cdot\gamma\left[\frac{l x_1^3}{6} - \frac{x_1^4}{12} + 2r^2(l x_1 - x_1^2)\right] + \frac{d^2C_1}{r\,d\varphi^2}x_1 - \frac{dC_2}{d\varphi}$

Eliminînd pe $\partial_3 Q^3$ în aceste două ecuații, rezultă

$$\partial_{33} M^3 + \frac{1}{\gamma} N^\varphi = \gamma(l - x_3). \qquad \text{(VII.336)}$$

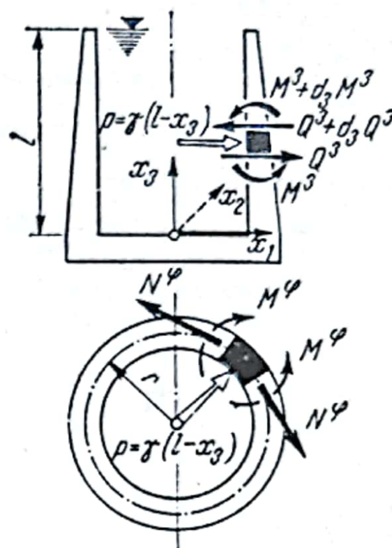


Fig. VII.115

Cunoscînd relațiile dintre eforturi și deplasări care în acest caz, sînt:

$$M^3 = k\partial_3 u^3; \qquad N^\varphi = d\,\frac{u^3}{r} \qquad \text{(VII.337)}$$

în care pentru $\mu = 0$

$$k = \frac{Eh^3}{12} \quad \text{și} \quad d = Eh,$$

ecuația (VII.336) devine

$$\partial_{33}[h\partial_{33}u^3] + d\,\frac{u^3}{r^2} = \gamma(l - x_3). \qquad \text{(VII.338)}$$

În cazul *rezervoarelor cu grosime constantă* k și d sînt constante și ecuația (VII.338) devine

$$\partial_{3333}u^3 + 4\lambda^4 u^3 = \frac{\gamma}{k}(l - x_3) \qquad \text{(VII.339)}$$

în care $\lambda^4 = \dfrac{3}{r^2 h^2}$.

Soluția acestei ecuații diferențiale u^3 este următoarea:

$$u^3 = \frac{r^2}{Eh}\gamma(l - x_3) + e^{-\lambda(l - x_3)}[C_1 \cos \lambda x_3 + C_2 \sin \lambda x_3] +$$

$$+ e^{-\lambda x_3}[C_3 \cos \lambda x_3 + C_4 \sin \lambda x_3]. \qquad \text{(VII.340)}$$

Se constată că în afara termenului depinzînd de presiunea lichidului soluția lui u^3 reprezintă două oscilații amortizate: termenul multiplicat cu $e^{-\lambda(l-x_3)}$ arătînd influența marginii superioare, iar celălalt multiplicat cu $e^{-\lambda x_3}$ exprimînd influența marginii inferioare.

Obișnuit, înălțimea rezervorului este destul de mare și oscilațiile amortizate care pornesc de la o margine, rămîn fără importanță în vecinătatea celeilalte, de aceea cele două grupuri constante C_1, C_2 și C_3, C_4 care depind de condițiile de margini se pot determina independent. Pentru scrierea ecuațiilor de continuitate la marginile învelitorii, se dau în tabelul VII. 39 expresiile eforturilor și deformațiilor pentru încărcări aplicate la marginile învelitorii.

Eforturile static nedeterminate R și M pentru diferite condiții de margini sînt date în tabelul VII.40, calculate pentru diferite condiții de rezemare a învelitorii cilindrice [8,9].

Eforturi și deplasări pentru încărcări aplicate pe margini la rezervoare

Cazul de încărcare	N^{φ}	M^{x}
1. Marginea superioară încărcată radial cu forțe uniform distribuite R	$+2,643\sqrt{\frac{r}{h}}\,Re^{-\lambda x'}\cos\lambda x'$	$-0,7599\sqrt{rh}\,Re^{-\lambda x'}\sin\lambda x'$
2. Marginea superioară acționată uniform pe circumferință de momente M	$-3,664\frac{M}{h}e^{-\lambda x'}(\cos\lambda x' - \sin\lambda x')$	$+Me^{-\lambda x'}(\cos\lambda x' + \sin\lambda x')$
3 Marginea inferioară încărcată radial cu forțe uniform distribuite R	$+2,643\sqrt{\frac{r}{h}}\,Re^{-\lambda x}\cos\lambda x$	$-0,7599\sqrt{rh}\,Re^{-\lambda x}\sin\lambda x$
4. Marginea inferioară acționată uniform pe circumferință de momente M	$-3,464\frac{M}{h}e^{-\lambda x}(\cos\lambda x - \sin\lambda x)$	$+Me^{-\lambda x}(\cos\lambda x + \sin\lambda x)$

Tabelul VII.39

cilindrice circulare calculate în teoria de încovoiere

Q^3	Δ_r	χ
$-Re^{-\lambda x'}(\cos\lambda x' - \sin\lambda x')$	$-2{,}632\frac{R}{E}\left(\frac{r}{h}\right)^{3/2} e^{-\lambda x'}\cos\lambda x'$	$-3{,}464\frac{R}{E}\frac{r}{h^2}e^{-\lambda x'}(\cos\lambda x' + \sin\lambda x')$
$-2{,}632\frac{M}{\sqrt{rh}}e^{-\lambda x'}\sin\lambda x'$	$+3{,}464\frac{M}{E}\frac{r}{h^2}e^{-\lambda x'}(\cos\lambda x' - \sin\lambda x')$	$+9{,}119\frac{M}{E}\frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{r}{h}}\,e^{-\lambda x'}\cos\lambda x'$
$+Re^{-\lambda x}(\cos\lambda x - \sin\lambda x)$	$-2{,}632\frac{R}{E}\left(\frac{r}{h}\right)^{3/2} e^{-\lambda x}\cos\lambda x$	$+3{,}464\frac{R}{E}\frac{r}{h^2}e^{-\lambda x}(\cos\lambda x + \sin\lambda x)$
$+2{,}632\frac{M}{\sqrt{rh}}e^{-\lambda x}\sin\lambda x$	$+3{,}464\frac{M}{E}\frac{r}{h^2}e^{-\lambda x}(\cos\lambda x - \sin\lambda x)$	$-9{,}119\frac{M}{E}\frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{r}{h}}\,e^{-\lambda x}\cos\lambda x$

Tabelul VII.40

Eforturi de margine la rezervoare cilindrice determinate în teoria de încovoiere

Cazul I

Determinarea eforturilor static nedeterminate R și M
Marginea superioară liberă, marginea inferioară perfect încastrată, rezervorul plin. Condițiile de deplasări la marginea inferioară sînt:

$$\Delta r = u_0^3 + u_R^3 + u_M^3 = 0 \quad \chi = \left(\frac{\partial u_0^3}{\partial x_3}\right)_0 + \left(\frac{\partial u_R^3}{\partial x_3}\right)_0 + \left(\frac{\partial u_M^3}{\partial x_3}\right)_0 = 0 \qquad (1)$$

$\Delta r_0 = u_0^3$ și $\left(\frac{\partial u_0^3}{\partial x_3}\right)_0 = \chi_0$ sînt deformațiile în teoria de membrană datorită lichidului, care apar în tabelul VII.38

$$u_R^3 = \Delta r_R\,;\; u_M^3 = \Delta r_M\,;\; \left(\frac{\partial u_R^3}{\partial x_3}\right)_0 = \chi_R\,;\; \left(\frac{\partial u_M^3}{\partial x_3}\right)_0 = \chi_M. \qquad (2)$$

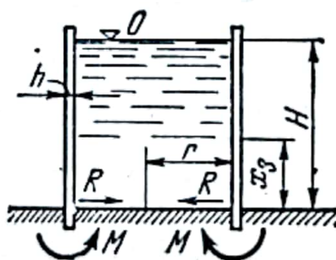
Eforturile static nedeterminate rezultate din condițiile (1)

$$R = 0{,}288\sqrt{rh}\,\gamma(2{,}630\,H - \sqrt{rh})\,;\quad M = 0{,}219\,rh\gamma(1{,}315\,H - \sqrt{rh}). \qquad (3)$$

Variația eforturilor totale:

$$N^{\varphi} = \gamma r\left\{(H - x_3) - H\,e^{-\lambda x_3}\left[\cos\lambda x_3 + \left(1 - \frac{1}{\lambda H}\right)\sin\lambda x_3\right]\right\}$$

$$M^3 = 0{,}288\,rh\gamma\,H\,e^{-\lambda x_3}\left[rh\gamma H\,e^{-\lambda x_3}\left(1 - \frac{1}{\lambda l}\right)\cos\lambda x_3 - \sin\lambda x_3\right. \qquad (4)$$



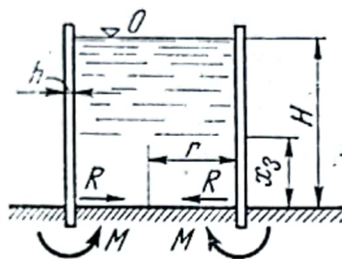
Cazul II

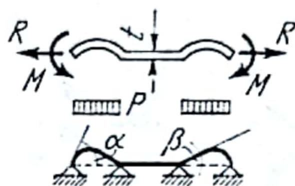
Marginea superioară liberă, marginea inferioară, legată monolit cu fundul rezervorului, rezervorul plin.

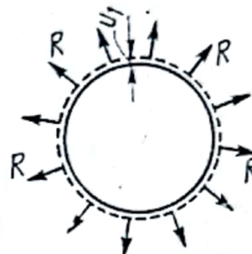
Tabelul VII.40 (continuare)

Deplasările plăcii de fund:

$$u^1 = R\frac{r}{Et}\,;\quad \alpha = \frac{4}{Et^3}\sqrt{\frac{M^3}{p}}\,;\quad p = \gamma H \tag{5}$$







Condiții de margini

$$u_0^3 + u_R^3 + u_M^3 = u^1\,;\quad \left(\frac{\partial u_0^3}{\partial x_3}\right)_0 + \left(\frac{\partial u_R^3}{\partial x_3}\right)_0 + \left(\frac{\partial u_M^3}{\partial x_3}\right)_0 = \alpha. \tag{6}$$

Ecuațiile de continuitate:

$$\left.\begin{aligned} & r^2\gamma\frac{H}{h} - 2{,}64\left(\frac{r}{h}\right)^{3/2} R + 3{,}46\frac{r}{h^2}M - \frac{r}{t}R = 0 \\ & \frac{r^2}{h}\gamma - 3{,}46\frac{r}{h^2}R + 9{,}15\left(\frac{r}{h^5}\right)^{1/2} M + \frac{4}{t^3}\sqrt{\frac{M^3}{p}} = 0. \end{aligned}\right\}\ \text{rezultă } R \text{ și } M \tag{7}$$

Eforturile totale funcție de R și M:

$$N^{\varphi} = \gamma\cdot r(H - x_3) - 2{,}62\sqrt{\frac{r}{h}}\,R\,e^{-\lambda x_3}\cos\lambda x_3 + 3{,}46\frac{r}{h^2}M e^{-\lambda x_3}(\cos\lambda x_3 - \sin\lambda x_3)$$

(8)

$$M^3 = -\frac{\sqrt{rh}}{1{,}315}R\,e^{-\lambda x_3}\sin\lambda x_3 + M e^{-\lambda x_3}(\cos\lambda x_3 + \sin\lambda x_3).$$

15. CONDUCTE CIRCULARE

Conductele [13] pot fi așezate pe reazeme continue sau distanțate (fig. VII.116*a*,*b*).

15.1. Calculul conductelor rezemate continuu

Ținînd seama de modul real de rezemare, conductele circulare (fig. VII.116,*c*) se calculează în două etape [13]:

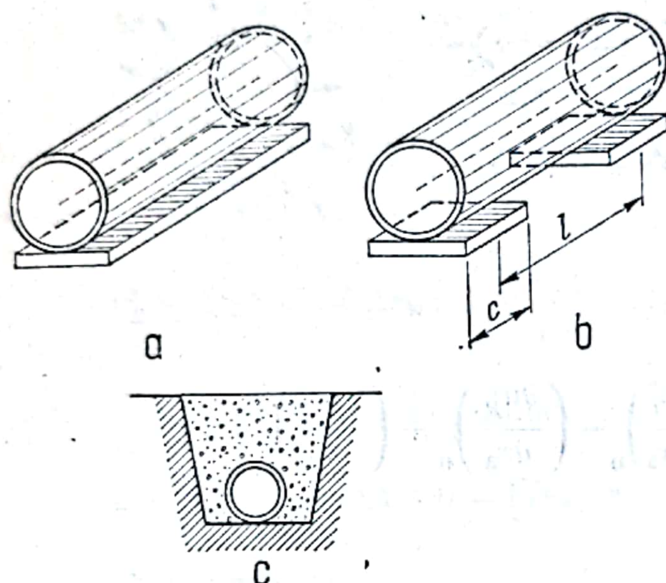


Fig. VII.116

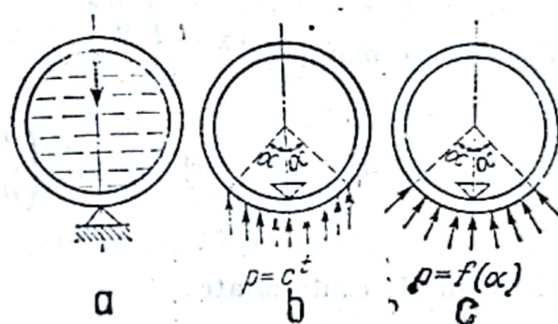


Fig. VII.117

— Considerînd *secțiunea transversală, inel închis rezemat pe generatoarea de bază* (fig. VII.117,*a*), se determină mai întîi momentele încovoietoare denumite *momente ovalizatoare*, date de *sarcina proprie, greutatea lichidului din conductă* și *încărcarea cu pămînt*, folosind metodele obișnuite de calcul static;

— Se calculează apoi, prin aceleași metode, influența *reacțiunilor provocate de reazemul real* care se poate aproxima cu o *sarcină uniformă sau variabilă, verticală sau oblică*, acționînd pe o porțiune de arc avînd unghiul de centru 2 α, secțiunea transversală considerîndu-se inel închis (fig. VII.117,*b*,*c*.).

În tabelul VII.41 apar formulele pentru calculul momentelor de ovalizare în cele două etape de încărcare.

15.2. Calculul conductelor pe reazeme distanțate

Starea de eforturi la conductele circulare (v. fig. VII.116,*b*) se determină plecînd de la următoarele premise:

— pe porțiunea dintre reazeme conducta lucrează ca o *învelitoare cilindrică*, fiind solicitată numai de eforturi axiale și tangențiale determinate conform teoriei de membrană

— eforturile de margine N^{12} (care la alte construcții sînt preluate de elemente speciale arce sau timpane) încarcă porțiunile de conducte de pe reazeme, provocînd *momente de încovoiere* (*ovalizare*). Ca urmare, calculul în această situație de rezemare se conduce în patru etape:

1) Prima, se referă la determinarea în *teoria de membrană a eforturilor axiale și tangențiale* care apar pe intervalul dintre reazeme, datorită încărcării conductei (greutate proprie, greutatea lichidului și supraîncărcarea cu pămînt); expresiile eforturilor sînt date în tabelul VII. 29.

2) În etapa a doua, se calculează *momentele de ovalizare care* apar pe porțiunea de conductă situată deasupra reazemelor, provenind din încărcarea cu *greutate proprie*, *sarcina lichidului și supraîncărcarea cu pămînt* (secțiunea transversală se presupune ca la paragraful 15.1 inel circular rezemat pe generatoarea de bază); pentru calcul se folosește tabelul VII. 41.

3) Etapa a treia se referă la determinarea *momentelor de ovalizare*, pe metru de conductă situată pe reazem sub acțiunea *eforturilor* N^{12} determinate la marginea deschiderii.

Notînd: $\lambda = \dfrac{l}{b}$ în care l este distanța dintre axele reazemului (fig. VII.116,b) și b lățimea reazemului, p — încărcarea totală pe metru de conductă măsurată în sensul generatoarei; efortul N^{12} sumat la marginea celor două deschideri aferente reazemului este:

$$N^{12} = \frac{p}{\pi}(l - b)\sin\varphi.$$

Considerînd că încărcarea dată de eforturile N^{12} se repartizează uniform la porțiunea de conductă situată pe reazem, solicitarea pe metru de reazem este dată de:

$$n^{12} = \frac{p}{\pi}\left(\frac{l-b}{b}\right)\sin\varphi = \frac{p}{\pi}(\lambda - 1)\sin\varphi.$$

Presupunînd secțiunea transversală inel rezemat pe generatoarea de bază (figurile din tabelul VII.41), se obține expresia momentului de ovalizare într-o secțiune oarecare datorită eforturilor n^{12}

$$M(\alpha) = \frac{pR(\lambda-1)}{2\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\alpha - (\pi - \alpha)\sin\alpha\right] = \frac{1}{2\pi}\,pR(\lambda - 1)\,c.$$

4) În fine, se determină influența rezemării reale considerînd încărcarea totală aferentă unui reazem, uniform distribuită pe lățimea lui transversală. Calculul se conduce la fel ca la paragraful 15.2, pct. 2, tabelul VII.41.

Valoarea reacțiunii pe unitatea de conductă situată pe reazem este $(\lambda - 1)P$.

Tabelul VII.41

Momente încovoietoare de ovalizare la conducte circulare

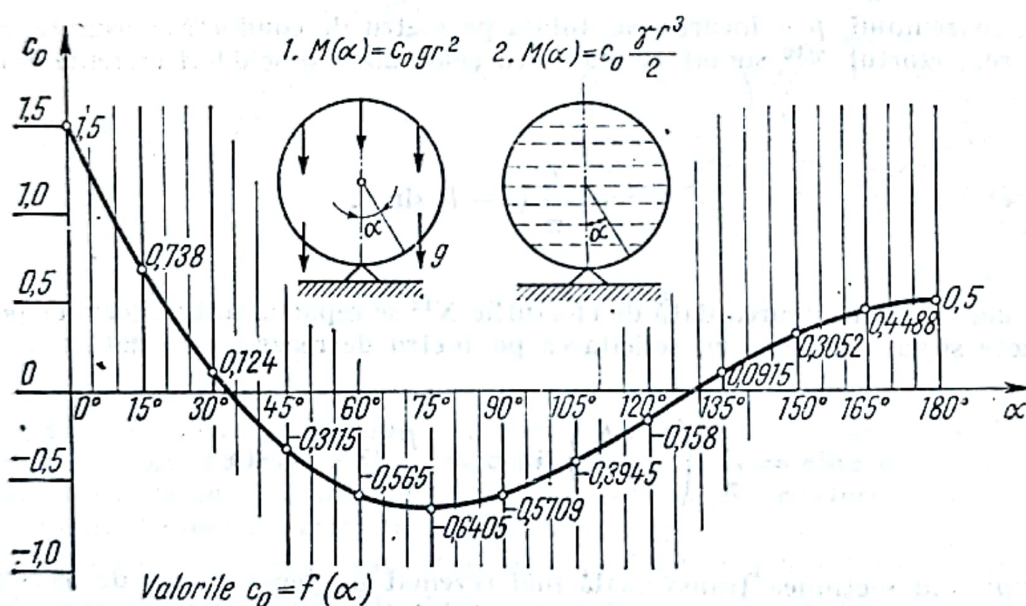
Cazuri de rezemare și încărcare
Valorile momentelor $M(\alpha)$

A. Conductă rezemată pe generatoarea inferioară

1. Încărcarea greutatea proprie g/m^2 aplicată pe suprafața laterală
2. Încărcarea greutatea lichidului γ/m^3; conducta plină, cu presiune nulă la cheie

$$1.\ M(\alpha) = c_0 g r^2 \qquad 2.\ M(\alpha) = c_0 \frac{\gamma r^3}{2}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\cos\alpha - (\pi - \alpha)\sin\alpha + 1$$



Valorile $c_0 = f(\alpha)$

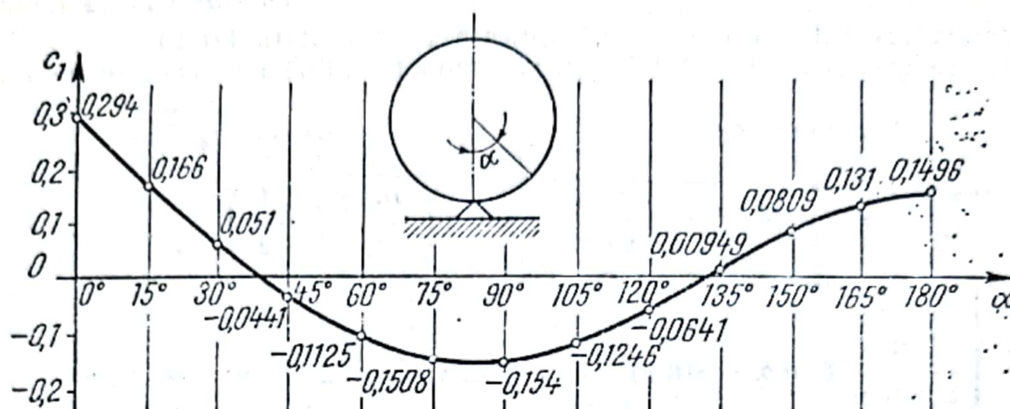
3. **Încărcare exterioară uniform distribuită pe lățimea diametrului, p**

$$M(\alpha) = 2c_1 p r^2$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{3}\cos\alpha - \pi\sin\alpha - \Delta\right]$$

$$\Delta = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \\ \dfrac{\pi}{2}(1 - \sin\alpha)^2, \text{ dacă } \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Tabelul VII.41 (continuare)



Coeficienții $c_1 = f(\alpha)$

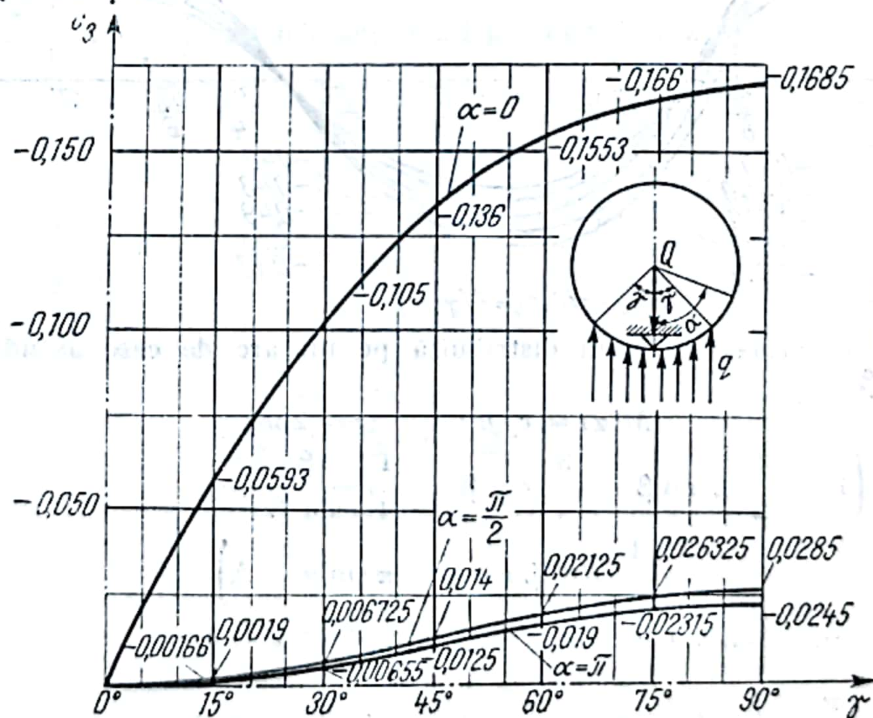
B. Conductă rezemată pe un sector circular, reacțiunile fiind uniform distribuite în plan vertical

1. Încărcarea este materializată de rezultanta totală a încărcărilor, Q/m

$$M(\alpha) = c_3 Q r, \qquad Q = 2\gamma r q$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\gamma\sin\gamma + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\gamma}{\sin\gamma} + \frac{3}{2\pi}\cos\gamma - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi}\sin^2\gamma\cos\alpha\right) - \Delta$$

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \gamma < \alpha < 2\pi - \gamma \\ \dfrac{1}{4\sin\gamma}(\sin\gamma - \sin\alpha)^2, & \text{dacă } 0 < \alpha < \gamma;\ 2\pi - \gamma < \alpha < 2\pi \end{cases}$$



Coeficienții $c_3 = f(\alpha, \gamma)$

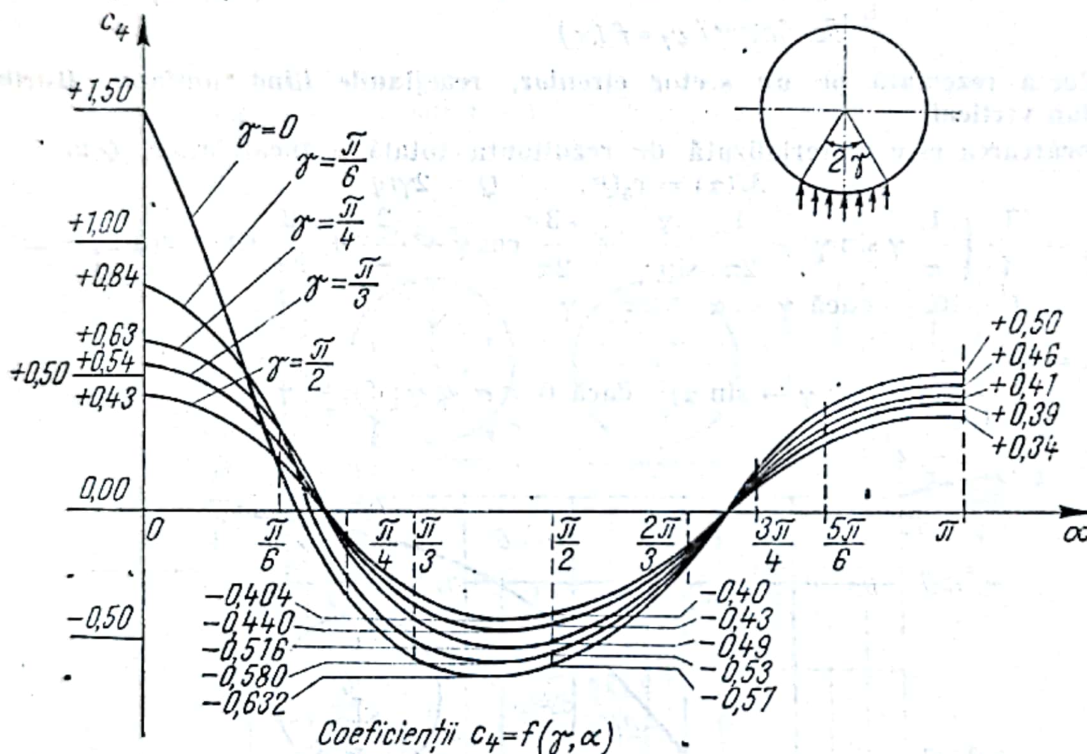
Tabelul VII.41 (continuare)

2. Încărcare greutatea proprie g/m^2 aplicată pe suprafața laterală
3. Încărcare greutatea lichidului γ/m^3; conducta plină cu presiune nulă la cheie

$$2.\ M(\alpha) = c_4 g r^2 \qquad\qquad 3.\ M(\alpha) = c_4 \frac{\gamma r^3}{2}$$

$$c_4 = \frac{\gamma \sin \gamma}{2} + \frac{3}{4}\cos\gamma + \frac{\gamma}{4 \sin \gamma} + \cos\alpha\left(\frac{\sin^2\gamma}{3} + \frac{1}{2}\right) + (\alpha - \pi)\sin\alpha - \Delta$$

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \gamma < \alpha < 2\pi - \gamma \\ \dfrac{\pi}{2\sin\gamma}(\sin\alpha - \sin\gamma)^2 & \text{dacă } 0 < \alpha < \gamma;\ 2\pi - \gamma < \alpha < 2\pi \end{cases}$$



Coeficienții $c_4 = f(\gamma, \alpha)$

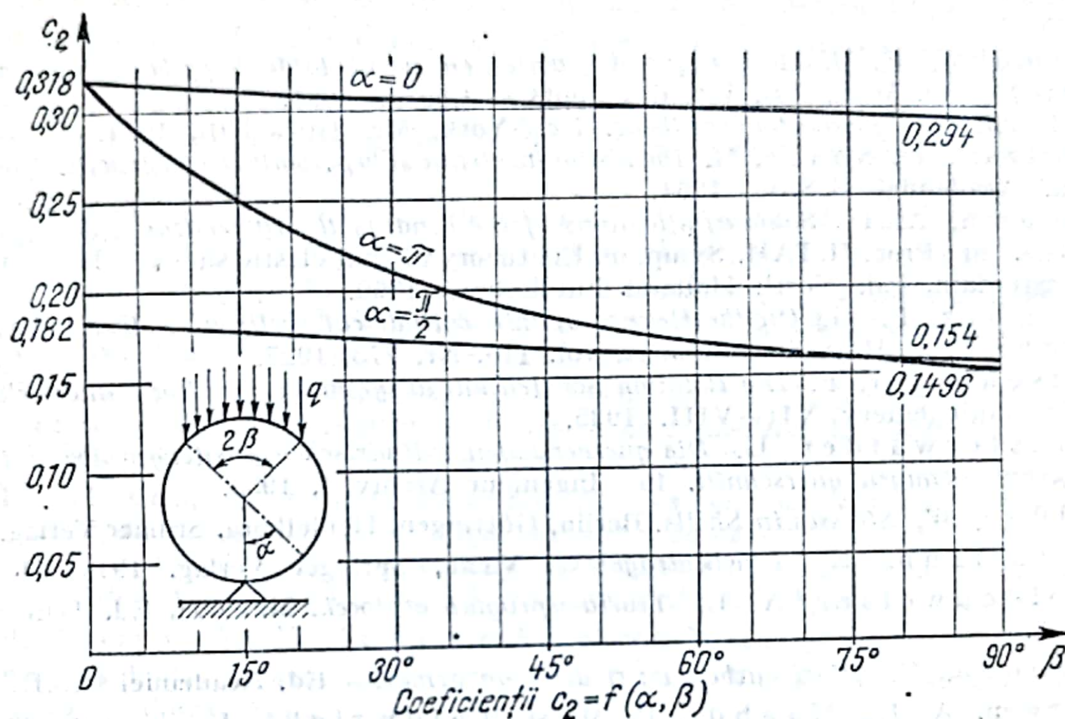
4. Încărcare exterioară uniform distribuită pe un arc de cerc avind unghiul la centru 2β

$$M(\alpha) = c_2 Q r; \qquad Q = 2\beta r q$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\sin\beta + \frac{3}{4}\cos\beta + \frac{1}{4}\frac{\beta}{\sin\beta} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\sin^2\beta\cos\alpha - \pi\sin\alpha - \Delta\right)$$

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < \alpha < \pi - \beta;\ \pi + \beta < \alpha < 2\pi \\ \dfrac{\pi}{2\sin\beta}(\sin\beta - \sin\alpha)^2, & \text{dacă } \pi - \beta < \alpha < \pi + \beta \end{cases}$$

Tabelul VII.41 (continuare)

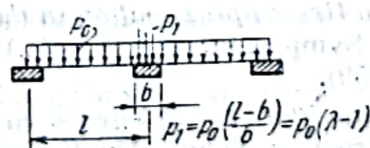


Încărcare din forțe tangențiale acționînd pe zona de rezemare

$$M(\alpha) = \frac{1}{2\pi} c_0 P_0 r(\lambda - 1)$$

$$\lambda = \frac{l}{b}$$

c_0 se ia de la cazul A.



BIBLIOGRAFIE

1. A i m o n d, E. *Etude statique des voiles en paraboloïde hyperbolique, travaillant sans flexion*. Mem. Ass. Int. des Ponts et Charp., 1936.
2. A l l e n, G. *Relaxation methods*. New-York, Mc. Graw-Hill, 1944.
3. B e l e ş A. şi, S o a r e, M. *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii*. Bucureşti, Ed. Academiei R.S.R., 1964.
4. B o u m a, A. L. *Some applications of the bending theory regarding doubly curved shells*. În : Proc. IUTAM. Symp. on the theory of thin elastic shells — Delft, 1959 — Amsterdam, Ed. North Holland Publischers, 1960.
5. B r a z i e r, L. G. *On the flexure of thin cylindrical shells and other thin section*. Londra, Proc. Roy. Soc. Seria A. vol. 116, Nr. 773, 1927.
6. D i s c h i n g e r, F. *Die Rotation Schalen mit unsymmetrischer Form und Belastung*. În : Bauingenieur VII—VIII, 1935.
7. F i n s t e r w a l d e r, U. *Die querversteifen zylindrischen schalengewölbe mit kreissegment formigen querschnitt*. În : Ingenieur Archiv 4, 1933.
8. F l ü g e, W. *Stresses in Shells*. Berlin, Gőttingen, Heidelberg, Sringer Verlag, 1960.
9. G i r k m a n n, K. *Flächentragverke*. Viena, Springer Verlag, 1948—54.
10. G o l d e n w e i s e r, A. L. *Teoria uprughih obolocek*. Moscova, Ed. Tehterizdat, 1953.
11. G i o n c u, V. *Plăci curbe subţiri de beton armat*. — Ed. Academiei R.S.R., 1974.
12. G r e e n, A. E., N a g h d i, P. M. şi W a i n w r i g h t, L. *A general theory of a Cosserat surface*. În : Arch. Rat. Mech. Analysis, 20, 1965.
13. G u e r r i n, A. *Le calcul des tuyaux en béton armé et non armé*. Paris, Ed. Eyrolles 1952.
14. G ü n t h e r, W. *Analoge Systeme von Schalengleichungen*. În : Ingenieur Archiv, 30/1961.
15. J e n k i n s, R. *Matrix methods in structural mechanics*. University of Nottingham, Taylor Woodrow Foundation Lectures, 1961.
16. J e n k i n s, R. şi A r u p, O. *The design of a reinforced concrete factory at Brynmawr*. În : Proceedings — Inst. of. Civ. Eng. vol. 2 Nr. 3. 1953.
17. H r u b a n, K. *Betonovc strechy skrátkymi skore pinami*. Praga, Techn. Vedecke Vydavetelstvi, 1952.
18. K o i t e r, W. T. *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*. În : Proceedings of the Symposium (I.U.T.A.M.) on the theory of thin elastic shells (Delft 24—28 aug. 1959).
19. K o l l á r, L. *Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken*. Berlin, München, Düsseldorf, W. Ernst & Sohn—Akadémiai Kiadó, Budapesta, 1973.
20. K o l l ä r, L. şi D u l á c s k a, E. *Die Beulung von Schalen*. Werner, Düsseldorf, Akademiai Kiadó, Budapesta, 1974.
21. L a p o n c h e, R. *Procédés géometriques pour la détermination des contraintes dans les enveloppes minces en béton armé*. În : Annales I.T.B.T.P., 1947.
22. L e c o r n u, L. *Thèse sur l'équilibre des surfaces, flexibles et inextensibles*. Paris, Ed. Gauthier — Villars, 1880.

23. L o v e A. E. *The mathematical theory of elasticity.* New-York, Ed. Dover, 1944.

24. L u n d g r e n, H. *Cylindrical shells.* Vol. I., Copenhaga, Ed. Danish. Techn, 1951.

25. L u r i e A. J. *Statika tonkostenih uprughih obolocek.* Moscova, O.G.I.Z., 1947.

26. M a r g u e r r e, K. *Neure Festigkeitsproblemen des Ingenieurs.* Berlin, Springer Verlag 1950.

27. M i h a i l e s c u, M. *Studii asupra învelitorilor subţiri cu două directoare şi plan director în ipoteza de membrană.* În : Studii şi cercetări de mecanică aplicată, tomul II, 1951.

28. M i h a i l e s c u, M. *Criterii generale pentru calculul învelitorilor subţiri.* În : Buletinul ştiinţific al Academiei R.S.R., Seria Ştiinţe tehnice şi chimice, tomul VI, 1954.

29. M i h a i l e s c u, M. *Asupra unor formule practice pentru calculul învelitorilor cilindrice subţiri.* În : Buletinul ştiinţific al Academiei R.S.R., Seria Ştiinţe tehnice şi chimice, tomul IV, nr. 3—4—/1952.

30. M i h a i l e s c u, M., R o ş c ă u, H. şi H o r v a t h, I. *Învelitori cilindrice cu raze de curbură variabilă, calculate în teoria de încovoiere.* În : Buletinul ştiinţific al IPCN, Seria Ştiinţe tehnice şi chimice, nr. 13/1970.

31. M i h a i l e s c u, M. şi P o c a n s c h i, A. *Les équations résolvantes de l'état de contrainte du paraboloïde hyperbolique surbaisse bordé par poutres rectilignes.* În : Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Méchanique Appliquée, tome 21, nr. 1, 1976 (ian. — mart.) , pag. 69—81, Bucureşti, Ed. Academiei R.S.R.

32. N o v o j i l o v, V. V. *Teoria tonkih obolocek.* Moscova, Sudpromghiz, 1951.

33. N o v a c k i, W. *Teoria niesimetrycznej Spreżsytości.* Varşovia, Panstwowe Wydawnictowo Naukowe, 1971.

34. P a r m e, A. *Hyperbolic paraboloids and other shells of double curvature.* În : Proceding A.S.C.E. Structural Division, Vol. 82—105, 1956.

35. P i l a r s k i, I s e n m a n n. *Calcul des voiles minces en béton armé.* Paris, Ed. Dunod, 1952.

36. P o l e n i, G i o v a n n i. *Memorie istoriche della Gran cupola del Tempio Vaticano* În : Staub, Hans : „Die geschichte der Bauingenieur Kunst" Stuttgard, Birkhauser Verlag, 1964.

37. P ö s c h l, T. *Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen methoden.* Berlin, Springer Verlag, 1926.

38. P u c h e r, A. *Der Spannungszustand in gekrumten Flächen.* În : Beton und Eisen nr. 33, Berlin, 1934.

39. R a b i c h, R. *Die membrantheory der einschalig hyperbolischen Rotationschalen.* În : Bauplanung—Bautechnik, Nr. 7. Berlin, 1953.

40. R a m a s w a m y, S. *Design and construction of concrete shell roofs.* New-York, San Francisco, Toronto, Londra, Sidney, McGraw Hill Book.

41. R e i s s n e r, H. *On the fondations of the theory of elatic shells.* Berlin, Heidelberg New-York, Springer Verlag, 1966 — Congress I.U.T.A.M.

42. S a l v a d o r i, M. G. *Analysis and testing of translational shells.* Chicago, J.A.C.I., iunie 1956.

43. S c h e e f f e r, H. *Das Cosserat-Kontinuum.* În : Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Heft 8, dec. 1967.

44. S o a r e, M. *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri* Bucureşti, Ed. Academiei R.S.R. 1968.
45. S o u t h w e l l, R. V. *Relaxation method in theoretical Physics.* Oxford, University Press, 1946.
46. T e o d o r e s c u, P. P. *Sur les corps du type de Cosserat à élasticité linéaire.* Instituto Nazion. di alta matematica — Symp. math. vol. I. Ed. Oderisi — Gubbio, 1969.
47. T i m o s h e n k o, S. *Théorie de la flexion, torsion et flambage des barres à parois minces et à section ouvert.* În: Ossature métallique 7—8, 1947
48. T o r r o j a, E. *Réalisations de voûtes minces en Espagne.* În: Annales I.T.B.T.P. Nr. 164 (dec.) Paris, 1950
49. V l a s o v, V. Z. *Obsceaia teoria obolocek.* Moscova, Gosudarstvenoe Izdatelstvo Tehniko—Teoreticeskoi Literaturi, 1949.
50. Z e r n a, *W. Berechung von Translationschalen.* În: Ost. Ing. Archiv 7, Viena, 1953.
51. Z e r n a, *W.* şi G r e e n, A. E. *Theoretical elasticity.* Oxford, Clarendon Press, 1954.
52. * * * *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs.* New York, Manual Nr. 31, American Society of Civil Engineer, 1952.
53. * * * *Instrucţiuni pentru proiectarea acoperişurilor şi planşeelor din plăci curbe subţiri de beton armat* (trad. din l. rusă). Bucureşti, Ed. tehnică, 1963.

SECȚIUNEA VIII

STABILITATEA SISTEMELOR DE BARE

Prof. univ. em. ing. **PANAIT MAZILU**
Prof. dr. ing. **NICOLAE ȚOPA**

VIII

CUPRINS

TABELELE SECŢIUNII VIII

1. ELEMENTE INTRODUCTIVE

1.1. Definirea problemei de stabilitate

Forțele care sînt aplicate asupra unei construcții (forțele date și forțele de legătură) trebuie să satisfacă printre altele și condițiile de echilibru, necesare pentru exploatarea în bune condiții a acesteia. Verificarea acestor condiții de echilibru nu este însă suficientă. Trebuie să existe certitudinea că forma pentru care s-a scris echilibrul respectiv este stabilă.

O formă de echilibru este stabilă dacă aplicîndu-se o serie de mici acțiuni perturbatoare pentru care forma inițială de echilibru se schimbă într-o poziție vecină compatibilă cu legăturile, la îndepărtarea acestor cauze există tendința de revenire la forma inițială. În caz contrar (în care apare tendința de amplificare a deplasărilor) forma de echilibru este instabilă. Situația limită între aceste două cazuri este definită ca situație *critică*.

Din punct de vedere energetic, la schimbarea formei într-o poziție vecină corespunde o creștere a energiei potențiale totale în cazul echilibrului stabil și o descreștere în cazul echilibrului instabil.

Din punct de vedere dinamic echilibrului stabil îi corespunde proprietatea că sistemul dat încărcat cu forțele exterioare, excitat de o cauză perturbatoare inițială, oscilează cu o pulsație proprie bine definită. În cazul instabilității pulsația proprie tinde spre zero.

În cazul corpurilor deformabile pozițiile vecine sînt chiar deformate ale sistemului compatibile cu legăturile.

Problema stabilității apare pentru diferite tipuri de solicitări: compresiune, încovoiere, torsiune. Cazul cel mai frecvent este acela al barelor sau sistemelor zvelte, avînd elemente puternic comprimate.

Apariția pierderii de stabilitate are forme diverse. Cele mai importante tipuri sînt date în continuare și sînt definite prin forma relației dintre forțe și deplasări.

1.1.1. **Bifurcarea echilibrului.** În cazul barelor sau sistemelor de bare puternic comprimate centric, fără solicitări transversale (fig. VIII.1, *a*), după o anumită valoare a forței P_{cr}, există mai multe forme posibile de echilibru unele stabile, altele instabile. În fig. VIII.1, *b* este indicată ramificarea care apare în punctul $P = P_{cr}$.

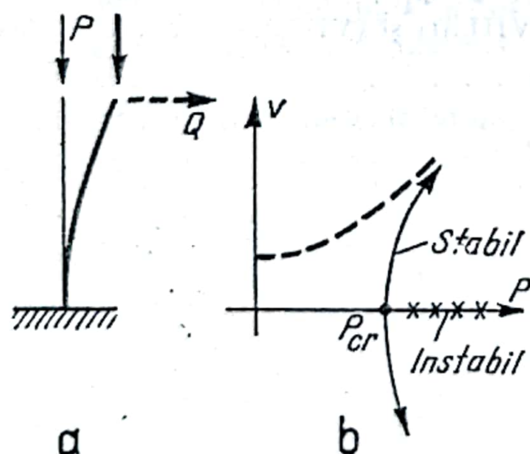


Fig. VIII.1

1.1.2. **Pierderea de stabilitate prin deformare continuă.** Dacă în cazul precedent se adaugă și efecte transversale inițiale (momente încovoietoare), curba $v = v(P)$ nu mai prezintă ramificare (linia punctată în fig. VIII.1, *b* corespunzătoare existenței forței transversale Q din fig. VIII.1, *a*).

1.1.3. **Pierderea de stabilitate prin traversare.** Pentru sistemele care pot fi reduse la

schemele din fig. VIII.2, *a* curba $v = v(P)$ este dată în fig. VIII.2, *b*. În punctul *B* există un salt brusc spre *B'* curba continuînd spre *D*. La o schimbare a sensului forţei dinspre *D* spre *B'* curba este *B'*, *C*, *C'*, *O* saltul invers avînd loc între punctele *C* şi *C'*.

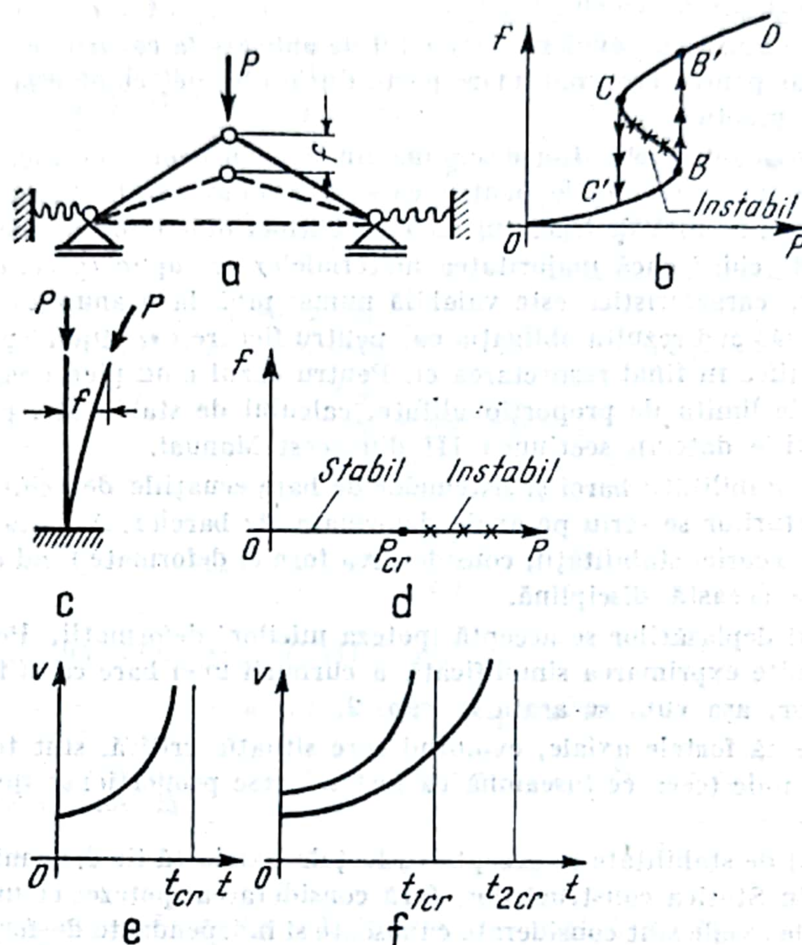


Fig. VIII.2

Porţiunea marcată prin curba *BC* este corespunzătoare echilibrului instabil. Un caz care se încadrează în această categorie este acela al *membranelor pocnitoare*.

1.1.4. Dispariţia formelor stabile de echilibru. În cazul din fig. VIII.2, *c* în care forţa are tot timpul direcţie tangenţială la bară (neexistînd alte forţe transversale), relaţia $v = v(P)$ are forma din fig. VIII.2, *d* după $P = P_{cr}$ neexistînd decît situaţia de instabilitate.

1.1.5. Pierderea de stabilitate prin curgere lentă. La materialele cu proprietăţi de curgere lentă (în cazul barelor cu solicitări transversale) deformaţiile transversale cresc în timp, tinzînd la un moment dat spre infinit. Variaţia deplasării în timp este dată în fig. VIII.2, *e*. Creşterea nelimitată a deplasărilor are loc pentru un timp denumit *critic*. La două forţe axiale $P_1 > P_2$ corespund două curbe caracteristice pentru care $t_{1,cr} < t_{2,cr}$ (fig. VIII.2, *f*).

1.2. Ipotezele folosite în studiul stabilității sistemelor de bare

În cele ce urmează se enumeră ipotezele simplificatoare care sînt acceptate în mod uzual în studiile privind stabilitatea sistemelor de bare, ipoteze necesare pentru evitarea complicațiilor mari de calcul.

Aceste ipoteze limitează, evident, domeniul de aplicare la cazurile care pot fi caracterizate de ele, dar pentru cea mai mare parte din probleme, conduc la rezultate satisfăcătoare pentru practică.

1) Se admite, ca și în cazul altor discipline din Mecanica construcțiilor, că materialele din care sînt alcătuite structurile pentru care se studiază stabilitatea sînt continue, omogene, izotrope și ascultă de legea lui Hooke. Ultima dintre presupuneri este cea mai limitativă, întrucît chiar dacă majoritatea materialelor se supun (practic vorbind) legii lui Hooke, această caracteristică este valabilă numai pînă la o anumită limită proprie fiecărui material. De aici rezultă obligația ca, pentru fiecare caz studiat pe baza acestei ipoteze, să se verifice în final respectarea ei. Pentru cazul cînd pierderea stabilității se produce dincolo de limita de proporționalitate, calculul de stabilitate, pentru bară, se face după indicațiile date în secțiunea III din acest Manual.

2) În studiul stabilității barei și sistemelor de bare ecuațiile de echilibru și implicit determinarea eforturilor se scriu pe axele deformate ale barelor. Aceasta este o ipoteză de lucru specifică Teoriei stabilității, considerarea formei deformate fiind o condiție fundamentală pentru această disciplină.

3) În calculul deplasărilor se acceptă ipoteza micilor deformații. Pe baza acestei ipoteze se va admite exprimarea simplificată a curburii unei bare ca și în cazul Rezistenței materialelor, așa cum se arată în cap. 2.

4) Se admite că forțele axiale, evoluînd spre situația critică, sînt toate în funcție de un parametru unic (ceea ce înseamnă că forțele cresc proporțional spre situația critică).

5) În calculul de stabilitate se acceptă ca forțele axiale să fie determinate printr-un calcul obișnuit din Statica construcțiilor, fără considerarea ipotezei enunțate la pct. 2. În acest fel, forțele axiale sînt considerate cunoscute și independente de forma deformată a sistemului. Ipoteza 2 rămîne însă, evident, valabilă pentru studiul celorlalte aspecte.

6) Pentru studiul stabilității sistemelor de bare se acceptă ipoteza conservării direcției forțelor exterioare în procesul deformării. Unele excepții vor fi subliniate la capitolele respective.

7) Majoritatea problemelor studiate se bazează pe ipoteza că orientarea axelor principale de inerție ale secțiunilor transversale de pe o bară este aceeași, barele au secțiunea constantă iar forța axială este constantă în lungul unei bare. Ultimele două ipoteze sînt mai puțin generale decît prima. În cap. 4 sînt date o serie de situații care nu se încadrează în acest caz particular. Prima ipoteză este însă generală și obligatorie. Ea este dealtfel respectată în proiectarea construcțiilor.

8) În studiul problemelor plane de pierdere a stabilității se admite că deformarea are loc în planul sistemului de bare. Rezultatele obținute trebuie confruntate cu legăturile și comportarea reală a structurii care să asigure acest lucru. În caz contrar este necesar un calcul spațial.

2. STABILITATEA BAREI DREPTE COMPRIMATE

2.1. Stabilitatea barei cu legături rigide

2.1.1. Formula lui Euler. Stabilitatea barei drepte simplu rezemate acționată de o forță longitudinală P se poate studia exprimind echilibrul în stare deformată, adică după trecerea de la forma dreaptă la forma curbă (fig. VIII.3). Expresia curburii, în această situație este

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}. \qquad \text{(VIII.1)}$$

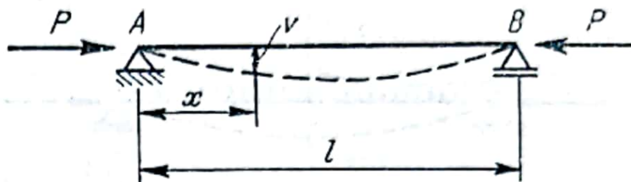


Fig. VIII.3

Ecuația diferențială care rezultă din expresia (VIII.1), știind că $M=Pv$, este

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = 0 \qquad \text{(VIII.2)}$$

unde :

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \qquad \text{(VIII.3)}$$

Soluția ecuației diferențiale (VIII.2) este

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \qquad \text{(VIII.4)}$$

Condițiile de margine ($v = 0$ pentru $x = 0$ și $v = 0$ pentru $x = l$) și eliminarea soluției banale conduc la :

$$\sin kl = 0; \quad kl = n\pi. \qquad \text{(VIII.5)}$$

Reținînd valoarea minimă ($n = 1$) în relațiile (VIII.5) și (VIII.3) se deduce expresia lui P_{cr} după Euler,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \qquad \text{(VIII.6)}$$

Expresia este valabilă pentru bara dublu articulată (simplu rezemată). Axa deformată corespunzătoare este determinată numai calitativ

$$v = C \sin kx = C \sin \frac{\pi}{l} x \qquad \text{(VIII.7)}$$

factorul C rămînînd nedeterminat.

2.1.2. Ecuația axei deformate și stabilitatea barei în cazul general. În cazul general de rezemare expresia momentului încovoietor nu este cunoscută. Izolînd un element dx dintr-o grindă încărcată transversal cu o forță distribuită $p(x)$ și longitudinal cu o forță

P (fig. VIII.4, *a*) și exprimînd echilibrul în stare deformată printr-o ecuație de momente și o proiecție pe normala inițială (fig. VIII. 4, *b*) rezultă relațiile diferențiale între încărcări și eforturi în stare deformată :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T; \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -p + P\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}. \qquad \text{(VIII.8)}$$

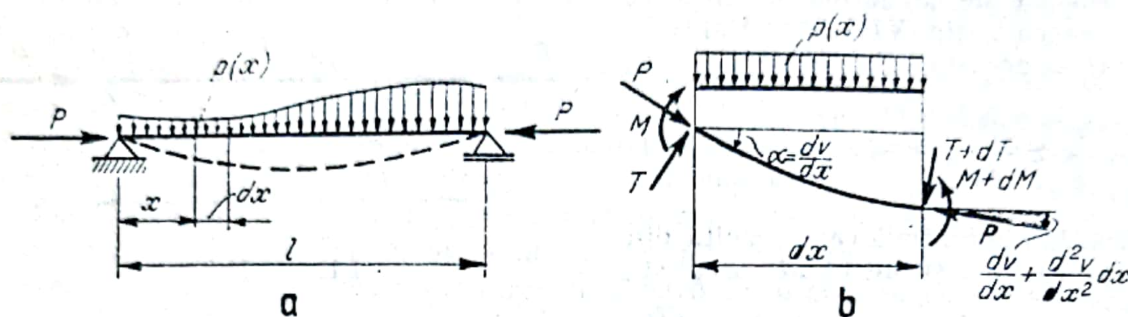


Fig. VIII.4

Presupunînd momentul de inerție constant, se derivează de două ori relația (VIII.1) și folosind relația (VIII.8) se ajunge la ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} + k^2\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{p}{EI} \qquad \text{(VIII.9)}$$

avînd soluția :

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 + \bar{v} \qquad \text{(VIII.10)}$$

unde $\bar{v}$ este o soluție particulară a ecuației diferențiale (VIII.9).

Determinarea constantelor se face punînd condițiile de margine exprimate în funcție de deplasarea v, rotirea φ, momentul încovoietor M și forța tăietoare T

$$\varphi = v'; \quad M = -EIv''; \quad T = -EIv'''. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Expresiile derivatelor sînt :

$$\begin{aligned} v' &= C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx + C_3 + \bar{v}' \\ v'' &= -C_1 k^2 \sin kx - C_2 k^2 \cos kx + \bar{v}'' \\ v''' &= -C_1 k^3 \cos kx + C_2 k^3 \sin kx + \bar{v}'''. \end{aligned} \qquad \text{(VIII.12)}$$

În absența forței transversale ($p = 0$ deci $v = 0$) se ajunge la un sistem omogen de ecuații liniare în C_1, C_2, C_3, C_4.

Excluzînd soluția banală, condiția care asigură compatibilitatea sistemului se obține anulînd determinantul. Această condiție constituie ecuația de stabilitate, necunoscuta fiind parametrul k în funcție de care sînt exprimate constantele C. Valoarea lui k este introdusă în relația (VIII.3) și se determină P_{cr} care poate fi exprimat sub forma :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \qquad \text{(VIII.13)}$$

unde l_f se numește lungime de flambaj, avînd semnificația fizică de lungime a unei bare dublu articulate avînd același moment de inerție care are aceeași sarcină critică cu bara studiată. Constantele $C_1 \ldots C_4$ nu se pot determina complet rămînînd un factor unic, nedeterminat, care apare și în expresia axei deformate.

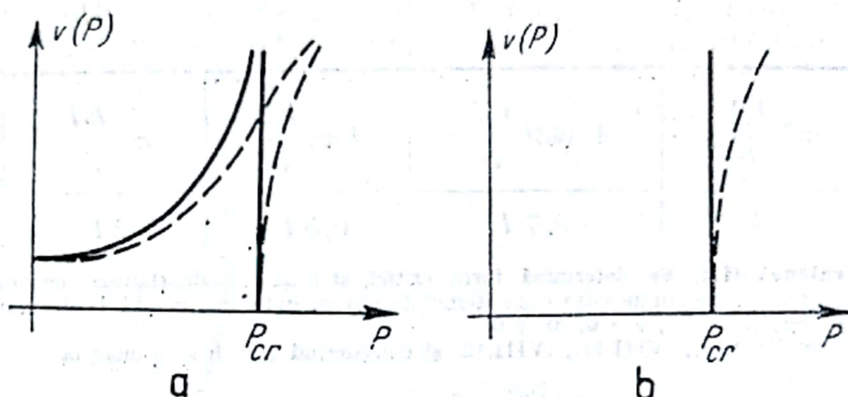


Fig. VIII.5

În cazul cînd $p \neq 0$, sistemul de ecuații pentru determinarea constantelor C este liniar, dar neomogen. Întrucît în cazul flambajului deformațiile tind să crească nelimitat condiția care furnizează valoarea critică a parametrului k se obține tot din anularea determinantului (condiție care conduce la valori infinite ale constantelor deci și a deplasărilor v). Se ajunge astfel la aceeași valoare a lui P_{cr}.

În ambele cazuri imposibilitatea determinării cantitative complete a axei deformate în momentul cînd $P = P_{cr}$ se datorește aproximației introduse prin relația (VIII.1) privind expresia curburii. Se obțin astfel relațiile între deplasarea v și forța P reprezentate grafic cu linie plină în fig. VIII. 5, *a* (pentru $p \neq 0$) și VIII. 5, *b* (pentru $p = 0$). Dacă s-ar folosi expresia exactă a curburii, curbele obținute au formele indicate prin linii întrerupte în fig. VIII.5 axa deformată fiind, în acest caz, determinată complet.

În cazul cînd există și forțe transversale ($p \neq 0$) în afara sarcinii critice interesează și deformațiile înainte de această situație, deformații care pot depăși valorile admisibile.

În modul indicat mai înainte se stabilesc ecuațiile de stabilitate pentru cele cinci cazuri din fig. VIII.6 și se determină valorile forțelor critice și a lungimilor de flambaj corespunzătoare care sînt date în tabelul VIII.1.

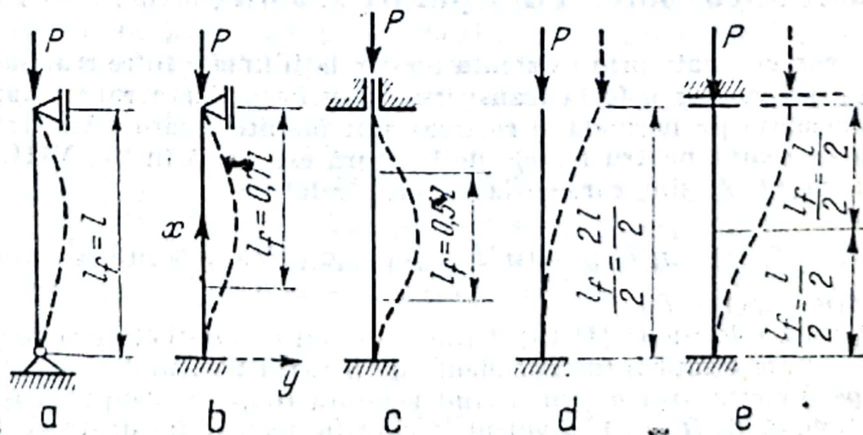


Fig. VIII.6

Tabelul VIII.1

Forţe critice şi lungimi de flambaj

Tipul de legături (v. fig. VIII.6)	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
P_{cr}	$\pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$4{,}493^2 \frac{EI}{l^2}$	$4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$\pi^2 \frac{EI}{4l^2}$	$\pi^2 \frac{EI}{l^2}$
l_f	l	$0{,}7\,l$	$0{,}5\,l$	$2\,l$	l

Exemplul de calcul VIII.1. Se determină forţa critică şi lungimea de flambaj pentru cazul barei din fig. VIII.6, *b*. Considerind originea în încastrare şi sistemul de axe ca în figură, condiţiile de margine sint: pentru $x = 0$, $v = 0$ şi $\varphi = 0$; pentru $x = l$, $v = 0$, $M = 0$.

Folosind relaţiile (VIII.10), (VIII.11), (VIII.12) şi considerind $\overline{v} = 0$ se ajunge la

$$C_2 + C_4 = 0$$
$$kC_1 + C_3 = 0$$
$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 = 0$$
$$-EI(C_1 k^2 \sin kl + C_2 k^2 \cos kl) = 0$$

Ecuaţia de stabilitate este deci

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ \sin kl & \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sin kl - kl \cos kl = 0.$$

Valoarea minimă a argumentului care satisface această ecuaţie (exceptind, bineinţeles, $kl = 0$) este $kl = 4{,}49$ ceea ce dă

$$P_{cr} = \frac{4{,}493^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}7l)^2}.$$

Aşadar, lungimea de flambaj a acestei bare este $l_f = 0{,}7l$.

2.2. Stabilitatea barei cu legături elastice

Legăturile caracterizate prin existenţa unor relaţii liniare între reacţiunile transversale (momentul încovoietor şi forţa transversală sau forţa tăietoare) şi deplasările corespunzătoare (translaţia pe normală şi rotirea) sînt numite legături elastice.

Convenţia de semne pentru forţele de legătură este dată în fig. VIII.7. Legăturile elastice din punctul A sînt caracterizate prin relaţiile

$$v_A = v_{AH} H_A + v_{AM} M_A; \quad \varphi_A = \varphi_{AH} H_A + \varphi_{AM} M_A \tag{VIII.14}$$

şi analog pentru punctul B.

Coeficienţii din relaţiile (VIII.14) definesc gradul de elasticitate şi constituie caracteristici intrinseci ale legăturii (independente de bară). De exemplu, v_{AH} este deplasarea punctului A pe direcţia axei y atunci cînd legătura (după evidenţierea reacţiunilor H şi M) este acţionată de $H_A = 1$. Evident, legăturile trebuie încărcate cu forţe de sens contrar faţă de reacţiuni (acţiunea asupra legăturii), (fig. VIII.8).

Ecuaţia axei deformate (independentă de tipul legăturilor) este tot (VIII.10). Determinarea constantelor se face punînd condiţiile de margine exprimate în v şi v'

$$x = 0,\ v = v_A \text{ şi } \varphi = \varphi_A;\ x = l,\ v = v_B \text{ şi } \varphi = \varphi_B \qquad \text{(VIII.15)}$$

În relaţiile (VIII.14) coeficienţii v şi φ fiind cunoscuţi, trebuie să se exprime şi reacţiunile prin intermediul lui v şi a derivatelor sale. Pentru M relaţia folosită este

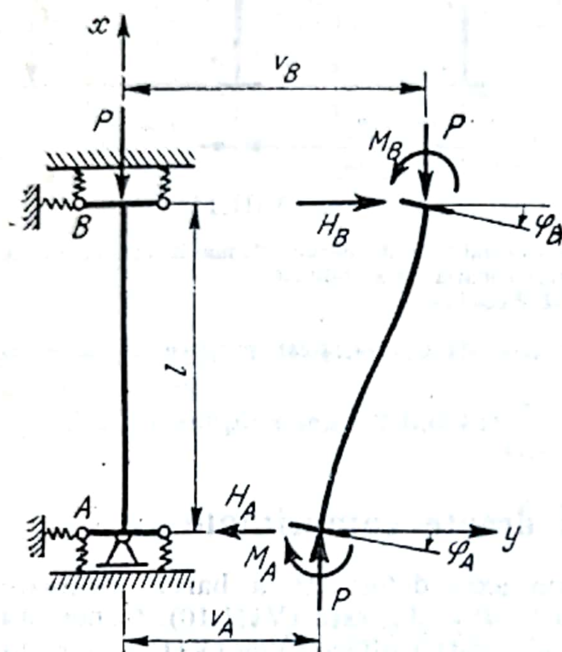


Fig. VIII.7

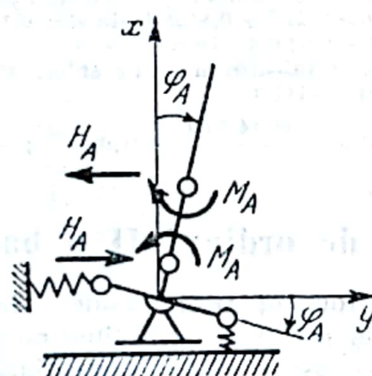


Fig. VIII.8

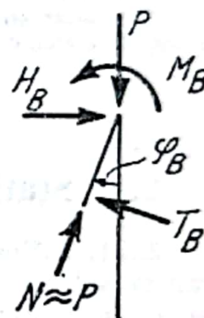


Fig. VIII.9

(VIII.11), iar H se deduce dintr-o ecuaţie de proiecţie pe axa y în nodul B (fig. VIII. 9), folosind relaţiile (VIII.3), (VIII.11) şi (VIII.12) pentru $\bar{v} = 0$

$$H_B = H_A = T_B - Pv_B' = -EIk^2C_3. \qquad \text{(VIII.16)}$$

Ecuaţia de stabilitate se obţine apoi analog prin anularea determinantului format din coeficienţii constantelor necunoscute care conţin parametrul k.

Un caz obişnuit de bară cu legături elastice îl constituie cadrele avînd o singură bară comprimată a cărei stabilitate se cercetează.

Exemplul de calcul VIII.2. Se cere valoarea lui P_{cr} pentru cazul din fig. VIII.10. Bara AB are legături rigide în A şi elastice în B. Condiţiile de margine sînt

$$v_A = 0;\ v_A' = 0$$

$$v_B = v_{BH}H_B + v_{BM}M_B;\ \ \varphi_B = \varphi_{BH}H_B + \varphi_{BM}M_B.$$

Pentru determinarea caracteristicilor elastice ale legăturii din B se consideră cadrul $BDEC$ din fig. VIII.11 încărcat succesiv cu $M_B = 1$ şi $H_B = 1$. Se obţine prin calcule statice obişnuite,

$$v_{BH} = -6{,}632\frac{a^3}{EI};\ \ v_{BM} = -0{,}307\frac{a^2}{EI};\ \ \varphi_{BH} = 0{,}307\frac{a^2}{EI};\ \ \varphi_{BM} = 0{,}578\frac{a}{EI}.$$

De notat că v_{BM} nu are acelaşi semn cu φ_{BH} întrucît direcţia pe care se calculează săgeata v nu coincide cu sensul lui H_B.

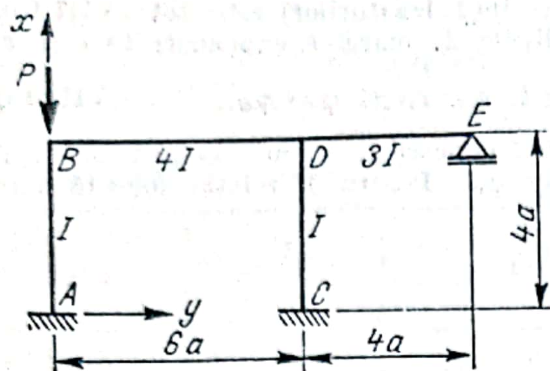


Fig. VIII.10

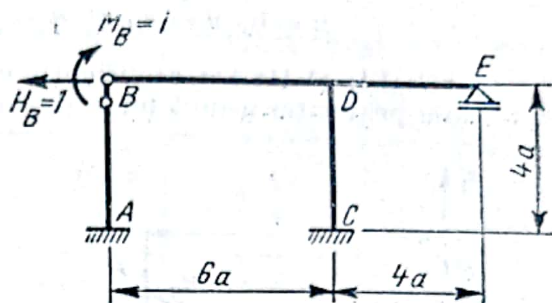


Fig. VIII.11

Folosind relatiile (VIII.11), (VIII.12) (VIII.16) în exprimarea condițiilor de margine de mai înainte se ajunge la un sistem omogen de ecuații și anulind determinantul se obține ecuația de stabilitate

$$-2 + 2\cos kl - 0{,}0384\,(kl)^2 + 0{,}8558\,kl\sin kl + 0{,}1826\,(kl)^2\cos kl -$$
$$-0{,}1035\,(kl)^3\sin kl - 0{,}01458\,(kl)^4\cos kl = 0.$$

Prin încercări se obține valoarea minimă a argumentului $(kl)_{cr} = (4ak)_{cr} \approx 4{,}14$ care satisface ecuația de stabilitate și de aici, cu relația (VIII.3).

$$P_{cr} = \frac{(4{,}14)^2\,EI}{l^2} = 1{,}07\,\frac{EI}{a^2};\quad l_f = \frac{\pi}{4{,}14}\,l = 0{,}76\,l = 3{,}04\,a.$$

2.3. Statica de ordinul II a barei drepte comprimate

2.3.1. Influența forțelor transversale. Ecuația axei deformate a barei încărcate transversal cu sarcina $p(x)$ și longitudinal cu o forță $P < P_{cr}$ este (VIII.10). Cunoscînd funcția $p(x)$ se poate găsi o soluție particulară $\bar{v}$ a ecuației diferențiale (VIII.9) iar din condițiile de margine se deduc valorile bine determinate ale constantelor C_1, C_2, C_3, C_4. Funcția v fiind astfel perfect determinată, cu ajutorul relațiilor (VIII.11) se pot găsi eforturile și deplasările în orice punct.

Prin aceasta se efectuează așa-numitul calcul de ordinul II al barei drepte comprimate încărcată transversal.

Dacă pe bară se aplică mai multe tipuri de forțe transversale (forțe concentrate, forțe distribuite local etc.), pentru fiecare domeniu cu $p(x)$ continuu corespunde o ecuație de tip (VIII.10) numărul de constante pentru întreaga bară fiind evident mai mare. Acestea se determină din condițiile de continuitate în punctele de frontieră între domenii. Calculul acesta fiind mai greoi se poate aplica, analog cu cazul staticii de ordinul I, metoda parametrilor în origine, ajungîndu-se la expresia deplasării v pentru un punct de abscisă x de pe bara din fig. VIII.12 în convenția de semne din figură

$$v = v_A + \frac{\varphi_A}{k}\sin kx - \frac{M_A}{P}(1 - \cos kx) - \frac{V_A}{kP}(kx - \sin kx) +$$
$$+ \frac{1}{kP}\sum_i Q_i[k(x - a_i) - \sin k(x - a_i)] - \frac{M_j}{P}[1 - \cos k(x - b_j)] +$$
$$+ \frac{1}{kP}\int_{c_1}^{c_2} q[k(x - s) - \sin k(x - s)]\,ds. \tag{VIII.17}$$

Aplicarea relației (VIII.17) pentru o bară AB se face astfel: o parte din parametrii din A sînt cunoscuți și se introduc cu valorile lor; pentru rest se scriu condițiile din

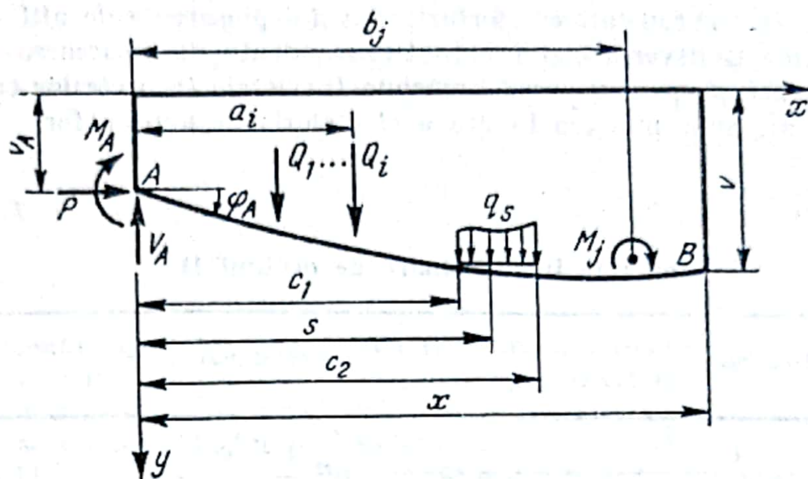


Fig. VIII.12

capătul B cu ajutorul ecuaţiilor (VIII.17) şi (VIII.11) şi se deduc astfel restul parametrilor necunoscuţi.

Pentru simplificarea scrierii se introduce notaţia:

$$\nu = kl = l\sqrt{\frac{P}{EI}}. \tag{VIII.18}$$

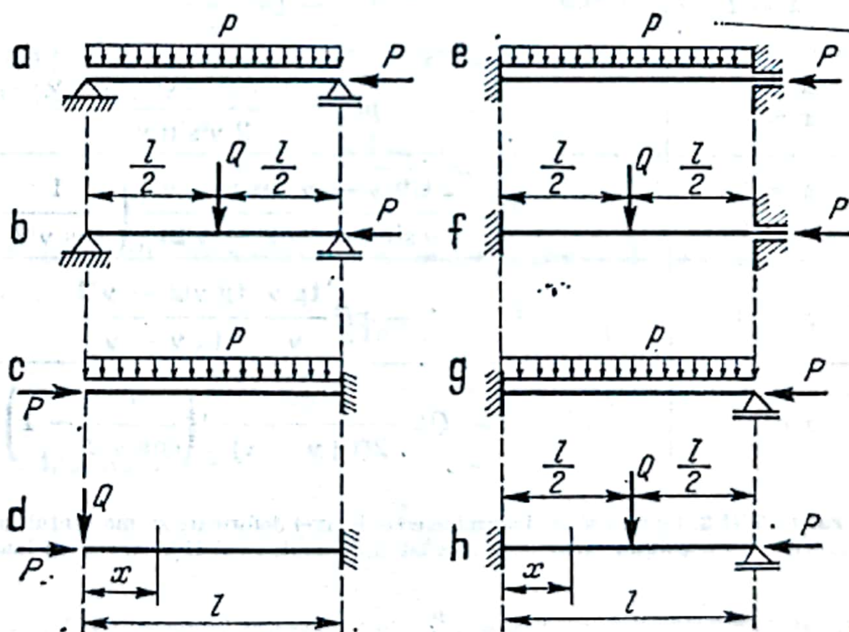


Fig. VIII.13

Întrucît pentru $P < P_{cr}$ rezultă $k < k_{cr}$ şi $\nu < \nu_{cr}$.

În tabelul VIII.2 sînt trecute cîteva cazuri mai frecvente (fig. VIII.13) indicîndu-se momentele încovoietoare de ordinul II în punctele indicate la fiecare caz în parte. Pentru detalii şi alte cazuri a se consulta lucrările [5, 13, 25, 31].

Din tabelul VIII.2 se constată că eforturile (ca şi deplasarea v de altfel) sînt funcţii liniare de încărcarea transversală şi funcţii transcendente de încărcarea longitudinală P (prin ν). În consecinţă, pentru aceeaşi mărime P efectele încărcărilor transversale se pot suprapune liniar. Suprapunerea liniară a efectelor mai multor forţe longitudinale nu este posibilă.

Tabelul VIII.2

Momente încovoietoare de ordinul II

Cazul (v. fig. VIII.13)	Secţiunea	Momentul încovoietor
a	$x = \frac{l}{2}$	$pl^2 \frac{1 - \cos \nu/2}{\nu^2 \cos \nu/2}$
b	$x = \frac{l}{2}$	$Ql \frac{\sin^2 \nu/2}{\nu \sin \nu}$
c	$x = l$	$-pl^2 \frac{\nu \sin \nu + \cos \nu - 1}{\cos \nu}$
d	$x = l$	$-Ql \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu}$
e	$x = 0$ $x = l$	$-pl^2 \frac{2 \sin \nu - \nu \cos \nu - \nu}{2\nu^2 \sin \nu}$
f	$x = 0$ $x = l$	$-Ql \frac{2 \sin \nu - \nu \cos \nu - \nu}{4 \nu \sin \nu (\operatorname{tg} \nu/2 - \nu/2)} \left(\frac{1}{\cos \nu/2} - 1 \right)$
g	$x = 0$	$-pl^2 \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} \frac{\operatorname{tg} \nu/2 - \nu/2}{\operatorname{tg} \nu - \nu}$
h	$x = 0$	$-Ql \frac{\operatorname{tg}\nu}{2(\operatorname{tg} \nu - \nu)} \left(\frac{1}{\cos \nu/2} - 1 \right)$

Exemplul de calcul VIII.3. Se cere să se determine ecuaţia axei deformate şi momentul încovoietor maxim pentru grinda din fig. VIII.13, *a*. Soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (VIII.9) poate fi luată astfel:

$$\bar{v} = \frac{p}{2k^2EI} x^2.$$

Condiţiile de margine. $v(0) = v''(0) = v(l) = v''(l) = 0$ conduc a valorile constantelor:

$$C_1 = \frac{p}{k^4EI} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}; \quad C_2 = \frac{p}{k^4EI} = -C_4; \quad C_3 = -\frac{pl}{2k^2EI}.$$

Notînd $\xi = \frac{x}{l}$ funcțiile v și M devin:

$$v = \frac{pl^4}{\nu^4 EI}\left[\text{tg}\frac{\nu}{2}\sin\nu\xi + \cos\nu\xi + 0{,}5\nu^2\xi^2 - 0{,}5\nu^2\xi - 1\right]$$

$$M = \frac{pl^2}{\nu^2}\left[\text{tg}\frac{\nu}{2}\sin\nu\xi + \cos\nu\xi - 1\right]; \quad M_{max} = \frac{pl^2}{\nu^2}\cdot\frac{1-\cos\frac{\nu}{2}}{\cos\frac{\nu}{2}}.$$

2.3.2. Influența abaterilor de la forma rectilinie. Existența unor abateri de la forma rectilinie este echivalentă cu efectul unor încărcări transversale. Dacă forța P se aplică după montarea barei în poziție curbilinie (fig. VIII.14), se poate scrie folosind și relațiile (VIII.11):

$$M = P(e+v) = -EIv'';$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = P\frac{d^2(e+v)}{dx^2}$$

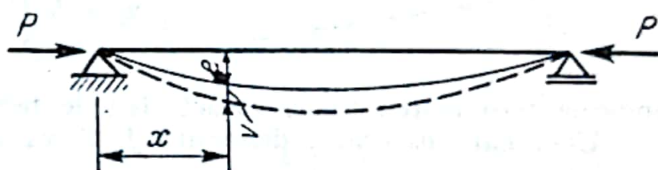


Fig. VIII.14

și se ajunge la ecuația diferențială

$$\frac{d^4v}{dx^4} + k^2\frac{d^2v}{dx^2} = -k^2\frac{d^2e}{dx^2}. \qquad \text{(VIII.19)}$$

Pentru cazul particular al unei curbe inițiale e sinusoidale cu amplitudinea e_0 soluția ecuației diferențiale (VIII.19) este

$$v = \frac{k^2l^2e_0}{\pi^2 - k^2l^2}\sin\frac{\pi}{l}x. \qquad \text{(VIII.20)}$$

Expresia momentului încovoietor se poate pune sub forma

$$M = -EIv'' = \frac{1}{1-\frac{P}{P_E}}M_0 \qquad \text{(VIII.21)}$$

unde s-au introdus notațiile

$$P_E = P_{cr}\,(\text{Euler}) = \frac{\pi^2EI}{l^2}; \quad M_0 = Pe = Pe_0\sin\frac{\pi}{l}x.$$

În acest caz, M_0 reprezintă diagrama de momente inițiale fără considerarea deplasărilor suplimentare aduse de forța P.

Se constată prin calcul că relația (VIII.21) se poate aplica, cu oarecare aproximație, și pentru cazul cînd M_0 provine din sarcini transversale. Ea reprezintă deci, aproximativ, expresia diagramei momentelor încovoietoare de ordinul II (M) în funcție de diagrama momentelor încovoietoare de ordinul I (M_0) din sarcini transversale oricare ar fi aceste sarcini.

3. STUDIUL STABILITĂȚII SISTEMELOR PLANE DE BARE DREPTE PRIN METODELE GENERALE

3.1. Ipoteze, notații

În conformitate cu ipotezele expuse în cap. 1 forțele axiale din barele sistemului se consideră cunoscute acestea fiind chiar cele obținute printr-un calcul de ordinul I. De asemenea, se reamintește existența unui parametru unic variabil, în raport cu care se pot exprima toate forțele axiale ca și coeficienții ν evoluînd spre starea critică. Pentru aceasta se alege o bară oarecare de referință pentru care se scrie relația (VIII.18)

$$\nu_0 = l_0 \sqrt{\frac{P_0}{EI_0}} \qquad \text{(VIII.22)}$$

indicele zero marcînd aici caracteristicile barei alese.

Unei bare oarecare, denumită j, îi va corespunde

$$\nu_j = l_j \sqrt{\frac{P_j}{EI_j}} = \frac{l_j}{l_0} \sqrt{\frac{P_j}{P_0} \cdot \frac{I_0}{I_j}} \cdot l_0 \sqrt{\frac{P_0}{EI_0}} = \lambda_j \nu_0. \qquad \text{(VIII.23)}$$

Se reamintesc de asemenea ipotezele potrivit cărora toate barele au una din direcțiile principale de inerție ale secțiunilor transversale conținute în planul structurii, plan în care se produce deformarea și pierderea de stabilitate, caracteristicile secțiunilor transversale fiind constante în lungul barelor.

3.2. Deplasări elastice în calculul de ordinul II

În calculul de ordinul II deplasările elastice pot fi determinate cu o expresie analoagă expresiei Maxwell — Mohr.

$$\Delta_{i,II} = \int m_{xi} M_{x,II} \frac{dx}{EI}. \qquad \text{(VIII.24)}$$

În această relație indicativul II exprimă calculul de ordinul II (pe starea deformată). Aplicarea relației respective obligă cunoașterea prealabilă a diagramei de momente încovoietoare de ordinul II care se determină după indicațiile date la cap. 2, pct. 2.3.1. De exemplu, pentru bara din fig. VIII.15, *a* rotirea pe reazemul *B*, folosind expresia momentului încovoietor determinată în exemplul de calcul VIII.3, iar pentru m_{xi} folosind datele din fig. VIII.15, *c*, *d* este

$$\varphi_{B,II} = \int_0^l \left(-\frac{x}{l}\right) \frac{pl^2}{\nu^2} \left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} \sin\frac{\nu x}{l} + \cos\frac{\nu x}{l} - 1\right) dx =$$

$$= -\frac{pl^3}{24\,EI} \cdot \frac{24}{\nu^3} \left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right).$$

Această relaţie se poate pune sub forma

$$\varphi_{B,II} = \varphi_{B,I}\varepsilon(\nu)$$

unde $\varphi_{B,I}$ reprezintă rotirea în punctul dat în calculul de ordinul I, iar coeficientul $\varepsilon(\nu)$ este funcţia transcendentă de ν care marchează influenţa forţei axiale.

În general, deplasările elastice de ordinul II se exprimă

$$\Delta_{i,II} = \Delta_{i,I}\varepsilon_i(\nu). \qquad \text{(VIII.25)}$$

În tabelul VIII.3 sînt date cîteva cazuri mai frecvente indicîndu-se expresia $\varepsilon(\nu)$ din relaţia (VIII.25) cazuri care sînt indicate în fig.VIII.16, $a - l$.

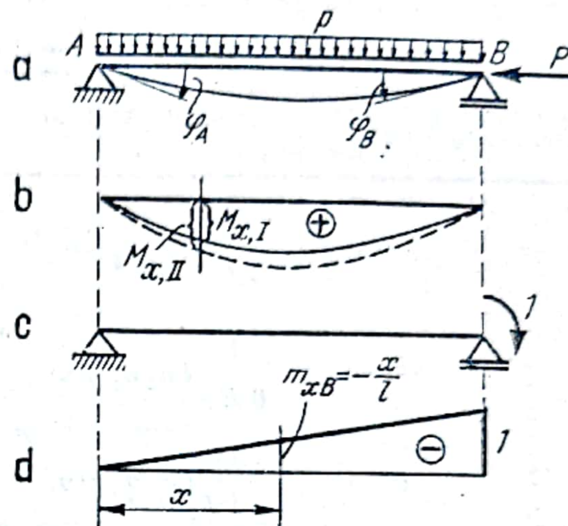


Fig. VIII.15

În fig. VIII.16 liniile punctate şi cele pline reprezintă diagramele de ordinul II respectiv I; pentru diagrame mai complicate acestea se pot descompune în figuri simple; toate ordonatele $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ sînt deduse printr-un calcul de ordinul I. Coeficienţii α, β, θ sînt întabulaţi în anexa VIII.1 de la sfîrşitul secţiunii.

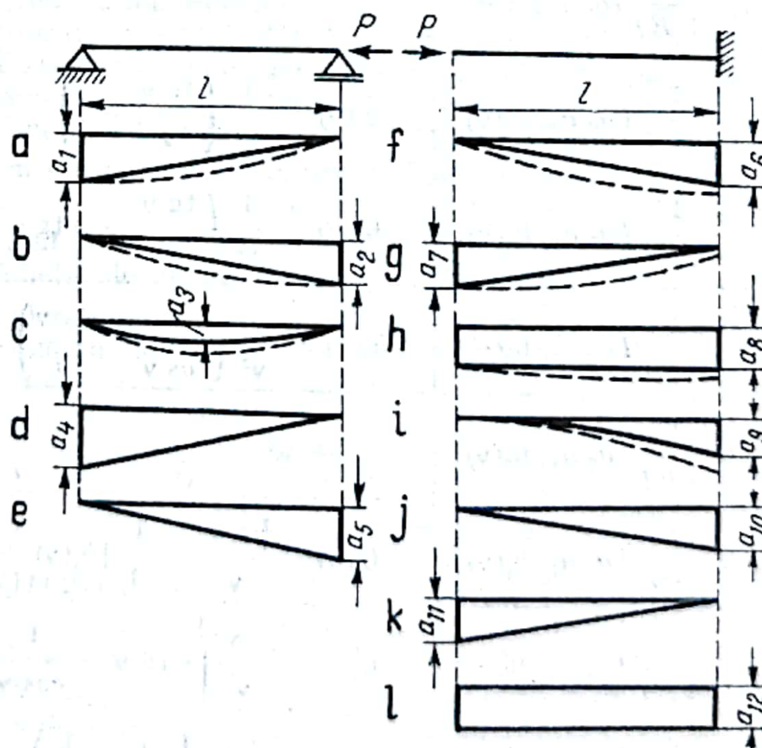


Fig. VIII.16

Tabelul VIII.3

Deplasări elastice în calculul de ordinul II

Tipul integralei (VIII.24) conform fig. VIII.16		Expresia (VIII.25)	Simbolul și expresia coeficientului de corecție
Grinda simplu rezemată	(a, d)	$\frac{1}{3\,EI}\, l\, a_1\, a_4\, \alpha(\nu)$	$\alpha(\nu) = \frac{3}{\nu}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\operatorname{tg}\nu}\right)$
	(b, d)	$\frac{1}{6\,EI}\, l\, a_2\, a_4\, \beta(\nu)$	$\beta(\nu) = \frac{6}{\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu} - \frac{1}{\nu}\right)$
	(a, e)	$\frac{1}{6\,EI}\, l\, a_1\, a_5\, \beta(\nu)$	
	(b, e)	$\frac{1}{3\,EI}\, l\, a_2\, a_5\, \alpha(\nu)$	
	(c, d)	$\frac{1}{3\,EI}\, l\, a_3\, a_4\, \alpha_0(\nu)$	$\alpha_0(\nu) = \frac{24}{\nu^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right) = \theta_1\left(\frac{\nu}{2}\right)$
	(c, e)	$\frac{1}{3\,EI}\, l\, a_3\, a_5\, \alpha_0(\nu)$	
Consola	(f, j)	$\frac{1}{3\,EI}\, l\, a_6\, a_{10}\, \theta_1(\nu)$	$\theta_1(\nu) = \frac{3}{\nu^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu} - 1\right)$
	(g, k)	$\frac{1}{3\,EI}\, l\, a_7\, a_{11}\, \theta_2(\nu)$	$\theta_2(\nu) = \frac{3}{\nu^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu} + \nu\operatorname{tg}\nu - \frac{2}{\cos\nu} + 1\right)$
	(f, k)	$\frac{1}{6\,EI}\, l\, a_6\, a_{11}\, \theta_3(\nu)$	$\theta_3(\nu) = \frac{6}{\nu^2}\left(\frac{1}{\cos\nu} - \frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\right)$
	(g, j)	$\frac{1}{6\,EI}\, l\, a_7\, a_{10}\, \theta_3(\nu)$	
	(h, l)	$\frac{1}{EI}\, l\, a_8\, a_{12}\, \theta_4(\nu)$	$\theta_4(\nu) = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu} = \frac{1}{3}\left[\theta_1(\nu) + \theta_2(\nu) + \theta_3(\nu)\right]$
	(i, j)	$\frac{1}{4\,EI}\, l\, a_9\, a_{10}\, \theta_0'(\nu)$	$\theta_0'(\nu) = \frac{8}{\nu^4}\left(\nu\operatorname{tg}\nu - \frac{1}{\cos\nu} - \frac{\nu^2}{2} + 1\right)$
	(i, k)	$\frac{1}{12\,EI}\, l\, a_9\, a_{11}\, \theta_0''(\nu)$	$\theta_0''(\nu) = \frac{24}{\nu^2}\left[\frac{1}{\cos\nu}\left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right) - 2\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{2}\right]$

3.3. Metoda eforturilor în calculul de ordinul II și al stabilității sistemelor static nedeterminate

3.3.1. Calculul de ordinul II. Calculul pe starea deformată, ținînd seama de forțele axiale este similar celui de ordinul I. Se alege o formă de bază și se alcătuiește sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \ldots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{10} &= 0 \\ &\vdots \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \ldots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{n0} &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(VIII.26)}$$

Coeficienții δ ai necunoscutelor și termenii liberi Δ se calculează ținîndu-se seama de influența forței axiale, deci cu relații de forma (VIII.25). Întrucît numai pentru cazurile din fig. VIII.16 și tabelul VIII.3 s-au obținut expresii suficient de simple pentru coeficientul de corecție rezultă că metoda eforturilor este avantajoasă pentru două tipuri de sisteme de bare: cadre cu noduri fixe (care se pot studia cu o formă de bază alcătuită din bare dublu articulate) și cadre cu noduri deplasabile cu un singur nivel cu stîlpii încastrați la bază (la care se poate folosi o formă de bază alcătuită din console și eventual bare dublu articulate cu deplasări normale pe bară, nule).

Ordinea operațiilor este: a) calculul forțelor axiale printr-un calcul de ordinul I; b) determinarea argumentelor ν cu relația (VIII.23); c) alegerea formei de bază conform alineatului precedent (este de observat că pentru un cadru cu noduri fixe în cazul cînd forma de bază este cu noduri deplasabile se poate lucra fie cu coeficienții α și β, fie cu coeficienții θ, dar pentru un cadru cu noduri deplasabile se pot utiliza numai coeficienții θ); d) trasarea diagramelor unitare și din forțe exterioare; e) calculul deplasărilor δ_{ij} cu ajutorul tabelului VIII.3; f) calculul deplasărilor Δ cu relația (VIII.24) (în tabelul VIII.3 sînt trecute numai cazurile corespunzătoare sarcinii uniform distribuite); g) rezolvarea sistemului (VIII.26); h) studiul fiecărei bare sub influența forțelor transversale — inclusiv necunoscutele aflate — și a forței axiale.

În barele cu compresiune mică ($\nu < 0{,}2\nu_{max}$) se poate neglija efectul factorilor de compresiune ν.

3.3.2. Calculul de stabilitate. Se exprimă cu ajutorul relației (VIII.23) toate argumentele ν în funcție de un argument de referință ν_0.

Momentul pierderii stabilității este caracterizat de creșterea nelimitată a eforturilor deci și a necunoscutelor X din sistemul (VIII.26). Aceasta are loc cînd determinantul sistemului este nul

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \ldots & \ldots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = D(\nu_0) = 0. \qquad \text{(VIII.27)}$$

Relația (VIII.27) constituie ecuația de stabilitate care dă valoarea parametrului ν_0 critic.

Dacă forțele exterioare conduc numai la forțe axiale în bare, în calculul de ordinul I sistemul (VIII.26) nu are termeni liberi, sistemul este omogen. Pentru a se obține valori X diferite de zero determinantul trebuie să fie nul și deci ecuația de stabilitate este tot (VIII.27). După determinarea parametrului critic sistemul (VIII.26) devine compatibil. Se alege pentru o necunoscută X_i o valoare arbitrară și se determină celelalte

în funcţie de X_i. Studiind apoi forma de bază sub influenţa acestor forţe se obţine, calitativ, forma de pierdere a stabilităţii un factor rămînînd nedeterminat (X_i).

Exemplul de calcul VIII.4. Se cere determinarea încărcărilor critice pentru cadrul din fig. VIII.17 încărcat în stadiul de exploatare ca în figură ($EI_0 = 20\,000$ kNm²). Se notează ; $l_{AB} = l_0 = 8$ m; $l_{DC} = l_0$; $l_{BC} = 10{,}00$ m $= 1{,}25 l_0$; $P_{AB} = P_0$; $P_{CD} = 0{,}5 P_0$. Se determină argumentele ν;

$$\nu_{AB} = l_0\sqrt{\frac{P_0}{EI_0}} = \nu_0; \quad \nu_{CD} = l_0\sqrt{\frac{0{,}5\,P_0}{EI_0}} = \nu_1 = 0{,}71\nu_0; \quad \nu_{BC} = \nu_2 = 0$$

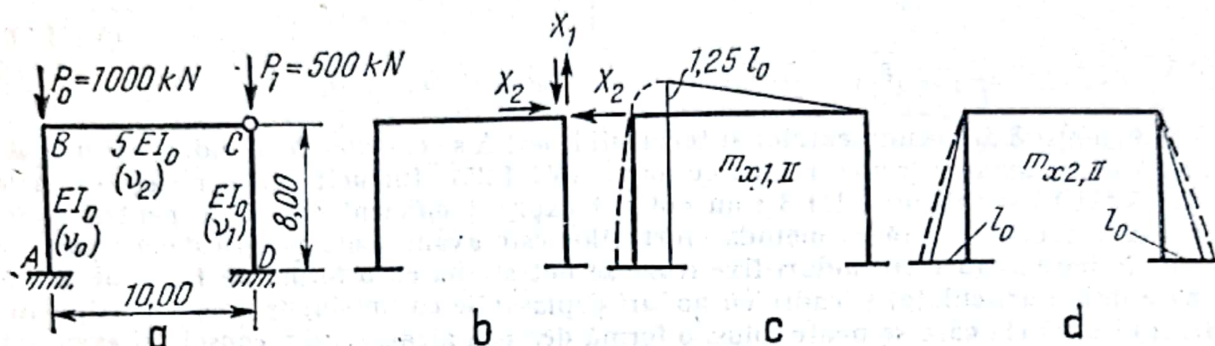


Fig. VIII.17

Forma de bază şi diagramele unitare sînt date în fig. VIII.17. *b*, *c* şi *d*. Deplasările δ_{ij} se deduc din tabelul VIII.3 (tip consolă).

$$\delta_{11} = 1{,}565\,\frac{l_0^3}{EI_0}\,\theta_4(\nu_0) + 0{,}131\,\frac{l_0^3}{EI_0};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0{,}417\,\frac{l_0^3}{EI_0}\,\theta_1(\nu_0) + 0{,}208)\,\frac{l_0^3}{EI_0}\,\theta_3(\nu_0);$$

$$\delta_{22} = 0{,}333\,\frac{l_0^3}{EI_0}\,[\theta_1(\nu_0) + \theta_1(\nu_1)].$$

Ecuaţia de stabilitate este

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Prin încercări rezultă valoarea parametrului critic $\nu_{0,min} = \nu_{0,cr} = 2{,}70$; $\nu_1 = 0{,}71\nu_0 = 1{,}92$ şi de aici forţele critice

$$P_{0,cr} = \frac{2{,}70^2\,EI_0}{l_0^2} = 2\,280\text{ kN}; \quad P_{1,cr} = 1\,140\text{ kN}.$$

Exemplul de calcul VIII.5. Se cere determinarea încărcărilor critice şi diagrama de momente încovoietoare de ordinul II pentru cadrul din fig. VIII. 18, *a* încărcat în stadiul de exploatare ca în figură. Se dă valoarea $EI_0 = 12\,000$ kNm².

Printr-un calcul de ordinul I se deduc forţele axiale

$$N_{AB} = -202{,}8\text{ kN}; \quad N_{BC} = -27{,}3\text{ kN}.$$

Se notează ;

$$|N_{AB}| = 202{,}8\text{ kN} = N_0; \quad |N_{BC}| = N_1 = 0{,}135\,N_0;$$
$$l_{AB} = l_0; \quad l_{BC} = 1{,}2 l_0.$$

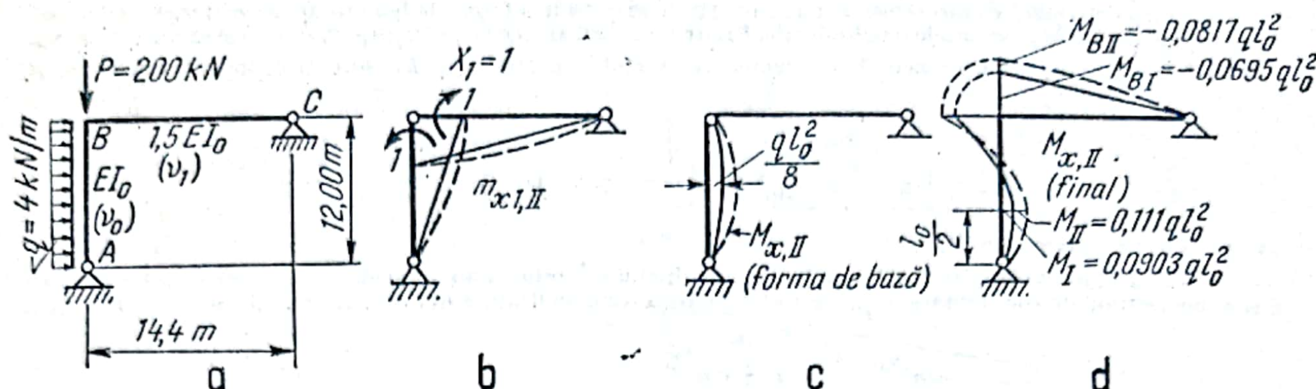


Fig. VIII.18

Se calculează factorii ν; $\nu_{AB} = \nu_0 = l_0 \sqrt{\dfrac{N_0}{EI_0}}$; $\nu_{BC} = 0{,}36\nu_0$.

Forma de bază și diagrama $m_{x1,II}$ este indicată in fig. VIII.18, *b*

$$\delta_{11} = \frac{l_0}{3EI_0}\,\alpha(\nu_0) + \frac{1{,}2l_0}{3\cdot 1{,}5EI_0}\,\alpha(\nu_1) = [0{,}333\alpha(\nu_0) + 0{,}267\alpha(\nu_1)]\,\frac{l_0}{EI_0}\,.$$

Ecuația de stabilitate și valoarea parametrului critic sint

$$\delta_{11} = 0{,}333\alpha(\nu_0) + 0{,}267\alpha(\nu_1) = 0;\quad \nu_{0,cr} = 3{,}76;\quad \nu_{1,cr} = 1{,}36$$

$$N_{0,cr} = \frac{3{,}76^2\ 12\,000}{12^2} = 1\,180\ \text{kN};\quad N_{1,cr} = 159\ \text{kN}.$$

Pentru calculul de ordinul II se determină factorii ν în stadiul de exploatare

$$\nu_0 = 12\sqrt{\frac{202{,}8}{12\,000}} = 1{,}57;\quad \nu_1 = 0{,}36\cdot 1{,}57 = 0{,}565.$$

Ecuația de continuitate

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{l_0}{EI_0}\,[0{,}333\ \alpha(1{,}57) + 0{,}267\ \alpha(0{,}565)] = 0{,}677\,\frac{l_0}{EI_0};$$

$$\Delta_{10} = \int m_{x1}M_{x,II}\,\frac{dx}{EI} = \frac{ql_0^3}{24\,EI_0}\,\alpha_0(\nu_0) = 0{,}055\,\frac{ql_0^3}{EI_0}$$

Pentru Δ_{10} s-a folosit tabelul VIII.3. Valoarea lui X_1 este

$$X_1 = M_B = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -0{,}0817\ ql_0^2 = -47{,}1\ \text{kNm}.$$

Se constată o creștere de aproximativ 18% a momentului M_B față de calculul de ordinul I ($M_{B,I} = -0{,}0695\ ql_0^2$).

Pentru determinarea diagramei de momente finale se consideră forma de bază încărcată cu forțele exterioare (inclusiv momentul M_B) și forțele longitudinale. Printr-un calcul analog celui din cap. 2, pct. 23 și exemplul de calcul VIII.3 se determină diagramele de momente. De exemplu, pentru bara BC se obține, luind originea în B,

$$M_x = M_B \frac{\sin \nu_1 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)}{\sin \nu_1} = -0{,}0817\, ql_0^2 \frac{\sin \nu_1 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)}{\sin \nu_1}$$

avind valoarea maximă în B.

Momentul încovoietor la jumătatea înălțimii stilpului se obține suprapunind efectele încărcării transversale q și a momentului de continuitate M_B, pe forma de bază după indicațiile din cap. 2, pct. 2.3. și tabelul VIII.2.

$$M_{0,5} = M_B \frac{\sin \frac{\nu_0}{2}}{\sin \nu_0} + ql_0^2 \frac{1 - \cos \frac{\nu_0}{2}}{\nu_0^2 \cos \frac{\nu_0}{2}} = 0{,}168\; ql_0^2 - 0{,}057\; ql_0^2 = 0{,}111\; ql_0^2 .$$

Se constată o creștere de aproximativ 23% față de calculul de ordinul I.

3.3.3. **Cazul grinzilor continue.** Analog cu sistematizarea care se folosește în calculul static de ordinul I, se obține ecuația celor trei momente pentru un reazem j

$$M_{j-1}l_j'\beta_j + 2M_j(l_j'\alpha_j + l_{j+1}'\alpha_{j+1}) + M_{j+1}l_{j+1}'\beta_{j+1} + 6EI_0(\varphi_{j,j+1} - \varphi_{j,j-1}) = 0 \quad \text{(VIII.28)}$$

unde:

$$l_j' = l_j \frac{I_0}{I_j} \; (I_0 \text{ arbitrar}).$$

În relația (VIII.28) rotirile φ se calculează după indicațiile din cap. 3, pct. 3.2. Citeva cazuri mai uzuale sînt date în tabelul VIII.4. O serie de cazuri particulare sînt date în lucrarea [31].

Ecuația de stabilitate se obține analog, anulind determinantul sistemului de ecuații de tip (VIII.28).

3.4. Metoda deplasărilor în calculul de ordinul II și al stabilității structurilor

3.4.1. **Calculul de ordinul II.** În principiu acest calcul este similar cu cel de ordinul I cu deosebirea că, în cazul de față, în calculul coeficienților se ține seama de influența forței axiale. Forma de bază este deci cea cu noduri blocate la rotire și deplasare avind ca elemente componente bare dublu încastrate sau încastrat-articulate.

Momentele încovoietoare de la capetele barei se pun în evidență prin articulații. Se convine să se acorde semnul pozitiv momentelor orare acționind pe nod (fig. VIII.19, *a*). Expresiile acestor momente sînt

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \mathfrak{M}_{AB} - 4i_{AB}\varphi_A\Phi_2(\nu) - 2i_{AB}\varphi_B\Phi_3(\nu) + 6i_{AB}\theta_{AB}\Phi_4(\nu) \\ M_{BA} &= \mathfrak{M}_{BA} - 4i_{AB}\varphi_B\Phi_2(\nu) - 2i_{AB}\varphi_A\Phi_3(\nu) + 6i_{AB}\theta_{AB}\Phi_4(\nu) \end{aligned} \quad \text{(VIII.29)}$$

pentru bara dublu încastrată şi

$$M'_{AB} = \mathfrak{M}'_{AB} - 3i_{AB}\varphi_A\Phi_1(\nu) + 3i_{AB}\theta_{AB}\Phi_1(\nu) \qquad \text{(VIII.30)}$$

pentru bara încastrată în A şi articulată în B.

În relaţiile de mai înainte s-au folosit notaţiile:

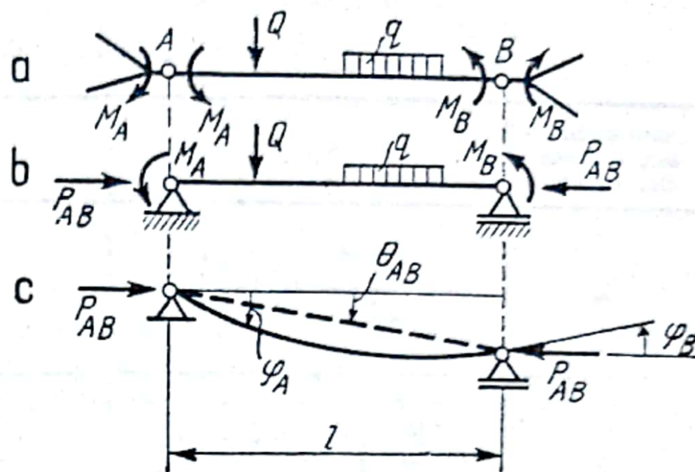


Fig. VIII.19

$$i_{AB} = \frac{EI_{BA}}{l_{AB}};$$

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{\alpha} = \frac{\nu^2 \operatorname{tg}\nu}{3(\operatorname{tg}\nu - \nu)};$$

$$\Phi_2(\nu) = \frac{3\alpha}{4\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\nu(\operatorname{tg}\nu - \nu)}{8\operatorname{tg}\nu\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}.$$

$$\Phi_3(\nu) = \frac{3\beta}{4\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\nu(\nu - \sin\nu)}{4\sin\nu\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}; \qquad \Phi_4(\nu) = \frac{2\alpha + \beta}{4\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\nu^2 \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{12\left(\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}. \qquad \text{(VIII.31)}$$

Funcţiile Φ se găsesc intabulate în anexa VIII.2 de la sfîrşitul secţiunii. Expresiile momentelor de încastrare perfectă sînt:

$$\mathfrak{M}_{AB} = 6i_{AB}\frac{2\varphi_{A,Q}\alpha + \varphi_{B,Q}\beta}{4\alpha^2 - \beta^2}; \qquad \mathfrak{M}_{BA} = 6i_{AB}\frac{2\varphi_{A,Q}\alpha + \varphi_{A,Q}\beta}{4\alpha^2 - \beta^2} \qquad \text{(VIII.32)}$$

$$\mathfrak{M}'_{AB} = 3i_{AB}\frac{\varphi_{A,Q}}{\alpha}.$$

În aceste relaţii $\varphi_{A,Q}$ şi $\varphi_{B,Q}$ sînt rotirile de la capetele barei simplu rezemate cauzate de încărcările exterioare ţinîndu-se seamă de influenţa forţelor longitudinale, rotiri care se pot calcula, în principiu, cu relaţii de tip (VIII.25). Cîteva expresii ale acestor rotiri pentru cazurile din fig. VIII.20, sînt date în tabelul VIII.4. După cum se constată uşor în cazul c din tabelul VIII.4, rotirea poate fi pusă sub o formă analoagă cu expresia (VIII. 21):

$$\varphi_{JI} = \varphi_I \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}, \qquad \text{(VIII.33)}$$

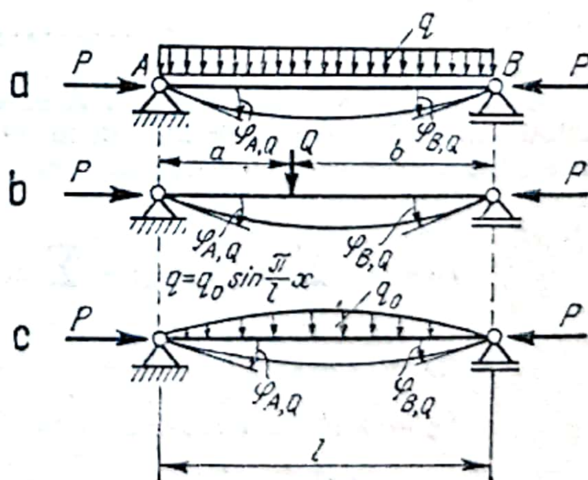


Fig. VIII.20

Tabelul VIII.4

Expresiile rotirilor la capetele barei comprimate

Cazul de încărcare conform fig. VIII.20	$\varphi_{A,Q}$	$\varphi_{B,Q}$
a	$\frac{ql^3}{24\,EI}\,\theta_1\left(\frac{\nu}{2}\right)$	$-\frac{ql^3}{24\,EI}\,\theta_1\left(\frac{\nu}{2}\right)$
b	$\frac{Ql^2}{EI\,\nu^2}\left(\frac{\sin b\nu/l}{\sin\nu}-\frac{b}{l}\right)$	$-\frac{Ql^2}{EI}\,\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{\sin a\nu/l}{\sin\nu}-\frac{a}{l}\right)$
c	$\frac{q_0 l^3}{\pi^3 EI}\,\frac{\pi^2}{\pi^2-\nu^2}$	$-\frac{q_0 l^3}{\pi^3 EI}\,\frac{\pi^2}{\pi^2-\nu^2}$

P_E avînd semnificaţia din expresia (VIII.21), indicii I şi II marcînd ordinul I respectiv II.

Relaţia (VIII.33) este valabilă strict pentru cazul unei încărcări sinusoidale. În mod aproximativ această relaţie poate fi folosită însă şi pentru cazul unei încărcări oarecare, astfel încît rotirile φ_A şi φ_B pot fi determinate simplu pentru orice fel de încărcare, cu suficient de bună aproximaţie.

Calculul de ordinul II revine la rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \ldots + Z_n r_{1n} + R_{10} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\ Z_1 r_{n1} + \ldots\ldots\ldots + Z_n r_{nn} + R_{n0} &= 0 \end{aligned} \tag{VIII.34}$$

Coeficienţii r şi termenii liberi R se deduc folosind principiul deplasărilor virtuale ţinînd seama şi de cuplul realizat de forţele longitudinale pentru cazul rotirilor de bară. Expresiile acestor coeficienţi, notînd cu j, g, h rotiri de noduri, k, l grade de libertate sînt:

$$r_{jj} = -\sum_h 4i_{jh}\Phi_2(\nu_{jh}) - \sum_{h'} 3i_{jh'}\Phi_1(\nu_{jh'})$$

$$r_{jg} = -2i_{jg}\Phi_3(\nu_{jg}) \quad (\text{dacă există bara } jg)$$

$$r_{jg} = 0 \quad (\text{dacă nu există bara } jg)$$

$$r_{jk} = \sum_h 6i_{jh}\theta_{jh,k}\Phi_4(\nu_{jh}) + \sum_{h'} 3i_{jh'}\theta_{jh',k}\Phi_1(\nu_{jh'})$$

$$r_{kl} = -\sum_{jh} 12 i_{jh}\theta_{jh,k}\theta_{jh,l}\eta_2(\nu_{jh}) - \sum_{jh'} 3 i_{jh'}\theta_{jh',k}\theta_{jh',l}\eta_1(\nu_{jh'}) + \qquad \text{(VIII.35)}$$

$$+ \sum_{j'h'} i_{j'h'}\theta_{j'h',k}\theta_{j'h',l}\nu^2_{j'h'}$$

$$R_{j0} = \sum_h \mathfrak{M}_{jh} + \sum_{h'} \mathfrak{M}'_{jh'}$$

$$R_{k0} = -\sum_{jh} (\mathfrak{M}_{jh} + \mathfrak{M}_{hj})\,\theta_{jh,k} - \sum_{jh'} \mathfrak{M}'_{jh'}\theta_{jh',k} + L_{Q,k}.$$

În relațiile (VIII.35) j' și h' reprezintă noduri articulate, $\theta_{jh,k}$ este rotirea barei jh corespunzătoare gradului de libertate $Z_k=1$ iar $L_{Q,k}$ este lucrul mecanic realizat de forțele exterioare transversale parcurgînd deplasările cinematice corespunzătoare gradului de libertate $Z_k = 1$ cum se procedează în statica liniară.

Noile funcții transcendente sînt

$$\eta_1 = \Phi_1(\nu) - \frac{\nu^2}{3} \quad ; \quad \eta_2 = \Phi_4(\nu) - \frac{\nu^2}{12} \qquad \text{(VIII.36)}$$

și se găsesc întabulate în anexa VIII.2.

Ordinea operațiilor în calculul de ordinul II este deci:

a) determinarea forțelor axiale (calcul de ordinul I);

b) calculul factorilor ν cu relația (VIII.23);

c) calculul coeficienților r și termenilor liberi R cu relațiile (VIII.35);

d) rezolvarea sistemului (VIII.34);

e) calculul momentelor de la capete cu relațiile (VIII.29) și (VIII.30);

f) determinarea eforturilor în bare considerîndu-le ca bare dublu articulate încărcate transversal cu forțele exterioare și momentele de capăt și cu forțele longitudinale după indicațiile din cap. 2, pct. 2.3 ținînd însă seama și de deplasările de noduri.

3.4.2. **Calculul de stabilitate.** Toți factorii ν pot fi puși în funcție de un singur parametru de referință, ν_0, după relația (VIII.23). Ecuația de stabilitate este

$$D(\nu_0) = \begin{vmatrix} r_{11} r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \\ r_{n1} & \cdots\cdots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(VIII.37)}$$

Ecuația este valabilă, ca și în metoda eforturilor, atît pentru existența forțelor transversale cît și pentru cazul cînd nu există decît forțe longitudinale echilibrate pe fiecare bară.

Dacă există bare dublu articulate, $j'h'$, la valoarea critică rezultată din relația (VIII.37) se adaugă și valorile de pierdere locală a stabilității acestor bare (ca bare dublu articulate) deoarece relația (VIII.37) pune în evidență numai pierderea generală de stabilitate.

Exemplul de calcul VIII.6. Se cere determinarea încărcărilor critice pentru cadrul din fig. VIII.21, *a*. Cadrul este cu noduri deplasabile. Necunoscutele sînt indicate în fig. VIII.21, *b*. Se notează:

$$\nu_{BC} = l\sqrt{\frac{2P}{EI}} = \nu_0; \quad \nu_{DE} = l\sqrt{\frac{P}{EI}} = \nu_1 = 0{,}71\nu_0; \; \nu_{AB} = \nu_{BD} = \nu_{DF} = 0;$$

$$i_{BC} = \frac{EI}{l} = i_0; \; i_{DE} = i_0; \quad i_{AB} = i_{DF} = \frac{3EI}{1{,}5l} = 2i_0; \; i_{BD} = 2i_0.$$

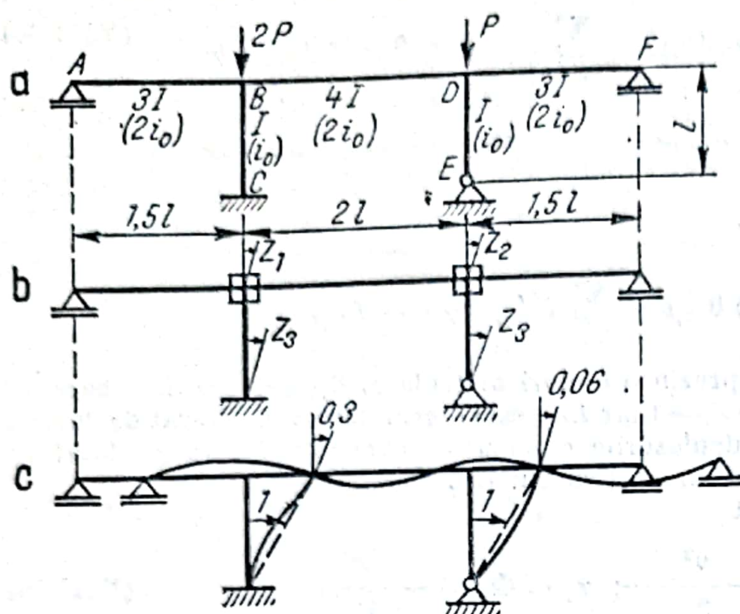


Fig. VIII.21

Coeficienții r, după relațiile (VIII.35), sint

$$r_{11} = -4i_0\Phi_2(\nu_0) - 3\cdot 2i_0 - 4\cdot 2i_0 = -14i_0 - 4i_0\Phi_2(\nu_0);\quad r_{12} = -2\cdot 2i_0 = -4i_0$$

$$r_{13} = 6i_0\Phi_4(\nu_0);\quad r_{22} = -4\cdot 2i_0 - 3i_0\Phi_1(\nu_1) - 3\cdot 2i_0 = -14i_0 - 3i_0\Phi_1(\nu_1)$$

$$r_{23} = 3i_0\Phi_1(\nu_1);\quad r_{33} = -12i_0\eta_2(\nu_0) - 3i_0\eta_1(\nu_1).$$

Ecuația de stabilitate este

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

unde toți coeficienții r sint funcție, in ultimă instanță, de ν_0.

Prin încercări se găsește

$$\nu_{0,cr} = 2,70;\quad \nu_{1,cr} = 1,9;\quad P_{cr} = \frac{1,9^2 EI}{l^2} = 3,6\,\frac{EI}{l^2}.$$

Introducind valorile ν_0 și ν_1 în sistemul (VIII.34) — fără termeni liberi — și luind valoarea arbitrară $Z_3 = 1$ rezultă pentru celelalte deplasări; $Z_1 = 0,3$ și $Z_2 = 0,06$. Forma de pierdere a stabilității este indicată în fig. VIII.21, c (calitativ).

Exemplul de calcul VIII.7. Să se determine sarcina critică și diagrama momentelor încovoietoare de ordinul II pentru grinda din fig. VIII.22 pentru cazul cind $P = 0,3\,P_{cr}$. Singura necunoscută este Z_1.

Se notează: $\nu_{AB} = l\sqrt{\dfrac{P}{EI}} = \nu_0$; $\nu_{BC} = \nu_1 = 0,5l\sqrt{\dfrac{2P}{EI}} = 0,71\,\nu_0$;

$$r_{11} = -3i_0\Phi_1(\nu_0) - 3\cdot 2i_0\Phi_1(\nu_1);\quad i_0 = \frac{EI}{l}.$$

Ecuația de stabilitate: $r_{11} = 0$ sau $3\Phi_1(\nu_0) + 6\Phi_1(\nu_1) = 0$ dă prin încercări

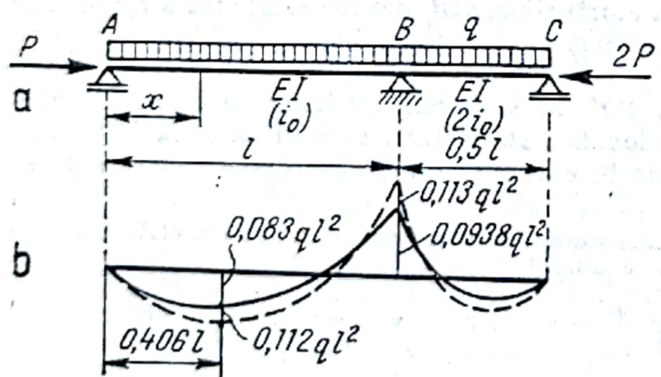


Fig. VIII.22

$$\nu_{0,cr} = 3,67;\quad \nu_{1,cr} = 2,60;$$

$$P_{cr} = \frac{3,67^2 EI}{l^2} = 13,5\,\frac{EI}{l^2}.$$

Pentru calculul de ordinul II se determină factorii ν în situația de exploatare

$$\nu_{AB} = \nu_0 = l\sqrt{\frac{1}{EI}\,0,30\cdot\frac{13,5EI}{l^2}} = 2,01;$$

$$\nu_{BC} = \nu_1 = 0,71\cdot 2,01 = 1,425.$$

Ecuația metodei deplasărilor:

$$Z_1 r_{11} + R_{10} = 0$$

$$r_{11} = -3i_0\Phi_1(2,01) - 6i_0\Phi_1(1,425) = -7,22i_0$$

Momentele de încastrare perfectă se determină cu relaţia (VIII.32), tabelul VIII.4 şi anexa VIII.1 ;

$$\mathfrak{M}'_{AB} = 3i_0\left[-\frac{ql^3}{24EI}\,\theta_1\left(\frac{2{,}01}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{\alpha(2{,}01)} = -\frac{1}{8}\,ql^2\cdot\frac{1{,}672}{1{,}44} = -0{,}145ql^2$$

$$\mathfrak{M}'_{BC} = 3\cdot 2i_0\left[\frac{q(0{,}5l)^3}{24EI}\,\theta_1\left(\frac{1{,}425}{2}\right)\right]\frac{1}{\alpha(1{,}425)} = 0{,}034\,ql^2$$

De aici, folosind relaţia (VIII.35), se obţine

$$R_{10} = (-0{,}145 + 0{,}034)\,ql^2 = -0{,}111ql^2;\; Z_1 = -\frac{R_{10}}{r_{11}} = -0{,}0154\,\frac{ql^2}{i}.$$

Momentul încovoietor final este

$$M_{BA} = -M_{BC} = \mathfrak{M}'_{BA} - 3i_0Z_1\Phi_1(\nu_0) = -0{,}113\,ql^2.$$

Sporul adus de calculul de ordinul II este de 20% ($M_{BI} = -0{,}094\,ql^2$). Diagrama finală are forma din fig. VIII.22, *b*. Momentele maxime în calculul de ordinul I respectiv II se produc aproximativ în aceeaşi secţiune ($\alpha = 0{,}406\,l$). Sporul la momentul maxim este de aproximativ 35%.

3.5. Domeniile de aplicare a metodelor generale în problema stabilităţii

Ambele metode generale conduc la ecuaţii de stabilitate în care parametrul critic intervine prin funcţii transcendente. Ecuaţia este cu atît mai complicată cu cît numărul de necunoscute este mai mare. Deci o primă limitare a folosirii metodelor generale se datoreşte volumului mare de calcule pe care acestea le reclamă. Problema numărului de necunoscute însă poate fi simplificată cel puţin aproximativ în cazul metodei deplasărilor (v. cap. 4). În afară de aceasta mai există şi alte avantaje ale metodei deplasării în raport cu metoda eforturilor.

1) Metoda eforturilor nu se poate aplica sistemelor static determinate (deoarece forma de bază se obţine prin scoaterea de legături).

2) Forma de bază a metodei deplasărilor este foarte generală şi în acelaşi timp foarte simplă (bare încastrate sau încastrate şi articulate). În cazul metodei eforturilor nu există pînă în prezent o sistematizare satisfăcătoare a unei forme de bază generale şi din această cauză aplicarea ei este limitată.

3) Posibilitatea pierderii de stabilitate prin soluţii banale (necunoscute de calcul nule), avantajează, de asemenea, metoda deplasărilor după cum se arată în continuare.

În cazul cînd forţele exterioare se pot reduce la perechi de forţe longitudinale echilibrate pe fiecare bară sistemele de ecuaţii (VIII.26) şi (VIII.34) devin omogene. Ecuaţia de stabilitate se obţine prin excluderea soluţiei banale ($D = 0$). Aceste sisteme de ecuaţii omogene pot fi însă satisfăcute şi prin soluţii banale ($D \neq 0$ şi necunoscute nule). Dacă acest lucru este posibil, atunci aceasta constituie o nouă soluţie necuprinsă în ecuaţia de stabilitate. Trebuie aşadar, să se cerceteze dacă această soluţie este mai periculoasă decît cea furnizată de ecuaţia de stabilitate.

În cazul metodei deplasărilor pierderea de stabilitate banală ar corespunde situaţiei cînd fiecare bară ar flamba ca bară încastrată (deci ca în fig. VIII. 6, *b* sau *c*). Sarcina critică pentru acest caz este însă mai mare decît cea care ar corespunde existenţei unor rotiri sau deplasări de noduri. Deci se poate spune în mod cert că în metoda deplasărilor soluţia indicată de ecuaţia de stabilitate este mai mare (adică mai puţin periculoasă) decît cea banală.

În metoda eforturilor soluţia banală poate duce la valori mai periculoase ale sarcinii critice. De exemplu, pentru cazul din fig. VIII.23, dacă se aleg ca necunoscute momentele din nodurile A şi B, un flambaj, cu necunoscute nule ar însemna un flambaj în care toate barele ar fi dublu articulate (v. fig. VIII.6, *a*). Or, ecuaţia de stabilitate

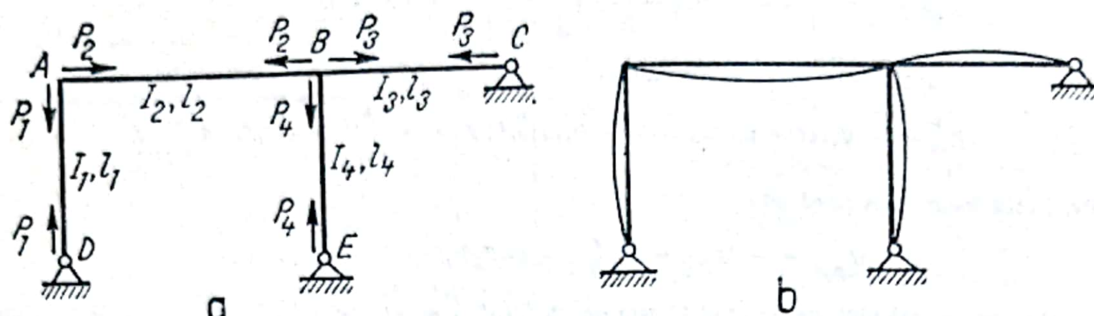


Fig. VIII.23

furnizează soluţii pentru care momentele sînt diferite de zero deci barele conlucrează. Este clar deci că sarcina critică va fi în acest caz mai mare. În consecinţă, flambajul cu necunoscute nule este mai periculos.

Flambajul în soluţie banală nu este însă posibil decît dacă între forţele axiale efective şi forţele critice corespunzătoare necunoscutelor nule există o proporţionalitate care să facă posibilă existenţa unui parametru unic. Alături, deci, de rezolvarea ecuaţiei de stabilitate trebuie cercetată în cazul metodei eforturilor şi posibilitatea existenţei soluţiei de flambaj cu necunoscute nule şi dacă aceasta este posibilă, constituie şi soluţia periculoasă.

Unele situaţii particulare care trebuie analizate diferit apar în cazul cînd metoda deplasărilor se aplică sistemelor în care unele bare sînt articulate.

3.6. Utilizarea proprietăţilor de simetrie

În cazul studiului stabilităţii o structură poate fi considerată drept simetrică în raport cu o axă atunci cînd simetria se manifestă atît în ceea ce priveşte elementele geometrice, elastice, de rezemare, cît şi în ce priveşte forţele axiale.

Spre deosebire de statica liniară unde pentru o încărcare simetrică acţionînd pe o structură simetrică rezultă o deformată simetrică, în stabilitate în cazul unor încărcări simetrice pierderea de stabilitate poate fi atît simetrică cît şi antisimetrică.

Pentru a obţine anumite simplificări de calcul în cazul structurilor simetrice încărcate cu forţe axiale simetrice se pot folosi necunoscutele grupate în necunoscute simetrice şi necunoscute antisimetrice. Întrucît deplasările δ_{ij} sau reacţiunile r_{ij} sînt nule pentru cazul cînd necunoscuta i este simetrică iar necunoscuta j este antisimetrică, sistemul general de ecuaţii se împarte în două grupe: una conţine necunoscutele simetrice alta conţine necunoscutele antisimetrice. De asemenea, ecuaţia de stabilitate se scindează în două ecuaţii: una reflectînd pierderea de stabilitate prin deplasare simetrică iar cealaltă prin deformare antisimetrică.

Necunoscutele folosite chiar pe axa de simetrie au de la început proprietate de simetrie sau antisimetrie. Restul necunoscutelor trebuie grupate simetric şi antisimetric. Pentru o urmărire clară a termenilor este bine să fie condus calculul luînd în considerare întreaga structură.

În cazul metodei deplasărilor calculul rigidităţilor r corespunzătoare necunoscutelor rotiri de noduri pentru elementele care sînt tăiate de axa de simetrie se face observînd următoarele cazuri :

1) Axa de simetrie intersectează o bară (fig. VIII.24,*a*). Folosind relaţiile (VIII.29) se poate scrie pentru această bară :

$$r_{jj} = 2[-4i_{AB}\cdot 1\Phi_2(\nu_{AB}) - 2i_{AB}(-1)\Phi_3(\nu_{AB})] = 2\left[-4i_{AB}\left(\Phi_2 - \frac{\Phi_3}{2}\right)\right]$$

$$r_{gg} = 2\left[-4i_{AB}\left(\Phi_2 + \frac{\Phi_3}{2}\right)\right]. \qquad \text{(VIII.38)}$$

2) Axa de simetrie intersectează un nod cu 2 bare (fig. VIII.24, *b*). Se consideră fie toate necunoscutele Z_j, Z_g, Z_k şi calculul este obişnuit, fie numai necunoscutele Z_j, Z_g dar în acest caz pentru r_{jj} în C se va presupune o încastrare iar pentru r_{gg} în C se va presupune o articulaţie.

3) Axa de simetrie intersectează un nod cu stîlp (fig. VIII.24,*c*). Pentru necunoscuta simetrică Z_j, r_{jj} se va calcula socotind o încastrare în C. Pentru r_{gg} şi r_{hh} se va folosi schema VIII.24,*d*.

Observaţiile de mai înainte nu s-au referit la necunoscutele grade de libertate. Bineînţeles şi aceste necunoscute se vor descompune în componentele simetrice şi antisimetrice. În cazul fig. VIII.24,*a* nu poate exista decît o rotire de bară antisimetrică. În cazul fig. VIII. 24.*b* pentru rotirile de bară simetrice se va presupune în C rotirea de nod nulă. Pentru rotirile de bară antisimetrice dacă s-a considerat Z_k în calcul barele AC şi CB se vor considera încastrate iar dacă Z_k nu s-a introdus în calcul (vezi observaţia 2 de mai înainte) atunci în C se va presupune o articulaţie.

În cazul fig. VIII.24,*c* observaţia 3 se păstrează.

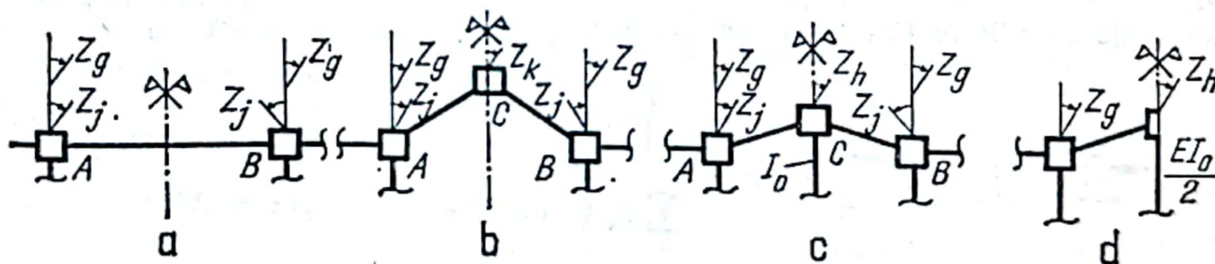


Fig. VIII.24

4. METODE ŞI CAZURI PRACTICE ÎN STUDIUL STABILITĂŢII BAREI ŞI A CADRELOR PLANE

Metodele generale conduc de regulă la ecuaţii de stabilitate cu atît mai complicate cu cît numărul de necunoscute este mai mare. Dificultăţile de rezolvare sînt cu atît mai mari cu cît parametrul necunoscut intervine prin intermediul unor funcţii transcendente. Aceste aspecte explică apariţia metodelor de calcul aproximative. Cîteva din cele mai răspîndite sînt redate succint în cele ce urmează şi se aplică pentru cazuri cu variaţii oarecare a rigidităţii sau distribuţiei sarcinilor axiale.

4.1. Metode aproximative în studiul stabilităţii barei drepte

4.1.1. Metoda energetică. Conform teoremei Dirichlet o poziţie de echilibru este stabilă dacă pentru o variaţie mică a deformaţiei rezultă $\Delta\pi > 0$ şi instabilă dacă $\Delta\pi < 0$. Situaţia critică este deci marcată de

$$\Delta\pi = \Delta(U_i + U_e) = 0. \qquad \text{(VIII.39)}$$

În această relaţie π este energia potenţială totală compusă din energia potenţială de deformaţie U_i şi energia potenţială a forţelor exterioare U_e. În calculele de ordinul II, reţinînd pentru U_i numai efectul încovoierii, acestea sînt

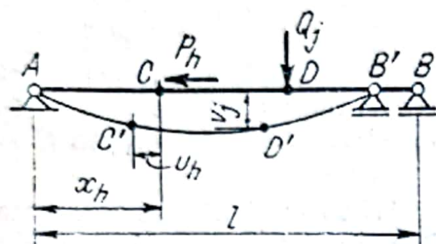


Fig. VIII.25

$$U_i = \frac{1}{2}\int \frac{M^2\,\mathrm{d}x}{EI} = \frac{1}{2}\int EI(v'')^2\,\mathrm{d}x;$$

$$U_e = -\sum_j Q_j v_j - \sum_h P_h u_h. \qquad \text{(VIII.40)}$$

În relaţia (VIII.40) forţele Q şi deplasările v sînt transversale iar forţele P şi deplasările u sînt longitudinale barei (fig. VIII.25).

În cazul barei drepte poziţia de referinţă a barei este cea rectilinie pentru care atît U_i cît şi U_e sînt nule astfel încît variaţiile acestor mărimi în jurul poziţiei respective sînt chiar mărimile lor corespunzătoare deformaţiei.

În absenţa forţelor transversale Q şi considerînd toate forţele longitudinale funcţie de un singur parametru

$$P_h = \alpha_h P_0 \qquad \text{(VIII.41)}$$

ecuaţia de stabilitate (VIII.39) conduce la:

$$P_{0,cr} = \frac{\int_0^l EI(v'')^2\,\mathrm{d}x}{\sum_h \alpha_h \int_0^{x_h} (v')^2\,\mathrm{d}x}. \qquad \text{(VIII.42)}$$

În cazul unei singure forţe longitudinale aplicată în B

$$P_{cr} = \frac{\int_0^l EI(v'')^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x}. \qquad \text{(VIII.43)}$$

Funcţia v reală fiind necunoscută, metoda energetică constă în a alege o funcţie arbitrară care conduce la o valoare aproximativă a forţei critice. Pentru a reduce cît mai mult abaterea faţă de valoarea corectă se indică alegerea unei funcţii v cu respectarea condiţiilor de margine cît mai complet. Rezultate bune se obţin folosind drept curbă v

o deformată statică oarecare a barei. Chiar în acest caz însă valoarea forţei critice obţinute este mai mare decît cea reală, întrucît adoptarea altei curbe decît cea reală este echivalentă cu introducerea unor legături suplimentare.

4.1.2. Metode variaţionale. O îmbunătăţire a metodei expusă la pct. 4.1.1. constă în a alege drept funcţie v o combinaţie liniară a unor funcţii v_1, v_2...alese astfel încît să satisfacă condiţiile de margine (procedeu propus de Ritz).

$$v = C_1v_1 + C_2v_2 + \ldots + C_nv_n. \tag{VIII.44}$$

Pentru respectarea condiţiei (VIII.39) în raport cu coeficienţii nedeterminaţi C, este necesară satisfacerea relaţiilor:

$$\frac{\partial\pi}{\partial C_1} = 0; \quad \frac{\partial\pi}{\partial C_2} = 0 \ldots \frac{\partial\pi}{\partial C_n} = 0. \tag{VIII.45}$$

Relaţiile (VIII.45) constituie un sistem de ecuaţii omogene în $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Anulînd determinantul pentru compatibilitate se obţine o ecuaţie în care necunoscuta este P_{cr}. În cazul cînd se foloseşte un singur termen metoda Ritz este identică cu metoda energetică.

Un alt procedeu variaţional, propus de Galiorkin, constă în folosirea funcţiilor ortogonale sub o formă similară cu (VIII.44). În acest caz nu se foloseşte criteriul energetic ci se pleacă de la satisfacerea ecuaţiei fundamentale (VIII.9). Pentru detalii vezi lucrarea [20].

4.1.3. Metode numerice. În aceste procedee utile pentru variaţii oarecare ale rigidităţii, axa deformată a barei nu se mai reprezintă prin funcţii ci printr-un ansamblu de deplasări transversale ale unor puncte alese arbitrar.

Metoda ,,micilor deplasări'' [27, 28, 6] porneşte de la ideea că pentru un sistem acţionat numai de forţe axiale, în momentul pierderii stabilităţii, deformata trebuie considerată simultan atît ca efect al existenţei eforturilor în bară cît şi cauză a apariţiei acestor eforturi. De obicei se ţine seama numai de momentele încovoietoare.

Deformata barei se caracterizează printr-un număr finit de săgeţi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (fig. VIII.26). Urmărind figura se poate scrie:

$$M_1 = Pv_1; \; M_2 = Pv_2 \ldots M_n = Pv_n. \tag{VIII.46}$$

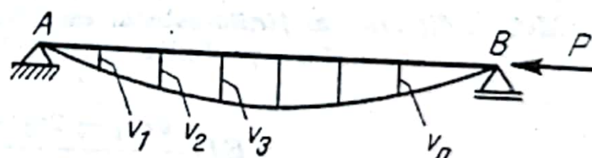


Fig. VIII.26

Folosind diagrama de momente caracterizată de relaţia (VIII.46) se poate calcula:

$$v_j = \int M_x m_{xj} \frac{dx}{EI} = a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \ldots + a_{jj}v_j + \ldots + a_{jn}v_n$$

relaţie care se poate transcrie astfel:

$$a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \ldots + (a_{jj} - 1)\, v_j + \ldots + a_{jn}v_n = 0 \tag{VIII.47}$$

Pentru $j = 1,2,\ldots,n$ relaţia (VIII.47) generează un sistem omogen de n ecuaţii liniare. Pentru compatibilitate, excluzîndu-se soluţia banală, este necesar ca determi-

nantul să fie nul ceea ce constituie ecuaţia de stabilitate, coeficienţii a_{jh} fiind funcţie de P

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} \dots & \dots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(VIII.48)}$$

Metoda admite în cazul fig. VIII.26 şi o rezolvare prin aproximaţii succesive (metoda grafo-analitică). Se porneşte de la o serie de valori arbitrare pentru săgeţi, v_j' se determină momentele încovoietoare, $M_j' = P_{cr}v_j'$, se consideră sarcinile elastice reduse, $W_j' = \dfrac{v_j'}{EI_j}$ şi de aici, pe grinda conjugată, momentele fictive corespunzătoare $\mathfrak{M}_j'$ care sînt chiar săgeţile corespunzătoare sarcinilor elastice reduse, v_j''. Este evident însă că, întrucît sarcinile elastice au fost reduse, are loc relaţia

$$v_j' = P_{cr}' v_j''$$

şi de aici,

$$P_{cr}' = \frac{v_j'}{v_j''} = \frac{W_j'}{\mathfrak{M}_j} EI_j \qquad \text{(VIII.49)}$$

care constituie prima aproximaţie a lui P_{cr}. Se pleacă apoi de la valorile v_j'' şi se reface ciclul de atîtea ori pînă cînd corecţiile succesive sînt sub o limită aleasă iniţial. Pentru relaţia (VIII.49) se alege de obicei punctul de săgeată maximă.

În cazul altor rezemări decît cele din fig. VIII.26 intervin, alături de săgeţile v, şi alţi parametri necunoscuţi (reacţiuni) dar apar şi condiţii de margine suplimentare, ajungîndu-se în final la o ecuaţie de aceeaşi formă cu (VIII.48).

Metoda diferenţelor finite este în esenţă transformarea ecuaţiei diferenţiale (VIII.1) într-o ecuaţie cu diferenţe finite (fig.VIII.27)

$$EI_j \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{\Delta^2} + M_j = 0. \qquad \text{(VIII.50)}$$

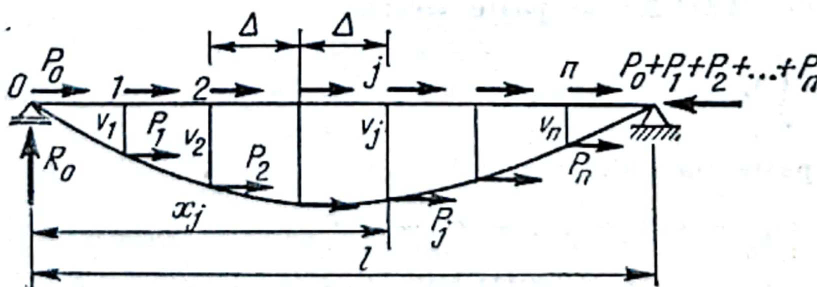


Fig. VIII.27

Expresia lui M_j diferă de la caz la caz. Într-un caz general, presupunînd o legătură completă în origine, expresia lui M_j este

$$M_j = R_0 x_j + M_0 + \sum_{k=0}^{j-1} P_k (v_j - v_k) \quad (P_k = \alpha_k P_0). \tag{VIII.51}$$

Așadar apar parametri necunoscuți noi (R_0 și M_0). Eventual (la o margine liberă) poate apărea și o săgeată fictivă în exteriorul grinzii. În funcție de tipul de rezemare se pot exprima și condiții de margine suplimentare față de ecuațiile (VIII.50) care sînt fie condiții geometrice, fie condiții statice. Oricare ar fi condițiile se poate totdeauna stabili un sistem de ecuații liniare și omogene, coeficienții fiind exprimați în funcție de un singur parametru P_0. Prin anularea determinantului se ajunge la ecuația de stabilitate și deci la parametrul critic.

Exemplul de calcul VIII.8. Se cere determinarea lui P_{cr} pentru stilpul din fig. VIII.28 (EI = const). Punctele alese sînt indicate în figură. Se consideră ca mărimi necunoscute v_1, v_2, v_3 și R_0. Se scriu ecuațiile de tip (VIII.50) în punctele *1, 2, 3, 4*, în cazul ultimului punct intervenind și un punct fictiv în exteriorul stîlpului notat cu *5*. Pentru a elimina această necunoscută suplimentară (v_5) se scrie condiția de rotire nulă în punctul *4*

$$\varphi_4 = \frac{v_5 - v_3}{2a} = 0 \quad \text{deci} \quad v_5 = v_3; \quad \left(a = \frac{l}{4}\right).$$

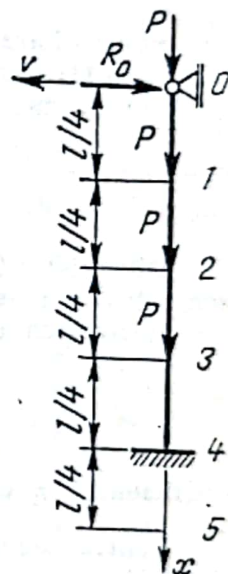


Fig. VIII.28

Ecuațiile de tip (VIII.50) scrise în punctele *1, 2, 3, 4* sînt:

$$EI \frac{v_2 - 2v_1}{a^2} + R_0 a + P v_1 = 0$$

$$EI \frac{v_3 - 2v_2 + v_1}{a^2} + R_0 2a + P v_2 + P(v_2 - v_1) = 0$$

$$EI \frac{-2v_3 + v_2}{a^2} + R_0 3a + P v_3 + P(v_3 - v_1) + P(v_3 - v_2) = 0$$

$$EI \frac{v_5 + v_3}{a^2} + R_0 4a + P(-v_1) + P(-v_2) + P(-v_3) = 0.$$

Ordonînd după v_1, v_2, v_3, R_0 și notînd $kEI = Pa^2$ se obține un sistem de ecuații liniare și omogene. Ecuația de stabilitate în k obținută prin anularea determinantului este

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 & 1 \\ 1-k & 2k-2 & 1 & 2 \\ -k & 1-k & 3k-2 & 3 \\ -k & -k & 2-k & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Rădăcina minimă, $k_{min} = 0{,}516$, conduce la

$$P_{cr} = k_{min} \frac{EI}{a^2} = 0{,}516 \frac{EI}{(0{,}25l)^2} = 8{,}25 \frac{EI}{l^2}.$$

4.2. Cazuri uzuale de încărcări și tipuri de bare drepte

În cap. 3 și cap. 4 pct. 4.1, au fost indicate posibilitățile de determinare a sarcinilor critice pornind de la metodele exacte (v. cap. 3) sau de la cele aproximative (v. cap. 4). Aceste procedee permit în principiu calculul sarcinilor critice pentru orice tip de încărcări, rezemări și variație a rigidității.

Pentru cazurile care se întîlnesc mai frecvent în practică se dau în continuare tabele sau eventual formule aproximative care permit determinarea rapidă a situației de pierdere a stabilității. Tabelele sînt reproduse după lucrările [19,22,30,32].

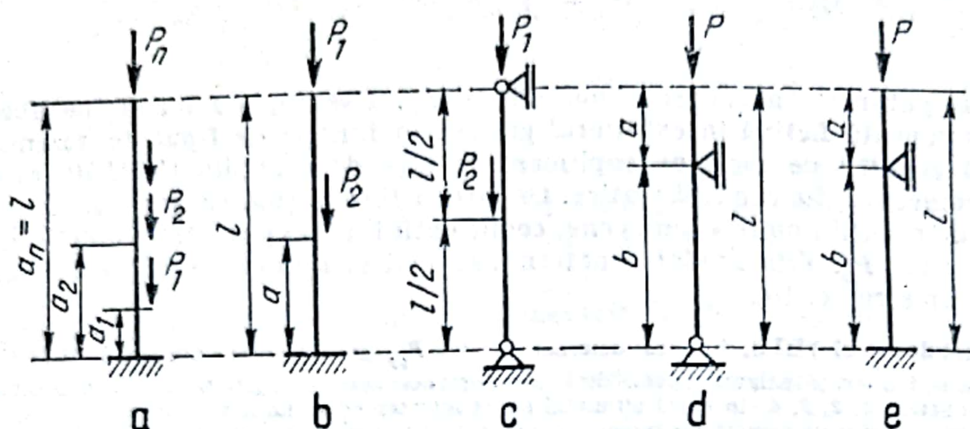


Fig. VIII.29

Pentru bare cu secțiune constantă acționate de forțe concentrate sînt date cazurile din fig. VIII.29.

Pentru cazul din fig. VIII.29, *a* se poate folosi formula aproximativă

$$P_1\left(\frac{a_1}{l}\right)^2 + P_2\left(\frac{a_2}{l}\right)^2 + \ldots + P_n \leqslant \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \tag{VIII.52}$$

Din relația (VIII.52) se deduce că membrul stîng poate fi interpretat drept o forță echivalentă plasată în vîrful stîlpului.

Încărcarea critică pentru cazul din fig. VIII.29, *b* se poate exprima prin

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \eta\,\frac{EI}{l^2}\left(\eta = \frac{\pi^2}{\mu^2}\right). \tag{VIII.53}$$

Coeficientul η este dat în tabelul VIII.5.

Pentru cazul din fig. VIII.29, *c* situația critică se poate exprima tot prin relația (VIII.53).

Coeficientul μ este dat în tabelul VIII.6.

Cazurile din fig. VIII.29, *d* și *e* sînt rezumate de expresia

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \tag{VIII.54}$$

Valorile coeficientului μ sînt date în tabelul VIII.7.

Pentru bara cu secțiune constantă acționată de forțe longitudinale uniform distribuite se dau în fig. VIII.30 cîteva cazuri caracteristice. Pentru toate aceste cazuri se poate scrie

$$(ql)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \tag{VIII.55}$$

Tabelul VIII.5

Coeficientul η din expresia (VIII.53), fig. VIII.29, b

$\frac{a}{l}$	P_2/P_1							
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
0	2,467	2,714	2,961	3,701	4,935	7,402	14,80	27,14
0,1	2,467	2,714	2,960	3,698	4,930	7,377	14,68	26,66
0,2	2,467	2,710	2,953	3,679	4,880	7,207	13,78	23,19
0,3	2,467	2,703	2,936	3,622	4,712	6,769	11,70	16,82
0,4	2,467	2,688	2,904	3,525	4,470	6,074	9,187	11,57
0,5	2,467	2,665	2,856	3,384	4,136	5,268	7,060	8,210
0,6	2,467	2,635	2,793	3,211	3,759	4,497	5,504	6,048
0,7	2,467	2,599	2,715	3,020	3,385	3,830	4,376	4,660
0,8	2,467	2,557	2,636	2,821	3,040	3,280	3,551	3,685
0,9	2,467	2,513	2,551	2,641	2,734	2,832	2,936	2,986
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

Tabelul VIII.6

Coeficientul μ din expresia (VIII.53), fig. VIII.29, c)

P_2/P_1	0	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00
μ	1,00	0,95	0,91	0,89	0,87	0,82

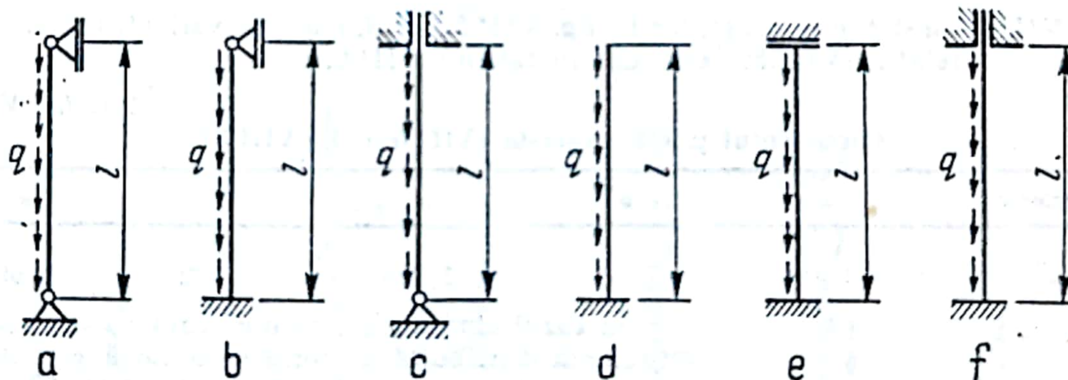


Fig. VIII.30

Tabelul VIII.7

Coeficientul μ din expresia (VIII.54), fig. VIII.29, d, e

Schema	b/l									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
d	2,00	1,87	1,73	1,60	1,47	1,35	1,23	1,13	1,06	1,01
e	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,26	1,11	0,975	0,852	0,75

Coeficientul μ din relaţia (VIII.55) este dat în tabelul VIII.8.

Tabelul VIII.8

Coeficientul μ din expresia (VIII.55), fig. VIII.30

Schema	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
μ	0,730	0,433	0,576	1,12	0,725	0,364

În cazul unor forţe uniform distribuite parţial sau distribuite după o lege liniară ca în fig. VIII.31 solicitarea critică este

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \tag{VIII.56}$$

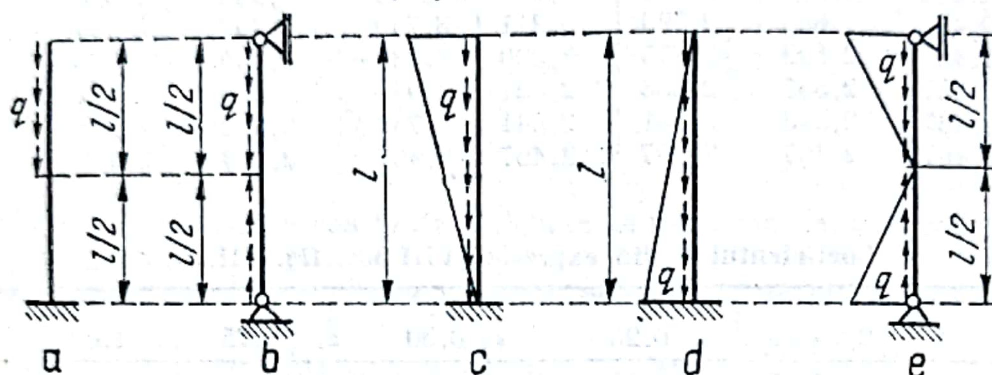


Fig. VIII.31

În fig. VIII.31, *a* şi *b* q = const, iar în fig. VIII.31, *c, d, e* q este variabil liniar. Coeficientul μ din relaţia (VIII.56) este dat în tabelul VIII.9.

Tabelul VIII.9

Coeficientul μ din expresia (VIII.56), fig. VIII.31

Schema	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
μ	1,486	0,560	1,388	0,782	0,694

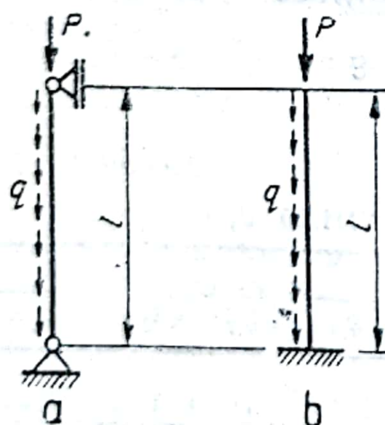


Fig. VIII.32

În cazul cînd bara este încărcată cu o forţă longitudinală distribuită uniform şi o forţă concentrată la capăt se dau pentru cazurile din fig. VIII.32 valorile critice ale forţei concentrate acţionînd simultan cu forţa distribuită

$$P_{cr} = \eta \frac{EI}{l^2}. \tag{VIII.57}$$

Coeficientul η în funcţie de

$$n = ql \Big/ \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{VIII.58}$$

se găseşte în tabelul VIII.10.

Tabelul VIII.10

Coeficientul η din expresia (VIII.57), fig. VIII.32

Schema	n								
	0	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
a	9,87	8,62	7,40	6,08	4,77	−0,66	−4,94	−9,87	−14,80
b	2,47	2,28	2,08	1,91	1,72	0,96	0,15	−0,69	−1,56

Semnul minus din tabelul VIII.10 indică necesitatea de a avea o forță P de întindere pentru valoarea corespunzătoare a lui n (deoarece $q > q_{cr}$ pentru aceste cazuri).

Sarcina critică pentru stîlpii tip consolă cu secțiune variabilă în trepte, acționați de o forță în vîrf fig. VIII.33 poate fi stabilită cu expresiile aproximative:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \Bigg/ \left[\frac{l-b}{l} + \frac{l-b}{l}\cdot\frac{I}{I_1} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{I}{I_1} - 1\right)\sin\frac{\pi b}{l}\right] \quad \text{(VIII.59)}$$

pentru cazul *a* și

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2}\left[\left(1 - \frac{I_2 - I_1}{I_1}\frac{(l-b_1)^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{I_3 - I_2}{I_2}\frac{(l-b_2)^2}{l^2}\right)\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\left(1 - \frac{I_n - I_{n-1}}{I_{n-1}}\cdot\frac{(l-b_{n-1})^2}{l^2}\right)\right] \quad \text{(VIII.60)}$$

pentru cazul *b*.

Pentru stîlpul cu o singură treaptă din fig. VIII.33,*a* sarcina critică se poate calcula și cu

$$P_{cr} = \eta\,\frac{EI_1}{l^2}. \quad \text{(VIII.61)}$$

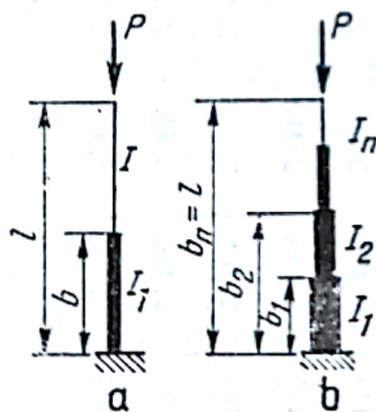


Fig. VIII.33

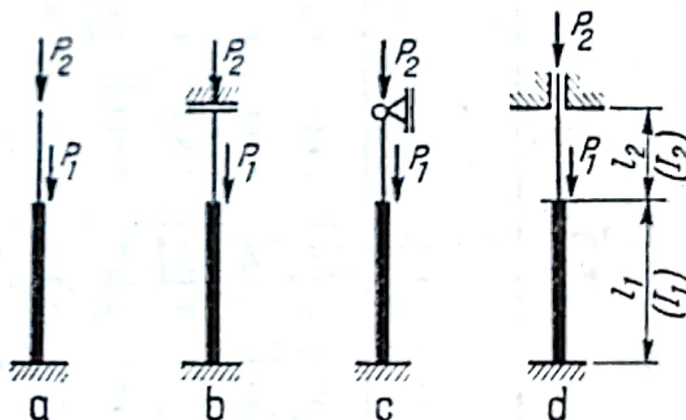


Fig. VIII.34

Coeficientul η din (VIII.61) se găsește în tabelul VIII.11.

În fig. VIII.34 sînt indicate cîteva tipuri de rezemare pentru stîlpii cu o treaptă încărcată cu două forțe longitudinale. În toate aceste cazuri situația critică este dată de

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_1 l_1)^2}. \quad \text{(VIII.62)}$$

Tabelul VIII.11

Coeficientul η din expresia (VIII.61). fig. VIII.33, a

b	$\frac{I_1 - I}{I}$										
l	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,243	2,056	1,645	1,234	0,8225	0,4111	0,2243	0,1175	0,04837	0,02465
0,1	2,467	2,285	2,126	1,761	1,367	0,9440	0,4894	0,2714	0,1436	0,05947	0,03010
0,2	2,467	2,325	2,197	1,881	1,520	1,093	0,5919	0,3350	0,1793	0,07486	0,03798
0,3	2,467	2,363	2,262	2,013	1,692	1,277	0,7293	0,4237	0,2302	0,09709	0,04944
0,4	2,467	2,396	2,327	2,141	1,879	1,499	0,9174	0,5498	0,3064	0,1309	0,06697
0,5	2,467	2,423	2,379	2,256	2,068	1,756	1,178	0,7462	0,4268	0,1860	0,09580
0,6	2,467	2,444	2,420	2,350	2,235	2,025	1,531	1,052	0,6330	0,2848	0,1482
0,7	2,467	2,457	2,446	2,415	2,356	2,256	1,950	1,530	1,018	0,4880	0,2588
0,8	2,467	2,464	2,461	2,453	2,440	2,402	2,297	2,106	1,730	0,9991	0,5592
0,9	2,467	2,467	2,466	2,465	2,465	2,459	2,446	2,424	2,374	2,189	1,746
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

coeficientul μ_1 se găsește în funcție de caracteristicile celor două porțiuni

$$i_1 = \frac{EI_1}{l_1}; \quad i_2 = \frac{EI_2}{l_2}; \quad \nu_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI_1}}; \quad \nu_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}}. \qquad \text{(VIII.63)}$$

Pentru cazul de rezemare din fig. VIII.34, *a* coeficientul μ_1 este dat în tabelul VIII.12.

Tabelul VIII.12

Coeficientul μ_1 din expresia (VIII.62), fig. VIII.34, *a*

i_2/i_1 \ ν_2/ν_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	2,5	3
0	2	2	2	2	2	2	3	4	5	6
0,1	2	2,01	2,04	2,11	2,25	2,50	3,43	4,44	5,55	6,65
0,2	2	2,02	2,08	2,20	2,42	2,73	3,77	4,90	6,08	7,25
0,3	2	2,03	2,11	2,28	2,58	2,94	4,07	5,29	6,56	7,82
0,4	2	2,04	2,13	2,36	2,70	3,13	4,35	5,67	7	—
0,5	2	2,05	2,18	2,44	2,83	3,29	4,61	6,03	—	—
0,6	2	2,06	2,21	2,52	2,96	3,44	4,86	—	—	—
0,7	2	2,06	2,25	2,59	3,07	3,59	5,08	—	—	—
0,8	2	2,07	2,28	2,66	3,17	3,74	—	—	—	—
0,9	2	2,08	2,32	2,73	3,27	3,87	—	—	—	—
1	2	2,09	2,35	2,80	3,36	4	—	—	—	—
1,2	2	2,10	2,42	2,93	3,55	—	—	—	—	—
1,4	2	2,12	2,48	3,05	3,74	—	—	—	—	—
1,6	2	2,14	2,54	3,17	—	—	—	—	—	—
1,8	2	2,15	2,60	3,28	—	—	—	—	—	—
2	2	2,17	2,66	3,39	—	—	—	—	—	—
2,5	2	2,21	2,80	—	—	—	—	—	—	—
5	2	2,40	—	—	—	—	—	—	—	—
10	2	2,76	—	—	—	—	—	—	—	—
20	2	3,38	—	—	—	—	—	—	—	—

Pentru cazul de rezemare din fig. VIII.34, *b* coeficientul este dat în tabelul VIII.13.
Pentru cazul de rezemare din fig. VIII.34,*c* se vor folosi schemele din fig. VIII.35, *a*,*b*

$$P_{2cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_{12} l_1)^2}; \quad P_{1cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_{11} l_1)^2}. \qquad \text{(VIII.64)}$$

Coeficientul μ_{12} este dat în tabelul VIII.14 iar coeficientul μ_{11} în tabelul VIII.15. Cu ajutorul acestora se poate obține valoarea aproximativă pentru coeficientul μ_1 din relația (VIII.62) corespunzător cazului din fig. VIII.34,*c*.

$$\mu_1 \approx \sqrt{\frac{P_2}{P_1 + P_2}\mu_{12}^2 + \frac{P_1}{P_1 + P_2}\mu_{11}^2}. \qquad \text{(VIII.65)}$$

Tabelul VIII.13

Coeficientul μ_1 din expresia (VIII.62), fig. VIII.34, *b*

i_1/i_2 \ ν_2/ν_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	2,5	3
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2,5	3
0,1	1,92	1,93	1,94	1,95	1,97	2	2,12	2,45	2,94	3,43
0,2	1,86	1,87	1,88	1,91	1,94	2	2,25	2,66	3,17	3,70
0,3	1,80	1,82	1,83	1,86	1,92	2	2,33	2,81	3,34	3,93
0,4	1,76	1,76	1,77	1,83	1,90	2	2,38	2,91	3,50	4,12
0,5	1,70	1,71	1,75	1,79	1,88	2	2,43	3	—	—
0,6	1,67	1,68	1,72	1,77	1,87	2	2,48	—	—	—
0,7	1,64	1,64	1,69	1,76	1,86	2	2,52	—	—	—
0,8	1,60	1,62	1,66	1,72	1,85	2	—	—	—	—
0,9	1,57	1,59	1,62	1,71	1,83	2	—	—	—	—
1	1,55	1,56	1,61	1,69	1,82	2	—	—	—	—
1,2	1,50	1,52	1,57	1,66	1,80	—	—	—	—	—
1,4	1,46	1,48	1,53	1,63	1,79	—	—	—	—	—
1,6	1,43	1,45	1,50	1,61	—	—	—	—	—	—
1,8	1,40	1,41	1,48	1,59	—	—	—	—	—	—
2	1,37	1,39	1,31	—	—	—	—	—	—	—
2,5	1,32	1,33	1,40	—	—	—	—	—	—	—
5	1,18	1,20	—	—	—	—	—	—	—	—
10	1,10	1,11	—	—	—	—	—	—	—	—
20	1,05	—	—	—	—	—	—	—	—	—

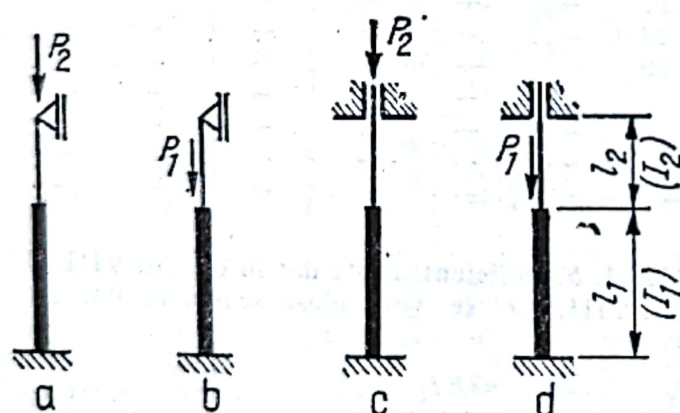


Fig. VIII.35

Pentru cazul de rezemare din fig. VIII.34, *d* se vor folosi schemele din fig. VIII.35, *c*, *d*. În aceste cazuri situaţiile critice sînt:

$$P_{2cr} = \frac{\pi^2 E I_1}{(\bar{\mu}_{12} l_1)^2}\,; \quad P_{1cr} = \frac{\pi^2 E I_1}{(\bar{\mu}_{11} l_1)^2}. \tag{VIII.66}$$

Coeficienţii $\bar{\mu}_{12}$ şi $\bar{\mu}_{11}$ se dau în tabelele VIII.16 şi VIII.17. Cu ajutorul acestora se poate obţine valoarea coeficientului μ_1 din relaţia (VIII.62) corespunzător cazului din fig. VIII. 34, *d*.

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{P_2}{P_1 + P_2}\,\bar{\mu}_{12}^2 + \frac{P_1}{P_1 + P_2}\,\bar{\mu}_{11}^2}. \tag{VIII.67}$$

Pentru stîlpii cu secţiune variabilă cu două trepte se poate consulta lucrarea [30]. Pentru alte cazuri a se vedea lucrarea [31].

Tabelul VIII.14

Coeficientul μ_{12} din expresiile (VIII.64) și (VIII.65), fig. VIII.35,*a*

l_2/l_1 \ I_2/I_1	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
0,1	1,02	0,91	0,86	0,83	0,79	0,78	0,78	0,78	0,78
0,2	1,84	1,47	1,31	1,21	0,98	0,90	0,98	0,86	0,85
0,3	2,25	1,93	1,73	1,57	1,23	1,09	1,02	0,99	0,92
0,4	2,59	2,26	2,05	1,95	1,46	1,27	1,17	1,10	0,99
0,5	2,85	2,57	2,31	2,14	1,67	1,44	1,32	1,22	1,06
0,6	3,08	2,74	2,49	2,33	1,85	1,60	1,45	1,35	1,13
0,7	3,24	2,90	2,68	2,46	2,02	1,74	1,58	1,47	1,20
0,8	3,42	3,05	2,85	2,60	2,15	1,86	1,69	1,57	1,27
0,9	3,70	3,24	3	2,76	2,28	1,98	1,81	1,67	1,34
1	4	3,45	3,14	2,91	2,40	2,11	1,92	1,76	1,41
1,2	4,55	3,88	3,53	3,28	2,67	2,35	2,14	1,96	1,54
1,4	5,25	4,43	3,93	3,61	2,88	2,51	2,31	2,15	1,68
1,6	5,80	4,90	4,37	4,03	3,11	2,76	2,51	2,34	1,82
1,8	6,55	5,43	4,85	4,43	3,42	2,99	2,68	2,50	1,97
2	7,20	5,94	5,28	4,85	3,71	3,25	2,88	2,76	2,10

Tabelul VIII.15

Coeficientul μ_{11} din expresiile (VIII.64) și (VIII.65), fig. 35,*b*

l_2/l_1 \ I_2/I_1	0,04	0,06	0,08	1,0	0,2	0,3	0,4	0,5	1
0,1	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67
0,2	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67
0,3	0,83	0,81	0,75	0,73	0,69	0,67	0,67	0,67	0,67
0,4	1,25	1,07	0,98	0,93	0,75	0,71	0,69	0,69	0,68
0,5	1,43	1,27	1,19	1,11	0,89	0,80	0,75	0,73	0,71
0,6	1,55	1,41	1,32	1,25	1,02	0,90	0,84	0,81	0,74
0,7	1,65	1,51	1,43	1,36	1,12	0,99	0,92	0,87	0,78
0,8	1,70	1,60	1,51	1,45	1,21	1,08	1	1,94	0,82
0,9	1,75	1,64	1,58	1,52	1,29	1,15	1,07	1,01	0,87
1	1,78	1,70	1,63	1,57	1,36	1,22	1,13	1,07	0,91
1,2	1,84	1,78	1,72	1,66	1,46	1,33	1,24	1,17	0,99
1,4	1,87	1,82	1,77	1,72	1,54	1,41	1,33	1,26	1,07
1,6	1,88	1,84	1,81	1,77	1,60	1,40	1,40	1,33	1,13
1,8	1,90	1,87	1,82	1,80	1,65	1,54	1,47	1,39	1,19
2	1,92	1,88	1,84	1,82	1,69	1,59	1,51	1,44	1,24

Tabelul VIII.16

Coeficientul $\bar{\mu}_{12}$ din expresiile (VIII.66) și (VIII.67), fig. VIII.35,c

l_2/l_1 \ I_2/I_1	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
0,1	0,78	0,70	0,68	0,67	0,64	0,62	0,60	0,59	0,55
0,2	1,02	0,86	0,79	0,78	0,70	0,68	0,66	0,65	0,60
0,3	1,53	1,23	1,05	1	0,79	0,74	0,71	0,70	0,65
0,4	1,73	1,47	1,31	1,20	0,93	0,85	0,78	0,77	0,70
0,5	2,01	1,73	1,54	1,42	1,07	0,95	0,87	0,82	0,75
0,6	2,21	1,93	1,74	1,61	1,23	1,06	0,99	0,93	0,80
0,7	2,38	2,08	1,91	1,78	1,41	1,18	1,07	0,99	0,85
0,8	2,54	2,23	2,05	1,92	1,50	1,28	1,16	1,08	0,90
0,9	2,65	2,38	2,20	2,04	1,60	1,39	1,26	1,17	0,95
1	2,85	2,49	2,31	2,20	1,72	1,48	1,34	1,23	1
1,2	3,24	2,81	2,55	2,40	1,92	1,67	1,50	1,39	1,10
1,4	3,70	3,17	2,80	2,60	2,11	1,82	1,65	1,53	1,20
1,6	4,20	3,50	3,11	2,86	2,28	1,96	1,79	1,66	1,30
1,8	4,76	3,92	3,45	3,18	2,45	2,12	1,94	1,79	1,40
2	5,23	4,30	3,73	3,41	2,64	2,20	2,08	1,92	1,50

Tabelul VIII.17

Coeficientul $\bar{\mu}_{11}$ din expresiile (VIII.66) și (VIII.67), fig. VIII.35, *d*

l_2/l_1 \ I_2/I_1	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
0,1	0,66	0,65	0,64	0,64	0,62	0,60	0,58	0,57	0,55
0,2	0,68	0,67	0,66	0,65	0,64	0,63	0,63	0,61	0,58
0,3	0,75	0,68	0,67	0,65	0,65	0,64	0,63	0,63	0,60
0,4	0,94	0,76	0,68	0,65	0,65	0,65	0,64	0,64	0,61
0,5	1,08	0,94	0,84	0,78	0,66	0,66	0,64	0,64	0,62
0,6	1,24	1,10	1	0,92	0,73	0,67	0,66	0,65	0,63
0,7	1,37	1,25	1,12	1,05	0,83	0,73	0,68	0,68	0,65
0,8	1,47	1,35	1,25	1,15	0,92	0,81	0,75	0,72	0,67
0,9	1,55	1,44	1,34	1,25	1,01	0,89	0,82	0,77	0,70
1	1,64	1,50	1,41	1,33	1,09	0,94	0,88	0,88	0,73
1,2	1,82	1,61	1,53	1,45	1,23	1,09	1,01	0,94	0,80
1,4	1,78	1,69	1,62	1,55	1,33	1,20	1,10	1,04	0,88
1,6	1,81	1,74	1,68	1,62	1,41	1,28	1,19	1,12	0,93
1,8	1,85	1,79	1,75	1,68	1,48	1,35	1,26	1,19	1,01
2	1,89	1,82	1,79	1,71	1,54	1,41	1,32	1,25	1,05

În fig. VIII.36 sînt reprezentate cîteva cazuri de stîlpi comprimați avînd secțiunea variabilă continuu. Pentru toate aceste cazuri se poate folosi formula

$$P_{cr} = \eta \frac{EI}{l^2} \qquad \text{(VIII.68)}$$

unde I este momentul de inerție maxim pe înălțime.

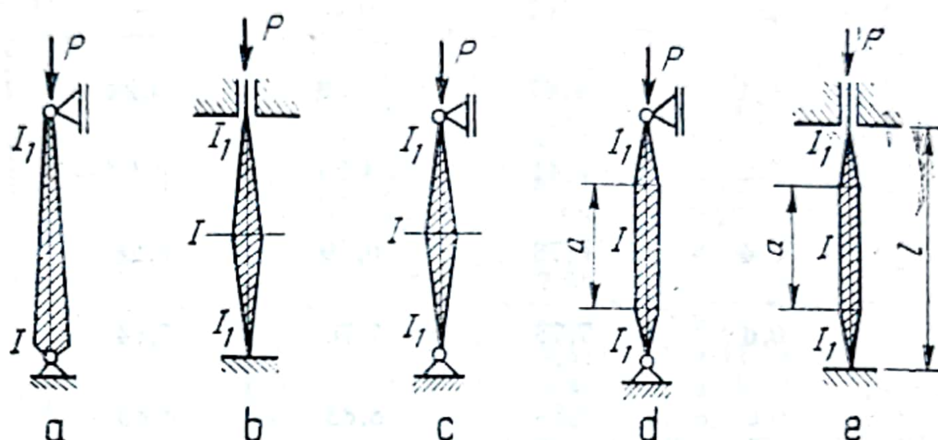


Fig. VIII.36

Toate cazurile din fig. VIII.36 sînt analizate pentru o aceeași lege de variație a momentului de inerție

$$I(x) = I(a + bx)^n \qquad \text{(VIII.69)}$$

unde a, b sînt constante care au valori diferite de la caz la caz. Cazul $n = 1$ corespunde unei bare avînd o secțiune cu înălțime constantă și lățime variabilă liniar; cazul $n=2$ corespunde aproximativ unei bare alcătuite din 4 corniere așezate piramidal solidarizate prin diagonale, cornierele fiind înclinate cu aceeași pantă; cazul $n = 3$ corespunde unei bare cu secțiune dreptunghiulară avînd lățimea constantă și înălțimea variabilă liniar; cazul $n = 4$ corespunde unei bare sub formă de trunchi de con sau piramidă.

Coeficientul η din expresia (VIII.68) este dat în tabelele VIII. 18 și VIII.19.

În fig. VIII.37 sînt indicate două cazuri de bare cu secțiune variabilă în trepte solicitate de forțe longitudinale distribuite continuu, cu variație liniară după cum este indicat în figură. Prin I și I_1 s-au notat momentul de inerție maxim respectiv minim de pe bară. Datele din tabele sînt calculate în ipoteza că deschiderea este împărțită în porțiuni cu momente de inerție diferite așezate simetric față de mijloc. Lungimile totale ale zonelor avînd același moment de inerție sînt egale între ele și din această cauză diferențele între momentele de inerție a două zone vecine sînt de asemenea egale.

Situația critică este dată de

$$\left(q \frac{l}{4}\right)_{cr} = \eta \frac{EI}{l^2}. \qquad \text{(VIII.70)}$$

Coeficientul η este dat în tabelul VIII.20.

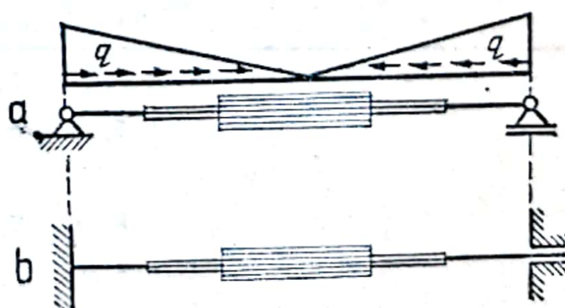


Fig. VIII.37

Tabelul VIII.18

Coeficientul η din expresia (VIII.68), fig. VIII.36, *a*, *b*, *c*

Cazul	$\frac{I_1}{I}$	Exponentul n din expresia V(III.69)			
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
a	0	3,67	0,25	—	—
	0,1	4,67	3,59	3,24	3,12
	0,2	5,41	4,73	4,52	4,41
	0,4	6,78	6,39	6,28	6,24
	0,6	7,78	7,70	7,64	7,64
	0,8	8,85	8,83	8,83	8,83
	1,0	π^2	π^2	π^2	π^2
b	0,1	—	14,39	13,70	13,30
	0,2	20,35	18,93	18,49	18,29
	0,4	26,16	25,54	25,34	25,23
	0,6	31,03	30,79	30,71	30,68
	0,8	35,42	35,35	35,33	35,32
	1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$i	$4\pi^2$

Cazul	$\frac{I_1}{I}$	$n=0,5$	$n=1$	$n=1,5$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
c	0	—	5,78	—	1,00	—	—
	0,1	7,86	6,48	5,78	5,40	5,01	4,81
	0,2	7,97	7,01	6,58	6,37	6,14	6,02
	0,4	8,31	7,87	7,69	7,61	7,52	7,48
	0,6	8,76	8,61	8,54	8,51	8,50	8,47
	0,8	9,30	9,27	9,25	9,24	9,23	9,23
	1	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

Tabelul VIII.19

Coeficientul η din expresia (VIII.68), fig.36, *d,e*

Schema	$\frac{I_1}{I}$	$\frac{a}{l}$: 0	0,2	0,4	0,6	0,3	n
d	0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,80	1
		1,00	1,56	2,78	6,25	9,59	2
	0,01	5,87	7,11	8,40	9,40	9,80	1
		3,45	4,73	6,58	8,61	9,71	2
		2,55	3,65	5,42	7,99	9,63	3
		2,15	3,13	4,84	7,53	9,56	4
	0,10	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
		5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	2
		5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	3
		4,81	6,11	7,68	9,10	9,77	4
	0,20	7,01	7,99	8,90	9,73	9,82	2
		6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	2
		6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	3
		6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	4
	0,40	7,87	8,59	9,19	9,70	9,85	1
		7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	2
		7,52	8,38	9,10	9,62	9,84	3
		7,48	8,33	9,10	9,62	9,84	4
	0,60	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	1
		8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	2
		8,50	9,02	9,46	9,74	9,85	3
		8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	4
	0,80	9,27	9,53	9,69	9,82	9,86	1
		9,24	9,50	9,69	9,82	9,86	2
		9,23	9,50	0,69	9,81	9,86	3
		9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	4
e	0,2	20,36	22,36	23,42	25,55	29,00	1
		18,94	22,25	22,91	24,29	27,67	2
		18,48	20,88	22,64	23,96	27,24	3
		18,23	20,71	22,49	23,80	27,03	4
	0,4	26,16	27,80	28,96	30,20	33,08	1
		25,54	27,35	28,52	29,69	32,59	2
		25,32	27,20	28,40	29,52	32,44	3
		25,23	27,13	28,33	29,46	32,35	4
	0,60	31,04	32,20	32,92	33,80	35,80	1
		30,79	32,02	32,77	33,63	35,64	2
		30,72	31,96	32,72	33,56	35,60	3
		30,68	31,94	32,69	33,54	35,56	4
	0,80	35,40	36,00	36,36	36,84	37,84	1
		35,35	35,97	36,34	36,80	37,81	2
		35,33	35,96	36,32	36,80	37,80	3
		35,32	35,96	36,32	36,78	37,80	4

Tabelul VIII.20

Coeficientul η din expresia (VIII.70), fig. VIII.37, a, b

$\frac{I_1}{I}$	Numărul de porțiuni cu momente de inerție diferite							
	Cazul *a*					Cazul *b*		
	2	3	4	5	10	2	3	4
0,2	5,20	6,32	6,48	7,32	7,40	18,1	21,8	22,8
0,4	9,88	10,9	11,1	11,2	11,2	31,2	34,2	34,3
0,6	14,0	14,6	14,7	14,76	14,8	41,0	42,4	42,4
0,8	17,4	17,8	17,8	17,9	18,0	49,4	49,5	49,5
1,0	2,05	20,5	20,5	20,5	20,5	54,8	54,8	54,8

4.3. Bare drepte cu rezemări elastice

4.3.1. Grinzi pe reazeme punctuale elastice. Probleme de acest fel pot apărea la asigurarea stabilității la flambaj lateral a tălpii comprimate la grinzile de poduri cu profil deschis, la studiul stabilității turnurilor înalte ancorate etc.

Un reazem elastic j este caracterizat de relația

$$R_j = \rho_j \cdot v_j \tag{VIII.71}$$

R_j fiind reacțiunea, v_j — deplasarea normală pe axă iar ρ_j — coeficientul de elasticitate al reazemului reprezentînd reacțiunea elastică corespunzătoare unei deplasări unitare.

O rezolvare exactă a problemei se poate face cu ajutorul motodei deplasărilor considerînd grinda ca un cadru cu noduri deplasabile. Necunoscutele sînt rotirile nodurilor intermediare ($Z_j \ldots Z_h$) și gradele de libertate distincte determinate pe rînd de tasarea a cîte unui reazem ($Z_k \ldots Z_l \ldots$) conform fig. VIII.38. Elementele ecuației de stabilitate

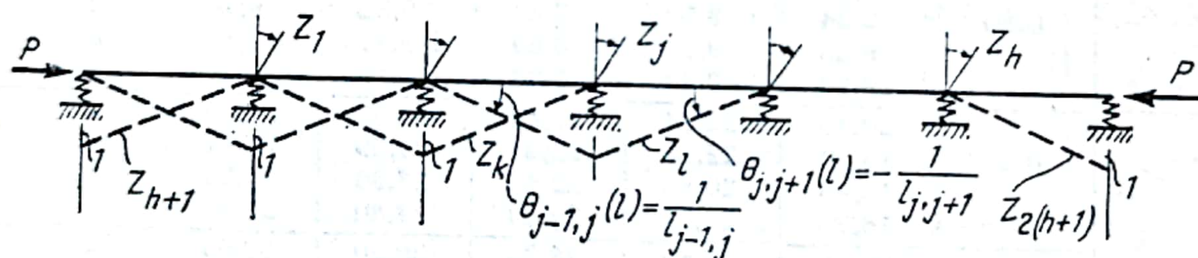


Fig. VIII.38

(VIII.37) se calculează cu relațiile (VIII.35), singura deosebire apărînd la coeficientul de tip r_{kl} pentru cazul cînd $k = l$ la care pe lîngă expresia (VIII.35) se adaugă

$$r'_{ll} = -\rho_j \tag{VIII.72}$$

reprezentînd contribuția elasticității reazemului.

În rest calculul nu are nici o deosebire.

În lucrarea [4] este dată o rezolvare analoagă cu ecuația celor cinci momente, bazată pe metoda mixtă, luînd ca necunoscute momentele încovoietoare din dreptul reazemelor

şi tasările reazemelor elastice. Rezolvarea se referă la grinzi pe reazeme intermediare elastice şi reazeme extreme articulate, netasabile, avînd deschiderile, forţele axiale, momentele de inerţie şi caracteristicile ρ_j din relaţia (VIII.71), egale.

Dacă în condiţiile anterioare numărul deschiderilor este suficient de mare (fig. VIII.39) determinarea situaţiei critice se simplifică mult. În fig. VIII.40 se dă un

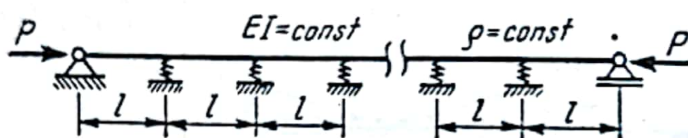


Fig. VIII.39

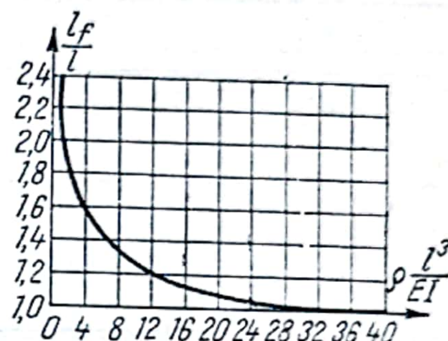


Fig. VIII.40

grafic după lucrarea [14] care permite determinarea lungimii de flambaj în funcţie de caracteristicile grinzii continue. Graficul se referă la fig. VIII.39. Tot în lucrarea [14] se indică şi o rezolvare aproximativă pentru cazul cînd deschiderile, forţele axiale, rigidităţile şi coeficienţii ρ nu sînt egali. Metoda se bazează pe calculul unui parametru mediu, $\rho l^3/EI$, şi cu acesta, folosind graficul din fig. VIII.40, se determină o lungime de flambaj medie care apoi conduce la determinarea forţei critice aproximative în fiecare deschidere.

Cîteva cazuri privind bara cu rezemări elastice sînt date în lucrarea [31].

4.3.2. **Grinzile pe mediu elastic.** Sînt caracterizate de existenţa unui pat elastic continuu. În model Winkler, se notează coeficientul de pat cu β avînd dimensiunea de forţă pe lungime la pătrat, coeficient care reprezintă reacţiunea rezultantă a terenului pe unitatea de lungime a grinzii corespunzătoare unei deplasări unitare $v = 1$. Aplicînd metoda energetică [32] se poate găsi valoarea forţei critice pentru bara din fig. VIII.41 avînd capetele articulate (netasabile) sub forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \qquad \text{(VIII.73)}$$

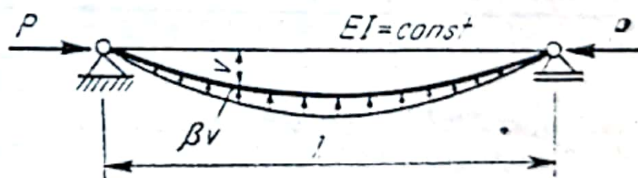


Fig. VIII.41

Valorile coeficientului μ se găsesc în tabelul VIII.21.

În fig. VIII.42 sînt arătate cîteva cazuri de grinzi pe mediu elastic. Pentru cazurile *a*, *b* expresia lui P_{cr} este (VIII.73) iar pentru cazurile *c*, *d* situaţia critică este dată de

$$\left(\frac{ql}{4}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \qquad \text{(VIII.74)}$$

Valorile lui μ din expresia (VIII.73) sînt date în graficul din fig. VIII. 43 iar cele din expresia (VIII.74) în graficul din fig. VIII.44.

Coeficientul μ din

$\frac{\beta l^4}{16 EI}$	0	1	3	5	10
μ	1	0,927	0,819	0,741	0,615
$\frac{\beta l^4}{16 EI}$	200	300	500	700	1 000
μ	0,286	0,263	0,235	0,214	0,195

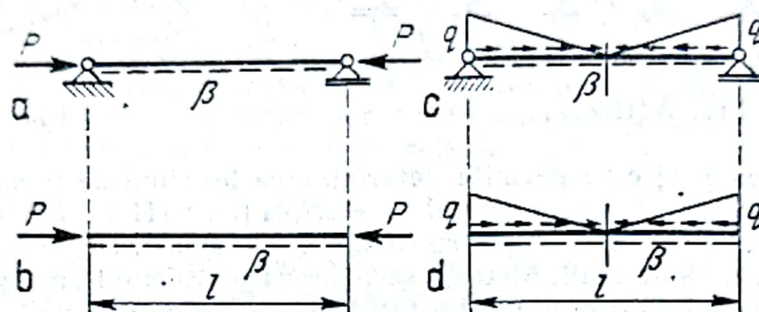


Fig. VIII.42

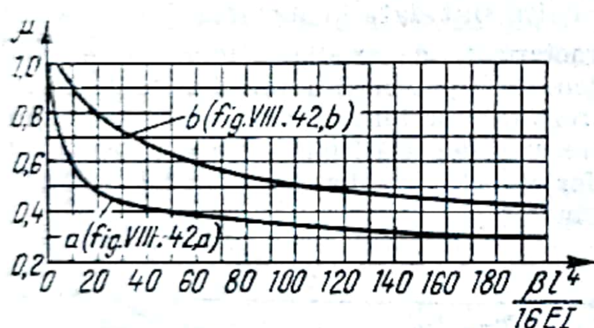


Fig. VIII.43

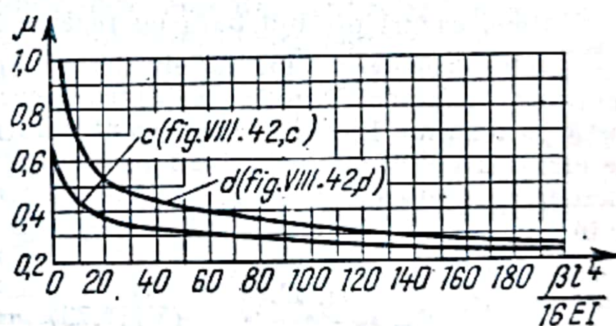


Fig. VIII.44

4.4. Calculul stabilității cadrelor prin aproximații succesive

Procedeul aproximațiilor succesive este folosit cel mai frecvent pornind de la metoda deplasărilor [1, 11, 12, 23, 24]. Se face apel la așa-numitul criteriu al rației progresiei geometrice. Dacă în sistemul de ecuații (VIII.34) există numai un singur termen liber R_{j0} admițînd o valoare arbitrară pentru parametrul critic, $\nu = \nu_1$ valoarea exactă a necunoscutei Z_j se poate deduce printr-un calcul iterativ

$$Z_j = -\frac{R_{j0}}{r_{jj}}\frac{1}{1 - r_j} \qquad \text{(VIII.75)}$$

Tabelul VIII.21

expresia (VIII.73), fig. VIII.41

15	20	30	40	50	75	100
0,537	0,483	0,437	0,421	0,406	0,376	0,351
1 500	2 000	3 000	4 000	5 000	8 000	10 000
0,179	0,165	0,149	0,140	0,132	0,117	0,110

unde r_j este rația progresiei geometrice formată din corecțiile succesive, presupunînd $r_j<1$:

$$r_j = 1 - \frac{D}{d_j r_{jj}} \qquad \text{(VIII.76)}$$

D fiind determinantul sistemului și d_j minorul corespunzător lui r_{jj}.

Valoarea parametrului critic ν fiind arbitrară se pot ivi trei situații:

a) rația se confirmă a fi subunitară deci sistemul este convergent, valorile Z finite deci sistemul este stabil;

b) rația este supraunitară, sistemul de ecuații este divergent situația corespunzînd instabilității;

c) rația este unitară ceea ce corespunde cu $D = 0$, deci valoarea aleasă este chiar ν_{cr}.

Rezolvarea se face prin încercări: se atribuie diverse valori parametrului ν pînă cînd se obține rația unitară. Practic se admite o valoare arbitrară Z_{j0} pentru una din necunoscute j (în sistemul omogen), se calculează celelalte necunoscute, cu acestea se revine în ecuația j și se calculează prima corecție $\Delta Z_j(1)$ și de aici rația prin împărțire la Z_{j0}. Rația unitară corespunde egalității între corecția $\Delta Z_j(1)$ și Z_{j0}. Calculul se poate face analitic sau pe cale iterativă (cel mai comod prin transmiterea rotirilor).

Pentru a verifica dacă valoarea ν_{cr} este cea minimă se consideră funcția

$$\Delta = (-1)^n D \qquad \text{(VIII.77)}$$

n fiind ordinul determinantului. Reprezentarea grafică a lui Δ este dată în fig. VIII.45. De aici se vede că în apropierea lui $\nu_{cr,min}\Delta$ este pozitiv pentru valori inferioare și negativ pentru valori superioare mărimii critice, ceea ce constituie un criteriu.

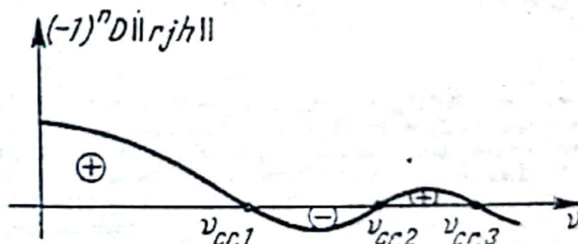


Fig. VIII.45

Aplicarea diverselor procedee ale Staticii construcțiilor în metoda aproximațiilor succesive este dată în lucrarea [12]. Pentru determinarea rapidă a rației vezi lucrarea [1].

Exemplul de calcul VIII.9. Se cere determinarea încărcării critice pentru cadrul din fig. VIII.46, *a*. Se folosește transmiterea rotirilor. Se notează: $i_0 = \frac{EI}{l}$, $\nu = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$ și se calculează coeficienții r din relațiile (VIII.35)

$$r_{11} = -8i_0\Phi_2(\nu) - 7{,}5i_0; \quad r_{12} = r_{21} = -2i_0\Phi_3(\nu); \quad r_{13} = 6i_0\Phi_4(\nu) = r_{14} = r_{24}$$

$$r_{22} = -4i_0\Phi_2(\nu) - 7{,}5i_0; \quad r_{23} = 0; \quad r_{33} = -12i_0\eta_2(\nu) = r_{44}; \quad r_{34} = 0.$$

Coeficienții de transmitere a rotirilor;

$$t_{21} = -\frac{r_{12}}{r_{11}} = -\frac{2\Phi_3}{8\Phi_2 + 7{,}5}\,;\quad t_{31} = t_{41} = \frac{6\Phi_4}{8\Phi_2 + 7{,}5}\,;\quad t_{12} = -\frac{2\Phi_3}{4\Phi_2 + 7{,}5}\,;$$

$$t_{42} = \frac{6\Phi_4}{4\Phi_2 + 7{,}5}\,;\quad t_{13} = t_{14} = t_{24} = 0{,}5\,\frac{\Phi_4}{\eta_2}\,;\quad t_{23} = t_{32} = t_{43} = t_{34} = 0.$$

Urmărind indicațiile din text se dau valori arbitrare pentru ν pînă cînd se găsește rația unitară. Se descrie calculul pentru ultima încercare ($\nu = 2{,}40$). Pentru această valoare se calculează coeficienții t; $t_{21} = -0{,}1615$;

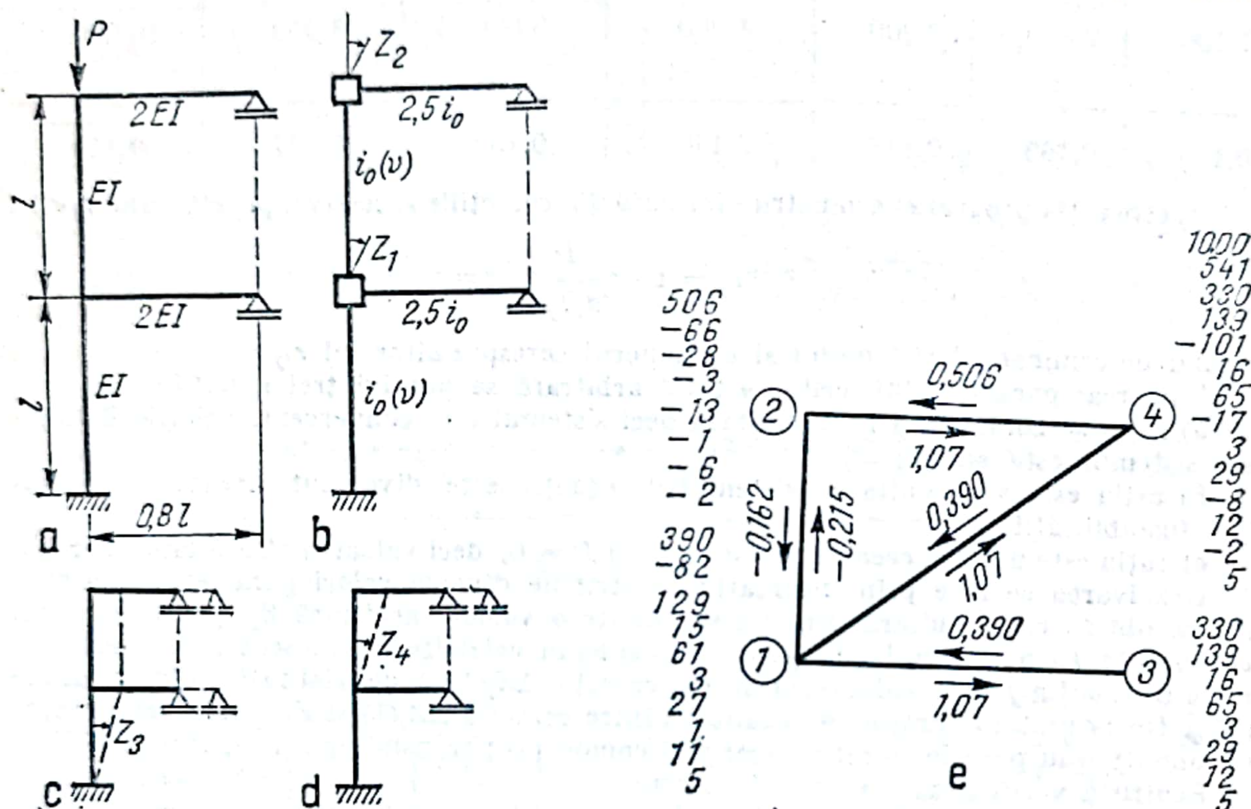


Fig. VIII.46

$t_{41} = t_{31} = 0{,}390$; $t_{12} = -0{,}215$; $t_{32} = 0$; $t_{42} = 0{,}506$; $t_{13} = t_{14} = t_{24} = 1{,}07$; $t_{23} = t_{43} = t_{34} = t_{32} = 0$. Se dă o deplasare arbitrară $Z_4 = 1\,000$, apoi se blochează gradul de libertate corespunzător, compensările conducîndu-se între celelalte trei necunoscute (Z_1, Z_2, Z_3) prin procedeul nodurilor fictive. Schema de transmiteri este indicată în fig. VIII.46, *e*. Ordinea nodurilor în care s-au făcut operațiile este: *4, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2*... Rația rezultă din cumularea tendințelor de rotire ce se adună în nodul fictiv *4* după blocare; $\Delta Z(1) = 541 + 330 + 139 - 101 + \ldots = 1\,012 \approx 1\,000$ ceea ce înseamnă că rația este practic unitară.

Se reține deci;

$$P_{cr} = \frac{\nu_{cr}^2\, EI}{l^2} = 5{,}76\,\frac{EI}{l^2}.$$

4.5. Metode aproximative în studiul stabilității cadrelor

4.5.1. Procedeul fragmentării structurilor. În cazul cadrelor cu noduri fixe, dacă barele puternic comprimate sînt distanțate între ele structura poate fi fragmentată într-o serie de substructuri conținînd o bară comprimată și alte cîteva bare vecine necompri-

mate, toate aceste structuri avînd noduri fixe. Se cercetează apoi stabilitatea barei cu cel mai mare factor de compresiune ν ca în cap. 2, pct. 2.2., considerînd bara cu legături elastice la capete.

În cazul cînd barele comprimate sînt apropiate între ele trebuie să se țină seama de influențele reciproce. În lucrarea [25] este descris un asemenea procedeu bazat pe introducerea unor corecții la legăturile de la capete.

4.5.2. Aproximarea funcțiilor de corecție. La cadrele cu noduri deplasabile translațiile nodurilor au o importanță mult mai mare decît rotirile acestora în calculul stabilității. Pornind de aici în calculul cadrelor cu noduri deplasabile, coeficienții r din relațiile (VIII.35) se calculează luînd aproximativ

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 \approx 1. \qquad \text{(VIII.78)}$$

Se ajunge astfel la o ecuație în η_2 și η_1 care este mai ușor de rezolvat decît ecuația (VIII.37) cu termeni calculați exact.

Pentru calcule rapide se poate admite o aproximare și mai pronunțată considerînd și

$$\eta_1 \approx 1 - \frac{\nu^2}{3}; \qquad \eta_2 \approx 1 - \frac{\nu^2}{12}. \qquad \text{(VIII.79)}$$

Pentru a reduce din aproximație se poate folosi un procedeu intermediar descris în lucrarea [25]. Se consideră drept necunoscute numai gradele de libertate ale sistemului. Se notează aceste necunoscute cu $Z_a, Z_b, \ldots, Z_k, \ldots, Z_l$. În aceste condiții ecuațiile metodei deplasărilor sînt:

$$L_{ka}Z_a + L_{kb}Z_b + \ldots + L_{kl}Z_l + L_{k0} = 0 \quad (k = a, b, \ldots, l). \qquad \text{(VIII.80)}$$

Ecuația de stabilitate

$$\begin{vmatrix} L_{aa} & L_{ab} \ldots & L_{al} \\ L_{ba} & L_{bb} \ldots & L_{bl} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{ka} & \ldots\ldots\ldots & L_{kl} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(VIII.81)}$$

unde coeficienții care se calculează ca în relațiile (VIII.35) sînt:

$$L_{kl} = -\sum_{jg} [(m^{II}_{jg,l} + m^{II}_{gj,l})\, \theta_{jg,k} - P_{jg} l_{jg} \theta_{jg,l} \theta_{jg,k}] \qquad \text{(VIII.82)}$$

în care m^{II} sînt momentele încovoietoare de ordinul II de pe nod, din metoda deplasărilor calculate pentru $Z_l = 1$, θ sînt rotirile barei jg determinate de $Z_k = 1$ respectiv $Z_l = 1$, P_{jg} este forța axială din bara jg iar l_{jg} lungimea sa.

Caracterul aproximativ al metodei constă în considerarea aproximativă a sumei momentelor de ordinul II

$$(m^{II}_{jg,l} + m^{II}_{gj,l}) \approx (1 - 0{,}02\nu^2_{jg})\,(m^{I}_{jg,l} + m^{I}_{gj,l}) \qquad \text{(VIII.83)}$$

pentru barele dublu încastrate și

$$m^{II}_{jg,l} \approx (1 - 0{,}08\nu^2_{jg})\, m^{I}_{jg,l} \qquad \text{(VIII.84)}$$

pentru bara articulată în g.

De observat că termenul al doilea din relaţia (VIII.82) se poate scrie

$$P_{jg}l_{jg}\theta_{jg,i}\theta_{jg,k} = l_{jg}\nu_{jg}^2\theta_{jg,i}\theta_{jg,k}. \qquad \text{(VIII.85)}$$

În acest fel toţi termenii din relaţia (VIII.81) capătă o exprimare algebrică, necunoscuta fiind ν^2.

Utilizarea metodei este limitată de condiţiile ca gradele de încastrare ale barelor puternic comprimate să depăşească valoarea 0,25 la ambele capete

$$\varepsilon_j = 1 - d_j \geqslant 0{,}25; \quad \varepsilon_g = 1 - d_g \geqslant 0{,}25 \qquad \text{(VIII.86)}$$

d_j şi d_g fiind coeficienţii de distribuţie în metoda Cross pentru bara jg în nodul j respectiv g (în calculul de ordinul I).

Metoda nu se aplică cadrelor cu translaţiile stînjenite de existenţa unor stîlpi foarte rigizi cu forţe axiale mici. Pentru alte cazuri a se consulta lucrarea [25].

Exemplul de calcul VIII.10. Se cere determinarea aproximativă a sarcinii critice pentru cadrul din fig. VIII.21 rezolvat exact în exemplul de calcul VIII.6. Ecuaţia de stabilitate se reduce după simplificările (VIII.73) la:

$$\begin{vmatrix} 18 & 4 & -6 \\ 4 & 17 & -3 \\ -6 & -3 & 12\eta_2(\nu_0) + 3\eta_1(\nu_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (\nu_1 = 0{,}71\nu_0).$$

Prin încercări se ajunge la $\nu_{0,cr} = 2{,}655$, $P_{cr} = 3{,}54\,\frac{EI}{l^2}$ mai mică decît valoarea exactă cu circa 1,5% deci în sens acoperitor.

Dacă se face uz şi de simplificarea (VIII.79) se ajunge la ecuaţia

$$3\,720 - 435\,\nu_0^2 = 0$$

$\nu_{0,cr} = 2{,}92$, $P_{cr} = 4{,}30\,\frac{EI}{l^2}$ cu o eroare de 19% în sens descoperitor de această dată.

4.5.3. **Metoda energetică.** Această metodă are, în calculul stabilităţii cadrelor cu noduri deplasabile, o exprimare puţin diferită de cea folosită în cazul barelor.

Cercetînd numai stabilitatea unui cadru (fără a ne preocupa de calculul de ordinul II), schema de încărcare a acestuia se poate reduce la cea din fig. VIII.47, *a* adică la cadrul încărcat cu propriile lui forţe axiale. În felul acesta forma cadrului este chiar

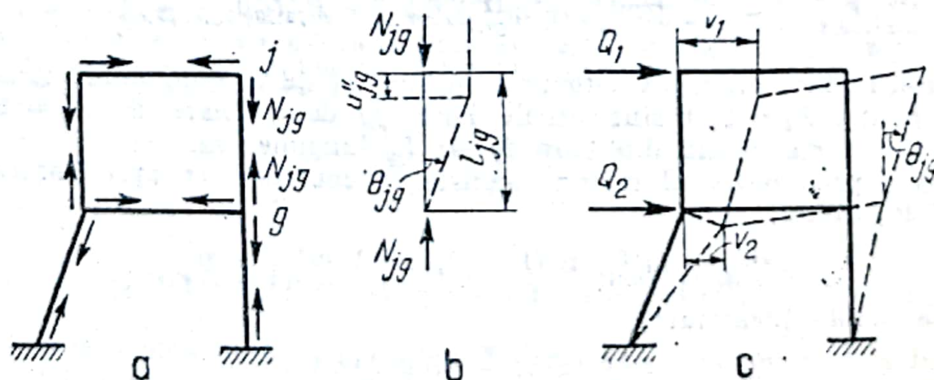


Fig.VIII.47

poligonul de presiune al sistemului de forțe și nu are deformări de încovoiere în sensul calculului de ordinul I.

Principiul de aplicare a metodei energetice este dat la pct. 4.1.1.

Relațiile (VIII.39) și (VIII.40) rămîn în vigoare, deosebirea constînd numai în modul de determinare a mărimilor u_h.

În cazul cadrelor cu noduri deplasabile, trebuie luate în considerare apropierea punctelor de aplicație a celor două forțe atît prin încovoierea barei cît și prin rotirea barei în procesul de deformare. Pentru o bară jg se va scrie:

$$u_{jg} = u'_{jg} + u''_{jg} \tag{VIII.87}$$

unde:

$$u'_{jg} = \frac{1}{2}\int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x \tag{VIII.88}$$

(produs de încovoierea barei față de axa rotită)

$$u''_{jg} = l_{jg} - l_{jg}\cos\theta_{jg} = l_{jg}2\sin^2\frac{\theta_{jg}}{2} \simeq l_{jg}\frac{\theta_{jg}^2}{2} \tag{VIII.89}$$

produs de rotirea barei ca în fig. VIII.47, b).

Făcînd uz de existența unui parametru unic al forțelor axiale conform (VIII.41) încărcarea critică este dată de

$$P_{0,cr} = \frac{\sum\limits_{jg}\int_0^{l_{jg}} EI_{jg}(v'')^2\mathrm{d}x}{\sum\limits_{jg}\alpha_{jg}\left[\int_0^{l_{jg}}(v')^2\mathrm{d}x + l_{jg}\theta_{jg}^2\right]}. \tag{VIII.90}$$

Caracterul aproximativ al metodei constă în alegerea arbitrară a formei deformate definite de v și θ.

Pentru a se respecta cît mai multe condițiile de margine este indicată folosirea unei deformate efective produsă de un sistem de forțe Q (fig. VIII.47, c) care să conducă la o formă cît mai apropiată de forma scontată de pierdere a stabilității. În acest caz, pe lîngă respectarea condițiilor de margine, se pot simplifica și integralele din relația (VIII.90) după cum urmează:

$$\sum_{jg}\int_0^{l_{jg}}(EI_{jg})(v'')^2\mathrm{d}x = \sum_{jg}\int_0^{l_{jg}}\frac{M^2\mathrm{d}x}{EI_{jg}} = \sum_k Q_k\,v_k \tag{VIII.91}$$

$$\int_0^{l_{jg}}(v')^2\,\mathrm{d}x = \frac{l_{jg}^3}{45(EI_{jg})^2}\,(M_{jg}^2 + M_{gj}^2 + 1{,}75\,M_{jg}\,M_{gj}) \tag{VIII.92}$$

M_{jg} și M_{gj} fiind momentele încovoietoare la cele două capete ale barei jg din încărcarea cu forțele Q. Momentele încovoietoare se consideră de același semn dacă întind aceeași parte a barei.

De menţionat că dacă există bare dublu articulate ($M_{jg} = M_{gj} = 0$) pierderea locală a stabilităţii acestor bare nu este evidenţiată de relaţia (VIII.90). Această situaţie trebuie cercetată separat aşa cum s-a arătat şi în cap. 3, pct. 3.4.1.

Metoda energetică dă rezultate bune la cadrele etajate (şi la alte tipuri de cadre) unde forma de pierdere a stabilităţii se poate aproxima relativ uşor. În plus, această metodă este avantajoasă deoarece utilizează anumite calcule statice necesare oricum în proiectare.

O variantă a acestei metode este dată în lucrarea [25].

Exemplul de calcul VIII.11. Se cere determinarea lui P_{cr} pentru cadrul din fig. VIII.48, *a*. Pierderea stabilităţii se face printr-o deformare, cu translaţii de noduri antisimetrică. Forma aproximativă de pierdere a stabilităţii se obţine încărcînd cadrul cu forţele orizontale Q care determină momentele încovoietoare din fig. VIII.48, *b*, deplasările de noduri şi rotirile de bare din fig. VIII.48, *c*.

Numărătorul fracţiei (VIII.90) se calculează cu relaţia (VIII.91), fie pornind de la diagrama de momente fie de la deplasările v

$$\sum_{jg} \int_0^{l_{jg}} (EI_{jg})(v'')^2 \, dx = \sum_k Q_k v_k = 2{,}458 \, \frac{Q^2 l^3}{EI_0}.$$

Pentru calculul numitorului se observă că $\alpha_{jg} = 1$ la stîlpi şi $\alpha_{jg} = 0$ la rigle şi se ajunge la

$$\sum_{jg} \alpha_{jg} l_{jg} \theta_{jg}^2 = 0{,}3992 \, \frac{Q^2 l^5}{(EI_0)^2}.$$

Apoi, cu ajutorul relaţiei (VIII.92) se ajunge la

$$\sum_{jg} \int_0^{l_{jg}} (v')^2 \, dx = 0{,}0335 \, \frac{Q^2 l^5}{(EI_0)^2}.$$

$$P_{cr} = \frac{2{,}458}{0{,}3992 + 0{,}0335} \cdot \frac{EI_0}{l^2} = 5{,}68 \, \frac{EI_0}{l^2}.$$

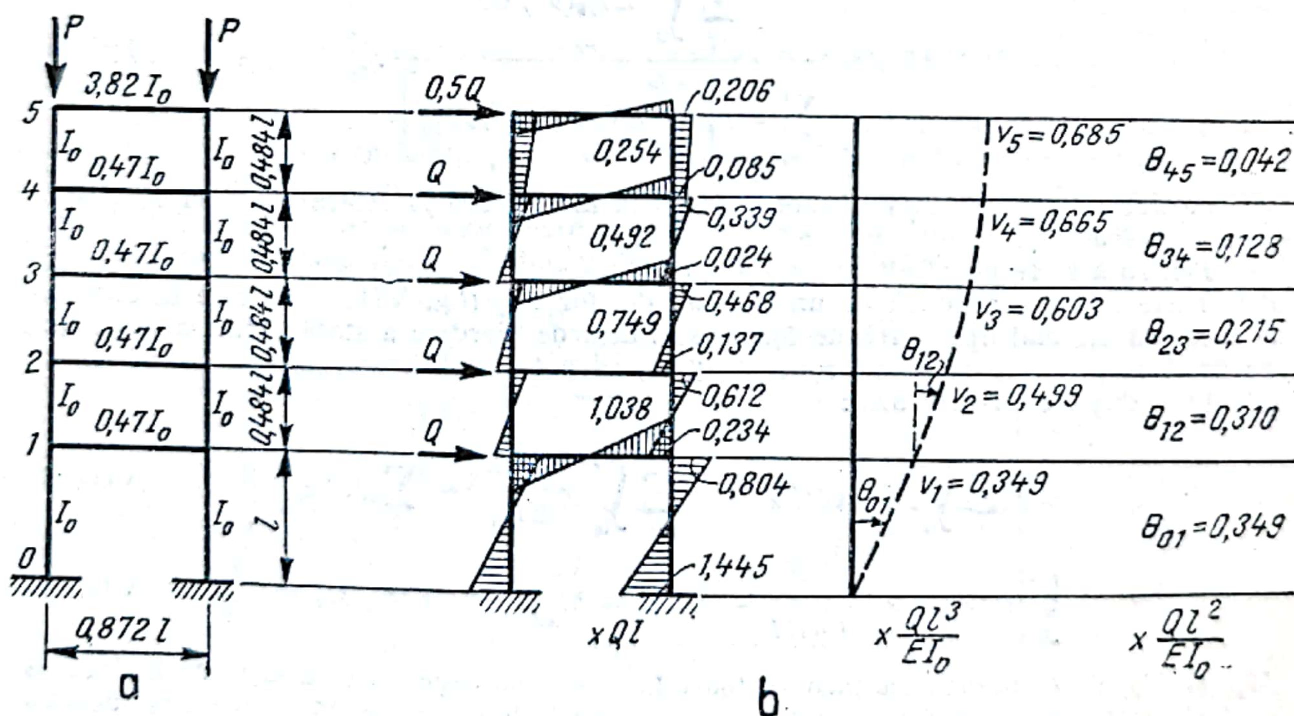


Fig. VIII.48

Valoarea exactă [29] este $5{,}66\,\frac{EI_0}{l^2}$; eroare în sens descoperitor de 0,5%).

4.5.4. Metoda cadrelor echistabile. Studiul stabilităţii unui cadru etajat avînd riglele de secţiune constantă în lungul lor poate fi făcut folosindu-se noţiunea de cadre echistabile [13].

Două cadre cu o deschidere sînt echistabile — admit o valoare egală pentru P_{cr} —

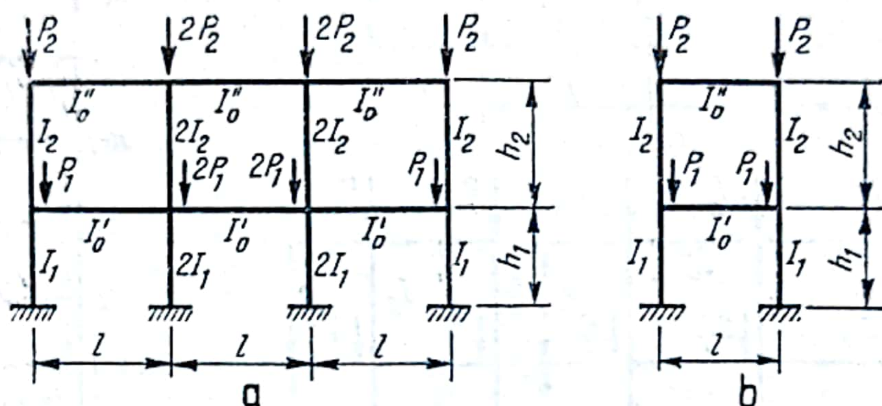


Fig. VIII.49

dacă sînt identice din punct de vedere geometric, elastic şi al forţelor axiale. Ele au o deformată identică în momentul pierderii stabilităţii.

Un cadru cu mai multe deschideri şi niveluri avînd configuraţia geometrică, rigiditățile şi forţele axiale după dispoziţia particulară din fig. VIII. 49, *a* este echistabil cu cel din fig. VIII. 49, *b* (adică ambele cadre au valorile critice ale încărcărilor identice), întrucît cadrul din fig. VIII. 49, *a* poate fi descompus în mai multe cadre de tipul celui din fig. VIII.49, *b* care au deformate identice în momentul pierderii stabilităţii.

Un cadru cu o configuraţie geometrică de acelaşi tip cu cel precedent dar cu forţe axiale şi rigidităţi cu dispoziţie oarecare avînd însă riglele de secţiune constantă (ca în fig. VIII. 50,*a*) se consideră aproximativ echistabil cu cel din fig. VIII.50, *b* cu condiţiile:

$$I_{I} = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{6}; \qquad I_{II} = \frac{I_5 + I_6 + I_7 + I_8}{6}$$

$$P_{I} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{6}; \qquad P_{II} = \frac{P_5 + P_6 + P_7 + P_8}{6}. \tag{VIII.93}$$

Relaţiile (VIII.93) adaptate corespunzător sînt valabile pentru orice număr de deschideri şi niveluri.

La rîndul lui, cadrul din fig. VIII.50, *b* este echistabil cu cel din fig. VIII. 50,*c*. În felul acesta stabilitatea cadrului de tipul celui din fig. VIII.50, *a* poate fi cercetată prin intermediul unui cadru cu o singură deschidere.

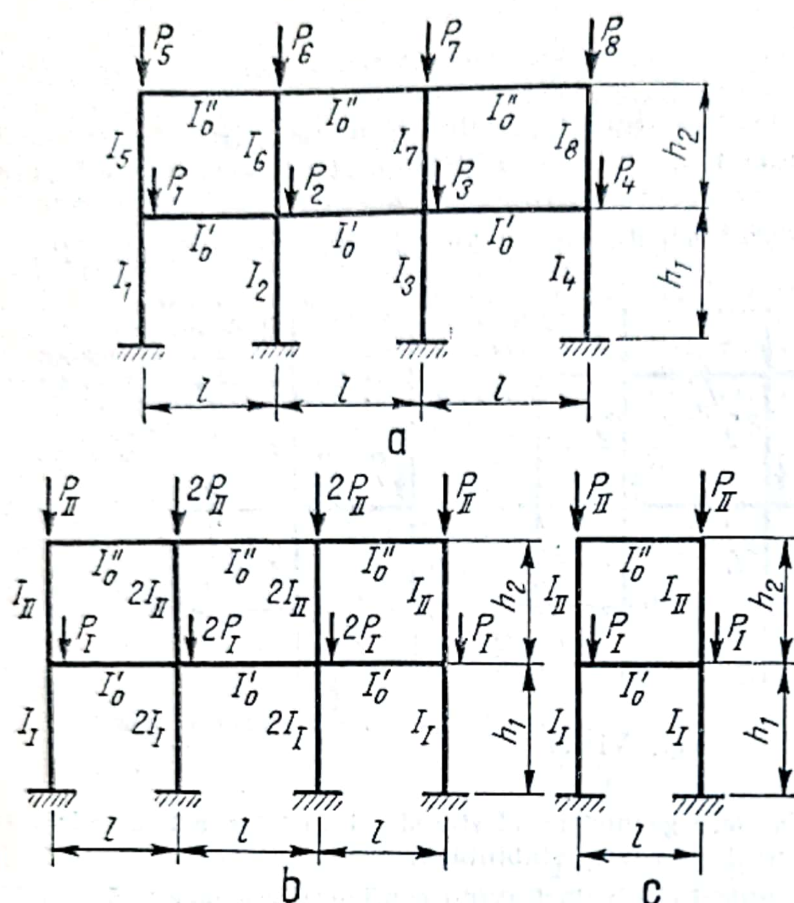


Fig. VIII.50

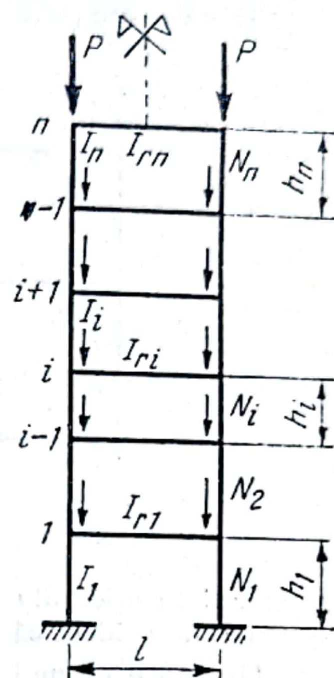


Fig. VIII.51

Pentru cadrele etajate simetrice, cu o deschidere şi mai multe niveluri (fig. VIII.51), se poate folosi, în afara metodelor exacte şi aproximative prezentate în acest capitol, şi următorul procedeu aproximativ [35]. Se calculează forţa critică din primul nivel

$$N_{1,cr} = \pi^2 \frac{EI_1}{(h_{1f})^2} \qquad \left(\text{pentru} \quad \frac{h_{1f}}{h_1} \leqslant 2\right) \tag{VIII.94}$$

unde:

$$\frac{h_{1f}}{h_1} = \frac{R + \sum_1^n d_i}{\sum_1^n g_i}; \qquad R = \frac{c}{6}\left[\sum_1^{n-1} r_i + g_n^2 \frac{I_{r1}}{I_{rn}}\right], \qquad c = \frac{I_1}{I_{r1}} \cdot \frac{l}{h_1}$$

$$r_i = g_i^2(1 + f_{i+1})^2 \frac{I_{r1}}{I_{ri}}; \qquad g_i = \sqrt{\frac{I_i}{I_1} \cdot \frac{N_i}{N_1}}; \qquad f_i = \sqrt{\frac{I_i}{I_{i-1}} \cdot \frac{N_i}{N_{i-1}}}.$$

$$d_i = \frac{N_i}{N_1} \cdot \frac{h_i}{h_1}.$$

Apoi se deduce $\nu_{1,cr}$ și de aici, folosind relațiile de tip (VIII.23) celelalte forțe axiale critice și deci și încărcările critice.

Pentru detalii precum și alte metode particulare a se consulta lucrările [13,17, 25,31,35].

5. STABILITATEA STRUCTURILOR SPAȚIALE DE BARE

Din cauza complicațiilor de calcul metoda eforturilor nu este folosită în studiul stabilității sistemelor spațiale. Metoda deplasărilor se folosește în principiu, la fel ca în problemele plane cu anumite completări și precizări.

5.1. Stabilitatea cadrelor spațiale ortogonale

Un cadru spațial ortogonal este un sistem la care barele sînt paralele cu trei direcții de referință ortogonale. Rezultă că într-un nod pot exista cel mult 6 bare. În cele ce urmează se va considera numai cazul cînd secțiunile barelor sînt constante, axele principale de inerție a acestora fiind situate în plane paralele cu planele generale de referință.

Parametrii necunoscuți în metoda deplasărilor sînt rotirile de noduri (cîte trei în fiecare nod) și gradele de libertate ale sistemului (ilustrat prin deplasări de noduri sau rotiri ale axelor barelor). În fig. VIII.52, *a* sînt indicate vectorial aceste rotiri necunoscute pentru o bară *AB*.

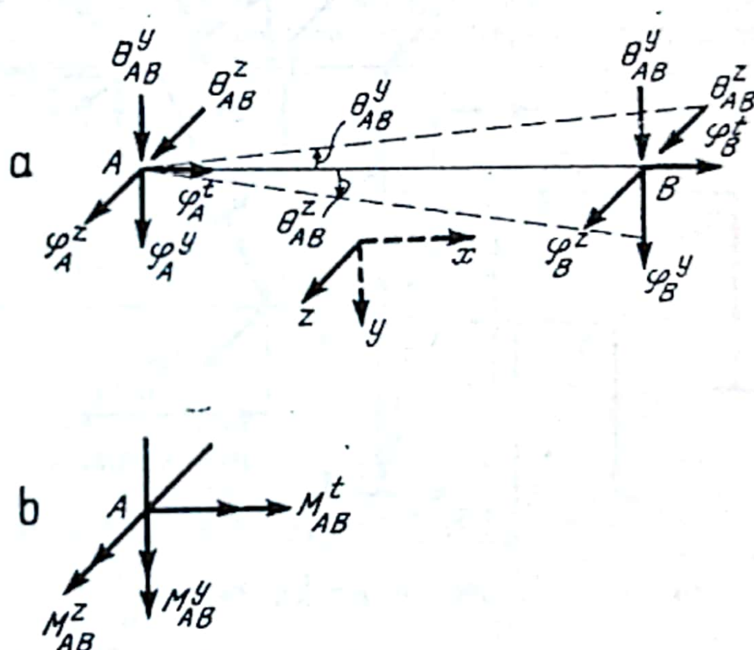


Fig. VIII.52

Ținînd seama de caracterul spațial al deformării în nodul *A* al unei bare *AB* (fig. VIII.52, *a*) se vor scrie, în loc de una, trei relații de tipul primei ecuații din (VIII.29) (în absența forțelor transversale):

$$
\begin{aligned}
M^y_{AB} &= -4i^y_{AB}\varphi^y_A\Phi_2(\nu^y_{AB}) - 2i^y_{AB}\varphi^y_B\Phi_3(\nu^y_{AB}) + 6i^y_{AB}\,\theta^y_{AB}\Phi_4(\nu^y_{AB})\\
M^z_{AB} &= -4i^z_{AB}\varphi^z_A\Phi_2(\nu^z_{AB}) - 2i^z_{AB}\varphi^z_B\Phi_3(\nu^z_{AB}) + 6i^z_{AB}\,\theta^z_{AB}\Phi_4(\nu^z_{AB}) \qquad \text{(VIII.95)}\\
M^x_{AB} &= M^t_{AB} = -i^t_{AB}\varphi^x_A + i^t_{AB}\varphi^x_B.
\end{aligned}
$$

În aceste relații semnul pozitiv al momentelor de nod este indicat în fig. VIII.52, *b*. S-au folosit notațiile:

$$
i^y_{AB} = \frac{EI_y}{l_{AB}}; \quad i^z_{AB} = \frac{EI^z_{AB}}{l_{AB}}; \quad i^t_{AB} = \frac{GI^t_{AB}}{l_{AB}}; \quad \nu^y_{AB} = l_{AB}\sqrt{\frac{N_{AB}}{EI^y_{AB}}}; \quad \nu^z_{AB} = l_{AB}\sqrt{\frac{N_{AB}}{EI^z_{AB}}}.
$$

Cu acestea ecuația de stabilitate se construiește în același mod ca în problema plană și este de forma (VIII.37) unde coeficienții r se calculează ca în relațiile (VIII.35) ținînd seama de relațiile (VIII.95). Deosebirea față de problema plană este apariția efectului rigidității de torsiune pentru termenii r_{jj} și r_{jg} și precizarea prin indicele superior z, y sau t a direcțiilor vectorului moment respectiv.

Modul concret de scriere a ecuației de stabilitate poate fi urmărit în exemplul următor.

Exemplul de calcul VIII.12. Se cere determinarea încărcării critice pentru cadrul spațial din fig. VIII.53. Cadrul are 6 necunoscute rotiri de nod și o necunoscută grad de libertate reprezentate în figură. Pentru fiecare bară se indică triedrul de referință. În conformitate cu relațiile (VIII.35) și (VIII.95) se calculează coeficienții r:

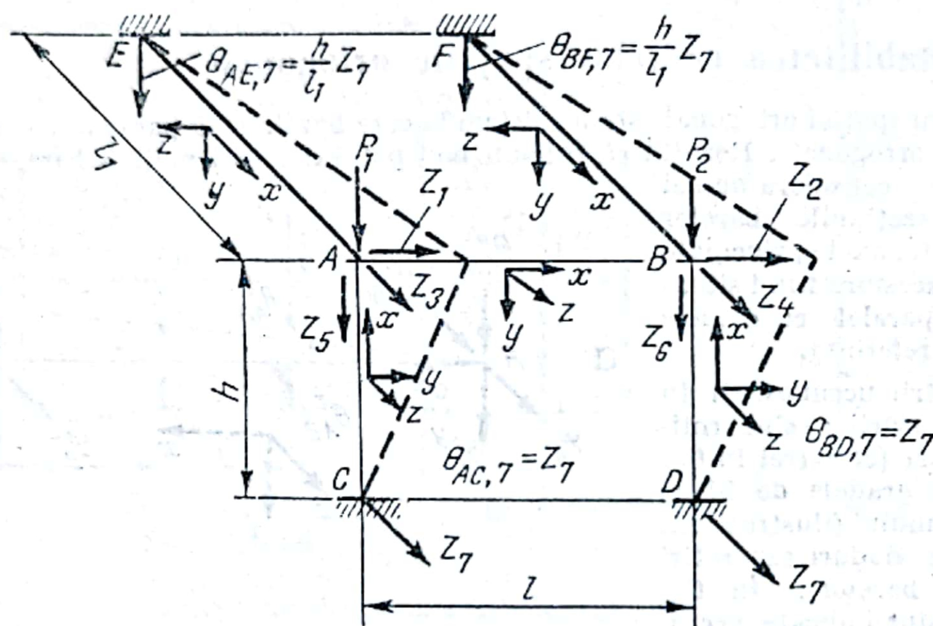


Fig. VIII.53

$$r_{11} = -4i^{yy}_{AC}\Phi_2(\nu^y_{AC}) - 4i^z_{AE} - i^t_{AB};\ r_{12} = i^t_{AB};\ r_{13} = r_{14} = \ldots = r_{17} = 0;\ \text{etc.}$$

$$r_{33} = -4i^z_{AC}\Phi_2(\nu^z_{AC}) - 4i^z_{AB} - i^t_{AE};\ r_{34} = -2i^z_{AB};\ r_{35} = r_{36} = 0;\ r_{37} = 6i^z_{AC}\Phi_4(\nu^z_{AC})\ \text{etc.}$$

$$r_{55} = -4i^y_{AE} - 4i^y_{AB} - i^t_{AC};\ r_{56} = -2i^y_{AB};\ r_{57} = 6i^y_{AE}\frac{h}{l_1}\ \text{etc.}\ \ldots$$

$$r_{77} = -12i^z_{AC}\eta_2(\nu^z_{AC}) - 12i^z_{BD}\eta_2(\nu^z_{BD}) - 12i^y_{AE}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2 - 12i^y_{BF}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2.$$

Se constată că necunoscutele Z_1 și Z_2 se separă de rest și se ajunge la produsul a doi determinanți $D_{1,2}\cdot D_{3,7}=0$. În cazul particular cînd $l = l_1 = h$; $P_1 = P_2 = P$; $I^y_{AC} = I^z_{AC} = I^y_{BD} = I^z_{BD} = I^y_{AB} = I^y_{AE} = I^y_{BF} = I$; $I^z_{AB} = I^z_{AE} = I^z_{BF} = 2I$; $GI^t \approx EI$ (pentru toate barele) rezultă că toți factorii de compresiune sînt egali între ei (ν). În acest fel se ajunge pe rînd la:

$$D_{1,2} = \begin{vmatrix} -4i\Phi_2 - 9i & i \\ i & -4i\Phi_2 - 9i \end{vmatrix} = 0\quad \nu' = 5{,}67;\ \nu'' = 5{,}76.$$

Aceste două valori reprezintă flambajul cadrelor E, A, C și F, B, D în planul lor fără și cu torsiunea barei AB

În ceea ce privește determinantul $D_{3,7}$ după anumite simplificări se ajunge la ecuațiile și soluțiile următoare:

$$-88\Phi_2\eta_2 - 64\Phi_2 - 286\eta_2 - 208 + 66\Phi_4^2 = 0; \quad \nu_{min} = 3{,}98$$

(reprezentînd flambajul antisimetric al cadrului C, A, B, D) și:

$$-4\Phi_2 - 5 = 0; \quad \nu = 5{,}44$$

(reprezentînd flambajul simetric, deci fără deplasarea nodurilor, al aceluiași cadru). Reținînd valoarea minimă se poate scrie:

$$P_{cr} = 3{,}98^2 \frac{EI}{l^2} = 15{,}8 \frac{EI}{l^2}.$$

5.2. Cazuri particulare de structuri spațiale

5.2.1. Solide nedeformabile (planșee) rezemate pe stîlpi verticali. În fig.VIII.54 este indicat cazul unui solid rigid (în toate planele) rezemat pe stîlpi verticali. Parametrii necunoscuți sînt aici gradele de libertate ale solidului: translațiile după y și z și rotirea în jurul unei axe paralele cu x. Este mai comod să se considere drept necunoscute unghiurile în planele yox și zox în care se rotește un stîlp AB considerat de referință.

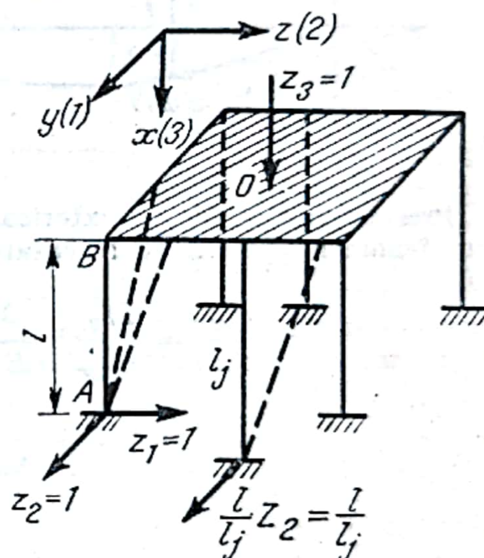


Fig. VIII.54

Ecuația de stabilitate are aspectul.

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(VIII.96)}$$

Dacă planele principale de inerție ale secțiunilor stîlpilor sînt orientate toate după planele xoz sau yoz calculul se conduce ca la pct. 5.1. și rezultă $r_{12} = 0$. În caz contrar $r_{12} \neq 0$. În ambele cazuri rotirea Z_3 induce eforturi de încovoiere după fiecare plan principal și, evident și momente de torsiune.

Dacă stîlpii au dispoziție ortogonală și există o axă de simetrie geometrică, elastică și a forțelor axiale, determinantul (VIII.96) se divide în produsul a doi determinanți separîndu-se translația în direcția axei de simetrie. Dacă există două axe de simetrie ecuația (VIII.96) capătă forma

$$r_{11} \cdot r_{12} \cdot r_{13} = 0 \qquad \text{(VIII.97)}$$

marcînd faptul că există trei forme distincte de pierdere a stabilității în care participă numai cîte una din necunoscute.

5.2.2. Turnurile axial simetrice. Aceste turnuri comportă existența unui număr mare de necunoscute și din această cauză se folcsesc metodele aproximative. Se pornește de la observația că flambajul periculos poate proveni fie dintr-o răsucire în jurul axei turnului, fie dintr-o translație în cursul căreia inelele se mențin nedeformate. Pe baza acestor considerații se poate folosi metoda energetică întrucît forma de pierdere a stabilității este relativ ușor de aproximat. Pentru detalii a se consulta lucrările [18, 25].

5.3. Flambajul lateral al grinzilor încovoiate

Grinzile încovoiate independente avînd o secţiune dreptunghiulară îngustă şi înaltă pot să-şi piardă stabilitatea printr-o deformare laterală a zonei comprimate care antrenează şi restul grinzii într-un proces în care, în afara încovoierii în plan vertical, apare şi o încovoiere în plan orizontal precum şi răsucire (fig. VIII.55).

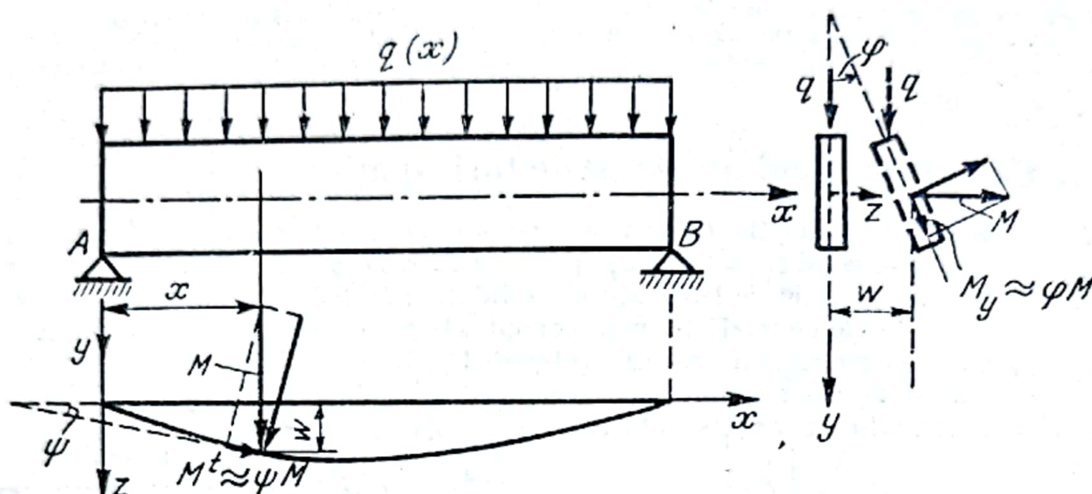


Fig. VIII.55

Presupunînd că forţele exterioare îşi păstrează direcţia în cursul deformării, aceste două fenomene pot fi reprezentate matematic prin

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{M\varphi}{EI_y}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M_t}{GI_t} = -\frac{M\psi}{GI_t}, \quad \text{(VIII.98)}$$

Întrucît

$$\psi = \frac{dw}{dx}$$

se pot elimina ψ şi w şi se ajunge la ecuaţia diferenţială în φ care sintetizează fenomenul de pierdere laterală a stabilităţii

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{M^2\varphi}{GI_tEI_y} = 0. \quad \text{(VIII.99)}$$

Cunoscînd funcţia $M(x)$ se integrează ecuaţia (VIII.99), se pun condiţiile de margine şi pentru determinarea constantelor se ajunge la un sistem de ecuaţii omogen care conduce la anularea determinantului. Aceasta este ecuaţia de stabilitate avînd ca necunoscute $M(x)$ sau $q(x)$.

Dacă $M(x)$ este constant, ecuaţia (VIII.99) cu coeficienţi constanţi conduce la soluţia

$$\varphi = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx; \left(k = M\sqrt{\frac{1}{GI_tEI_y}}\right). \quad \text{(VIII.100)}$$

Dacă $M(x) = f(x)$ ecuaţia (VIII.99) cu coeficienţi variabili se poate rezolva prin dezvoltarea în serie a funcţiei φ sau se folosesc funcţiile Bessel.

În tabelul VIII.22 sînt date cîteva cazuri privind stabilitatea laterală a grinzilor cu secţiune dreptunghiulară (fig.VIII.56). Pentru alte încărcări şi tipuri de grinzi se pot consulta lucrările [19, 22, 31, 32].

Tabelul VIII.22

Încărcări critice, fig. VIII.56

Cazul	Încărcare critică							Rezemări
a	$Q_{cr} = \frac{k\sqrt{GI_t \cdot EI_y}}{l^2}$	$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	Articulaţii pentru încovoiere în ambele planuri; încastrare pentru torsiune
		k	56,01	29,11	21,01	17,82	16,94	
b	$(ql)_{cr} = \frac{28{,}31\sqrt{GI_tEI_y}}{l^2}$							
c	$Q_{cr} = \frac{4{,}01\sqrt{GI_tEI_y}}{l^2}$							Încastrare perfectă în *A*. Capăt liber în *B*
d	$(ql)_{cr} = \frac{12{,}85\sqrt{GI_tEI_y}}{l^2}$							

În cazul cînd secţiunea barei este un profil cu pereţi subţiri, în procesul de deformare laterală intervin şi caracteristicile sectoriale ale secţiunii. Ecuaţia diferenţială a răsucirii (efect al deformării laterale) similară cu ecuaţia (VIII.99) capătă forma

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} - \frac{GI_t}{EI_\omega}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{M^2}{E^2I_\omega I_y} = 0 \qquad \text{(VIII.101)}$$

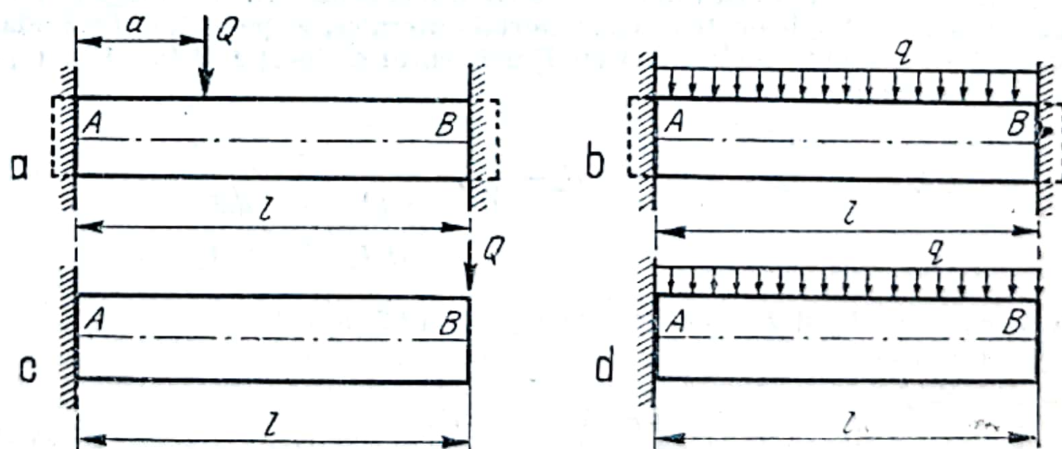


Fig. VIII.56

unde I_ω este momentul de inerţie sectorial. În continuare se procedează similar cu cazul grinzii cu secţiune dreptunghiulară. Diverse cazuri particulare şi tabele de încărcări critice pot fi găsite în lucrările [22, 32].

5.4. Flambajul lateral al tălpii comprimate la grinzile cu zăbrele

Problema stabilităţii tălpii superioare a unei grinzi cu zăbrele se pune de obicei la tablierele de poduri cu calea jos cu profil deschis (fără contravîntuiri superioare). În acest caz talpa superioară este o bară activată de o forţă tangenţială variabilă în trepte, descrescînd spre mijloc (provenind din diagonale). Lateral, deformarea este stîn-

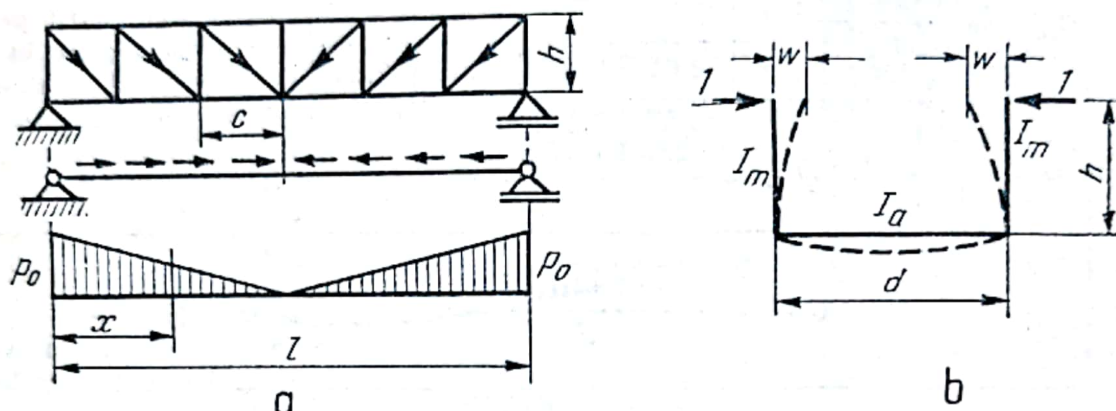


Fig. VIII.57

jenită numai de rigiditatea cadrelor deschise realizate de montanţi şi antretoaze (sensibil mai mică decît cea din planul grinzii). Din aceste motive este mai importantă problema stabilităţii tălpii în planul orizontal decît cea din planul grinzii.

Dacă numărul de panouri este suficient de mare, talpa superioară poate fi asimilată cu o grindă pe mediu elastic, caracteristica elastică a mediului elastic echivalent fiind determinată de elasticitatea cadrului transversal, iar încărcarea poate fi asimilată cu o sarcină tangenţială variind triunghiular (fig. VIII.57, *a*).

Pentru cazul cînd secţiunea tălpii este constantă şi deplasările laterale ale punctelor extreme ale tălpii sînt împiedicate de cadre portal puternice, se poate folosi metoda energetică, ca în lucrarea [32]. Se notează cu I_y momentul de inerţie al tălpii în raport cu axa verticală, l lungimea tălpii şi

$$\gamma = \frac{\beta l^4}{\pi^4 E I_y}; \quad \beta = \frac{R_0}{c}; \quad R_0 = \frac{1}{W} = \frac{1}{\dfrac{h^3}{3EI_m} + \dfrac{dh^2}{2EI_a}} \qquad \text{(VIII.102)}$$

mărimile c, w, h, d, I_m şi I_a fiind date în fig. VIII.57, *a* şi *b*.
Cu acestea se obţine:

$$\left(\frac{p_0 l}{4}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{(\mu l)^2} \qquad \text{(VIII.103)}$$

μ fiind dat în tabelul VIII.23.

Tabelul VIII.23

Coeficientul μ din expresia (VIII.103)

$\frac{\beta l^4}{16\,EI_y}$	0	5	10	15	22,8	56,5	100	162,8	200	300	500	1 000
μ	0,696	0,524	0,443	0,396	0,363	0,324	0,290	0,259	0,246	0,225	0,204	0,174

Pentru cazurile în care secțiunea tălpii se schimbă de la panou la panou sau coeficientul β este variabil, problemele pot fi rezolvate de la caz la caz tot prin metoda energetică folosind indicațiile generale din lucrarea [32].

6. STABILITATEA ARCELOR PLANE

6.1. Ecuațiile aspectelor static, geometric, fizic

Considerînd cazul general al unui arc plan de formă oarecare în poziție deformată ecuațiile aspectului static (ecuațiile diferențiale de echilibru pentru un element ds, fig. VIII.58) sînt:

$$\frac{dM}{ds} - T = 0; \quad \frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} - p_t = 0; \quad \frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} + p_n = 0. \qquad \text{(VIII.104)}$$

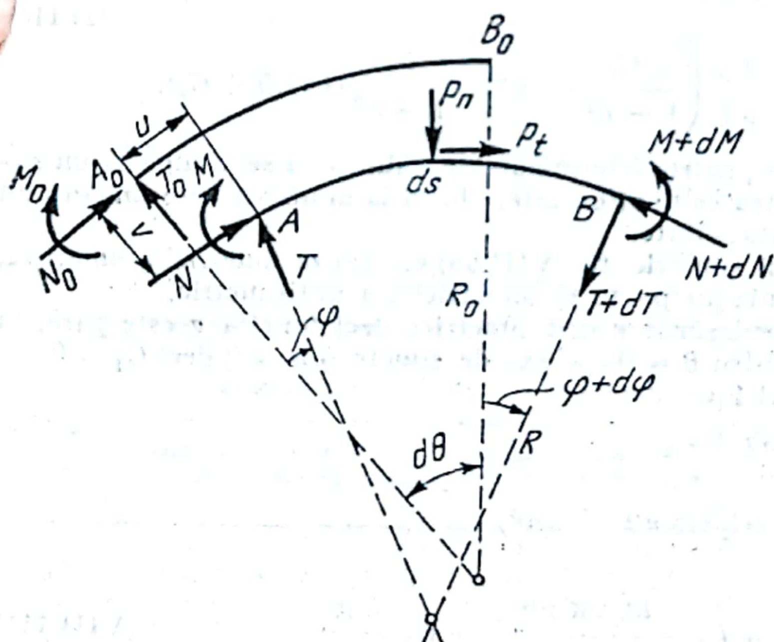


Fig. VIII.58

Ecuațiile aspectului geometric:

$$\varphi = \frac{dv}{ds} + \frac{u}{R_0};$$

$$\frac{du}{ds} - \frac{v}{R_0} = 0; \qquad \text{(VIII.105)}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}$$

Ecuația axei deformate:

$$M = -EI\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right). \qquad \text{(VIII.106)}$$

În aceste relații s-au notat cu indicele zero toate mărimile în situația nedeformată și fără indice aceleași mărimi în situația deformată.

6.2. Stabilitatea arcelor circulare

Se examinează numai cazul sarcinilor radiale uniform distribuite. Se admite că în decursul deformării sarcinile rămîn mereu radiale rotindu-se odată cu secțiunea în care sînt aplicate. De asemenea se consideră secțiunea constantă. Totodată, încărcarea radială fiind o încărcare de coincidență pentru forma circulară a arcului

$$M_0 = 0; \quad T_0 = 0; \quad N = N_0 + N_1 = pR_0 + N_1 \tag{VIII.107}$$

Utilizînd relațiile (VIII.104), (VIII.107) se stabilește ecuația diferențială a momentelor de ordinul II pentru arce circulare încărcate hidrostatic

$$\frac{d^3M}{d\theta^3} + n^2\frac{dM}{d\theta} = 0 \qquad \left(n^2 = 1 + p\frac{R_0^3}{EI}\right) \tag{VIII.108}$$

Soluția ecuației diferențiale este:

$$M = C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta + C_3. \tag{VIII.109}$$

Cu aceasta, reluînd expresiile (VIII.105), se deduce și φ, u, v:

$$\varphi = \frac{R_0}{nEI}(C_1 \cos n\theta - C_2 \sin n\theta - C_3 n\theta) + C_4$$

$$u = C_5 \cos\theta + C_6 \sin\theta + \frac{R_0^2}{nEI}\left(\frac{C_1}{1-n^2}\cos n\theta - \frac{C_2}{1-n^2}\sin n\theta - C_3\theta\right) + C_4R_0 \tag{VIII 110}$$

$$v = -C_5 \sin\theta + C_6\cos\theta - \frac{R_0^2}{EI}\left(\frac{C_1}{1-n^2}\sin n\theta + \frac{C_2}{1-n^2}\cos n\theta + C_3\right).$$

Punînd condițiile de margine pentru determinarea constantelor se ajunge la un sistem omogen de ecuații care, pentru compatibilitate, obligă la anularea determinantului ceea ce constituie ecuația de stabilitate.

În cazul existenței unei axe de simetrie (fig. VIII.59) din cauza simetriei geometrice, de încărcare și de rezemare flambajul poate fi simetric sau antisimetric.

Pentru flambajul simetric deplasările v sînt simetrice deci funcția v este pară, în consecință $C_1 = C_5 = 0$. Apoi pentru $\theta = 0$ (pe axa de simetrie) $u = 0$ deci $C_4 = 0$.

Relațiile (VIII.109) și (VIII.110) devin:

$$M = C_2 \cos n\theta + C_3$$

$$\varphi = -\frac{R_0}{n\,EI}(C_2 \sin n\theta + C_3 n\theta)$$

$$u = C_6 \sin\theta - C_2\frac{R_0^2 \sin n\theta}{n(1-n^2)\,EI} - C_3\frac{R_0^2\theta}{EI} \tag{VIII.111}$$

$$v = C_6 \cos\theta - C_2\frac{R_0^2 \cos n\theta}{(1-n^2)\,EI} - C_3\frac{R_0^2}{EI}.$$

Pentru flambajul antisimetric deplasările v sînt antisimetrice deci $C_2 = C_6 = 0$. Pentru $\theta = 0$, $v = 0$ deci $C_3 = 0$.

Relațiile (VIII.109) și (VIII.110) devin:

$$M = C_1 \sin n\theta$$

$$\varphi = \frac{C_1 R_0}{nEI} \cos n\theta + C_4$$

$$u = C_5 \cos \theta + C_1 \frac{R_0^2}{n(1-n^2)EI} \cos n\theta + C_4 R_0 \qquad \text{(VIII.112)}$$

$$v = -C_5 \sin \theta - C_1 \frac{R_0^2}{(1-n^2)EI} \sin n\theta.$$

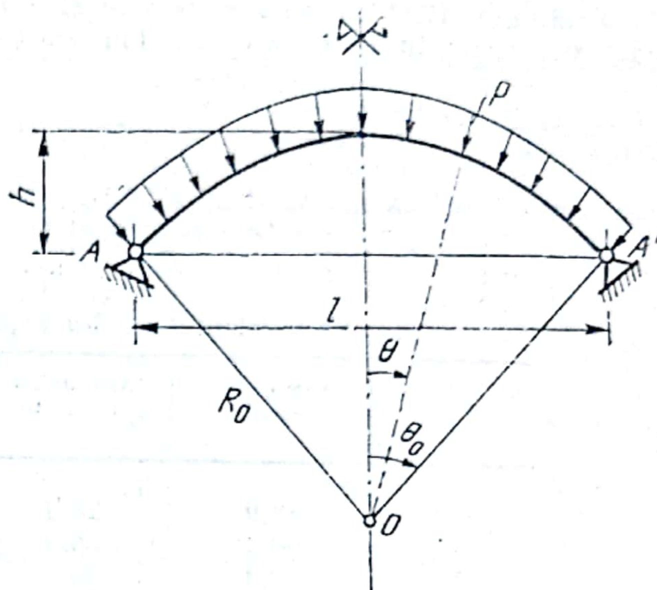


Fig. VIII.59

Punînd condițiile de margine în A și A' (referitoare la M, u, v) se ajunge la un sistem omogen. Anulînd determinantul se obține ecuația de stabilitate, a cărei formă depinde de tipul de rezemare în A și A'.

Pentru diverse cazuri de rezemare sarcina critică este dată [7] de expresia

$$p_{cr} = \eta \frac{EI}{R_0^3}. \qquad \text{(VIII.113)}$$

Coeficientul η este dat în tabelul VIII.24.

Tabelul VIII.24

Coeficientul η din expresia (VIII.113)

$2\theta_0$	Arce dublu încastrate		Arce dublu articulate		Arce triplu articulate		Arce dublu încastrate articulate la cheie	
	Flambaj simetric	Flambaj antisimetric	Flambaj simetric	Flambaj antisimetric	Flambaj simetric	Flambaj antisimetric	Flambaj simetric	Flambaj antisimetric
30°	484,0	294,0	320,0	143,0	108,0	143,0	162,0	294,0
60°	120,0	74,3	79,2	35,0	27,6	35,0	40,2	74,3
90°	53,2	32,4	34,7	15,0	12,0	15,0	17,4	32,4
120°	29,7	19,1	19,1	8,0	6,7	8,0	10,2	19,1
150°	18,8	11,0	11,0	4,8	4,3	4,8	6,6	11,0
180°	12,9	8,0	8,0	3,0	3,0	3,0	4,6	8,0

Relaţia (VIII.113) se mai poate pune şi sub o formă care să evidenţieze elementele practice folosite în proiectare (deschiderea şi săgeata)

$$p_{cr} = \eta_1 \frac{EI}{l^3} \tag{VIII.114}$$

unde l este deschiderea (v. fig. VIII.59).

Coeficientul η_1 reprezentînd flambajul periculos, este dat în tabelul VIII.25.

Tabelul VIII.25

Coeficientul η_1 din expresia (VIII.114)

$\frac{h}{l}$	Arce dublu încastrate	Arce dublu articulate	Arce triplu articulate	Arce dublu încastrate articulate la cheie
0,1	58,9	28,4	22,2	33,0
0,2	90,4	39,3	33,5	50,0
0,3	93,4	40,9	34,9	52,0
0,4	80,7	32,8	30,2	46,0
0,5	64,0	24,0	24,0	37,0

Pentru cazul sarcinilor care îşi conservă, în procesul deformării atît direcţia cît şi mărimea, ecuaţiile stabilite nu mai sînt valabile. Rezolvările exacte [7] arată însă că sarcinile critice obţinute pentru acest mod de comportare al încărcărilor nu diferă prea mult de cele indicate în tabelul VIII.24 după cum se poate vedea din tabelul VIII.26.

Tabelul VIII.26

Coeficientul η din expresia (VIII.113) — sarcini de direcţii constante

$2\theta_0$	30°	60°	120°	180°
Arc dublu articulat	144,0	35,9	8,7	3,3
Arc dublu încastrat	296,0	74,9	19,0	9,0

6.3. Stabilitatea arcelor parabolice

Pornindu-se de la ecuaţiile generale (VIII.104), (VIII.105), (VIII.106) se ajunge la o ecuaţie diferenţială de formă mai complicată care prin rezolvare permite să se ajungă la o expresie de tip (VIII.114). Pentru o sarcină uniform distribuită pe orizontală p se obţine în ipoteza rotirii solidare a forţelor cu secţiunile unde se aplică:

$$p_{cr} = \eta_p \frac{EI}{l^3}. \tag{VIII.115}$$

Coeficientul η_p este dat în tabelul VIII.27.

În cazul cînd forţele îşi conservă direcţiile verticale valorile obţinute în tabelul VIII.27 se modifică rezultînd diferenţe mici, ceea ce permite neglijarea acestui efect. Pentru arcul dublu articulat aceste valori sînt trecute în tabelul VIII.27 în paranteză.

Tabelul VIII.27

Coeficientul η_p din expresia (VIII.115)

$\frac{h}{l}$	Arce dublu încastrate	Arce dublu articulate	Arce triplu articulate		Arce dublu încastrate articulate la cheie
			Flambaj simetric	Flambaj antisimetric	
0,1	60,7	28,5 (28,5)	22,5	28,5	33,8
0,2	101,0	45,4 (46,1)	39,6	45,4	59,0
0,3	115,0	46,5 (48,4)	47,3	46,5	—
0,4	111,0	43,9 (44,9)	49,2	43,9	96,0
0,5	97,4	38,4	—	38,4	—
0,6	83,8	30,5 (31,7)	38,0	30,5	80,0
0,8	59,1	20,0	28,8	20,0	63,0
1,0	43,7	14,1 (15,4	22,1	14,1	48,0

6.4. Metode aproximative în calculul stabilității arcelor

Pentru cazurile de configurație geometrică și încărcare care nu se înscriu în cele expuse în paragrafele precedente se pot folosi metode aproximative.

Un procedeu destul de simplu este acela al folosirii unui cadru înlocuitor. Arcul se schematizează sub forma unui poligon simetric (cel mai adesea numai cu 4 laturi ca în fig. VIII.60, *b*) iar sarcinile reale se înlocuisc cu sarcini concentrate la noduri. Întrucît, cel mai adesea, sarcinile sînt dispus simetric flambajul poate fi simetric sau antisimetric. De aceea se studiază numai acel flambaj care conduce la sarcină minimă (pentru orientare a se urmări tabelul VIII.24).

Schema înlocuitoare astfel obținută este un cadru cu noduri deplasabile avînd un singur grad de libertate fie în cazul flambajului simetric fie în cazul flambajului antisimetric (fig. VIII.60, *c* și *d*).

La rîndul lui acest cadru înlocuitor poate fi rezolvat cu unul din procedeele aproximative descrise în cap. 4.

Un alt procedeu aproximativ de calcul este cel al „micilor deplasări" [28, 6] care se aplică la fel ca în cazul barelor drepte (v. cap. 4, pct. 4.1.3.).

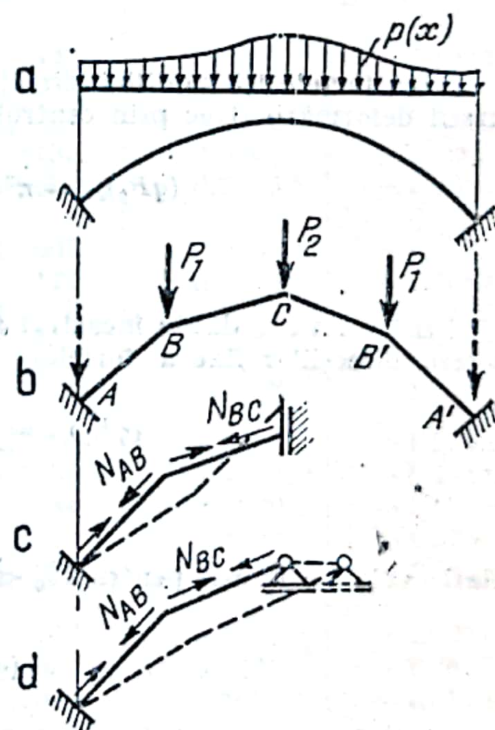


Fig. VIII.60

6.5. Pierderea laterală a stabilității arcelor

În cazul cînd arcul nu este contravîntuit perpendicular pe planul său atunci este posibilă o pierdere a stabilității prin deformare în afara planului arcului. În acest caz în cursul deformării apar și momente de răsucire și deci sarcina critică depinde

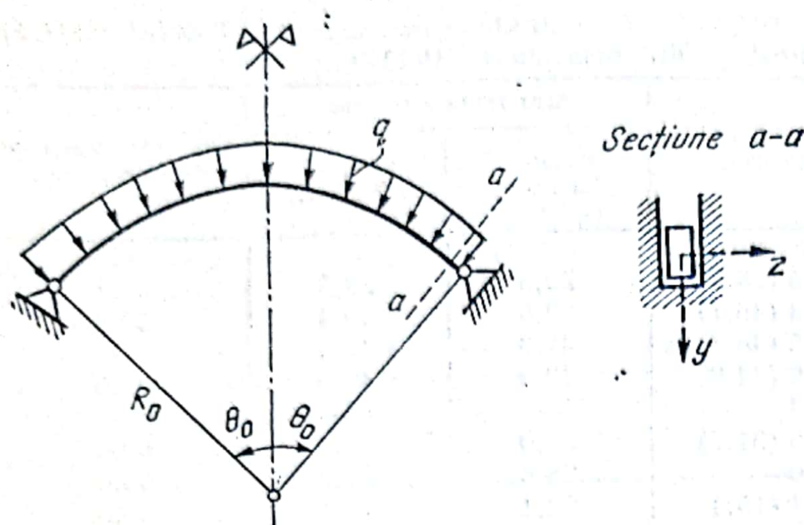


Fig. VIII.61

și de rigiditate la răsucire a arcului.

În literatură sînt rezolvate cîteva cazuri privind arcele circulare încărcate cu sarcină radială uniform distribuită cazuri indicate în cele ce urmează și care sînt reproduse după lucrările [22] și [32].

În cazul unui arc circular încărcat cu sarcină radială uniformă articulat la încovoiere și încastrat la torsiune (fig. VIII.61) în ipoteza că forțele își păstrează o direcție fixă situația critică este dată de

$$(qR_0)_{cr} = \frac{EI_y}{R_0^2} \cdot \frac{(\pi^2 - 4\theta_0^2)^2}{4\theta_0^2\left(\pi^2 + 4\theta_0^2 \frac{EI_y}{GI_t}\right)} . \tag{VIII.116}$$

Dacă forțele își modifică direcția astfel încît rămîn normale pe tangenta la arc în cursul deformării (trec prin centrul de curbură) sarcina critică este dată de

$$(qR_0)_{cr} = \pi^2 \frac{EI_y}{R_0^2} \frac{\pi^2 - 4\theta_0^2}{4\theta_0^2\left(\pi^2 + 4\theta_0^2 \frac{EI_y}{GI}\right)} . \tag{VIII.117}$$

Pentru un arc dublu încastrat atît la încovoiere cît și la torsiune se poate scrie în ipoteza direcțiilor fixe a forțelor

$$(qR_0)_{cr} = \frac{EI_y}{R_0^2} \frac{(\pi^2 - \theta_0^2)^2}{\theta_2^0\left(\pi^2 + \theta_0^2 \frac{EI_y}{GI_t}\right)} \tag{VIII.118}$$

relație valabilă numai pentru $2\theta_0 < \frac{\pi}{2}$. În general sarcina critică este dată de

$$(qR_0)_{cr} = m \frac{EI_y}{R_0^2} . \tag{VIII.119}$$

Coeficientul m este dat în tabelul VIII.28.

Tabelul VIII.28

Coeficientul m din expresia (VIII.119)

$2\theta_0$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$1{,}063\,\pi$	$1{,}10\,\pi$	$1{,}24\,\pi$	$1{,}50\,\pi$	2π
m	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00	0,69	0,60

ANEXE

Anexa VIII.1

Valorile funcţiilor α, β, θ_1, θ_2, θ_3 din tabelul VIII.3

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	1,0027	1,0042	1,0163	1,0065	1,0178
0,40	1,0107	1,0188	1,0683	1,0252	1,0768
0,60	1,0249	1,0437	1,1686	1,0622	1,1901
0,80	1,0455	1,0800	1,3456	1,1256	1,3900
1,00	1,0737	1,1304	1,6722	1,2395	1,7605
1,10	1,0912	1,1617	1,9491	1,3344	2,0750
1,20	1,1114	1,1979	2,3822	1,4806	2,5677
1,30	1,1345	1,2396	3,1435	1,7342	3,4347
1,40	1,1610	1,2878	4,8082	2,2832	5,3332
1,50	1,1915	1,3534	11,2013	4,3740	12,6292
π/2	1,2159	1,3880	∞	∞	∞
1,60	1,2266	1,4078	−26,2445	−7,8214	−30,1204
1,70	1,2673	1,4830	−5,7378	−1,1299	−6,7141
1,80	1,3147	1,5710	−3,1308	−0,8271	−3,7410
1,90	1,3704	1,6750	−2,1133	+0,0701	−2,5805
2,00	1,4365	1,7993	−1,5094	0,2575	−1,9658
2,02	1,4512	1,8270	−1,4903	0,2858	−1,8762
2,04	1,4664	1,8558	−1,4179	0,3115	−1,7044
2,06	1,4822	1,8858	−1,3516	0,3355	−1,7196
2,08	1,4987	1,9168	−1,2905	0,3579	−1,6506
2,10	1,5158	1,9494	−1,2342	0,3788	−1,5872
2,12	1,5336	1,9831	−1,1820	0,3983	−1,5286
2,14	1,5521	2,0184	−1,1335	0,4166	−1,4741
2,16	1,5713	2,0552	−1,0884	0,4339	−1,4235
2,18	1,5914	2,0935	−1,0464	0,4503	−1,3764
2,20	1,6124	2,1336	−1,0069	0,4659	−1,3323
2,22	1,6343	2,1754	−0,9700	0,4807	−1,2911
2,24	1,6572	2,2194	−0,9354	0,4948	−1,2527
2,26	1,6812	2,2654	−0,9028	0,5083	−1,2165
2,28	1,7062	2,3135	−0,8721	0,5212	−1,1824
2,30	1,7325	2,3641	−0,8431	0,5336	−1,1504
2,32	1,7601	2,4171	−0,8157	0,5456	−1,1202
2,34	1,7891	2,4731	−0,7897	0,5572	−1,0917
2,36	1,8195	2,5320	−0,7651	0,5684	−1,0649
2,38	1,8516	2,5939	−0,7418	0,5792	−1,0394
2,40	1,8854	2,6596	−0,7196	0,5897	−1,0151

Anexa VIII.1 (continuare)

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
2,42	1,9212	2,7287	−0,6985	0,5999	−0,9921
2,44	1,9589	2,8021	−0,6784	0,6098	−0,9703
2,46	1,9989	2,8798	−0,6592	0,6195	−0,9497
2,48	2,0413	2,9624	−0,6409	0,6291	−0,9301
2,50	2,0864	3,0502	−0,6234	0,6385	−0,9114
2,52	2,1343	3,1438	−0,6067	0,6477	−0,8936
2,54	2,1855	3,2437	−0,5907	0,6566	−0,8767
2,56	2,2402	3,3508	−0,5753	0,6654	−0,8606
2,58	2,2988	3,4657	−0,5606	0,6742	−0,8451
2,60	2,3618	3,5890	−0,5465	0,6828	−0,8304
2,62	2,4295	3,7220	−0,5329	0,6913	−0,8164
2,64	2,5027	3,8659	−0,5199	0,6997	−0,8030
2,66	2,5819	4,0218	−0,5073	0,7081	−0,7902
2,68	2,6680	4,1914	−0,4952	0,7164	−0,7780
2,70	2,7619	4,3766	−0,4836	0,7246	−0,7663
2,72	2,8646	4,5795	−0,4723	0,7328	−0,7551
2,74	2,9778	4,8029	−0,4615	0,7410	−0,7444
2,76	3,1027	5,0499	−0,4511	0,7491	−0,7342
2,78	3,2414	5,3245	−0,4410	0,7573	−0,7244
2,80	3,3963	5,6315	−0,4313	0,7654	−0,7151
2,82	3,5704	5,9770	−0,4218	0,7736	−0,7062
2,84	3,7676	6,3685	−0,4127	0,7817	−0,6976
2,86	3,9928	6,8160	−0,4039	0,7898	−0,6894
2,88	4,2525	7,3322	−0,3953	0,7980	−0,6816
2,90	4,5550	7,9343	−0,3870	0,8063	−0,6742
2,92	4,9121	8,6455	−0,3790	0,8146	−0,6670
2,94	5,3401	9,4982	−0,3712	0,8229	−0,6603
2,96	5,8622	10,5383	−0,3636	0,8313	−0,6538
2,98	6,5134	11,8386	−0,3563	0,8398	−0,6476
3,00	7,3486	13,5057	−0,3492	0,8483	−0,6417
3,02	8,4583	15,7219	−0,3422	0,8569	−0,6361
3,04	10,0049	18,8116	−0,3355	0,8657	−0,6308
3,06	12,3096	23,4176	−0,3289	0,8746	−0,6258
3,08	16,1105	31,0160	−0,3227	0,8835	−0,6210
3,10	23,5659	45,9234	−0,3165	0,8926	−0,6165
3,12	44,8321	88,4522	−0,3103	0,9018	−0,6122
3,14	600,1900	1199,1629	−0,3044	0,9111	−0,6082
π	∞	∞	−0,3040	0,9119	−0,6079
3,16	−51,2692	−103,7576	−0,2987	0,9206	−0,6045

Anexa VIII.1 (continuare)

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
3,18	−24,2541	−49,7313	−0,2931	0,9303	−0,6009
3,20	−15,7398	−32,7063	−0,2876	0,9401	−0,5976
3,22	−11,5688	−24,3683	−0,2823	0,9501	−0,5946
3,24	−9,0929	−19,4202	−0,2771	0,9602	−0,5917
3,26	−7,4532	−16,1447	−0,2720	0,9705	−0,5891
3,28	−6,2872	−17,8166	−0,2670	0,9811	−0,5868
3,30	−5,4154	−12,0770	−0,2621	0,9920	−0,5846
3,32	−4,7371	−10,7282	−0,2574	1,0031	−0,5826
3,34	−4,1964	−9,6516	−0,2527	1,0143	−0,5809
3,36	−3,7552	−8,7726	−0,2482	1,0258	−0,5795
3,38	−3,3887	−8,0419	−0,2437	1,0377	−0,5783
3,40	−3,0787	−7,4248	−0,2394	1,0499	−0,5772
3,42	−2,8129	−6,8968	−0,2351	1,0623	−0,5764
3,44	−2,5820	−6,4396	−0,2308	1,0750	−0,5758
3,46	−2,3798	−6,0405	−0,2267	1,0880	−0,5755
3,48	−2,2017	−5,6888	−0,2227	1,1014	−0,5753
3,50	−2,0433	−5,3769	−0,2187	1,1152	−0,5751
3,52	−1,9015	−5,0081	−0,2148	1,1294	−0,5757
3,54	−1,7737	−4,8477	−0,2109	1,1440	−0,5764
3,56	−1,6581	−4,6215	−0,2071	1,1591	−0,5773
3,58	−1,5530	−4,4160	−0,2034	1,1747	−0,5783
3,60	−1,4572	−4,2292	−0,1997	1,1907	−0,5797
3,62	−1,3693	−4,0581	−0,1961	1,2073	−0,5814
3,64	−1,2882	−3,9011	−0,1926	1,2244	−0,5833
3,66	−1,2132	−3,7563	−0,1891	1,2421	−0,5855
3,68	−1,1435	−3,6227	−0,1856	1,2605	−0,5880
3,70	−1,0787	−3,4990	−0,1821	1,2795	−0,5908
3,72	−1,0184	−3,3839	−0,1787	1,2992	−0,5939
3,74	−0,9620	−3,2768	−0,1753	1,3197	−0,5974
3,76	−0,9092	−3,1769	−0,1720	1,3409	−0,6012
3,78	−0,8595	−3,0835	−0,1687	1,3630	−0,6053
3,80	−0,8128	−2,9961	−0,1654	1,3861	−0,6099
3,82	−0,7687	−2,9140	−0,1622	1,4101	−0,6149
3,84	−0,7271	−2,8369	−0,1590	1,4351	−0,6203
3,86	−0,6876	−2,7643	−0,1557	1,4613	−0,6261
3,88	−0,6502	−2,6959	−0,1525	1,4887	−0,6324
3,90	−0,6147	−2,6314	−0,1493	1,5174	−0,6392

Anexa VIII.1 (continuare)

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
3,92	−0,5809	−2,5703	−0,1461	1,5474	−0,6466
3,94	−0,5486	−2,5126	−0,1429	1,5789	−0,6545
3,96	−0,5178	−2,4580	−0,1397	1,6121	−0,6631
3,98	−0,4884	−2,4062	−0,1365	1,6470	−0,6723
4,00	−0,4603	−2,3570	−0,1332	1,6838	−0,6823
4,02	−0,4333	−2,3103	−0,1300	1,7227	−0,6930
4,04	−0,4074	−2,2660	−0,1267	1,7639	−0,7045
4,06	−0,3825	−2,2237	−0,1233	1,8075	−0,7169
4,08	−0,3586	−2,1836	−0,1199	1,8538	−0,7304
4,10	−0,3355	−2,1454	−0,1165	1,9030	−0,7449
4,12	−0,3133	−2,1089	−0,1130	1,9555	−0,7606
4,14	−0,2919	−2,0741	−0,1094	2,0115	−0,7775
4,16	−0,2712	−2,0410	−0,1057	2,0716	−0,7960
4,18	−0,2511	−2,0094	−0,1020	2,1362	−0,8160
4,20	−0,2317	−1,9792	−0,0981	2,2057	−0,8378
4,22	−0,2129	−1,9504	−0,0940	2,2808	−0,8615
4,24	−0,1947	−1,9229	−0,0899	2,3619	−0,8875
4,26	−0,1769	−1,8966	−0,0855	2,4505	−0,9161
4,28	−0,1597	−1,8715	−0,0809	2,5471	−0,9475
4,30	−0,1430	−1,8475	−0,0760	2,6529	−0,9821
4,32	−0,1267	−1,8246	−0,0708	2,7694	−1,0206
4,34	−0,1107	−1,8028	−0,0653	2,8983	−1,0634
4,36	−0,0952	−1,7819	−0,0594	3,0417	−1,1114
4,38	−0,0799	−1,7619	−0,0529	3,2026	−1,1653
4,40	−0,0652	−1,7429	−0,0459	3,3836	−1,2265
4,42	−0,0508	−1,7247	−0,0381	3,5893	−1,2963
4,44	−0,0366	−1,7074	−0,0295	3,8251	−1,3767
4,46	−0,0227	−1,6909	−0,0197	4,0982	−1,4701
4,48	−0,0090	−1,6752	−0,0085	4,4179	−1,5800
4,50	+0,0044	−1,6603	+0,0045	4,7980	−1,7110
4,52	0,0176	−1,6461	0,0199	5,2568	−1,8695
4,54	0,0305	−1,6326	0,0386	5,8218	−2,0652
4,56	0,0432	−1,6198	0,0617	6,5351	−2,3129
4,58	0,0558	−1,6076	0,0915	7,4633	−2,6359
4,60	0,0682	−1,5962	0,1314	8,7218	−3,0745
4,62	0,0804	−1,5854	0,1878	10,5224	−3,7036
4,64	0,0925	−1,5752	0,2748	13,3219	−4,6812
4,66	0,1044	−1,5656	0,4272	18,2566	−6,4065

Anexa VIII.1 (continuare)

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
4,68	0,1162	−1,5567	0,7664	29,2848	−10,2671
4,70	0,1279	−1,5483	2,1964	75,9101	−26,5889
$3\pi/2$	0,1351	−1,5434	∞	∞	∞
4,72	0,1395	−1,5405	−3,8833	−122,3641	+42,8875
4,74	0,1510	−1,5333	−1,1534	−33,4764	11,7120
4,76	0,1624	−1,5267	−0,7162	−19,2440	6,7321
4,78	0,1738	−1,5207	−0,5370	−13,4298	4,6983
4,80	0,1851	−1,5152	−0,4390	−10,2705	3,5933
4,82	0,1964	−1,5103	−0,3771	−8,2851	2,9006
4,84	0,2076	−1,5060	−0,3343	−6,9219	2,4251
4,86	0,2188	−1,5022	−0,3028	−5,9272	2,0786
4,88	0,2300	−1,4989	−0,2785	−5,1700	1,8154
4,90	0,2412	−1,4963	−0,2593	−4,5743	1,6085
4,92	0,2524	−1,4941	−0,2433	−4,0927	1,4417
4,94	0,2636	−1,4926	−0,230	−3,6959	1,3045
4,96	0,2748	−1,4916	−0,2196	−3,3629	1,1896
4,98	0,2861	−1,4912	−0,2091	−3,0797	1,0921
5,00	0,2975	−1,4914	−0,2012	−2,8355	1,0083
5,02	0,3089	−1,4922	−0,1937	−2,6231	0,9356
5,04	0,3204	−1,4936	−0,1872	−2,4350	0,8725
5,06	0,3320	−1,4954	−0,1811	−2,2694	0,8157
5,08	0,3437	−1,4981	−0,1757	−2,1235	0,7658
5,10	0,3555	−1,5014	−0,1707	−1,9912	0,7211
5,12	0,3674	−1,5053	−0,166	−1,8719	0,6809
5,14	0,3795	−1,5099	−0,162	−1,7632	0,6446
5,16	0,3918	−1,5152	−0,158	−1,6644	0,6116
5,18	0,4042	−1,5212	−0,154	−1,5740	0,5816
5,20	0,4169	−1,5280	−0,151	−1,4908	0,5541
5,22	0,4298	−1,5355	−0,1480	−1,4141	0,5288
5,24	0,4429	−1,5438	−0,1450	−1,3431	0,5056
5,26	0,4562	−1,5529	−1,1422	−1,2771	0,4841
5,28	0,4698	−1,5629	−0,1396	−1,2158	0,4642
5,30	0,4838	−1,5738	−0,1370	−1,1585	0,4458
5,32	0,4981	−1,5857	−0,1346	−1,1049	0,4286
5,34	0,5128	−1,5986	−0,1324	−1,0547	0,4126
5,36	0,5278	−1,6124	−0,1302	−1,0074	0,3977
5,38	0,5433	−1,6274	−0,1281	−0,9629	0,3837
5,40	0,5592	−1,6436	−0,1261	−0,9209	0,3706

Anexa VIII.1 (continuare)

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
5,42	0,5756	−1,6610	−0,1242	−0,8812	0,3583
5,44	0,5925	−1,6797	−0,1223	−0,8436	0,3467
5,46	0,6100	−1,6998	−0,1205	−0,8079	0,3358
5,48	0,6282	−1,7214	−0,1188	−0,7740	0,3255
5,50	0,6470	−1,7446	−0,1171	−0,7417	0,3158
5,52	0,6666	−1,7694	−0,1155	−0,7110	0,3066
5,54	0,6870	−1,7961	−0,1139	−0,6816	0,2979
5,56	0,7083	−1,8248	−0,1124	−0,6535	0,2897
5,58	0,7305	−1,8555	−0,1110	−0,6267	0,2819
5,60	0,7538	−1,8886	−0,1096	−0,6010	0,2745
5,62	0,7783	−1,9242	−0,1082	−0,5763	0,2675
5,64	0,8040	−1,9624	−0,1068	−0,5526	0,2608
5,66	0,8311	−2,0037	−0,1055	−0,5298	0,2544
5,68	0,8597	−2,0481	−0,1042	−0,5079	0,2484
5,70	0,8901	−2,0961	−0,1030	−0,4868	0,2426
5,72	0,9224	−2,1481	−0,1018	−0,4664	0,2371
5,74	0,9567	−2,2045	−0,1006	−0,4468	0,2319
5,76	0,9934	−2,2657	−0,0994	−0,4278	0,2269
5,78	1,0327	−2,3323	−0,0983	−0,4095	0,2221
5,80	1,0750	−2,4050	−0,0972	−0,3917	0,2176
5,82	1,1207	−2,4845	−0,0961	−0,3745	0,2132
5,84	1,1702	−2,5718	−0,0951	−0,3578	0,2090
5,86	1,2240	−2,6679	−0,0941	−0,3416	0,2051
5,88	1,2829	−2,7743	−0,0931	−0,3258	0,2012
5,90	1,3476	−2,8924	−0,0921	−0,3105	0,1976
5,92	1,4190	−3,0241	−0,0911	−0,2956	0,1942
5,94	1,4984	−3,1719	−0,0901	−0,2812	0,1908
5,96	1,5873	−3,3387	−0,0892	−0,2670	0,1876
5,98	1,6870	−3,5284	−0,0883	−0,2532	0,1846
6,00	1,8015	−3,7455	−0,0874	−0,2398	0,1817
6,02	1,9323	−3,9966	−0,0865	−0,2267	0,1789
6,04	2,0842	−4,2902	−0,0856	−0,2138	0,1762
6,06	2,2628	−4,6366	−0,0847	−0,2013	0,1736
6,08	2,4760	−5,0527	−0,0839	−0,1890	0,1712
6,10	2,7289	−5,5609	−0,0831	−0,1769	0,1689
6,12	3,0573	−6,1949	−0,0823	−0,1651	0,1666
6,14	3,4686	−7,0071	−0,0815	−0,1535	0,1645
6,16	4,0126	−8,0854	−0,0807	−0,1422	0,1625

Anexa VIII.1 (continuare)

ν	α(ν)	β(ν)	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$
6,18	4,7665	−9,5830	−0,0799	−0,1310	0,1606
6,20	5,8812	−11,8030	−0,0791	−0,1200	0,1588
6,22	7,7007	−15,4327	−0,0783	−0,1092	0,1570
6,24	11,2034	−22,4274	−0,0776	−0,0985	0,1552
6,26	20,7419	−41,5016	−0,0768	−0,0880	0,1537
6,28	149,828	−299,6568	−0,0761	−0,0776	0,1522
2π	∞	∞	−0,0760	−0,0760	0,1520

Anexa VIII.2

Valorile funcțiilor Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, η_1, η_2 din expresiile (VIII.31) și (VIII.36)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
π/2	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	−0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	−0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	−0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	−0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	−0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	−0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	−0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0813	0,9277	−0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	−0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	−0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	−0,8465	0,5480

Anexa VIII.2 (continuare)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	−0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	−0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	−0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	−0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	−1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	−1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	−1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	−1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	−1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	−1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	−1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	−1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	−1,3480	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	−1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	−1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	−1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	−1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	−1,5602	0,3802
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	−1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	−1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	−1,7929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	−1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	−1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	−1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	−1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	−1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	−1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	−2,0193	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	−2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	−2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	−2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	−2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	−2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	−2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	−2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	−2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	−2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	−2,5296	0,1616

Anexa VIII.2 (continuare)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	−2,5883	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	−2,6385	0,1379
2,94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	−2,6939	0,1261
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	−2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	−2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	−2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	−2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	−2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	−3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	−3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	−3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	−3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	−3,2848	0,0011
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	−3,2898	0
3,16	−0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	−3,3480	−0,0118
3,18	−0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	−3,4120	−0,0249
3,20	−0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	−3,4768	−0,0380
3,22	−0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	−3,5425	−0,0512
3,24	−0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	−3,6092	−0,0646
3,26	−0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	−3,6767	−0,0780
3,28	−0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	−3,7453	−0,0915
3,30	−0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	−3,8147	−0,1051
3,32	−0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	−3,8852	−0,1187
3,34	−0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	−3,9568	−0,1324
3,36	−0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	−4,0295	−0,1463
3,38	−0,2951	0,5433	1,2889	0,7918	−4,1032	−0,1602
3,40	−0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	−4,1781	−0,1742
3,42	−0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	−4,2540	−0,1884
3,44	−0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	−4,3318	−0,2026
3,46	−0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	−4,4107	−0,2169
3,48	−0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	−4,4910	−0,2313
3,50	−0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	−4,5727	−0,2457
3,52	−0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	−4,6560	−0,2602
3,54	−0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	−4,7410	−0,2748
3,56	−0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	−4,8276	−0,2894
3,58	−0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	−4,9160	−0,3042
3,60	−0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	−5,0062	−0,3191
3,62	−0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	−5,0984	−0,3340

Anexa VIII.2 (continuare)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,64	−0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	−5,1928	−0,3491
3,66	−0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	−5,2895	−0,3643
3,68	−0,8745	0,4345	1,3766	0,7483	−5,3886	−0,3797
3,70	−0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	−5,4903	−0,3951
3,72	−0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	−5,5947	−0,4107
3,74	−1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	−5,7020	−0,4263
3,76	−1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	−5,8124	−0,4420
3,78	−1,1634	0,3935	1,4217	0,7329	−5,9262	−0,4578
3,80	−1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	−6,0436	−0,4736
3,82	−1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	−6,1650	−0,4895
3,84	−1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	−6,2906	−0,5056
3,86	−1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	−6,4208	−0,5217
3,88	−1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	−6,5561	−0,5379
3,90	−1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	−6,6968	−0,5542
3,92	−1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	−6,8435	−0,5706
3,94	−1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	−6,9972	−0,5871
3,96	−1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	−7,1582	−0,6037
3,98	−2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	−7,3274	−0,6204
4,00	−2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	−7,5058	−0,6372
4,02	−2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	−7,6942	−0,6541
4,04	−2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	−7,8952	−0,6710
4,06	−2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	−8,1087	−0,6881
4,08	−2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	−8,3376	−0,7053
4,10	−2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	−8,5839	−0,7225
4,12	−3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	−8,8496	−0,7398
4,14	−3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	−9,1394	−0,7573
4,16	−3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	−9,4562	−0,7749
4,18	−3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	−9,8065	−0,7925
4,20	−4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	−10,196	−0,8103
4,22	−4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	−10,633	−0,8281
4,24	−5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	−11,129	−0,8460
4,26	−5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	−11,701	−0,8641
4,28	−6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	−12,367	−0,8822
4,30	−6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	−13,158	−0,9004
4,32	−7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	−14,116	−0,9188
4,34	−9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	−15,309	−0,9372
4,36	−10,503	0,0912	1,7033	0,6284	−16,840	−0,9557
4,38	−12,523	0,0781	1,7170	0,6243	−18,918	−0,9744

Anexa VIII.2 (continuare)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,40	−15,330	0,0648	1,7310	0,6202	−21,783	−0,9931
4,42	−19,703	0,0513	1,7452	0,6161	−26,215	−1,0119
4,44	−27,349	0,0376	1,7602	0,6119	−33,920	−1,0309
4,46	−44,148	0,0237	1,7754	0,6077	−50,779	−1,0499
4,48	−111,57	0,0096	1,7910	0,6034	−118,26	−1,0691
4,50	+227,80	−0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	−1,0884
4,52		−0,0194	1,8234	0,5948		−1,1077
4,54		−0,0343	1,8402	0,5905		−1,1271
4,56		−0,0495	1,8575	0,5861		−1,1457
4,58		−0,0650	1,8752	0,5817		−1,1662
4,60		−0,0807	1,8933	0,5772		−1,1861
4,62		−0,0969	1,9119	0,5727		−1,2060
4,64		−0,1133	1,9310	0,5681		−1,2250
4,66		−0,1301	1,9507	0,5635		−1,2461
4,68		−0,1472	1,9710	0,5589		−1,2663
4,70		−0,1646	1,9919	0,5543		−1,2865
$3\pi/2$		−0,1755	2,0052	0,5514		−1,2992
4,72		−0,1824	2,0134	0,5496		−1,3069
4,74		−0,2005	2,0355	0,5449		−1,3274
4,76		−0,2190	2,0582	0,5402		−1,3480
4,78		−0,2379	2,0816	0,5354		−1,3586
4,80		−0,2572	2,1056	0,5305		−1,3896
4,82		−0,2770	2,1304	0,5255		−1,4105
4,84		−0,2973	2,1506	0,5205		−1,4316
4,86		−0,3181	2,1824	0,5155		−1,4528
4,88		−0,3394	2,2096	0,5105		−1,4743
4,90		−0,3612	2,2377	0,5054		−1,4954
4,92		−0,3834	2,2667	0,5003		−1,5169
4,94		−0,4061	2,2966	0,4951		−1,5385
4,96		−0,4293	2,3275	0,4899		−1,5602
4,98		−0,4530	2,3594	0,4846		−1,5821
5,00		−0,4772	2,3924	0,4793		−1,6040
5,02		−0,5022	2,4266	0,4739		−1,6261
5,04		−0,5280	2,4620	0,4685		−1,6483
5,06		−0,5545	2,4986	0,4630		−1,6706
5,08		−0,5818	2,5365	0,4576		−1,6929
5,10		−0,6099	2,5757	0,4520		−1,7155
5,12		−0,6388	2,6164	0,4464		−1,7381

Anexa VIII.2 (continuare)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,14		−0,6685	2,6587	0,4407		−1,7609
5,16		−0,6999	2,7027	0,4350		−1,7838
5,18		−0,7306	2,7485	0,4292		−1,8078
5,20		−0,7630	2,7961	0,4234		−1,8299
5,22		−0,7964	2,8454	0,4175		−1,8532
5,24		−0,8310	2,8968	0,4116		−1,8765
5,26		−0,8668	2,9504	0,4056		−1,9000
5,28		−0,9039	3,0064	0,3996		−1,9236
5,30		−0,9423	3,0648	0,3931		−1,9477
5,32		−0,9821	3,1257	0,3873		−1,9712
5,34		−1,0233	3,1893	0,3811		−1,9952
5,36		−1,0660	3,2559	0,3748		−2,0193
5,38		−1,1103	3,3267	0,3685		−2,0436
5,40		−1,1563	3,3989	0,3621		−2,0679
5,42		−1,2043	3,4757	0,3556		−2,0924
5,44		−1,2544	3,5563	0,3491		−2,1170
5,46		−1,3067	3,6409	0,3425		−2,1418
5,48		−1,3612	3,7298	0,3358		−2,1667
5,50		−1,4181	3,8234	0,3291		−2,1917
5,52		−1,4777	3,9222	0,3223		−2,2169
5,54		−1,5402	4,0267	0,3154		−2,2422
5,56		−1,6059	4,1374	0,3085		−2,2676
5,58		−1,6751	4,2549	0,3015		−2,2932
5,60		−1,7481	4,3794	0,2944		−2,3189
5,62		−1,8252	4,5118	0,2873		−2,3447
5,64		−1,9065	4,6526	0,2801		−2,3707
5,66		−1,9920	4,8026	0,2727		−2,3969
5,68		−2,0833	4,9629	0,2654		−2,4231
5,70		−2,1804	5,1346	0,2580		−2,4495
5,72		−2,2833	5,3190	0,2505		−2,4760
5,74		−0,3944	5,5173	0,2429		−2,5027
5,76		−2,5130	5,7314	0,2352		−2,5296
5,78		−2,6406	5,9628	0,2274		−2,5466
5,80		−2,7777	6,2140	0,2195		−2,5838
5,82		−2,9262	6,4873	0,2116		−2,6111
5,84		−3,0876	6,7859	0,2036		−2,6385
5,86		−3,2634	7,1132	0,1955		−2,6661
5,88		−3,4562	7,4738	0,1873		−2,6939

Anexa VIII.2 (continuare)

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,90		−3,6678	7,8726	0,1790		−2,7218
5,92		−3,9018	8,3163	0,1706		−2,7499
5,94		−4,1603	8,8122	0,1621		−2,7782
5,96		−4,4547	9,3706	0,1535		−2,8066
5,98		−4,7816	10,004	0,1448		−2,8352
6,00		−5,1589	10,727	0,1361		−2,8639
6,02		−5,5845	11,561	0,1272		−2,8928
6,04		−6,0653	12,534	0,1182		−2,9219
6,06		−6,6753	13,683	0,1091		−2,9512
6,08		−7,3699	15,060	0,0999		−2,9805
6,10		−8,2355	16,739	0,0906		−3,0102
6,12		−9,2939	18,832	0,0812		−3,0400
6,14		−10,646	21,511	0,0717		−3,0699
6,16		−12,440	25,065	0,0621		−3,0991
6,18		−14,921	29,999	0,0523		−3,1304
6,20		−18,594	37,308	0,0424		−3,1609
6,22		−24,575	49,255	0,0324		−3,1916
6,24		−36,100	72,272	0,0223		−3,2225
6,26		−67,436	135,03	0,0121		−3,2535
6,28		−492,67	984,32	0,0017		−3,2848
2π		$-\infty$	$+\infty$	0		−3,2898

BIBLIOGRAFIE

1. A g e n t , R. *Asupra stabilității elastice a cadrelor prin metoda iterației.* În : Revista construcțiilor și a materialelor de construcții nr. 6, 1956.
2. A g e n t , R. *Metoda aproximațiilor succesive.* București, E.S.A.C. 1955.
3. B ă l a n , Șt. *Contribuțiuni la flambajul barelor drepte supuse la vibrații transversale* (teza de doctorat). București, 1945.
4. B l e i c h , F. *Buckling Strenghts of Metal Structures*, New York, Mc. Graw Hill, 1952.
5. B ü r g e r m e i s t e r , G. și colab. *Stabilitätstheorie I, II.* Berlin, Akademie Verlag, 1959, 1963.
6. C o ș a , D. *Contribuții la studiul stabilității și calculul de ordinul II al structurilor plane din bare (cadre) prin metoda integrală directă aproximativă* (teză de doctorat). București, 1970.
7. D i n n i k , A. *Ustoicivosti arok.* Moscova, Gostehizdat, 1964.
8. D i n n i k , A. *Ustoicivosti uprughih sistem*, Moscova, Izdatelistvo Academii Nauc, 1950.
9. G h e o r g h i u , A l. *Statica construcțiilor.* Vol. I, II, București, Editura tehnică, 1960, 1965.
10. G o l d e n b l a t t , I. și S i z o v , Q. *Spravocinik po rasceotu stroitelinih konstrukții na ustoicivosti i kolebania.* Moscova, Gosudarstvennoe izdatelistvo literaturi po stroitelistvo i arhitekture, 1952.
11. I f r i m , M. *Calculul stabilității cadrelor prin metoda iterației.* În : Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, nr. 3, 1956.
12. I o r d ă n e s c u , M. *Calculul stabilității elastice a cadrelor prin încercări succesive.* În : Buletinul științific al Institutului de construcții București, nr. 13, 1964.
13. K o r n o u h o v , N. *Procinosti i ustoicivosti sterjnevih sistem.* Moscova, Stroiizdat, 1949.
14. L e i t e s , S. *Ob ustoicivosti nerazreznevo sterjniah na uprughih oporah.* În : Stroitelinaia mehanika i rasceot soorujenii nr. 3, 1962
15. M a z i l u , P. *Statica construcțiilor.* Vol. II, București, Editura tehnică, 1959.
16. M a z i l u , P. *Calculul static de ordinul II.* Ciclu de conferințe ținut în cadrul Academiei R.P.R. București, 1955.
17. M e r c h a n t , W. *Critical Loads of Tall Building Frames.* În : The structural Engineer, nr. 3, 1955.
18. M u t a f o l o , M. *Calculul turnurilor spațiale etajate prin metoda „modelelor plane”.* În : Industria construcțiilor și a materialelor de construcții, nr. 10, 1957.
19. P o n o m a r e v , S. și colab. *Calculul de rezistență în construcția de mașini.* (trad. din l. rusă), Vol. III, București, Editura tehnică, 1964.
20. P r a t u s e v i c i , I. *Variaționnie metodi v stroitelinoi mehanike.* Moscova, Gostehizdat, 1948.
21. P r o k o f i e v , I. și S m i r n o v , A. *Statica construcțiilor* (trad. din l. rusă) Vol. III. București O.P.E.D. CFR, 1951
22. * * * *Procinosti, ustoicivosti, kolebania, Spravocinik v treh tomah, pod obscei redacției U.A. Birghera i Ia.G. Panovko.* Moscova, izdatelistvo „Masinostroienie”, 1968.
23. R ă u t u , S. și B e r g m a n , M. *Stabilitatea statică a sistemelor elastice.* București, Editura Min. Învățămîntului, 1960.

24. Sattler, K. *Das Durchbiegungsverfahren zur Lösung von Stabilitätsverfahren.* În: Die Bautechnik nr. 10, 11, 1953.
25. Scarlat, A. *Stabilitatea și calculul de ordinul II al structurilor*, București, Editura tehnică, 1969.
26. Scarlat, A. *Stabilitatea structurilor, probleme speciale.* București, Editura tehnică, 1969.
27. Smirnov, A. *Ustoicivosti i kolebania soorujenii.* Moscova, 1959.
28. Smirnov, V. *Staticeskaia i dinamiceskaia ustoicivosti soorujenii*, Moscova, Gosstroiizdat, 1947.
29. Snitco, N. *Ustoicivosti sterjnevih sistem.* Moscova, Gosudarstvennoe izdatelistvo literaturî po stroitelistva i arhitecture, 1952.
30. * * * *Spravocinik proectirovscika. Metaliceskie konstrukții promislenih zdanii i soorujenii.* Moscova, Gos. izd. lit. po str. arh. i str. mat. 1962.
31. * * * *Spravocinik proectirovscika. Rasceotno — teoreticeskii.* Moscova. Gos. izd. lit. po str. arh. i str. mat., 1960.
32. Timoshenko, S. și Gere, J. *Teoria stabilității elastice* (trad. din l. engleză). București, Editura tehnică, 1967.
33. Voinea, R. *Contribuții la studiul flambajului cadrelor cu noduri fixe.* În: Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, 1953 (IV).
34. Volmir, A. *Ustoicivosti uprughih sistem.* Moscova, Gosud. izd. fiz.—matem. lit., 1963.
35. DIN 4114 *Stahlbau, Stabilitätfälle (Knickung, Kippung, Beulung)*, 1955.

SECȚIUNEA IX

DINAMICA CONSTRUCȚIILOR

Prof. univ. em. ing. **PANAIT MAZILU**
Dr. ing. **HOREA SANDI**

IX

CUPRINS

1. GENERALITĂŢI

1.1. Aspecte specifice ale fenomenelor de solicitare dinamică şi ale disciplinei de specialitate

În numeroase cazuri, în decursul exploatării construcţiilor apar încărcări şi solicitări, de a căror variaţie în timp este necesar să se ţină seama în mod explicit. Se numesc solicitări dinamice solicitările care variază în mod apreciabil în intervale de timp comparabile cu perioadele proprii fundamentale ale structurilor în ansamblu sau ale elementelor de construcţie. În general, caracterul dinamic al solicitărilor trebuie considerat:

— din punctul de vedere al verificării de rezistenţă atunci cînd acceleraţiile punctelor materiale ale elementelor de construcţie sînt comparabile cu acceleraţia gravitaţiei;

— din punctul de vedere al verificării satisfacerii condiţiilor de exploatare, atunci cînd există posibilitatea unor efecte nocive asupra oamenilor sau a unor efecte defavorabile asupra desfăşurării unui proces tehnologic, funcţionării unor utilaje sensibile la vibraţii etc.

Disciplina care tratează problemele de solicitări dinamice în construcţii, Dinamica construcţiilor, s-a dezvoltat în ultimele decenii la un nivel ridicat, putînd să asigure în prezent fundamentul teoretic pentru rezolvarea problemelor puse de practică. Această disciplină tehnică face apel la cunoştinţe din numeroase alte discipline, dintre care trebuie menţionate:

— Mecanica teoretică, pentru stabilirea ecuaţiilor de mişcare;

— Reologia şi Rezistenţa materialelor, pentru stabilirea ecuaţiilor de mişcare şi a unor criterii de verificare a structurilor;

— Algebra liniară, inclusiv algebra matriceală, pentru analiza unor caracteristici ale structurilor;

— Teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, cu derivate parţiale, integrale şi integro-diferenţiale, pentru studiul soluţiilor ecuaţiilor de mişcare.

Pe lîngă aceste discipline de bază, pot fi importante pentru unele probleme mai complexe: teoria seriilor şi integralelor Fourier, calculul operaţional pe baza transformărilor integrale Laplace, Fourier, Hankel, teoria funcţiilor aleatoare, unele metode numerice etc.

Din punct de vedere metodologic, studiul unei probleme tehnice de solicitări dinamice cuprinde mai multe etape, care pot fi sintetizate în modul următor:

— formularea problemei tehnice: date referitoare la încărcările statice şi dinamice aplicate construcţiei, la caracteristicile materialelor de construcţie, secţiunilor, etc. şi la criteriile de verificare a comportării construcţiei;

— formularea problemei matematice; adoptarea unei schemetizări corespunzătoare, stabilirea ecuaţiilor de mişcare şi a condiţiilor aferente (condiţii iniţiale, condiţii la limită);

— rezolvarea ecuaţiilor de mişcare; determinarea unor caracteristici dinamice ale construcţiei, determinarea deplasărilor şi solicitărilor dinamice;

— verificarea construcţiei din punctul de vedere al diferitelor criterii.

Partea de Dinamica construcţiilor din prezentul manual se referă în majoritatea sa la formularea şi rezolvarea problemelor matematice legate de solicitările dinamice din construcţii. Ea abordează însă pe scurt şi cîteva aspecte importante ale legăturii părţii teoretice a disciplinei cu sarcinile practice ale inginerului proiectant.

83—c. 418

1.2. Schematizări ale construcţiilor şi grade de libertate

Formularea matematică a unei probleme de Dinamica construcţiilor implică în prealabil o schematizare a construcţiei studiate. Această schematizare înseamnă alegerea unui sistem dinamic care să constituie un model de calcul capabil de a răspunde următoarelor cerinţe:

— să conducă la rezultate suficient de reprezentative pentru fenomenul real;

— să poată fi analizat prin intermediul unui volum de calcule accesibil.

Astfel de modele de calcul sînt: un sistem cu număr finit de mase, care reprezintă comportarea dinamică a unui cadru; un sistem cu masa distribuită în lungul unei linii, care reprezintă comportarea dinamică a unei grinzi etc.

În principiu, modelele de calcul ale Dinamicii construcţiilor sînt sisteme dinamice, adică sisteme de puncte materiale cu legături (rigide şi deformabile) a căror mişcare poate fi studiată cu metodele Mecanicii generale.

O primă problemă în formularea unui model de calcul este constituită de stabilirea distribuţiei de calcul a maselor. Aceasta este strîns legată de a doua problemă, precizarea caracteristicilor cinematice ale sistemului dinamic. Analiza acestor date primare implică:

— stabilirea poziţiei maselor în ipoteza construcţiei nedeformate (coordonatele acestor mase);

— stabilirea parametrilor care definesc poziţia maselor în cazul construcţiei deformate (mai scurt, stabilirea gradelor de libertate ale sistemului dinamic).

Se înţelege prin număr de grade de libertate ale unui sistem dinamic, numărul parametrilor independenţi cu care se poate defini poziţia deplasată a maselor. Există sisteme dinamice cu un grad de libertate, cu număr finit de grade de libertate, sau cu număr infinit de grade de libertate. Parametrii independenţi care definesc poziţia deplasată a maselor pot fi consideraţi drept coordonate generalizate ale sistemului dinamic, în sensul în care noţiunea este definită şi utilizată în Mecanica analitică.

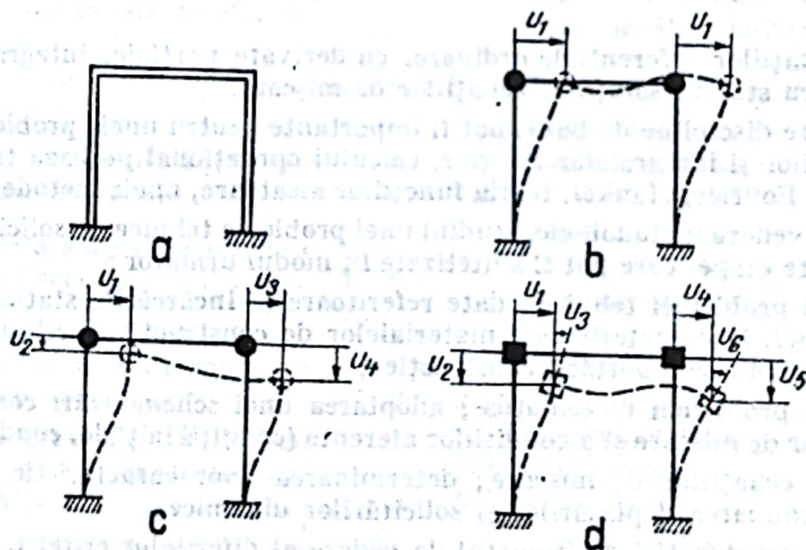


Fig. IX.1

Numărul de grade de libertate al unui sistem dinamic depinde de distribuţia maselor şi de natura legăturilor. În acest sens, este sugestiv cazul cadrului din fig. IX. 1, *a* pentru care se iau în considerare numai deplasările din planul figurii. Dacă se admite că, din

punct de vedere dinamic, este satisfăcătoare considerarea unor mase echivalente concentrate la noduri, pot să apară mai multe ipoteze de calcul, din care în figură sînt considerate:

— cazul în care masele sînt punctuale (se neglijează inerția de rotație) și se admite că barele cadrului sînt inextensibile; în acest caz, sistemul are un singur grad de libertate, caracterizat prin coordonata generalizată u_1 (fig. IX. 1, *b*);

— cazul în care masele sînt de asemenea punctuale, dar se consideră deformabilitatea axială a barelor; în acest caz, sistemul are patru grade de libertate (fig. IX. 1, *c*);

— cazul în care, pe lîngă deformabilitatea barelor, se consideră inerția de rotație a maselor; în acest caz, sistemul are șase grade de libertate (fig. IX. 1, *d*).

În general, în definirea caracteristicilor unui sistem dinamic, este necesar să se aibă în vedere atît caracteristicile construcției reale, cît și caracteristicile încărcărilor dinamice considerate. Dacă se imaginează vibrațiile cadrului din fig. XI. 1, *a* sub acțiunea unor forțe dinamice orizontale, în cazul unor forțe cu frecvențe relativ joase (comparabile cu frecvența proprie fundamentală a cadrului), este întrutotul satisfăcătoare schematizarea simplă din fig. XI, 1, *b*, în schimb, în cazul unor forțe cu frecvențe sensibil mai ridicate decît frecvența proprie fundamentală, poate să fie imperios necesară considerarea schematizărilor din fig. IX. 1, *c* sau IX. 1, *d*, sau chiar a altor schematizări, mai complicate.

Ținînd seama de natura și scopul acestui manual, în această secțiune sînt abordate exclusiv sisteme cu număr finit de grade de libertate, urmînd ca cititorul interesat să urmărească în literatura de specialitate problemele de dinamică pentru sistemele continue. Această alegere a fost făcută ținînd seama de faptul că sistemele continue prezintă un interes în primul rînd teoretic și că în practica inginerească este necesară schematizarea sistemelor dinamice ca sisteme cu număr finit de grade de libertate. În acest sens, cititorul poate utiliza unele metode din cap. 6 în vederea trecerii de la sisteme continue la sisteme discrete (metoda concentării maselor, metoda Ritz-Galiorkin etc.).

1.3. Principii ale Mecanicii, utilizate în Dinamica construcțiilor

În Mecanică se stabilesc mai multe principii care pot fi utilizate în mod independent în rezolvarea diferitelor aplicații. Principiile Mecanicii pot fi aplicate în Dinamica construcțiilor, cu condiția ca ipotezele în care aceste principii sînt formulate să fie compatibile cu problemele aplicative [19].

Legile elementare ale Mecanicii (legea a 2-a a lui Newton, teorema torsorului) sînt aplicabile în cele mai generale ipoteze în Dinamica construcțiilor, dar aplicarea lor practică poate să ducă la unele dificultăți de calcul, în special în cazul sistemelor la care, datorită particularităților legăturilor, unui grad de libertate îi corespunde o deformare relativ complexă a structurii studiate.

Metodele și principiile Mecanicii analitice (principiul lucrului virtual, ecuațiile lui Lagrange de speța a doua, principiul lui Hamilton etc.) pot fi utilizate cu multă ușurință și eleganță pentru sisteme dinamice la care unor grade de libertate le corespund deformări complexe ale structurii, în schimb aplicarea lor poate să fie complicată în cazul unor ipoteze mai generale cu privire la caracteristicile reologice ale legăturilor.

Din motivele arătate, de la caz la caz, în formularea matematică a problemelor de Dinamica construcțiilor este necesar să se facă apel la diferite principii ale Mecanicii. În capitolele următoare se poate urmări, de altfel, modul de aplicare pentru unele din aceste principii.

După cum s-a subliniat mai înainte, în formularea problemelor de Dinamica construcțiilor, este necesar să se introducă anumite ipoteze cu privire la legături, iar în această privință trebuie utilizate uneori în mod explicit noțiuni de reologie. Aceste elemente sînt expuse în cap. 2 al acestei secțiuni.

1.4. Problemele calculului structurilor solicitate dinamic. Stări limită specifice

Metodele de calcul dezvoltate în Dinamica construcţiilor au rolul de a permite evacuarea corectă a riscului de depăşire a stărilor limită. Ca urmare a acestui obiectiv, este necesar să se dispună, pentru fiecare caz concret, de două categorii de informaţii :

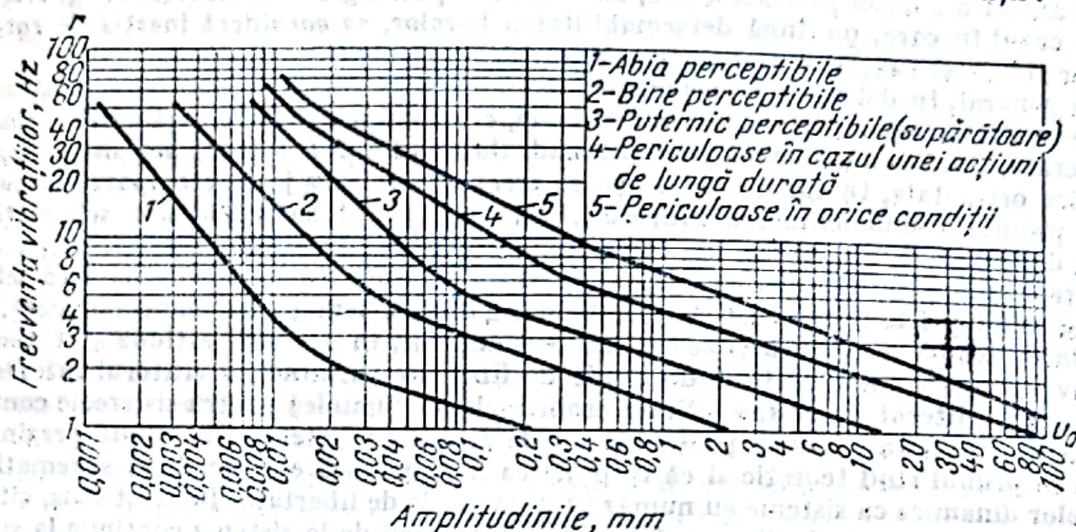


Fig. IX.2

— date care să permită o evaluare corectă a efectelor încărcărilor dinamice (date asupra caracteristicilor de inerţie şi de deformare ale structurii, asupra încărcărilor statice şi asupra încărcărilor dinamice) ;

— date care să permită o evaluare corectă a pragurilor care caracterizează stările limită (date privind rezistenţa la solicitări dinamice a materialelor şi elementelor de construcţie, ca şi efectele vibraţiilor asupra oamenilor şi utilajelor în condiţiile specifice de exploatare).

În cap. 2 şi 3 sînt prezentate caracteristici ale materialelor de construcţie şi încărcări-lor dinamice. Pentru a valorifica acele date, este însă necesar să se aibă în vedere cea de a doua categorie de date, anume aceea referitoare la specificul stărilor limită în acest caz.

Stările limită pot fi grupate în două categorii :

— stări limită a căror depăşire implică transformări ireversibile ale structurii, însoţite de pierderea definitivă a capacităţii de exploatare a acesteia (fenomenele care caracterizează depăşirea acestei stări limită sînt, în cazul solicitărilor dinamice : ruperea prin solicitări repetate de un număr mare de ori, ruperea prin solicitări puternice repetate de un număr mic de ori, de exemplu, solicitări în stadiul elasto-plastic datorite acţiunilor seismice, ruperea prin solicitări puternice datorite unui şoc, dezvoltarea excesivă a fisurilor în cazul unui recipient care îşi pierde astfel definitiv etanşeitatea etc.) ;

— stări limită a căror depăşire implică prejudicii aduse oamenilor sau utilajelor sensibile la vibraţii, dar nu implică avarieri ale construcţiei (fenomenele care caracterizează depăşirea acestor stări limită sînt : trepidaţii a căror intensitate reduce capacitatea de muncă a oamenilor sau aduce chiar prejudicii sănătăţii acestora, trepidaţii care produc uzarea prematură a unor utilaje sau împiedică funcţionarea normală a unei operaţii fine).

De regulă, pragurile de intensitate care caracterizează stările limită din a doua categorie sînt mult mai joase decît cele care corespund primei categorii.

Pentru o evaluare a efectului vibrațiilor sinusoidale de diferite frecvențe și amplitudini asupra oamenilor, este utilă urmărirea graficului din fig. IX.2, elaborat de Reiher și Meissner [2]. În acest grafic se pot delimita domenii în care efectul vibrațiilor este imperceptibil, slab perceptibil, bine perceptibil, puternic perceptibil, dăunător în cazul unei acțiuni îndelungate și dăunător în orice condiții.

În ce privește acțiunea vibrațiilor asupra utilajelor sensibile la vibrații, este util să se considere limitele admisibile ale amplitudinii vitezelor de vibrații, date în tabelul următor [20].

Împărțirea orientativă a mașinilor și instrumentelor în clase, după sensibilitatea la vibrații

Clasa de sensibilitate	Denumirea mașinilor și instrumentelor	Valoarea limită a amplitudinii vitezei de vibrație, mm/s
I (sensibilitate înaltă)	Mașini și automate de divizat deosebit de precise; instalații de ajustare pentru instrumentele optice și de calibrare a instrumentelor precise de măsurat; microscoape și micrometre; interferometre; optimetre și alte instrumente optice precise; instrumente mecanice de control și măsură cu toleranțe de ordinul a cîțiva microni.	≤ 0,1
II (sensibilitate medie)	Polizoare pentru lagăre cu bile; mașini de polizat dinți și filete; automate de alezat pietre prețioase; mașini de rectificat; freze și strunguri de precizie cu toleranțe de cîteva sutimi de milimetru; automate de ascuțit lame și alte automate precise.	0,1 — 1,0
III (sensibilitate joasă)	Strunguri, freze, polizoare, bormașini și alte mașini prelucrătoare de metal de precizie obișnuită; mașini de filatură și țesătorie; mașini tipografice etc.	1,0 — 4,0
IV (utilaje insensibile)	Ventilatoare, centrifuge; electromotoare; stampe și prese ale industriei prelucrătoare de metal și ușoare, mașini de rindelat; tamburi cu diverse destinații; mașini de cusut; vibratoare, mese vibrante, ciururi; pulverizatoare.	≥4,0

2. CARACTERISTICI DE REZISTENȚĂ ȘI DE DEFORMABILITATE ALE MATERIALELOR DE CONSTRUCȚIE ȘI STRUCTURILOR

2.1. Caracteristici ale materialelor

Materialele supuse unor eforturi unitare*) variabile în timp suferă deformații, de asemenea variabile în timp. În funcție de intensitatea fenomenului de solicitare, se pot distinge diferite stadii de comportare pentru materiale, care se reflectă în stadii diferite de comportare pentru structuri.

* În literatura tehnică din țara noastră eforturile unitare sînt denumite și tensiuni.

În cazul solicitărilor statice se pot distinge şi defini stadiile de solicitare plecînd de la încercarea unui material sub tensiune a căror valoare absolută creşte monoton şi lent în timp. Se pot defini limite de proporţionalitate, de curgere, de rupere, pentru diferite stări de eforturi unitare, adică pentru diferite rapoarte între componentele tensorului efort unitar. Aceste limite pot fi considerate în general drept caracteristici de rezistenţă pentru materialul studiat.

Intervalele dintre diferitele praguri care marchează schimbări calitative ale modului de comportare reprezintă stadii de solicitare diferite ale materialului. Legătura dintre diferitele stări de eforturi unitare care produc trecerea dintr-un stadiu într-altul este făcută de teoriile de rezistenţă (teoria eforturilor unitare tangenţiale extreme, teoria lucrului mecanic de schimbare a formei etc.).

În cazul solicitărilor dinamice, variaţia în timp a tensiunilor şi deformaţiilor introduce parametrul timp, care complică deosebit de mult posibilităţile de distingere şi definire a stadiilor diferite de comportare şi a limitelor lor. Pînă în prezent nu sînt prelucrate teorii şi rezultate generale, valabile pentru orice material sau variaţie în timp a eforturilor unitare, fapt pentru care, în multe cazuri, este necesar să se facă extrapolări în vederea definirii unor caracteristici de rezistenţă pentru materiale. Se pot menţiona totuşi cîteva cazuri particulare importante de comportare:

— în cazul variaţiei în timp a stării de eforturi unitare axială, se definesc pentru un număr mare de repetări, diagrame Wöhler, Smith şi Haigh, care caracterizează relaţia dintre numărul de cicluri de solicitare şi intensitatea limită, ca şi influenţa raportului dintre caracteristicile ciclului de solicitare;

— în cazul variaţiei aleatoare a stării de eforturi unitare se dau unele legi de cumulare a efectelor ciclurilor succesive de solicitare, căutîndu-se să se aplice rezultatele cazului precedent (exemplu: legea de cumulare propusă de Palmgren-Miner);

— în cazul solicitării sub acţiunea unei stări de eforturi unitare variabile monoton şi rapid în timp (cazul şocurilor), se dau date privind influenţa vitezei de variaţie a stării de eforturi unitare asupra limitei la care rezistă materialul.

Exemplele acestora sînt cele mai importante, dar ele se pot continua.

În limitele unui stadiu de solicitare dat, se pot defini şi determina caracteristici de rigiditate sau de deformare pentru materialul de construcţie considerat. Admiţînd unele idealizări ale comportării, se pot utiliza modele reologice pentru stări simple de eforturi unitare, de exemplu pentru starea de întindere uniaxială. Dacă se admite comportarea liniară a materialului (ipoteză acceptată în mod curent în Dinamica construcţiilor), există două modele reologice de bază, care permit, prin compuneri, o reprezentare mai mult sau mai puţin fidelă a comportării materialelor: modelul Hooke şi modelul Newton, reprezentate schematic în fig. IX, 3, *a* şi *b*.

Modelul Hooke reprezintă comportarea ideal elastică a materialului, caracterizată printr-o lege de forma

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{IX.1}$$

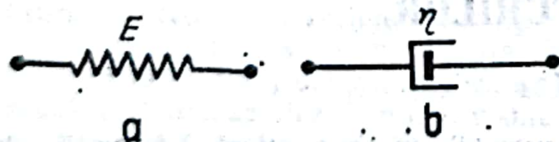


Fig. IX.3

şi schematizată în fig. IX. 3, *a*, printr-un resort. Modelul Newton reprezintă comportarea ideal vîscoasă a materialului, caracterizată printr-o lege de forma

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \tag{IX.2}$$

şi schematizată în fig. IX. 3, *b*, printr-un amortizor hidraulic.

Plecînd de la cele două modele de bază, se pot imagina modele compuse, dintre care cele mai simple sînt cele date în fig. IX. 4, respectiv:

— modelul solidului lui Kelvin-Voigt (fig. IX. 4, *a*), caracterizat printr-o lege de forma

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}\ ; \qquad \text{(IX.3)}$$

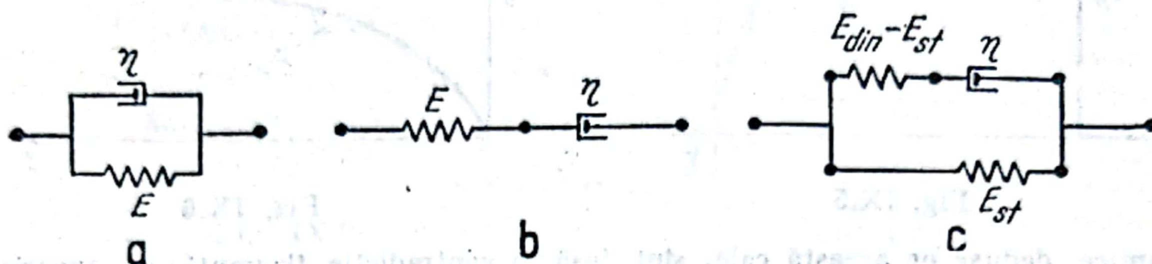


Fig. IX.4

— modelul lichidului lui Maxwell (fig. IX. 4, *b*), caracterizat printr-o lege de forma

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma; \qquad \text{(IX.4)}$$

— modelul solidului lui Poynting (fig. IX.4, *c*), caracterizat printr-o lege de forma

$$\sigma + \frac{\eta}{E_{din} - E_{st}}\dot{\sigma} = E_{st}\varepsilon + \frac{\eta E_{din}}{E_{din} - E_{st}}\dot{\varepsilon}. \qquad \text{(IX.5)}$$

Se observă faptul că modelele din fig. IX. 4 rezultă din legarea în paralel și/sau în serie a modelelor de bază din fig. IX.3. În publicațiile de Reologie se pot urmări numeroase modele mai complexe (modele Maxwell sau Kelvin-Voigt generalizate etc.) care caută să reprezinte cît mai fidel comportarea reală a materialelor.

În Dinamica construcțiilor modelele cele mai utilizate sînt cele ale lui Hooke (comportare ideal elastică) și Kelvin-Voigt (comportare liniară visco-elastică cu legătură în paralel). Pentru a se examina specificul comportării unor materiale care corespund acestor modele, se poate imagina o stare de efort unitar identic nulă pînă la momentul $t = 0$ și care suferă un salt de intensitate σ_0 în acest moment (fig. IX. 5). Deformarea modelelor Hooke și Kelvin-Voigt, care corespunde acestei variații a funcției $\sigma(t)$, dedusă din relațiile (IX.1), respectiv (IX. 3), este (fig. IX. 6);

$$\varepsilon_{Hooke} = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \dfrac{\sigma_0}{E} & (t > 0) \end{cases} \qquad \text{(IX.6)}$$

$$\varepsilon_{Kelvin} = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \dfrac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) & (t > 0) \end{cases} \qquad \text{(IX.7)}$$

Modelul Kelvin-Voigt este utilizat pe scară largă pentru analiza teoretică a comportării dinamice a structurii cu capacitate de amortizare. Unele aspecte ale comportării sistemelor

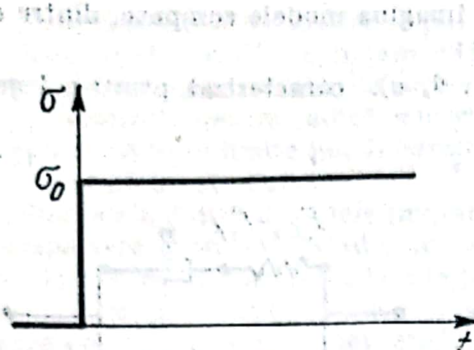


Fig. IX.5

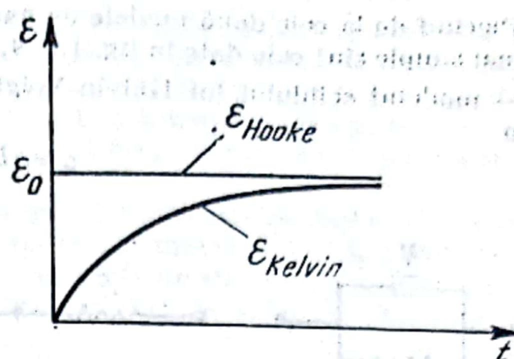


Fig. IX.6

dinamice, deduse pe această cale, sînt însă în contradicţie flagrantă cu experienţa. Din acest motiv, în lucrările de specialitate există propuneri de legi reologice care nu pleacă de la modelele liniare clasice din fig. IX.3. Ca exemplu, Sorokin [20] propune legea.

$$\sigma = E(1 + i\gamma)\,\varepsilon \qquad \text{(IX.8)}$$

care concordă mai bine cu unele date experimentale, deşi introduce inadvertenţe teoretice.

În numeroase cazuri, în analiza vibraţiilor structurilor se pleacă de la modelul Hooke, care nu introduce dificultăţi de calcul, iar rezultatele finale se corectează ţinînd seama de concluziile obţinute cu privire la vibraţiile unor sisteme cu un grad de libertate, alcătuite din acelaşi material.

În unele probleme este necesară considerarea comportării fizic-neliniare a structurilor ca urmare a deformării materialelor în stadiul plastic. Pentru a se reprezenta aceste proprietăţi ale materialelor se introduce un nou model reologic de bază pe lîngă modelele Hooke şi Newton, anume modelul Prandtl, reprezentat în fig. IX. 7.

Acest model simbolizează comportarea în cazul frecării uscate: în cazul unui efort unitar sub limita de curgere, nu apare nici o deformare. În cazul unui efort unitar care atinge această valoare, deformarea este nedeterminată. Modelul din fig. IX. 7 reflectă comportarea materialelor conform diagramei idealizate a lui Prandtl (material rigid-plastic), dată în fig. IX.8.

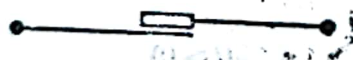


Fig. IX.7

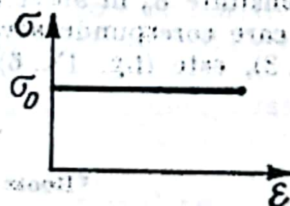


Fig. IX.8

Plecînd de la modelul de bază din fig. IX. 7, se poate imagina un model reologic mai complex, pentru sisteme cu histereză şi consolidare, cum este modelul dat în fig. IX. 9, a cărui comportare este redată în fig. IX. 10.

Unghiurile din fig. IX.10 sînt legate de valorile E_e şi E_p ale rigidităţilor resorturilor din fig. IX. 9 prin relaţiile

$$E_e = \text{tg}\,\alpha_e; \quad E_p = \text{tg}\,\alpha_p.$$

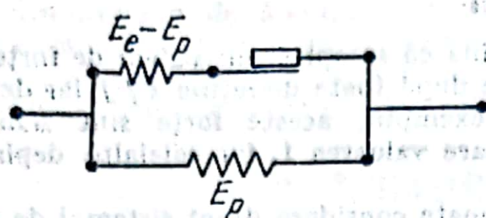


Fig. IX.9

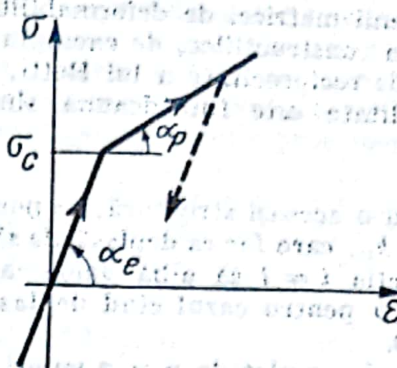


Fig. IX.10

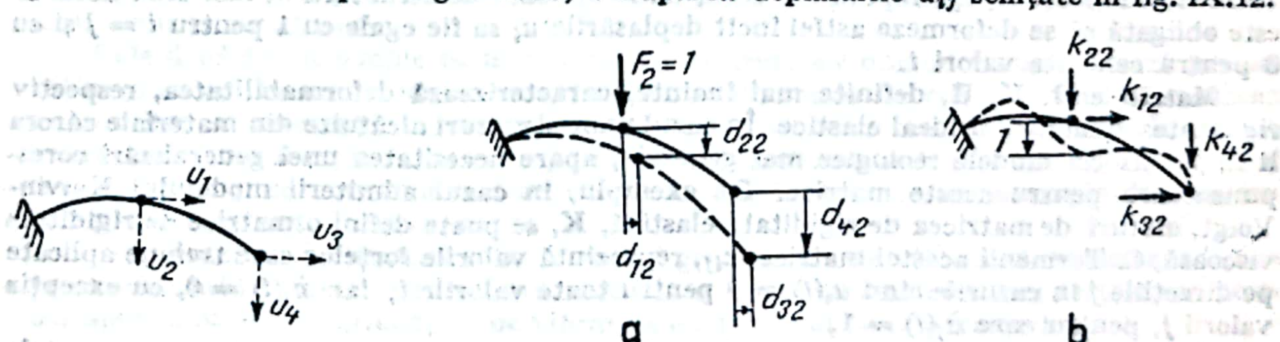
2.2. Caracteristici ale structurilor

La fel ca pentru materiale, și pentru structuri se pot defini caracteristici de rezistență și de deformare. În timp ce pentru materiale aceste caracteristici se raportează la eforturi unitare și deformații, pentru structuri în ansamblu ele se raportează la sisteme de forțe exterioare și de deplasări.

Pentru problemele de calcul ale Dinamicii construcțiilor este importantă în special definirea caracteristicilor de rigiditate sau de deformabilitate a structurilor. În acest scop se neglijează de obicei masa elementelor de construcție antrenate în fenomenul de deformare. Pentru o primă definire este util să se imagineze structuri alcătuite dintr-un material ideal elastic, respectînd modelul Hooke.

Pentru o structură ideal elastică se pot alege n deplasări independente, notate cu indicii i, care caracterizează, dintr-un punct de vedere interesant pentru calculator, deformarea acestei structuri. Ca exemplu se dă în fig. IX. 11 o structură în forma de bară curbă plană, pentru care se definesc patru deplasări independente, u_i $(i = 1, \ldots, 4)$.

Se poate imagina că structura este încărcată pe rînd cu cîte o forță statică F_j $(j = 1, \ldots, 4)$, dirijată respectiv după cîte una din deplasările enumerate și egală ca intensitate cu unitatea. Deformarea structurii sub acțiunea forței F_j egală cu unitatea face ca pe direcțiile i să apară deplasările statice d_{ij}. Ca exemplu, în cazul acțiunii numai a forței $F_2 = 1$ în cazul definit prin fig. IX. 11, vor apărea deplasările d_{ij} schițate în fig. IX.12.



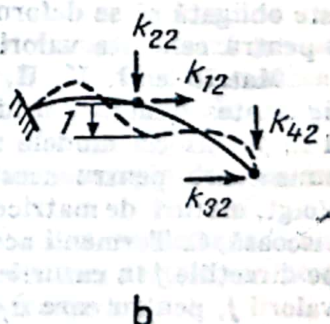


Fig. IX.11

Fig. IX.12

Sistemul complet de $n \times n$ valori, d_{ij}, se poate considera drept sistemul de termeni ai matricei de deformabilitate, **D**,

$$\mathbf{D} = \{d_{ij}\}.$$

Termenii matricei de deformabilitate, d_{ij}, se pot determina cu metodele cunoscute din Statica construcţiilor, de exemplu cu ajutorul integralei Maxwell-Mohr. Din cauza teoremei de reciprocitate a lui Betti, cunoscută din Statica construcţiilor, matricea de deformabilitate este întotdeauna simetrică,

$$d_{ij} = d_{ji}. \quad \text{(IX.9)}$$

Pentru o aceeaşi structură, se poate imagina că se aplică un sistem de forţe statice exterioare k_{ij}, care fac ca deplasările să fie nule după toate direcţiile $i \neq j$, iar deplasarea după direcţia $i = j$ să aibă valoarea 1. Ca exemplu, aceste forţe sînt schiţate în fig. IX.12, *b* pentru cazul cînd deplasarea u_2 are valoarea 1, iar celelalte deplasări au valoarea 0.

Sistemul complet de $n \times n$ valori, k_{ij} se poate considera drept sistemul de termeni ai matricei de rigiditate, **K**.

$$\mathbf{K} = \{k_{ij}\}$$

Matricea **K** este şi ea întotdeauna simetrică. Această matrice este inversa matricei de deformabilitate,

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} \quad \text{(IX.10)}$$

deoarece prin definiţie sub acţiunea forţelor k_{ij} toate deplasările sînt egale cu 0, cu excepţia deplasării u_j care este egală cu 1 şi, deci, ţinînd seama de posibilitatea de suprapunere a efectelor,

$$\sum_{k}^{1,n} d_{ik}\, k_{kj} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \text{(IX.11)}$$

sau, scriind condensat,

$$\mathbf{DK} = \mathbf{I}_n \quad \text{(IX.12)}$$

(unde $\mathbf{I}_n$ este matricea unitate n — dimensională), relaţie echivalentă cu relaţia (IX.10).

În unele cazuri este util să se opereze nu cu matricea de rigiditate, **K**, ci cu opusa ei, matricea reacţiunilor, **R**,

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K} \quad \text{(IX.13)}$$

Termenii matricei **R**, r_{ij}, reprezintă reacţiunile aplicate de structură atunci cînd aceasta este obligată să se deformeze astfel încît deplasările u_i să fie egale cu 1 pentru $i = j$ şi cu 0 pentru celelalte valori i.

Matricele **D**, **K**, **R**, definite mai înainte, caracterizează deformabilitatea, respectiv rigiditatea structurilor ideal elastice. În cazul unor structuri alcătuite din materiale cărora li se pot asocia modele reologice mai generale, apare necesitatea unei generalizări corespunzătoare pentru aceste matrice. De exemplu, în cazul admiterii modelului Kelvin-Voigt, alături de matricea de rigiditate elastică, **K**, se poate defini o matrice de rigiditate vîscoasă, **C**. Termenii acestei matrice, c_{ij}, reprezintă valorile forţelor care trebuie aplicate pe direcţiile j în cazurile cînd $u_i(t) = 0$ pentru toate valorile i, iar $\dot{u}_i(t) = 0$, cu excepţia valorii j, pentru care $\dot{u}_j(t) = 1$.

În cazul unei structuri omogene, al cărei material respectă pentru toate componentele tensorilor deformaţie şi efort unitar o lege proporţională cu legea reologică (IX.3), între matricele **C** şi **K** apare relaţia

$$\mathbf{C} = \frac{\eta}{E}\,\mathbf{K}. \quad \text{(IX.14)}$$

În general, caracteristicile matricelor enumerate depind de ipotezele care se acceptă cu privire la distribuţia maselor, deci la specificul gradelor de libertate şi al coordonatelor generalizate corespunzătoare. În unele cazuri este necesar să se ţină seamă în mod explicit de distribuţia continuă a maselor. În aceste cazuri nu mai este posibilă definirea unor matrice de dimensiune finită, iar matricele enumerate sînt înlocuite prin operatori, diferenţiali sau integrali, după caz.

În ce priveşte caracteristicile de rezistenţă ale structurilor, acestea se determină în general în practică plecînd de la caracteristicile corespunzătoare ale materialelor şi evaluîndu-se valorile căutate cu ajutorul indicaţiilor din normele de proiectare.

3. ÎNCĂRCĂRI DINAMICE

3.1. Generalităţi. Clasificări

Încărcările aplicate construcţiilor variază în foarte numeroase cazuri în timp. Nu întotdeauna însă, în analiza solicitărilor produse în construcţii, este necesar să se ţină seama explicit de această variaţie. Din punct de vedere tehnic, se înţelege prin încărcări dinamice acea categorie de încărcări, care imprimă punctelor materiale ale construcţiilor acceleraţii de care, în funcţie de intensitate şi direcţie, este necesar să se ţină seama în calcul.

Caracterul dinamic al încărcărilor este determinat de viteza de variaţie în timp. Practic vorbind, se numesc încărcări dinamice acele încărcări care variază apreciabil în intervale de timp comparabile cu perioadele proprii fundamentale ale elementelor de construcţie sau construcţiilor în ansamblu. Încărcările cu variaţie mai lentă în timp au practic numai efecte statice. Încărcările cu variaţie mai rapidă în timp se manifestă prin producerea de unde sonore sau ultrasunete, fenomene care în general nu mai implică deformări ale elementelor de construcţie în sensul în care ele sînt familiare inginerului constructor.

Încărcările dinamice pot să se manifeste sub două forme de bază:

— sisteme de forţe cu o variaţie în timp dată (exemple: încărcările aplicate de o maşină cu amplasament fix, postată pe un element de construcţie foarte rigid; presiunile variabile date de rafalele de vînt asupra unei construcţii rigide);

— acceleraţii cu o variaţie în timp dată sub o anumită formă, imprimate reazemelor (exemple: vibraţiile produse de sursele industriale de perturbaţii; acţiunea seismică în cazul unui teren stîncos).

Cele două forme simple de manifestare a încărcărilor dinamice nu epuizează posibilităţile practice. În numeroase cazuri, încărcările dinamice ale construcţiilor se realizează ca rezultat al interacţiunii dinamice între construcţie şi mediul ambiant. În această interacţiune un rol capital îl joacă raportul dintre caracteristicile de inerţie şi rigiditate ale construcţiilor şi corpurilor adiacente care le aplică încărcările. Ca exemple de fenomene de interacţiune pot fi menţionate:

— interacţiunea dinamică între o maşină generatoare de vibraţii şi un element flexibil pe care aceasta reazemă (traiectoria absolută a organelor mobile, deci forţele de inerţie corespunzătoare sînt influenţate de vibraţiile elementului de construcţie);

— interacţiunea dinamică între un mijloc mobil de ridicare şi transport şi structura care susţine calea (la aceleaşi mase mobile, forţele aplicate construcţiei sînt influenţate de deformabilitatea utilajului mobil şi a structurii căii);

— interacţiunea dinamică între presiunea dinamică a vîntului şi structurile flexibile (în fenomenele de instabilitate aerodinamică, forţele alternate aplicate de curentul de aer sînt apreciabil influenţate de deplasările suferite de elementele de construcţie);

— interacţiunea seismică între structură şi teren sau între un recipient (rezervor, siloz, baraj) şi conţinutul său fluid (acceleraţiile punctelor de rezemare ale construcţiilor sînt afectate de deformabilitatea terenului; presiunile dinamice aplicate de conţinutul fluid sînt afectate de deformabilitatea recipientului).

Fenomene de interacţiune mediu ambiant-construcţie apar şi în cazul încărcărilor statice (împingerea pămîntului, efectul tasărilor fundaţiilor, împingerile în silozuri, conlucrarea structurilor adiacente), dar caracterul de interacţiune este mai frecvent şi mai pregnant în cazul încărcărilor dinamice. În general, încărcările dinamice se manifestă ca forţe date atunci cînd corpurile care aplică aceste încărcări urmăresc cu uşurinţă deplasările construcţiei şi se manifestă ca acceleraţii date atunci cînd construcţia este uşoară şi deformabilă în raport cu mediul care o antrenează în mişcare. Este sarcina inginerului constructor să interpreteze corect situaţiile concrete pe care trebuie să le analizeze.

Încărcările, fie că se prezintă ca forţe date, fie că se prezintă ca acceleraţii impuse, pot fi caracterizate cantitativ prin două categorii de parametri:

— poziţia punctelor de aplicaţie (din acest punct de vedere se poate vorbi despre încărcări concentrate sau distribuite, de încărcări fixe sau mobile);

— variaţia în timp a componentelor lor (din acest punct de vedere se poate vorbi despre încărcări constante, periodice simple (sinusoidale), periodice oarecare, încărcări de şoc, încărcări aleatoare).

Încărcările dinamice pot fi datorite unor factori deosebit de variaţi. Printre factorii cei mai importanţi pentru practica inginerului constructor trebuie menţionaţi:

— maşinile şi utilajele cu amplasament fix din construcţiile industriale (motoare, turbine, maşini unelte etc.);

— utilaje de ridicare şi transport (poduri rulante, grinzi rulante, monoraiuri etc.);

— mijloace de transport la distanţă (autovehicule, trenuri);

— scurgerea turbulentă a fluidelor (aer, lichide) în jurul elementelor de construcţie sau fenomenele de instabilitate aero sau hidrodinamică;

— perturbaţiile seismice;

— undele de şoc produse de exploziile puternice aeriene sau subterane. Fiecare dintre încărcările enumerate are un specific al modului de acţiune, specific care trebuie avut în vedere la proiectarea construcţiilor. În cele ce urmează, sînt prezentate cîteva caracteristici calitative, care au rolul de a orienta pe cititor în rezolvarea problemelor practice.

3.2. Încărcări produse de maşinile şi utilajele cu amplasament fix

Încărcările dinamice produse de maşinile şi utilajele cu amplasament fix sînt importante pentru un număr mare de structuri, în special în construcţiile industriale. De regulă, aceste încărcări au un caracter periodic sau aproape periodic. Sînt însă şi cazuri cînd încărcările dinamice produse de aceşti factori sînt în mod clar aperiodice.

Încărcările dinamice produse de maşinile şi utilajele cu amplasament fix sînt generate ca urmare a forţelor aplicate la lagăre de organele mobile în mişcare. Pentru unele tipuri de încărcări, forţele aplicate reazemelor există chiar în cazul unei realizări perfecte a maşinilor. Acesta este cazul unor maşini sau utilaje în mişcare de du-te-vino, ca rabotezele, motoarele cu pistoane, concasoarele, frezele etc. Pentru alte încărcări, forţele aplicate reazemelor se realizează numai ca urmare a inevitabilelor erori de execuţie. Acesta este cazul maşinilor şi utilajelor cu organe în mişcare de rotaţie uniformă, ca electromotoarele, ventilatoarele, turbinele, strungurile.

Determinarea forţelor aplicate structurilor de maşini şi utilajele cu amplasament fix se poate face atunci cînd se cunoaşte schema cinematică a organelor mobile, regimul de

funcționare și masele antrenate în mișcare. Rezultatele calculelor făcute pe baza schemei cinematice ideale trebuie însă uneori corectate, ținîndu-se seama de deformarea elastică a organelor mobile și de abaterile de traiectorii survenite ca urmare a erorilor de execuție și a uzurii.

Forțele dinamice aplicate reazemelor mașinii sau utilajului rezultă din sumarea forțelor date (presiuni de aburi, de gaze de explozie etc.) cu forțele de inerție corespunzătoare maselor organelor mobile. Pentru a fixa ideile, se pot da unele situații simple de determinare a forțelor de inerție.

Un organ mobil în mișcare de rotație uniformă în jurul unei axe, avînd viteza unghiulară ω și o masă m cu excentricitate e (fig. IX. 13) aplică reazemelor forțe care corespund componentelor.

$$F_x(t) = m\,e\,\omega^2 \cos \omega \qquad F_y(t) = m\,e\,\omega^2 \sin \omega\, t. \tag{IX.15}$$

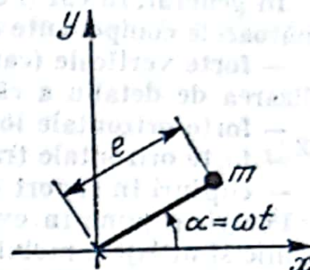


Fig. IX.13

Un organ mobil în mișcare de translație rectilinie, avînd o masă m și o poziție $u(t)$ (fig. IX. 14), aplică reazemelor forțe care corespund forței de inerție (orientată pe direcția mișcării).

$$F(t) = -m\,\ddot{u}(t) \tag{IX.16}$$

Dacă mișcarea $u(t)$ este periodică, de perioadă T, și se reprezintă sub forma de serie Fourier,

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n}^{1,\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \tag{IX.17}$$

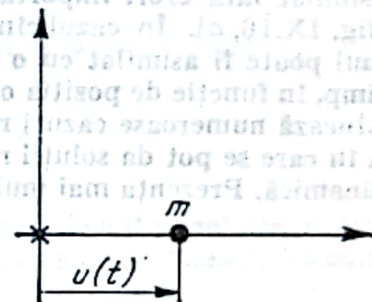


Fig. IX.14

forța de inerție va avea expresia

$$F(t) = -m\,\ddot{u}(t) = m \sum_{n}^{1,\infty} \frac{4\pi^2 n^2}{T^2} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right). \tag{IX.18}$$

Atrage atenția faptul că înmulțirea cu n^2 a componentelor Fourier dă o pondere relativ mare componentelor de frecvențe înalte ale mișcării, în ceea ce privește intensitatea forțelor de inerție. (în această ordine de idei trebuie avut în vedere faptul că șirurile a_n și b_n au de regulă un caracter rapid descrescător).

În general, forțele aplicate de mașini și utilaje avînd organe cu mișcări periodice pot fi evaluate prin calcul cu o precizie satisfăcătoare. În schimb, mașinile în cazul cărora forțele dinamice provin exclusiv din erori de execuție și din uzură creează probleme dificile de evaluare, care pot fi rezolvate numai pe baza unei suficiente cantități de date reale.

3.3. Încărcări produse de mașini și utilaje mobile

Încărcările care intră în categoria respectivă sînt datorite unor factori numeroși; poduri rulante, monoraiuri, mijloace de transport uzinale, vehicule etc. Încărcările propuse de acești factori sînt importante pentru numeroase structuri industriale (hale, esta-

cade, platforme etc.) sau de transporturi (poduri de şosea, poduri de cale ferată, viaducte, etc.).

Încărcările dinamice produse de maşinile şi utilajele mobile se disting prin complexitatea lor şi, de multe ori, printr-o dependenţă accentuată de caracteristicile structurilor asupra cărora acţionează.

În general, în cazul cînd un utilaj mobil circulă pe o cale orizontală, sînt importante următoarele componente ale încărcărilor dinamice :

— forţe verticale (care au un caracter dinamic determinat în măsură importantă de realizarea de detaliu a căii) ;

— forţe orizontale longitudinale (corespunzătoare accelerării, sau mai ales frînării) ;

— forţe orizontale transversale (corespunzătoare mişcărilor de şerpuire) ;

— cupluri în raport cu o axă verticală (corespunzătoare unor mişcări similare).

Pentru a pune în evidenţă dificultăţile ridicate de analiza încărcărilor produse de maşinile şi utilajele mobile, este sugestiv sistemul din fig. IX.15, constituit dintr-o masă suspendată elastic, care se mişcă pe orizontală cu o viteză v, în lungul unei căi suportate de o grindă elastică. Se pot imagina două cazuri limită, reprezentate schematic în fig. IX.16.

În cazul cînd masa mobilă este foarte mică în raport cu masa grinzii, sistemul poate fi asimilat fără erori importante cu o forţă mobilă care se deplasează în lungul grinzii (fig. IX.16, *a*). În cazul cînd masa grinzii este foarte mică în raport cu masa mobilă, sistemul poate fi asimilat cu o masă suspendată elastic (cu rigiditatea resortului variabil în timp, în funcţie de poziţia ocupată pe grindă (fig. IX.16, *b*). Între aceste cazuri limită se situează numeroase cazuri reale, în care masele grinzii şi maşinii mobile sînt comparabile şi în care se pot da soluţii riguroase numai pe baza studiului fenomenelor de interacţiune dinamică. Prezenţa mai multor mase mobile pe o structură complică, evident, problemele.

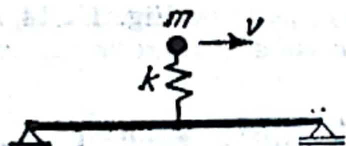
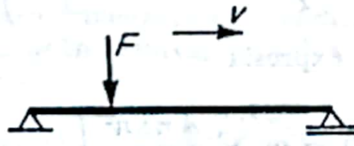


Fig. IX.15



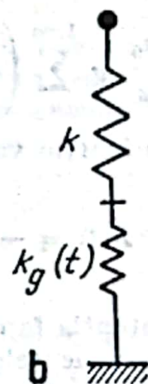


Fig. IX.16

În practică, determinarea încărcărilor produse de maşini şi utilaje mobile se face în prezent prin mijloace empirice, afectîndu-se încărcările gravitaţionale corespunzătoare de coeficienţi dinamici determinaţi pe baze experimental-statistice. Se dau astfel coeficienţi de impact, de frînare etc.

3.4. Încărcări datorite vîntului

Scurgerea aerului în jurul obstacolelor formate de elementele de construcţii, la fel ca şi scurgerea altor fluide (abur, apă etc.), se soldează în numeroase cazuri cu încărcări dinamice aplicate structurilor respective.

Modul în care se prezintă aceste încărcări dinamice este complex și este determinat atît de specificul scurgerii „libere" a fluidului, cît și de fenomenele de interacțiune dinamică între fluid și structuri.

La viteze curente ale vîntului, care sînt semnificative pentru încărcările aplicate construcțiilor, mișcarea aerului este turbulentă. Turbulența se manifestă prin faptul că vectorul viteză instantanee de scurgere a aerului într-un punct fix dat, este o funcție de timp, $\vec{v}(t)$. Scurgerea aerului într-un punct se caracterizează în primul rînd viteza medie, $\vec{\bar{v}}$, definită prin relația

$$\vec{\bar{v}} = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \vec{v}(t)\,dt. \tag{IX.19}$$

Practic, se obișnuiește ca intervalul de integrare să se ia de durata $T_0 = 2$ min. Pe lîngă viteza medie $\vec{\bar{v}}$, este util să se caracterizeze intensitatea rafalelor, printr-o măsură a abaterii vitezei instantanee față de viteza medie. Abaterea instantanee $\vec{v}'(t)$ se definește sub forma

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{\bar{v}}(t) \tag{IX.20}$$

Această abatere poate fi caracterizată statistic prin tensorul de autocorelație,

$$\overset{\Rightarrow}{K}(\tau) = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \vec{v}'(t)\circ\vec{v}'(t+\tau)\,dt \tag{IX.21}$$

(semnul ∘ reprezintă aici produsul diadic a doi vectori). Tensorul de autocorelație permite o caracterizare cuprinzătoare a distribuției după frecvențe a energiei rafalelor. Valoarea acestui tensor pentru $\tau = 0$,

$$\overset{\Rightarrow}{K}(0) = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \vec{v}'(t)\circ\vec{v}'(t)\,dt \tag{IX.22}$$

reprezintă tensorul dispersie al vitezei instantanee a vîntului și dă o măsură a energie totale a rafalelor. Dezvoltări teoretice aprofundate ale acestor expresii apar în aplicații din literatură ale teoriei funcțiilor aleatoare [3, 14] la analiza încărcărilor dinamice date de vînt.

Un alt fenomen specific scurgerii aerului în jurul obstacolelor (mai ales a celor cilindrice) este degajarea alternativă de vîrtejuri (aleea de vîrtejuri Kármán). Aceste vîrtejuri se degajă periodic, conform fig. IX.17, cu o frecvență care depinde de viteza vîntului și de forma și dimensiunile obstacolului. Frecvența de degajare, f_k, este dată de relația

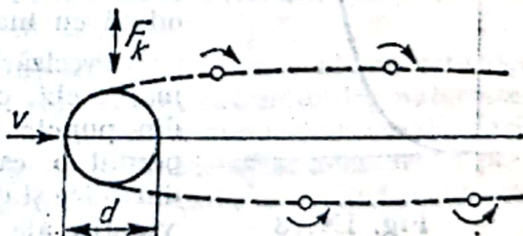


Fig. IX.17

$$f_k = S\,\frac{v}{d}. \tag{IX.23}$$

În această relație v reprezintă viteza vîntului, d — diametrul obstacolului, iar S — un coeficient adimensional, numărul lui Strouhal, care depinde, la rîndul său, de numărul lui

Reynolds, care caracterizează regimul de scurgere. Pentru secțiuni circulare și numere Reynolds curente, valorile coeficientului S sînt apropiate de 0,2. Degajarea alternativă de vîrtejuri produce apariția unor forțe alternative periodice, dirijate normal pe direcția vîntului. Perioada acestor forțe coincide cu perioada degajării vîrtejurilor. În cazul cînd frecvența de degajare a vîntului coincide cu o frecvență proprie a obstacolului (în special cu frecvența fundamentală), se produce un fenomen de rezonanță care poate avea urmări grave. Viteza la care se produce rezonanța, anumită viteză critică, se determină, plecînd de la relația (IX. 23), cu ajutorul relației

$$V_{cr} = \frac{d \cdot f_I}{S} \tag{IX.24}$$

În cazul construcțiilor cu o deformabilitate accentuată la torsiune, cum sînt tablierele grinzilor suspendate, pot să apară în timpul vînturilor (chiar moderate) fenomene de instabilitate corespunzătoare producerii unor oscilații autoîntreținute. Analiza acestei probleme ridică dificultăți apreciabile.

În calculele practice, caracteristica primară a acțiunii vîntului este presiunea dinamică de bază, g_v, care se determină pe baza vitezei luate în considerație cu relația.

$$g_v = \rho \frac{v^2}{2} \cdot \tag{IX.25}$$

În condiții normale de presiune și temperatură, se poate accepta pentru practică relația mai simplă

$$g_v = \frac{v^2}{16,3} \tag{IX.26}$$

unde viteza v se exprimă în m/s, iar presiunea dinamică de bază g_v în daN/m².

În timpul mișcării aerului, viteza medie a vîntului depinde de înălțimea deasupra terenului. Calitativ, variația acestui parametru pe înălțime este reprezentată în fig. IX.18.

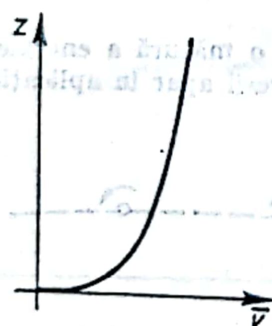


Fig. IX.18

Alura de detaliu a acesteia depinde de rugozitatea terenului. Datele experimentale arată că, odată cu creșterea înălțimii, importanța rafalelor scade, iar încărcarea dată de vînt se apropie mai mult de o încărcare statică. Mai precis, raportul între abaterea medie pătratică și valoarea medie a vitezei vîntului scade odată cu înălțimea.

Precizări recente din literatură completează cunoștințele mai vechi, dînd indicații asupra corelației presiunilor de rafală din puncte diferite. Aceste corelații prezintă interes, întrucît permit o caracterizare statistică a nesincronității încărcărilor dinamice și deci a perturbației care se aplică după modurile de vibrație ale construcțiilor.

3.5. Încărcări seismice

Încărcările seismice sînt aplicate construcțiilor ca o consecință a apariției unei mișcări a terenului de fundație în urma propagării unui tren de unde seismice generate într-un focar mai mult sau mai puțin depărtat de amplasament. Undele seismice aduc punctele

de rezemare ale construcţiilor într-un regim nestaţionar de oscilaţii spaţiale, violente şi haotice. Cutremurele de pămînt pot fi caracterizate din două puncte de vedere:

— un punct de vedere global, care priveşte cutremurul în ansamblu;

— un punct de vedere local, care priveşte efectele sale într-o zonă dată a suprafeţei pămîntului (acest ultim mod de caracterizare este legat în mod direct de preocupările inginerului constructor).

Din punct de vedere global, cutremurele sînt caracterizate prin poziţia focarului (epicentru, adîncime) şi prin magnitudinea M care este o măsură a energiei totale eliberate. Pentru măsurarea magnitudinilor se utilizează în prezent pe scară largă scara Richter. Unui grad de magnitudine din această scară îi corespunde o creştere a energiei totale de circa 32 ori. Cutremurele cele mai puternice cunoscute au avut, în această scară, magnitudini cuprinse între 8 şi 9.

Din punct de vedere local, mişcările seismice ale terenului sînt caracterizate prin intensitatea I, o măsură a violenţei lor, ca şi prin anumite caracteristici spectrale care definesc o distribuţie după frecvenţe a energiei de mişcare şi a efectelor asupra construcţiilor. În prezent este acceptată pe linie internaţională scara de măsurare a intensităţilor elaborată de Medvedev, Sponheuer şi Kárník. Această scară cuprinde 12 grade de intensitate, caracterizată descriptiv, prin efectul mişcărilor seismice asupra fiinţelor vii, construcţiilor care nu au fost proiectate antiseismic şi formelor de relief. În mod auxiliar, se dau şi intervale în care se situează acceleraţiile extreme de oscilaţie şi vitezele extreme de oscilaţie ale pămîntului,ca şi deplasările relative ale unui pendul sferic standardizat (seismoscop).

În lumina concepţiilor actuale, caracterizarea mişcării seismice a terenului printr-un parametru unic, intensitatea, este insuficient de precisă pentru evaluarea efectelor produse asupra construcţiilor. Din acest motiv a fost necesar ca, plecînd de la înregistrări ale parametrilor mişcării seismice (acceleraţii de oscilaţie, uneori deplasări de oscilaţie) pe 3 direcţii, să se dea o caracterizare mai detaliată a mişcărilor seismice. În prezent a devenit clasică noţiunea de spectru de acceleraţie seismică. Spectrul de acceleraţie seismică, $S_a(T, n)$ este o funcţie care reprezintă, pentru componenta pe o direcţie a unei mişcări seismice a unui punct al terenului, valoarea absolută maximă a acceleraţiilor absolute ale masei unui pendul elastic legat la teren, avînd perioada proprie neamortizată T şi fracţiunea din amortizarea critică n. În mod analog se definesc spectrele de viteză (pentru vitezele relative ale masei pendulului) şi de deplasare (pentru deplasările relative ale acestuia). Expresii ale spectrelor de acţiune seismică definite mai înainte sînt prezentate în cap. 7 din această secţiune.

Pe lîngă spectrele de acţiune seismică, care au semnificaţiile amintite, în ultimii ani au început să fie utilizate, în special în activitatea de cercetare, caracteristici ale mişcărilor seismice care au definiţii bazate pe teoria probabilităţilor.

Mişcările seismice puternice ale terenului produc solicitări intense ale structurilor amplasate în zonele respective. Este cunoscut faptul că, în cazul cutremurelor puternice, se produc avarieri şi prăbuşiri de construcţii însoţite de victime şi pierderi materiale mari. Construcţiile care rezistă fără prăbuşire sau avarieri grele, supravieţuiesc adeseori cu preţul dezvoltării unor deformaţii remanente importante şi necesită consolidări, uneori costisitoare.

Metodele de calcul utilizate în prezent au un caracter în bună parte convenţional, nefiind capabile de a reprezenta cu fidelitate fenomenul în toată complexitatea. Trebuie remarcat de asemenea faptul că forţele convenţionale de calcul, care în practica actuală au forma de forţe statice convenţionale, au intensităţi mult mai reduse, pentru un grad de intensitate dat, decît forţele de inerţie extreme corespunzătoare unei mişcări seismice de aceeaşi intensitate. Această discrepanţă este consecinţa faptului că, în timpul cutremu-

relor puternice, suprasolicitările cu apariţii ale unor deformaţii plastice sînt inevitabile în majoritatea cazurilor, întrucît o dimensionare care să asigure comportarea elastică a structurilor este prohibitivă.

3.6. Probleme de asigurare a structurilor solicitate dinamic

Încărcările dinamice sînt întotdeauna încărcări temporare. Ele pot să acţioneze la intensităţi ridicate frecvent (exemplu : cazul încărcărilor tehnologice), rar (exemplu : cazul vîntului) sau în mod excepţional (exemplu : cazul mişcărilor seismice).

Unele încărcări dinamice acţionează cu intensităţi apropiate de cele de calcul în mod curent. Acesta este cazul încărcărilor tehnologice date de unele maşini cu amplasament fix, sau de unele utilaje de ridicare şi transport. Alte încărcări apar frecvent la intensităţi reduse, lipsite de importanţă pentru siguranţa construcţiilor şi apar rar la intensităţi ridicate, periculoase. Analiza statistică a modului în care se repetă apariţiile încărcărilor la diferite intensităţi pune în evidenţă o anumită stabilitate a frecvenţei relative a diferitelor intensităţi, atunci cînd intervalele de timp considerate sînt suficient de mari. Această constatare permite utilizarea instrumentelor oferite de calculul probabilităţilor şi statistica matematică pentru caracterizarea distribuţiei intensităţilor încărcărilor.

Încărcările temporare Q care apar rar la intensităţi ridicate pot fi caracterizate prin intensităţile depăşite în medie cel puţin odată într-un interval de timp T, $Q(T)$. Pe baza acestei funcţii se pot determina intensităţi convenţionale de proiectare, considerînd durata de exploatare prevăzută şi importanţa funcţională a construcţiei proiectate. Statistica distribuţiei valorilor extreme ale încărcărilor temporare nu este specifică încărcărilor dinamice, dar joacă în acest caz un rol deosebit de important. Pe baza unor astfel de analize statistice, unele norme prescriu încărcarea convenţională datorită zăpezii drept media maximelor anuale şi încărcarea convenţională datorită vîntului drept valoarea depăşită în medie la 5 ani.

Încărcările dinamice care apar cu intensităţi ridicate (de multe ori cu caracter catastrofal) la intervale de timp deosebit de lungi (exemple : cutremurele, cicloanele, exploziile) şi pot eventual să nu apară de loc în viaţa unei construcţii, ridică probleme dificile de concepţie în ce priveşte asigurarea construcţiilor. Problemele de asigurare trebuie rezolvate în funcţie de importanţa funcţională a construcţiei şi durata de exploatare, presupusă, căutîndu-se obţinerea unei soluţii optime care să înlăture atît un risc exagerat, cît şi o supradimensionare oneroasă.

4. VIBRAŢIILE LINIARE ALE SISTEMELOR CU UN GRAD DE LIBERTATE

4.1. Ecuaţiile de mişcare

Se consideră sistemul din fig. IX.19 în următoarele ipoteze :

— se neglijează extensibilitatea barei verticale, considerîndu-se exclusiv deformaţiile de încovoiere ale acesteia ;

— se neglijează momentul de inerţie mecanic al masei din vîrful barei, la fel ca masa proprie distribuită a barei ;

— se admite pentru materialul din bară valabilitatea unei legi reologice de forma (IX.3) ;

— se consideră deplasări și deformații suficient de reduse pentru a se putea scrie ecuațiile de mișcare pe schemă nedeformată.

Pentru stabilirea ecuației de mișcare a sistemului în aceste condiții se pot imagina două procedee, atunci cînd se aplică teoremele elementare din mecanică. Un prim procedeu

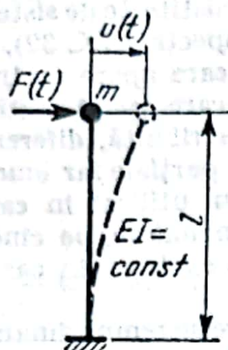


Fig. IX.19

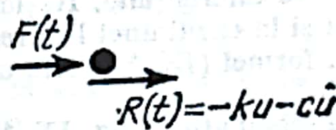


Fig. IX.20

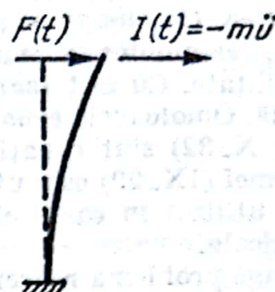


Fig. IX.21

revine la considerarea mișcării masei sub acțiunea tuturor forțelor care i se aplică, în conformitate cu schema din fig. IX. 20. Asupra acestei mase se aplică forța exterioară $F(t)$, dată prin problemă, și forța de legătură $R(t)$, apărută ca urmare a deformării barei

$$R(t) = -ku - c\dot{u}. \tag{IX.27}$$

Dacă se consideră o bară de lungime l și secțiune constantă, cu modul de rigiditate elastică la încovoiere egal cu EI, coeficienții k și c iau valorile

$$k = \frac{3\,EI}{l^3}; \quad c = \frac{3\,\eta I}{l^3}. \tag{IX.28}$$

Ecuația de mișcare dată de legea lui Newton este

$$m\ddot{u} = F(t) + R(t) = F(t) - ku - c\dot{u}$$

sau izolînd necunoscutele în membrul stîng

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t). \tag{IX.29}$$

Un alt mod de a raționa (aplicabil fără complicații numai în ipoteza unui material ideal elastic în bara verticală) este acela de a secționa bara la extremitatea superioară, la fel ca în cazul precedent, dar de a se îndrepta acțiunea asupra deformării barei. Deformabilitatea barei se poate măsura prin coeficientul d (raportul între valoarea săgeții și intensitatea forței care o produce) care, în cazul unei secțiuni constante, are valoarea

$$d = \frac{l^3}{3\,EI} = \frac{1}{k}. \tag{IX.30}$$

Dacă se consideră (fig. IX. 21) forțele care lucrează asupra extremității barei, respectiv forța dată $F(t)$ și forța de inerție $I(t)$

$$I(t) = -m\ddot{u}, \tag{IX.31}$$

ecuația de deformare a barei devine

$$u = d \cdot [F(t) + I(t)] = d \cdot [F(t) - m\ddot{u}].$$

sau, izolînd termenii necunoscuţi în membrul stîng,

$$u + d \cdot m \cdot \ddot{u} = d \cdot F(t). \tag{IX.32}$$

Ecuaţia (IX. 32) este evident echivalentă cu ecuaţia (IX. 29) în cazul $c = 0$ şi se confundă cu aceasta în cazul respectiv. În cazurile mai complexe, constituite de sistemele cu n grade de libertate, sistemele omoloage ecuaţiilor (IX. 29) şi respectiv (IX. 32), nu mai sînt identice. Omoloaga ecuaţiei (IX. 29) este forma directă, în care apare matricea de rigiditate, iar omoloaga ecuaţiei (IX. 32) este forma inversă, în care apare matricea de deformabilitate. Cu atît mai mult, în cazul sistemelor cu masă distribuită, diferenţa este apreciabilă. Omoloagele ecuaţiei (IX. 29) sînt ecuaţiile cu derivate parţiale iar omoloagele ecuaţiei (IX. 32) sînt ecuaţiile integro-diferenţiale. Raţionamentul utilizat în cazul obţinerii formei (IX. 29) este utilizabil şi în cazul unei legi reologice neliniare, pe cînd raţionamentul utilizat în cazul obţinerii formei (IX. 32) este utilizabil exclusiv în cazul elasticităţii ideale.

Pe lîngă problema reprezentată schematic în fig. IX. 19 în care sistemul dinamic este legat rigid de teren şi se mişcă sub acţiunea unei forţe date, $F(t)$, în multe cazuri practice este importantă considerarea problemei reprezentate în fig. IX. 22, în care cauza mişcării vibratorii a sistemului dinamic este constituită de deplasări variabile în timp ale reazemelor.

În cazul reprezentat în fig. IX. 22 se consideră dată deplasarea $u_0(t)$ a terenului. Sub acţiunea acestei deplasări sistemul dinamic intră într-un regim vibratoriu, în cursul căruia bara de legătură se deformează, apărînd o deplasare relativă $u_{rel}(t)$. Deplasarea absolută $u_{abs}(t)$ este dată de relaţia

$$u_{abs}(t) = u_{rel}(t) + u_0(t). \tag{IX.33}$$

Admiţînd că sistemul dinamic are aceiaşi parametri ca în cazul care a condus la ecuaţia (IX. 29), ecuaţia de mişcare devine în acest caz.

$$m\ddot{u}_{abs} + c\dot{u}_{rel} + ku_{rel} = 0. \tag{IX.34}$$

Dacă se adoptă drept necunoscută de bază deplasarea relativă $u_{rel}(t)$, ecuaţia (IX.34) devine

$$m\ddot{u}_{rel} + c\dot{u}_{rel} + ku_{rel} = -m\ddot{u}_0(t). \tag{IX.35}$$

Dacă se adoptă drept necunoscută de bază deplasarea absolută $u_{abs}(t)$, ecuaţia (IX.34) devine

Fig. IX. 22

$$m\ddot{u}_{abs} + c\dot{u}_{abs} + ku_{abs} = c\dot{u}_0(t) + ku_0(t). \tag{IX.36}$$

Se constată că formulele (IX.35) şi (IX.36) sînt asemănătoare cu ecuaţia (IX.29), diferenţa apărînd numai în ce priveşte termenul liber.

4.2. Caracteristici ale sistemelor cu un grad de libertate

Ecuaţia (IX.29) a vibraţiilor întreţinute poate fi particularizată, în cazul absenţei forţei exterioare $F(t)$, la ecuaţia vibraţiilor libere amortizate,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0. \tag{IX.37}$$

Această ecuație poate fi particularizată la rîndul ei, în cazul unei legături ideal elastice ($c = 0$), în ecuația vibrațiilor libere neamortizate,

$$m\ddot{u} + ku = 0. \tag{IX.38}$$

Ecuația (IX.38) admite o soluție generală de forma

$$u(t) = a \cos \omega_I t + b \sin \omega_I t \tag{IX.39}$$

unde ω_I reprezintă pulsația proprie a sistemului cu legătură ideal elastică, dată de relația

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{IX.40}$$

Pornind de la expresia (IX.40), se pot calcula frecvența proprie a sistemului, f_I

$$f_I = \frac{\omega_I}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{IX.41}$$

și perioada proprie a acestuia, T_I

$$T_I = \frac{1}{f_I} = \frac{2\pi}{\omega_I} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{IX.42}$$

Frecvența proprie reprezintă numărul de cicluri de vibrație efectuate într-o secundă, iar perioada proprie reprezintă intervalul de timp (măsurat în secunde) în care se efectuează un ciclu de vibrație.

Ecuația mai generală a vibrațiilor amortizate (IX.37) admite o soluție generală de forma

$$u(t) = (a \cos \omega_I' t + b \sin \omega_I' t)e^{-n_I \omega_I t} \tag{IX.43}$$

unde pulsația proprie corectată ω_I', și fracțiunea din amortizarea critică, n_I, au expresiile

$$\omega_I' = \omega_I\sqrt{1 - n_I^2}; \; n_I = \frac{c}{2\sqrt{mk}}. \tag{IX.44}$$

Se constată că factorul c (rigiditatea vîscoasă a sistemului) introduce o reducere a pulsației oscilațiilor libere. În cazul $n_I \geqslant 1$, mișcarea liberă amortizată își pierde chiar caracterul oscilant.

Exemplul de calcul IX,1. Fie sistemul cu un grad de libertate reprezentat în fig. IX.23. Coeficientul de flexibilitate d (săgeata produsă în dreptul masei de o forță verticală egală cu unitatea, acționînd în același punct) are expresia

$$d = \frac{a^2 b^2}{3\,EIl}.$$

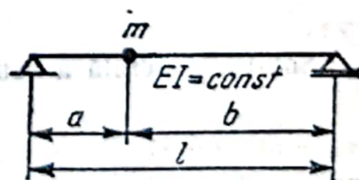


Fig. IX.23

Pulsația proprie are valoarea dată de raportul

$$\omega_I^2 = \frac{1}{dm} = \frac{3\,EI\,l}{ma^2b^2}.$$

Exemplul de calcul IX.2. Fie sistemul cu un grad de libertate, static nedeterminat, reprezentat în fig. IX.24, *a*. Pentru determinarea coeficientului de flexibilitate *d* este necesar să se ridice în primul rînd nedeterminarea sistemului static. În acest scop, se adoptă sistemul de bază din fig. IX. 24, *b*.

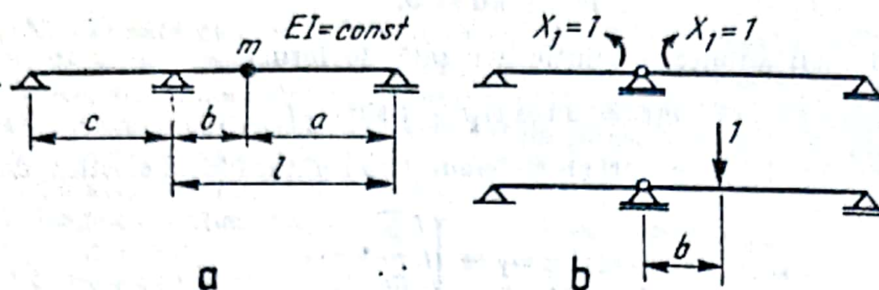


Fig. XI.24

Coeficientul δ_{11} determinat pe baza încărcării cu perechea de cupluri $X_1 = 1$ are expresia

$$\delta_{11} = \frac{l+c}{3\,EI}.$$

Termenul liber din ecuaţia de continuitate are expresia

$$\delta_{10} = \frac{ab(l+a)}{6\,EI \cdot l}.$$

Ecuaţia de continuitate are forma

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

cu soluţia

$$X_1 = -\frac{(l+a)ab}{2(l+c)\,l}.$$

Săgeata *d* are expresia

$$d = \frac{a^2b^2}{3EI\,l} - \frac{a^2b^2(l+a)^2}{12\,EI\;l^2(l+c)} = \frac{a^2b^2}{3EI\,l}\left[1 - \frac{(l+a)^2}{4l(l+c)}\right]$$

Iar pulsaţia proprie ia valoarea dată de raportul

$$\omega_I^2 = \frac{1}{dm} = \frac{3\,EIl}{ma^2b^2}\,\frac{1}{1 - \dfrac{(l+a)^2}{4l(l+c)}}.$$

4.3. Soluţii generale ale ecuaţiei de mişcare a sistemelor cu un grad de libertate

Soluţia generală a ecuaţiei (IX.29) are forma

$$u(t) = u_0(t) + \bar{u}(t) \tag{IX.45}$$

unde $u_0(t)$ reprezintă soluţia generală de tipul (IX. 33) a ecuaţiei omogene asociate, (IX. 37), iar $\bar{u}(t)$ reprezintă o soluţie particulară a ecuaţiei (IX.29).

Valorile parametrilor a și b din expresia (IX. 43) pot fi determinate dacă se dau condiții inițiale, respectiv deplasarea $u(0)$ și viteza $\dot{u}(0)$ la momentul inițial. În acest caz, soluția (IX. 43) ia forma

$$u_0(t) = \left[u(0)\,(\cos \omega'_I t + n'_I \sin \omega'_I t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_I} \sin \omega'_I t \right]$$

$$n'_I = \frac{n_I}{\sqrt{1-n_I^2}} \qquad (t \geqslant 0) \qquad \text{(IX.46)}$$

care poate fi particularizată pentru cazul numai al unei deplasări inițiale, sau numai al unei viteze inițiale, ca și pentru cazul vibrațiilor neamortizate ($n_I = n'_I = 0$). În acest ultim caz, soluția (IX.46) se reduce la forma

$$u_0(t) = u(0) \cos \omega_I t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_I} \sin \omega_I t \qquad (t \geqslant 0). \qquad \text{(IX.47)}$$

Cel de al doilea termen din expresia (IX.45), soluția particulară corespunzătoare forței perturbatoare $F(t)$, are forma.

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\omega'_I} \int_0^t e^{-n_I \omega_I (t-\tau)} \sin \omega'_I (t-\tau) F(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad (t \geqslant 0) \qquad \text{(IX.48)}$$

valabilă ca o soluție a ecuației (IX. 29) în cazul unor condiții inițiale omogene.

Dacă se introduce noțiunea de funcție pondere a sistemului mecanic $h_I(t)$,

$$h_I(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega'_I} e^{-n_I \omega_I t} \sin \omega'_I t & (t \geqslant 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad \text{(IX.49)}$$

soluția (IX. 48) ia forma mai condensată

$$\bar{u}(t) = \int_0^t h_I(t-\tau)\, F(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \qquad \text{(IX.50)}$$

Se poate observa că $h_I(t)$ este și factorul care înmulțește viteza inițială $\dot{u}(0)$ în expresia (IX.46). Semnificația funcției $h_I(t)$ este următoarea : această funcție reprezintă expresia vibrațiilor sistemului dinamic în cazul cînd singura perturbație aplicată sistemului este un impuls egal cu unitatea, transmis instantaneu la momentul de timp $t = 0$.

Un caz particular important de forţă perturbatoare îl constituie o forţă cu variaţie sinusoidală în timp

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \alpha_F) = \mathrm{Re}\left[F_0^* \, e^{i\omega t}\right] \qquad \text{(IX.51)}$$

unde F_0^* este amplitudinea complexă a forţei, definită prin relaţia

$$F_0^* = F_0 \, e^{i\alpha_F}. \qquad \text{(IX.52)}$$

În acest caz, ecuaţia (IX.29) admite o soluţie particulară

$$\bar{u}(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha_u) = \mathrm{Re}\left[u_0^* \, e^{i\omega t}\right] \qquad \text{(IX.53)}$$

unde între amplitudinile complexe u_0^* şi F_0^* există relaţia

$$u_0^* = \hat{h}_I(\omega)\, F_0^* \qquad \text{(IX.54)}$$

iar factorul $\hat{h}_I(\omega)$ (funcţia de transfer a sistemului dinamic) are expresia

$$\hat{h}_I(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\, n_I\, \omega_I\, \omega + \omega_I^2} \cdot \frac{1}{m} =$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_I^2} + 2in_I \dfrac{\omega}{\omega_I}} \cdot \frac{1}{k} \qquad \text{(IX.55)}$$

Dacă relaţia (IX.55) se scrie între mărimi reale, rezultă pentru amplitudinile u_0 şi F_0, ca şi pentru fazele iniţiale α_u şi α_F, relaţiile

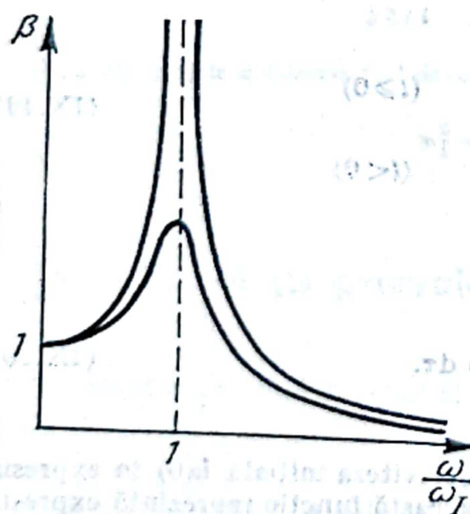


Fig. IX.25

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_I^2}\right)^2 + 4n_I^2 \dfrac{\omega^2}{\omega_I^2}}} = \beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right) \frac{F_0}{k}$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha_F - \alpha_u) = \frac{2n_I\, \omega/\omega_I}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_I^2}}. \qquad \text{(IX.56)}$$

Factorul dinamic $\beta\left(\dfrac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)$ este reprezentat în scară obişnuită în fig. IX.25 şi, în scară logaritmică, în fig. IX.26.

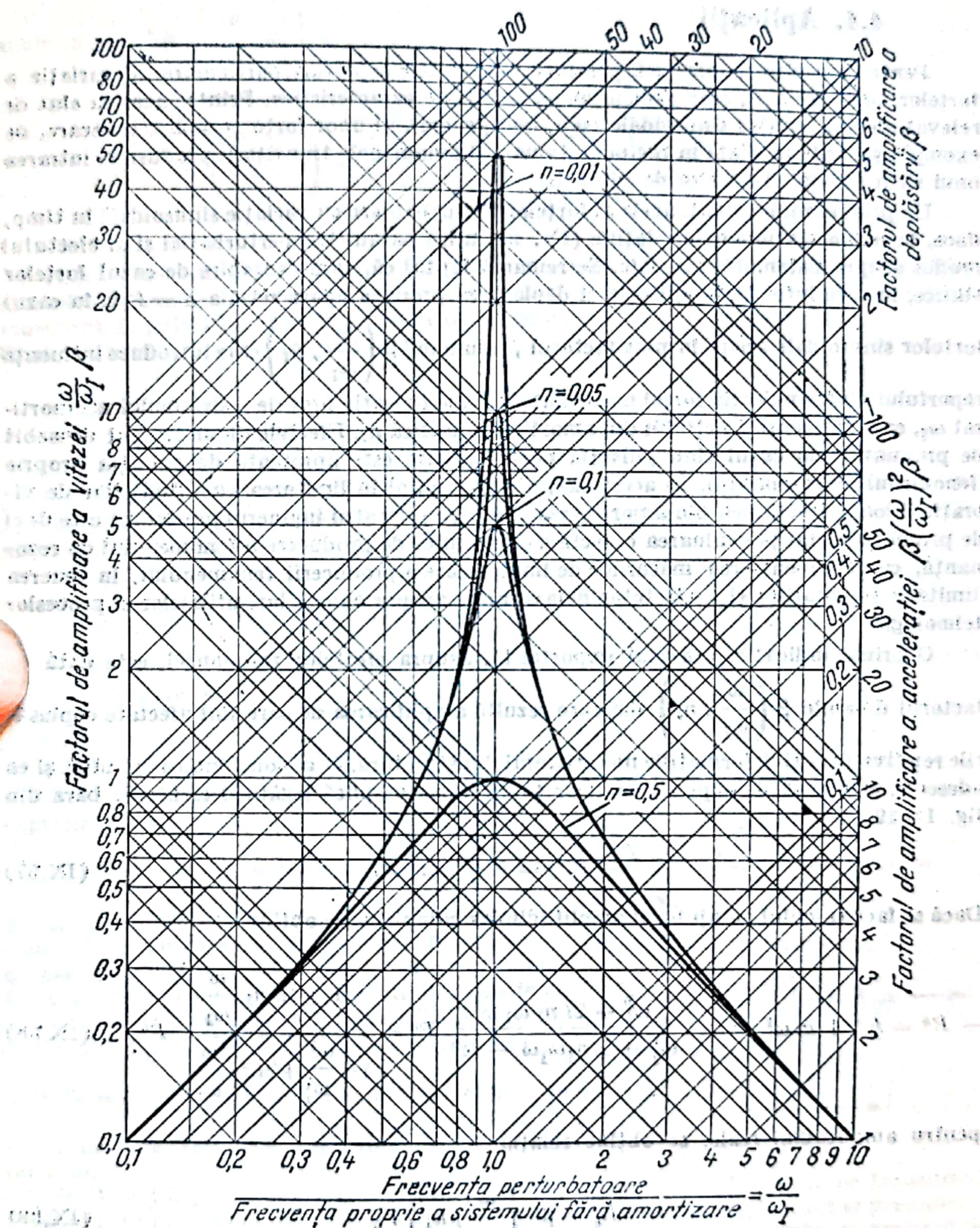

n=0,01
n=0,05
n=0,1
n=0,5
Factorul de amplificare a vitezei $\frac{\omega}{\omega_I}\beta$
Factorul de amplificare a deplasării β
Factorul de amplificare a accelerației $\beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)^2\beta$
Frecvența perturbatoare / Frecvența proprie a sistemului fără amortizare $= \frac{\omega}{\omega_I}$

Fig. IX.26

4.4. Aplicații

Pentru activitatea practică prezintă interes cîteva cazuri particulare de variație a forțelor dinamice $F(t)$, care produc unele fenomene caracteristice. Printre acestea sînt de relevat efectul forțelor sinusoidale (sau, mai general, al unor forțe periodice oarecare, de exemplu șocurile repetate în regim staționar) și fenomenele tranzitorii produse la intrarea unui siem dinamic în regim de vibrație.

Un prim caz important, acela al forțelor perturbatoare cu variație sinusoidală în timp, duce, în regim staționar, la relațiile (IX. 56) între parametrii perturbației și ai efectului produs asupra sistemului dinamic. Se remarcă faptul că, spre deosebire de cazul forțelor statice, în care între forța aplicată și deplasarea produsă apare relația $u = F/k$, în cazul forțelor sinusoidale apare în plus factorul „dinamic" $\beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)$ care introduce influența raportului dintre pulsația forței perturbatoare ω și pulsația proprie a sistemului neamortizat ω_I, ca și influența fracțiunii din amortizarea critică n_I. Efectele dinamice sînt deosebit de pronunțate în cazul cînd pulsația perturbatoare este apropiată de pulsația proprie (fenomenul de rezonanță). În acest caz, un rol capital în limitarea amplitudinilor de vibrație îl joacă fracțiunea din amortizarea critică, n_I. Pentru inginerul proiectant este deci de primă importanță evaluarea corectă a pericolului de producere a fenomenului de rezonanță, ca și cunoașterea măsurilor de împiedicare a producerii fenomenului, în vederea limitării solicitărilor și a efectelor defavorabile asupra oamenilor, utilajelor și proceslor tehnologice.

O primă indicație, cea mai importantă, asupra efectelor rezonanței, este dată de factorul dinamic $\beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)$ din care rezultă amplificarea de care sînt afectate deplasările relative deci și deformațiile materialului din structură. O a doua indicație, utilă și ea adeseori, este dată de expresia forțelor totale care se aplică legăturii create de bara din fig. IX.19

$$-R(t) = F(t) - m\,\ddot{u}(t). \tag{IX.57}$$

Dacă se face calculul cu ajutorul amplitudinilor complexe, se obține

$$-R^* = F^* + m\,\omega^2 u^* = \frac{\omega_I^2 + 2i\,n_I\,\omega_I\,\omega}{\omega_I^2 + 2in_I\omega_I\omega - \omega^2}\,F^* = \frac{1 + 2i\,n_I\,\dfrac{\omega}{\omega_I}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_I^2} + 2i\,n_I\dfrac{\omega}{\omega_I}}\,F^*. \tag{IX.58}$$

pentru amplitudini reale, se obține relația

$$R_0 = \beta'\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right) F_0 \tag{IX.59}$$

unde factorul $\beta'\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)$ are expresia

$$\beta'\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right) = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_I^2}+4n_I^2\frac{\omega^2}{\omega_I^2}\right)^2+4n_I^2\frac{\omega^6}{\omega_I^6}}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_I^2}\right)+4n_I^2\frac{\omega^2}{\omega_I^2}}. \quad \text{(IX.60)}$$

Alături de fenomenul de rezonanță, un fenomen caracteristic pentru solicitările dinamice periodice este fenomenul de bătăi, care rezultă din sumarea a două mișcări vibratorii de pulsații apropiate și amplitudini egale.

Dacă se consideră două mișcări

$$u_1(t) = a\cos\omega_1 t$$

$$u_2(t) = a\cos\omega_2 t$$

produse de doi factori perturbatori distincți aplicați unui același sistem dinamic, în cazul acțiunii simultane a celor două perturbații, în limitele respectării ipotezelor liniarității, mișcarea rezultantă a sistemului va avea expresia

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2a\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t. \quad \text{(IX.61)}$$

Dacă se notează

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \overline{\omega} \text{ (valoare medie)}; \quad \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \varphi$$

expresia (IX.61) devine

$$u(t) = 2a\cos\overline{\omega}t\cos\varphi t \quad \text{(IX.62)}$$

și poate fi interpretată ca produsul a două funcții sinusoidale, din care una de pulsație foarte joasă, φ, care joacă rolul de înfășurătoare a amplitudinilor (variabile periodic) ale mișcării de pulsație $\overline{\omega}$. Fenomenul este reprezentat grafic în fig. IX.27. Se poate observa în figură că perioada înfășurătoarei este $T_b = \frac{\pi}{\varphi}$. Fenomenul este riguros periodic în cazul în care raportul pulsațiilor ω_1 și ω_2 este rațional.

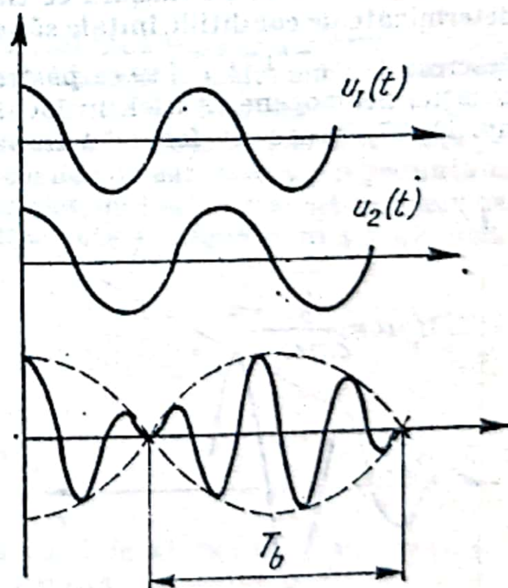


Fig. IX.27

O aplicație practică a fenomenului de bătăi apare în cazul vibrațiilor tranzitorii produse la intrarea în funcționare a unor mașini generatoare de vibrații. Dacă se presupune că unui sistem dinamic cu un grad de libertate care se găsește în repaus pînă la momentul

$t = 0$, i se aplică, începînd de la acest moment, o forţă perturbatoare sinusoidală căreia îi corespunde o soluţie particulară de forma

$$\bar{u}(t) = \beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)u_{st}\cos\omega t, \qquad \left(u_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{\omega_I^2 m}\right) \tag{IX.63}$$

impunerea condiţiilor iniţiale

$$u(0) = 0: \quad \dot{u}(0) = 0 \tag{IX.64}$$

duce, în cazul unei amortizări nule ($c = 0$), la soluţia

$$u(t) = \beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)u_{st}(\cos\omega t - \cos\omega_I t) =$$

$$= 2\beta\left(\frac{\omega}{\omega_I}, n_I\right)u_{st}\sin\frac{\omega + \omega_I}{2}t\sin\frac{\omega_I - \omega}{2}t. \tag{IX.65}$$

În cazul rezonanţei, din lim $\omega \to \omega_I$, se obţine prin trecerea la limită soluţia

$$\lim_{\omega\to\omega_I} u(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_I}\,t\sin\omega_I t \tag{IX.66}$$

iar amplitudinile de vibraţie cresc progresiv pînă la ruperea legăturilor sistemului dinamic (fig. IX.28).

În relaţiile precedente s-a neglijat influenţa amortizării care face ca fenomenele de bătăi şi rezonanţă să aibă caracterul pus în evidenţă mai înainte numai în vecinătatea momentului $t = 0$. Pe măsură ce timpul avansează, amortizarea face ca vibraţiile libere determinate de condiţiile iniţiale să se stingă (întrucît aceste vibraţii au în realitate factorul descrescător $e^{-n_I\omega_I t}$) şi să se păstreze doar termenii care corespund soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene. Astfel, în locul fenomenului de bătăi, aşa cum este el prezentat în fig. IX.27, apare un fenomen tranzitoriu, reprezentat calitativ în fig. IX.29, care face

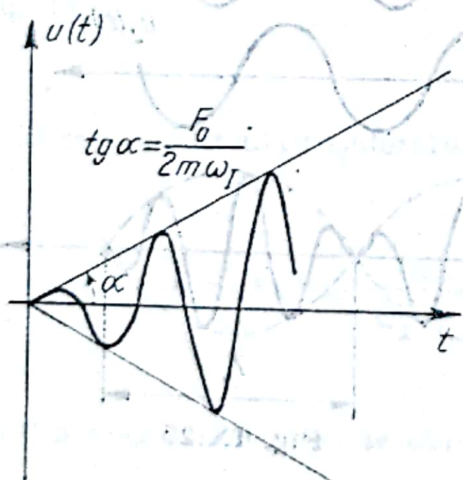


Fig. IX.28

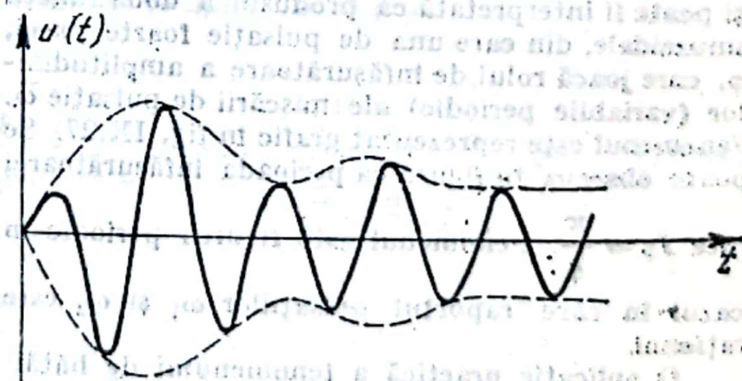


Fig. IX.29

că bătăile să se simtă numai pentru cîteva perioade, la începutul intrării în regim a sistemului dinamic. De asemenea, în cazul rezonanței, amplitudinile nu cresc liniar ca în fig. IX.28, ci ele tind asimptotic spre valoarea limită dată de expresia (IX.56), așa cum se vede din fig. IX.30.

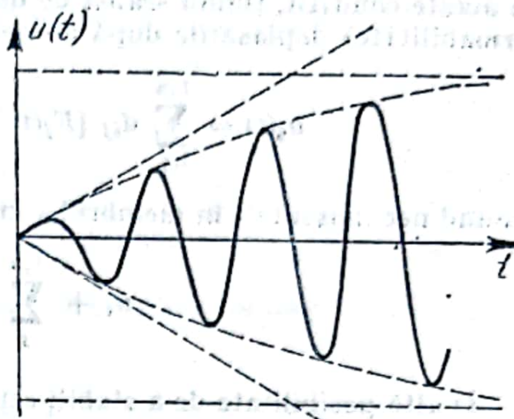


Fig.IX.30

5. VIBRAȚIILE LINIARE ALE SISTEMELOR CU NUMĂR FINIT DE GRADE DE LIBERTATE

5.1. Ecuații de mișcare

Ecuațiile de mișcare ale sistemelor cu număr finit de grade de libertate pot fi stabilite prin mai multe metode, plecînd de la formulări diferite ale principiilor mecanicii sau ale relațiilor care caracterizează proprietățile de deformabilitate ale sistemelor dinamice.

O primă cale, care este cea mai apropiată de optica inginerului constructior, este utilizarea matricei de deformabilitate a structurii. Această cale este elementară,i dar are dezavantajul de a nu fi aplicabilă direct de cît sistemelor ideal elastice și de a introduce unele dificultăți metodologice atunci cînd masele nu pot fi considerate drept concentrate în niște puncte. Cu aceste limitări, metoda de stabilire a ecuațiilor urmărește, într-o formă generalizată (datorită existenței mai multor grade de libertate), raționamentul utlizat în formularea ecuației (IX. 32).

Se consideră un sistem dinamic cu n grade de libertate, cu legături deformabile ideal elastice, pentru care nu sînt posibile mișcări de rototranslație fără deformarea unor legături. Ca exemplu, se poate considera sistemul plan cu 4 grade de libertate din fig. IX.11. Sistemul considerat poate fi caracterizat din punct de vedere al capacității de deformare prin sistemul de coeficienți d_{ij} $(i, j = 1 \ldots n)$, unde un coeficient oarecare d_{ij} reprezintă deplasarea statică după gradul de libertate i, atunci cînd sistemul este acționat exclusiv de o forță egală cu unitatea, acționînd după gradul de libertate j. După cum s-a amintit la cap. 2 sistemul de coeficienți d_{ij} este simetric,

$$d_{ij} = d_{ji} \qquad \text{(IX.67)}$$

De asemenea, forma pătratică

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{1,n} d_{ij} X_i X_j. \qquad \text{(IX.68)}$$

care reprezintă energia acumulată de legăturile deformabile atunci cînd sistemul este acționat de sistemul de forțe statice X_i) este pozitiv definită.

Dacă se consideră vibrațiile sistemului dinamic, se poate raționa în modul următor: structura deformabilă își schimbă poziția ca urmare a acțiunii forțelor exterioare date, $F_i(t)$, și a forțelor de inerție $I_i(t)$,

$$I_i(t) = -\,m_i \ddot{u}_i(t). \qquad \text{(IX.69)}$$

În aceste condiţii, ţinînd seama de definiţia sistemului de coeficienţi d_{ij} (matricea de deformabilitate) deplasările după gradele de libertate i vor avea expresiile

$$u_i(t) = \sum_{i,j}^{1,n} d_{ij}\,[F_j(t) + I_j(t)] = \sum_{j}^{1,n} d_{ij}[F_j(t) - m_j\ddot{u}_j(t)]$$

Izolînd necunoscutele în membrul stîng, se obţin ecuaţiile de mişcare sub forma.

$$u_i + \sum_{j}^{1,n} d_{ij}m_j\ddot{u}_j = \sum_{j}^{1,n} d_{ij}F_j(t). \qquad \text{(IX.70)}$$

O altă posibilitate de a stabili ecuaţiile de mişcare în aceleaşi ipoteze ca mai înainte, tot cu mijloacele caracteristice mecanicii elementare, foloseşte un raţionament analog cu cel care a condus la stabilirea ecuaţiei (IX. 29) în cazul sistemelor cu un grad de libertate. În acest caz, structura este caracterizată prin matricea reacţiunilor, cu termenii r_{ij}, sau prin matricea de rigiditate elastică, cu termenii k_{ij}.

Un sistem dinamic care se află sub acţiunea unui sistem de forţe exterioare se deformează. Structura elastică obligată să se deformeze exercită asupra maselor m_i reacţiunile

$$R_i(t) = \sum_{j}^{1,n} r_{ij}u_j(t) \qquad \text{(IX.71)}$$

(matricea reacţiunilor r_{ij} a fost definită la cap. 2). Punctele materiale cu mase proprii vor asculta de legea lui Newton

$$m_i\ddot{u}_i = F_i(t) + R_i(t) = F_i(t) + \sum_{j}^{1,n} r_{ij}u_j(t).$$

Izolînd necunoscutele în membrul stîng, se obţine forma

$$m_i\ddot{u}_i - \sum_{j}^{1,n} r_{ij}u_j = F_i(t) \qquad \text{(IX.72)}$$

a ecuaţiilor de mişcare. Dacă se utilizează matricea de rigiditate, ai cărei termeni satisfac relaţia

$$k_{ij} = -r_{ij}, \qquad \text{(IX.73)}$$

se obţine o formă echivalentă,

$$m_i\ddot{u}_i + \sum_{j}^{1,n} k_{ij}u_j = F_i(t), \qquad \text{(IX.74)}$$

a ecuaţiilor de mişcare pentru sisteme.

La fel ca în cazul matricei cu termenii d_{ij}, matricele cu termenii k_{ij} şi r_{ij} sînt simetrice

$$k_{ij} = k_{ji}; \qquad r_{ij} = r_{ji}, \qquad \text{(IX.75)}$$

iar energia de deformare a structurii, definită cu ajutorul matricei de rigiditate,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} u_i u_j, \qquad \text{(IX.76)}$$

este pozitiv definită.

În aceleași ipoteze, se pot obține ecuațiile de mișcare sub o formă identică, utilizînd de data aceasta un instrument specific Mecanicii analitice, anume ecuațiile lui Lagrange de speța a doua.

Pentru un sistem conservativ cu n grade de libertate ecuațiile lui Lagrange au forma generală

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0, \qquad \text{(IX.77)}$$

unde lagrangianul L are expresia

$$L = E - V, \qquad \text{(IX.78)}$$

E reprezentînd energia cinetică a sistemului, iar V — energia sa potențială. În cazul sistemului dinamic definit mai înainte, mărimile E și V au expresiile

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1,n} m_i \dot{u}_i^2 \qquad \text{(IX.79)}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} u_i u_j - \sum_{i}^{1,n} F_i u_i. \qquad \text{(IX.80)}$$

Aplicînd operațiile diferențiale din ecuația (IX.77) mărimilor date prin relațiile (IX.79) și (IX.80), se obțin ecuațiile (IX.74).

Metoda utilizării ecuațiilor lui Lagrange este susceptibilă de aplicare ușoară în cazul cînd masele nu mai sînt concentrate în niște puncte, ci cînd este necesar să se țină în mod explicit seama de mișcarea atît de translație, cît și de rotație, a corpurilor care introduc masele atașate sistemului dinamic. În cazul general (menținînd ipotezele de mai înainte), expresia (IX.79) a energiei cinetice este înlocuită printr-o expresie mai generală, în care intervine o matrice de inerție, cu termenii m_{ij},

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1,n} m_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j. \qquad \text{(IX.81)}$$

Matricea de inerție este și ea simetrică,

$$m_{ij} \equiv m_{ji}, \qquad \text{(IX.82)}$$

iar energia cinetică se consideră pozitiv definită (ceea ce este cazul dacă sistemul nu are mase nule).

Această expresie duce la generalizarea ecuațiilor (IX.74) sub forma

$$\sum_{j}^{1,n} m_{ij} \ddot{u}_j + \sum_{j}^{1,n} k_{ij} u_j = F_i(t). \qquad \text{(IX.83)}$$

O nouă generalizare a ecuaţiilor se poate obţine prin înlocuirea ipotezelor elasticităţii ideale a materialului din structuri. Dacă se admite pentru material un model visco-elastic Kelvin-Voigt, ca cel din fig. IX.4, *a*, este necesar ca pe lîngă matricea de rigiditate elastică, cu termenii k_{ij}, să se considere matricea simetrică de rigiditate vîscoasă, cu termenii c_{ij}. În această ipoteză, reacţiunile $R_i(t)$ pe care structura le opune atunci cînd este obligată să se deformeze, au expresiile mai generale

$$R_i(t) = -\sum_{j}^{1,n} k_{ij}u_j(t) - \sum_{j}^{1,n} c_{ij}\dot{u}_j(t). \tag{IX.84}$$

Introducînd expresiile reacţiunilor $R_i(t)$ în ecuaţiile lui Newton, adică în relaţiile care au condus la forma (IX. 72), se obţin ecuaţiile de mişcare

$$m_i\ddot{u}_i + \sum_{j}^{1,n} c_{ij}\dot{u}_j + \sum_{j}^{1,n} k_{ij}u_j = F_i(t). \tag{IX.85}$$

În cazul mai general, al existenţei unei matrice de inerţie nediagonale, ecuaţiile (IX.85) se generalizează, obţinîndu-se, omolog formei (IX.83), în cazul unor legături deformabile alcătuite din material visco-elastic, forma generală

$$\sum_{j}^{1,n} m_{ij}\ddot{u}_i + \sum_{j}^{1,n} c_{ij}\dot{u}_i + \sum_{j}^{1,n} k_{ij}u_j = F_i(t). \tag{IX.86}$$

Ecuaţiile de mişcare de mai înainte pot fi înlocuite printr-o expresie mai condensată, dacă se utilizează simbolismul matriceal. Dacă se introduc vectorii-coloană $\mathbf{U}(t)$ şi $\mathbf{F}(t)$ daţi prin relaţiile:

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \tag{IX.87}$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} \tag{IX.88}$$

şi matricele de deformabilitate, **D**, de rigiditate elastică, **K**, de rigiditate vîscoasă, **C**, şi de inerţie, **M**, ecuaţiile de mişcare în forma (IX.70) se pot rescrie condensat,

$$\mathbf{U} + \mathbf{DM\ddot{U}} = \mathbf{DF}(t), \tag{IX.89}$$

în timp ce ecuaţiile de mişcare (IX.74) şi (IX.83) revin la forma

$$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{F}(t), \tag{IX.90}$$

iar ecuațiile de mișcare (IX.85) sau (IX.86) revin la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t). \qquad \text{(IX.91)}$$

Ecuațiile (IX.89) și (IX.91) [respectiv formele desfășurate (IX.70) și (IX.74)] sînt evident echivalente, datorită faptului că matricea **D** este inversa matricei **K**,

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}. \qquad \text{(IX.92)}$$

Simbolismul matriceal permite exprimări mai condensate și pentru energia cinetică E și cea potențială, V. Energia cinetică dată prin relațiile (IX.79) sau (IX.81) se poate exprima sub forma

$$E = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} \qquad \text{(IX.93)}$$

(indicele superior T notează transpusa unei matrice, în cazul de față un vector linie). Energia de deformare W are expresiile echivalente cu (IX.68) și cu termenul de gradul 2 din (IX.80),

$$W = \frac{1}{2}\,\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}, \qquad \text{(IX.94)}$$

unde **X** reprezintă vectorul-coloană

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.95)}$$

și, respectiv,

$$W = \frac{1}{2}\,\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}. \qquad \text{(IX.96)}$$

Exemplul de calcul IX.3. Ca exemplu de stabilire a ecuațiilor de mișcare, se consideră consola cu două mase din fig. IX. 31. Se admite că bara este inextensibilă și are secțiunea constantă și se neglijează inerția de rotație a maselor.

Matricea de deformabilitate are în acest caz termenii

$$d_{11} = \frac{a^3}{3EI};\quad d_{12} = \frac{5a^3}{6EI} = d_{21};\quad d_{22} = \frac{8a^3}{3EI}$$

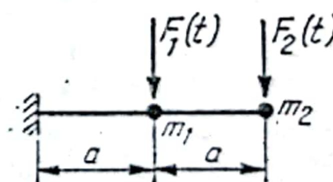


Fig. IX.31

Ecuațiile de mișcare (IX. 70) au deci forma

$$u_1 + \frac{5a^3m_1}{3EI}\ddot{u}_1 + \frac{5a^3m_2}{6EI}\ddot{u}_2 = \frac{a^3}{3EI}F_1(t) + \frac{5a^3}{6EI}F_2(t)$$

$$u_2 + \frac{5a^3m_1}{6EI}\ddot{u}_1 + \frac{8a^3m_2}{3EI}\ddot{u}_2 = \frac{5a^3}{6EI}F_1(t) + \frac{8a^3}{3EI}F_2(t)$$

Din inversarea matricei de deformabilitate, se obține matricea de rigiditate, avînd termenii

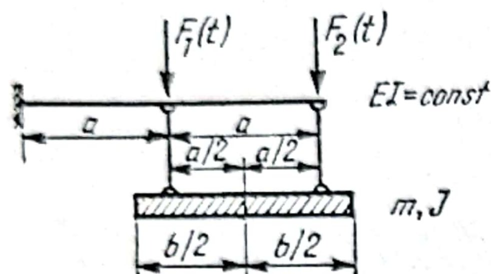
$$k_{11} = \frac{96\,EI}{7a^3};\quad k_{12} = \frac{-30EI}{7a^3} = k_{21};\quad k_{22} = \frac{12EI}{7a^3}.$$

Ecuaţiile de mişcare (IX.74) au deci forma

$$m_1\ddot{u}_1 + \frac{96EI}{7a^3}u_1 - \frac{30EI}{7a^3}u_2 = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{u}_2 - \frac{30EI}{7a^3}u_1 + \frac{12EI}{7a^3}u_2 = F_2(t).$$

Exemplul de calcul IX.4. Ca un alt exemplu de calcul, se consideră de data aceasta consola ideal elastică din fig. IX. 42, căreia îi este ataşat în două puncte, prin doi penduli, un solid rigid. În acest caz, ecuaţiile de mişcare vor fi stabilite utilizîndu-se ecuaţiile Lagrange de speţa a doua. Dacă se consideră exclusiv vibraţii pe verticală, sistemul dinamic studiat are două grade de libertate.



i X.32

Energia de deformare a sistemului are expresia

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1,2} k_{ij}u_iu_j$$

unde termenii matricei de rigiditate, k_{ij}, sînt cei din exemplul de calcul precedent. Energia cinetică a sistemului dinamic coincide cu energia cinetică a solidului rigid ataşat consolei. Dacă acest solid rigid are masa egală cu m şi momentul de inerţie mecanic în raport cu centrul maselor egal cu J, atunci energia cinetică a solidului este suma energiei cinetice de translaţie şi a celei de rotaţie.

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{u}_1+\dot{u}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{u}_1-\dot{u}_2}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m}{4}+\frac{J}{a^2}\right)\dot{u}_1^2 + \left(\frac{m}{2}-\frac{2J}{a^2}\right)\dot{u}_1\dot{u}_2 + \left(\frac{m}{4}+\frac{J}{a^2}\right)\dot{u}_2^2\right].$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare va fi

$$L = u_1F_1(t) + u_2F_2(t) = \sum_{i}^{1,2} u_iF_i(t),$$

iar energia potenţială totală va fi

$$V = W - L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1,2} k_{ij}u_iu_j - \sum_{i}^{1,2} u_iF_i(t).$$

Aplicînd în acest caz metoda ecuaţiilor lui Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial V}{\partial u_i} = 0$$

se obţin ecuaţiile de mişcare, în forma

$$\left(\frac{m}{4}+\frac{J}{a^2}\right)\ddot{u}_1 + \left(\frac{m}{4}-\frac{J}{a^2}\right)\ddot{u}_2 + \frac{96EI}{7a^3}u_1 - \frac{30EI}{7a^3}u_2 = F_1(t)$$

$$\left(\frac{m}{4}-\frac{J}{a^2}\right)\ddot{u}_1 + \left(\frac{m}{4}+\frac{J}{a^2}\right)\ddot{u}_2 - \frac{30\,EI}{7a^3}u_1 + \frac{12EI}{7a^3}u_2 = F_2(t).$$

Se constată că, în acest exemplu, proprietăţile de inerţie ale sistemului dinamic sînt caracterizate printr-o matrice nediagonală, cu termenii m_{ij}.

5.2. Schimbarea sistemului de referinţă. Transformări liniare. Sisteme simetrice

În unele cazuri este avantajoasă înlocuire a gradelor de libertate definite într-o primă formă, elementară, printr-un nou sistem de grade de libertate, care permite o analiză mai uşoară a caracteristicilor şi comportării sistemului dinamic. Această înlocuire a sistemului

de referință primar revine la transformări liniare ale coordonatelor generalizate $u_i(t)$ ale sistemului dinamic, cu toate consecințele lor pentru forma ecuațiilor de mișcare. Aplicații practice ale acestor transformări apar în considerarea poprietăților de simetrie dinamică ale sistemelor, ca și în determinarea modurilor proprii ale acestora. Principalele consecințe pentru calcul rezidă în descompunerea sistemelor de ecuații în sisteme mai simple, separate, eventual în ecuații separate cu cîte o necunoscută.

Se poate imagina că parametrii $u_i(t)$ sînt funcții liniare și omogene de un sistem de parametri, $u'_i(t)$, sub forma

$$u_i(t) = \sum_{j}^{1,n} t_{ik}u'_k(t), \qquad \text{(IX.97)}$$

unde se presupune că t_{ij} sînt termenii unei matrice nesingulare (inversabile). Introducerea acestor expresii în expresiile (IX.81), (IX.80) și (IX.68) permite rescrierea acestora în forme noi. Ca exemplu, în cazul energiei cinetice, după prima expresie (IX. 81), se obține o nouă expresie

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij}\left(\sum_{k}^{1,n} {}_{ik}\dot{u}'_k\right)\left(\sum_{l}^{1,n} t_{jl}\dot{u}'_l\right) = \frac{1}{2}\sum_{k,l}^{1,n}\left(\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij}t_{ik}t_{jl}\right)\dot{u}'_k\dot{u}'_l =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l}^{1,n} m'_{kl}\dot{u}'_k\dot{u}'_l. \qquad \text{(IX.98)}$$

unde noii termeni ai matricei de inerție au expresiile

$$m'_{kl} = \sum_{i,j}^{1,n} m_{ij}t_{ik}t_{jl}. \qquad \text{(IX.99)}$$

În mod asemănător, pentru energia potențială V se obține din (IX.80) expresia nouă

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1,n} k'_{kl}u'_k u'_l - \sum_{k}^{1,n} \bar{F}'_k u'_k, \qquad \text{(IX.100)}$$

dacă se introduc notațiile

$$k'_{kl} = \sum_{i,j}^{1,n} k_{ij}t_{ik}t_{jl} \qquad \text{(IX.101)}$$

și

$$F'_k = \sum_{i}^{1,n} t_{ik}F_i. \qquad \text{(IX.102)}$$

Relațiile (IX.97) se pot exprima condensat în forma

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{TU}'(t) \qquad \text{(IX.103)}$$

dacă **T** reprezintă matricea cu termenii t_{ij}. Expresiile pentru matricele de inerţie şi rigidităţile elastice devin

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} \tag{IX.104}$$

şi, respectiv,

$$\mathbf{K}' = \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T} \tag{IX.105}$$

în timp ce pentru termenul liber se obţine expresia

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T}^T\mathbf{F}. \tag{IX.106}$$

Dacă se ţine seama de relaţia (IX. 92), valabilă şi în noul sistem de referinţă, se obţine pentru noua matrice de deformabilitate, **D'**, expresia

$$\mathbf{D}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\,\mathbf{T}^{T(-1)} \tag{IX.107}$$

sau, invers,

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}\mathbf{D}'\mathbf{T}^T \tag{IX.108}$$

sau, pentru coeficienţii d_{ij} şi d'_{ij}, în mod echivalent,

$$d_{ij} = \sum_{k,l}^{1,n} t_{ik}t_{jl}d'_{kl}. \tag{IX.109}$$

Dacă se consideră matricea de rigiditate vîscoasă, **C**, se obţine în noul sistem de referinţă expresia

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}^T\mathbf{C}\mathbf{T}, \tag{IX.110}$$

sau o expresie echivalentă pentru termenii săi c_{kl}. Aplicarea acestor relaţii la sistemele cu simetrie dinamică permite descompunerea sistemului de ecuaţii în sisteme mai simple (se înţelege prin simetrie dinamică simetria de configuraţie a sistemului, de distribuţie a legăturilor rigide, de distribuţie a rigidităţilor elastice, a rigidităţilor vîscoase şi a maselor). Ca exemplu, se poate considera sistemul dinamic ideal elastic, simetric, cu patru grade de libertate, cu mase punctuale şi bare inextensibile, din fig. IX.33 ($m_1 = m_3$).

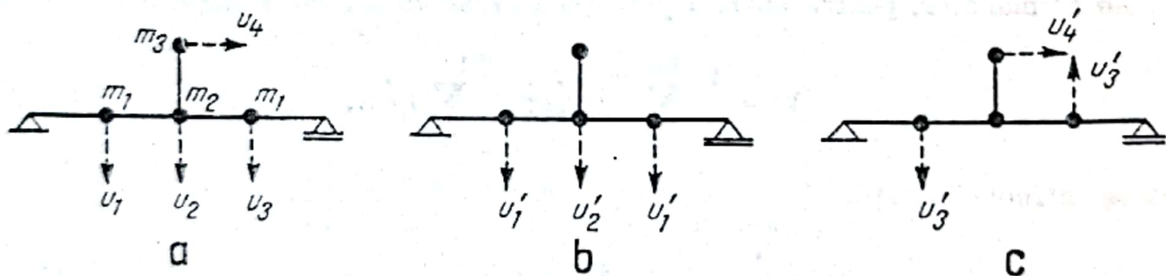


Fig. IX.33

Simetria elastică a sistemului face ca, pe lîngă condiţiile de simetrie generale, să fie satisfacute condiţiile suplimentare

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{33} & k_{11} &= k_{33} \\ d_{12} &= d_{23} & k_{12} &= k_{23} \\ d_{14} &= -\,d_{34} & k_{14} &= -\,k_{34} \\ d_{24} &= 0 & k_{24} &= 0. \end{aligned}$$

În vederea simplificării ecuațiilor, se introduc noile necunoscute, corespunzînd unor deformații simetrice, u'_1 și u'_2 (fig. IX.33, *b*) respectiv antisimetrice, u'_3 și u'_4 (fig. IX.33, *c*) Necunoscutele vechi se exprimă în funcție de cele noi prin relațiile

$$u_1 = u'_1 + u'_3; \qquad u_3 = u'_1 - u'_3;$$
$$u_2 = u'_2; \qquad u_4 = u'_4.$$

Matricea **T** și inversa ei, $\mathbf{T}^{-1}$, au formele

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de inerție **M**, și transformata ei $\mathbf{M}' = \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T}$, au formele

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2+m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}' = \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2+m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Matricea de rigiditate, **K** și transformata ei, $\mathbf{K}' = \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T}$, au formele

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{12} & 0 \\ k_{13} & k_{12} & k_{11} & -k_{14} \\ k_{14} & 0 & -k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K}' = \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2(k_{11}+k_{13}) & 2k_{12} & 0 & 0 \\ 2k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(k_{12}-k_{13}) & 2k_{14} \\ 0 & 0 & 2k_{14} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Se constată că, în această aplicație, matricele pătrate de dimensiune 4, **M'** și **K'**, se prezintă sub forma :

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}'_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}'_2 \end{bmatrix}$$

ceea ce permite separarea sistemului de 4 ecuații cu 4 necunoscute.

5.3. Moduri proprii de vibrație ale sistemelor dinamice conservative

Ecuațiile de mișcare stabilite în cazul acțiunii unor forțe perturbatoare, pot fi particularizate la cazul absenței acestor forțe, cînd ecuațiile descriu vibrațiile libere ale sistemelor dinamice. Analiza vibrațiilor libere este făcută mai departe în cazul sistemelor dinamice conservative (lipsite de capacitate de amortizare).

Ecuațiile de mișcare (IX.70) iau în cazul vibrațiilor libere forma

$$u_i + \sum_{j}^{1,n} d_{ij} m_j \ddot{u}_j = 0, \qquad \text{(IX.111)}$$

iar ecuațiile (IX.74) iau în același caz forma

$$m_i \ddot{u}_i + \sum_{j}^{1,n} k_{ij} u_j = 0. \qquad \text{(IX.112)}$$

În studiul vibrațiilor libere se caută soluții de forma

$$u_i(t) = a_i \cos \omega t \qquad \text{(IX.113)}$$

care duc, pentru accelerații, la expresiile

$$\ddot{u}_i(t) = -\omega^2 a_i \cos \omega t. \qquad \text{(IX.114)}$$

Înlocuirea expresiilor (IX.113) și (IX.114) în ecuațiile (IX.111) duce la forma

$$a_i - \omega^2 \sum_{j}^{1,n} d_{ij} m_j a_j = 0, \qquad \text{(IX.115)}$$

deci la un sistem de ecuații omogene, care admit o soluție nebanală, a_i, numai dacă determinantul sistemului este nul.

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \dfrac{1}{\omega^2 m_1} & d_{12} & d_{13} & \dots\dots\dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{12} - \dfrac{1}{\omega^2 m_2} & d_{23} & \dots\dots\dots & d_{2n} \\ \vdots & & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots\dots\dots & & d_{nn} - \dfrac{1}{\omega^2 m_n} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(IX.116)}$$

Ecuația (IX.116) este o ecuație algebrică de gradul n în parametrul

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \qquad \text{(IX.117)}$$

și admite n soluții reale, pozitive (distincte sau confundate),

$$\lambda_r = \frac{1}{\omega_r^2}. \qquad \text{(IX.118)}$$

Valorile ω_r, notate în ordine crescătoare, se numesc pulsațiile proprii ale sistemului dinamic. Soluțiile a_{ir} care corespund respectiv pulsațiilor ω_r se numesc vectorii proprii

ai sistemului dinamic. Formele deformate ale structurii care sînt compatibile cu vectorii proprii a_{ir} se numesc forme proprii ale acesteia.

Dacă parametrul ω ia o valoare ω_r care este o soluție simplă a ecuației (IX.116) rangul matricei cu termenii $d_{ij} - \dfrac{1}{\omega^2 m_i}\delta_{ij}$ (δ_{ij}, simbolul lui Kronecker) devine egal cu $n-1$. În acest caz, $n-1$ valori a_{ir} pot fi exprimate ca funcții liniare de cea de a n-a valoare. Cu alte cuvinte, în acest caz, vectorii proprii a_{ir} care satisfac ecuațiile

$$a_{ir} - \omega_r^2 \sum_j^{1,n} d_{ij} m_j a_{jr} = 0, \tag{IX.119}$$

depind de un parametru multiplicativ nedeterminat. Uneori este avantajos să se înlăture această nedeterminare, introducîndu-se o normare a vectorilor proprii prin condiția

$$A_r = \sum_i^{1,n} m_i a_{ir}^2 = 1. \tag{IX.120}$$

Dacă se fac raționamente similare plecînd de la sistemul (IX.112), tipul de soluții (IX.113), (IX.114) introdus în sistem, duce la o nouă problemă algebrică de valori proprii,

$$-\omega^2 m_i a_i + \sum_j^{1,n} k_{ij} a_j = 0. \tag{IX.121}$$

Condiția de existență a soluțiilor nebanale este în acest caz

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \ldots\ldots & k_{2n} \\ \vdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots & k_{nn} - \omega^2 m_n \end{vmatrix} = 0 \tag{IX.122}$$

Pulsațiile proprii ω_r obținute din ecuația (IX.122) coincid riguros cu cele obținute din ecuația (IX.116). Vectorii proprii obținuți din sistemul de ecuații

$$-\omega_r^2 m_i a_{ir} + \sum_j^{1,n} k_{ij} a_{jr} = 0 \tag{IX.123}$$

coincid riguros cu cei obținuți din sistemul de ecuații (IX.119). Faptul se poate verifica ușor dacă se înmulțește sistemul (IX.123) cu termenul d_{ki}, se sumează în raport cu i și se ține seama de identitatea

$$\sum_i^{1,n} d_{ki} k_{ij} = \delta_{kj}. \tag{IX.124}$$

Fie doi vectori proprii, a_{ir} și a_{is}, care corespund la două pulsații proprii distincte, $\omega_r \neq \omega_s$. Acești doi vectori satisfac o condiție importantă, numită proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii

$$\sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir} a_{is} = 0 \qquad (\omega_r \neq \omega_s). \tag{IX.125}$$

Proprietatea se poate demonstra plecînd de la ecuațiile (IX.115) sau (IX.121), ca urmare a proprietăților de simetrie ale termenilor d_{ij} și k_{ij}. Dacă se înmulțește sistemul (IX.123) cu a_{is} și se sumează, se obține

$$-\omega_r^2 \sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir} a_{is} + \sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} a_{jr} a_{is} = 0.$$

Dacă se consideră ecuațiile (IX.123) scrise pentru pulsația proprie ω_s și se înmulțește cu a_{ir} și se sumează, se obține

$$-\omega_s^2 \sum_{i}^{1,n} m_i a_{is} a_{ir} + \sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} a_{js} a_{ir} = 0.$$

Dacă se scad ultimele două relații se obține, din cauza condiției de simetrie $k_{ij} \equiv k_{ji}$, relația

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir} a_{is} = 0$$

care conduce la condițiile (IX.125), întrucît factorul $\omega_r^2 - \omega_s^2$ este, prin ipoteză, nenul.

Proprietatea de ortogonalitate (IX.125) și proprietatea de normare (IX.120) pot fi incluse formal într-o proprietate mai complexă, de ortonormare,

$$\sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 \ (r = s) \\ 0 \ (r \neq s). \end{cases} \tag{IX.126}$$

n cazul cînd se consideră vectorii proprii normați.

Dacă se înmulțește sistemul (IX.123) cu a_{ir} și se sumează, se obține pentru pulsația proprie ω_r relația

$$\omega_r^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} a_{ir} a_{jr}}{\displaystyle\sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir}^2} \tag{IX.127}$$

deci o expresie cu semnificație energetică (numărătorul este dublu energiei de deformare care corespunde vectorului propriu normat, iar numitorul, care în condiția (IX.120) se ia egal cu unitatea, reprezintă dublul energiei cinetice pentru vibrații de amplitudini a_{ir} și

pulsație $\omega = 1$). În mod asemănător, se poate obține pentru ω_r^2 o expresie pornind de la sistemul (IX.119) înmulțind cu $m_i\, a_{ir}$ și sumînd. Rezultatul este

$$\omega_r^2 = \frac{\sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir}^2}{\sum_{i,j}^{1,n} d_{ij} m_i m_j a_{ir} a_{jr}} \tag{IX.128}$$

și are de asemenea o semnificație energetică (numărătorul are semnificația dată mai înainte iar numitorul reprezintă dublul energiei de deformare a sistemului sub acțiunea forțelor de inerție $m_i\, a_{ir}$ care apar atunci cînd sînt efectuate vibrații de amplitudine a_{ir} și pulsație egală cu unitatea).

Fie un vector oarecare, a_i, și raportul

$$\mu(a_i) = \frac{\sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} a_i a_j}{\sum_{i}^{1,n} m_i a_i^2}. \tag{IX.129}$$

Acest raport este staționar în raport cu creșterile vectorului a_i, dacă acest vector coincide cu unul din vectorii proprii. Într-adevăr, dacă relația (IX.129) se diferențiază, se obține proprietatea

$$d\,\mu(a_{ir}) = 0 \tag{IX.130}$$

sau, în cuvinte, proprietatea de staționaritate a raportului $\mu(a_i)$ (IX.129) pentru vectori a_i paraleli cu vectorii proprii a_{ir}.

Proprietatea de ortogonalitate (IX.125) a fost demonstrată pentru pulsații proprii distincte. În cazul matricelor k_{ij} reale, simetrice și pozitiv definite, cum este cazul în mecanica structurilor, se arată că unei pulsații ω_r multiple de ordinul p, îi corespunde o reducere a rangului matricei $k_{ij} - \omega^2 m_i \delta_{ij}$ sau al matricei $d_{ij} - \frac{1}{\omega^2 m_i}\delta_{ij}$ cu p unități față de valoarea n. Ca urmare, există p soluții nebanale liniar independente a_{ir}, care corespund pulsației proprii multiple ω. Soluțiile liniar independente se pot alege astfel încît proprietatea de ortogonalitate (IX.125) sau chiar de ortonormare (IX.126) să fie satisfăcute și pentru vectori proprii corespunzînd unor pulsații proprii multiple (în cazul sistemelor dinamice imperfect elastice, această proprietate poate să nu mai existe). În cazul sistemelor dinamice elastice, vectorii proprii alcătuiesc deci o bază completă n-dimensională, ortogonală (sau chiar ortonormală) în spațiul de configurație n-dimensional al sistemului considerat. Se dispune astfel de un sistem de referință natural care permite o reducere radicală a dificultăților de calcul pe care le pun problemele de dinamică aplicată.

Problemele de valori proprii ridicate de analiza vibrațiilor libere ale sistemelor dinamice au fost tratate în cele de mai înainte exclusiv pentru cazul sistemelor ideal elastice. În cazul cînd sistemele dinamice sînt disipative (adică au capacitate de amortizare), problemele de valori proprii pot să se complice deosebit de mult. În cazul general pot să nu

mai existe baze complete de vectori proprii, iar vectorii proprii să fie complecşi [17]. Pentru scopurile practice urmărite în această parte a lucrării, problemele de valori proprii vor fi considerate exclusiv în cadrul acceptat mai înainte. Se va interveni doar în ultima etapă, la calculul soluţiilor ecuaţiilor de mişcare, cu corecţii care ţin seama de contribuţia capacităţii de amortizare.

Exemplul de calcul IX.5. Ca aplicaţie numerică se poate considera cazul sistemului din fig. IX.31 în ipoteza $m_1 = m_2 = m$.

Utilizarea matricei de deformabilitate duce la ecuaţia (corespunzătoare ecuaţiei (IX.116)).

$$\begin{vmatrix} \frac{a^3}{3EI} - \frac{1}{\omega^2 m} & \frac{5a^3}{6EI} \\ \frac{5a^3}{6EI} & \frac{8a^3}{3EI} - \frac{1}{\omega^2 m} \end{vmatrix} = 0$$

cu soluţia.

$$\omega^2_{I,II} = \frac{9 \pm \sqrt{74}}{7} \cdot \frac{6EI}{ma^3}$$

şi vectorii proprii normaţi (soluţii ale ecuaţiilor (IX.119) care satisfac condiţia (IX.120))

$$a_{iI} = \frac{1}{\sqrt{(148 + 14\sqrt{74})\,m}} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 + \sqrt{74} \end{bmatrix} \quad a_{iII} = \frac{1}{\sqrt{(148 - 14\sqrt{74})\,m}} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 - \sqrt{74} \end{bmatrix}$$

reprezentaţi în fig. IX.34.

Utilizarea matricei de rigiditate duce la ecuaţia [corespunzătoare ecuaţiei (IX.122)].

$$\begin{vmatrix} \frac{96\,EI}{7a^3} - m\omega^2 & -\frac{30\,EI}{7a^3} \\ -\frac{30\,EI}{7a^3} & \frac{12\,EI}{7a^3} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

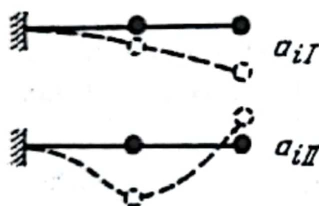


Fig. IX.34

cu aceleaşi soluţii pentru pulsaţiile proprii ω_r şi cu aceiaşi vectori proprii ca mai înainte, deduşi de data aceasta din ecuaţiile (IX.123).

5.4. Matrice caracteristice pentru sistemele dinamice

În dezvoltările precedente au intervenit matricele de inerţie, de deformabilitate, de rigiditate elastică şi de rigiditate vîscoasă, care caracterizează sistemele dinamice. Problemele de valori proprii permit să se introducă noi matrice importante pentru rezolvarea problemelor de dinamică aplicată.

Dacă se consideră vectorii proprii normaţi, a_{ir}, drept coloane ale unei matrice pătrate n-dimensionale, **A**, ecuaţiile (IX.123) pot fi scrise în formă condensată

$$\mathbf{KA} = \mathbf{MA}\ \mathbf{diag}\ (\omega_r^2) \tag{IX.131}$$

unde prin **diag** (ω_r^2) se înţelege matricea

$$\mathbf{diag}\ (\omega_r^2) = \begin{bmatrix} \omega_I^2 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \omega_{II}^2 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots\dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{IX.132}$$

Dacă se consideră vectori proprii normați, condiția de ortonormare (IX.126) poate fi scrisă condensat sub forma

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \qquad \text{(IX.133)}$$

unde $\mathbf{I}_n$ reprezintă matricea unitate n-dimensională.

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(IX.134)}$$

Matricea **A** este o matrice nesingulară, datorită faptului că vectorii — coloană care o compun constituie o bază ortogonală completă în spațiul n-dimensional de configurație al sistemului dinamic considerat. Inversa matricei **A**, $\mathbf{A}^{-1}$, este, datorită relației (IX. 133)

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}. \qquad \text{(IX.135)}$$

Transpunînd relația (IX.135), se obține

$$\mathbf{A}^{T(-1)} = \mathbf{M}\mathbf{A} \qquad (\mathbf{M}^T = \mathbf{M}) \qquad \text{(IX.136)}$$

Dacă, ținînd seama de această relație, ecuația matriceală (IX.131) se înmulțește la stînga cu $\mathbf{A}^T$, se obține forma matriceală a expresiei (IX.127) (valabilă pentru vectorii proprii normați)

$$\text{diag}\,(\omega_r^2) = \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}. \qquad \text{(IX.137)}$$

Dacă, acum, se înmulțește ecuația (IX. 131) la dreapta cu $\mathbf{A}^T\mathbf{M}$, se obține expresia spectrală a matricei de rigiditate:

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}\mathbf{A}\,\text{diag}\,(\omega_r^2)\,\mathbf{A}^T\mathbf{M}. \qquad \text{(IX.138)}$$

Sistemul de ecuații (IX.119), în care apare matricea de deformabilitate, se poate scrie condensat sub forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{A}\,\text{diag}\,(\omega_r^2) \qquad \text{(IX.139)}$$

echivalentă, evident, cu ecuația (IX.131). Inversînd matricea diagonală din membrul drept, ecuația (IX.139) se rescrie sub forma

$$\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\text{diag}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right). \qquad \text{(IX.140)}$$

Înmulțind ecuația (IX.140) la stînga cu $\mathbf{A}^T\mathbf{M}$, se obține expresia matriceală echivalentă expresiei (IX.128) pentru cazul vectorilor proprii normați

$$\text{diag}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right) = \mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{A}. \qquad \text{(IX.141)}$$

Înmulţind ecuaţia (IX.140) la dreapta cu $\mathbf{A}^T$ se obţine expresia spectrală a matricei de deformabilitate,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\ \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)\mathbf{A}^T. \tag{IX.142}$$

Expresiile spectrale condensate (IX.138) şi (IX.142) pot fi rescrise acum desfăşurat. Termenii matricei de rigiditate vor avea expresiile (date pentru vectori proprii nenormaţi de această dată).

$$k_{ij} = \sum_r^{1,n} \omega_r^2 \frac{m_i a_{ir} m_j a_{jr}}{\sum\limits_k^{1,n} m_k a_{kr}^2}. \tag{IX.143}$$

Termenii matricei de deformabilitate vor avea, în mod similar, expresiile

$$d_{ij} = \sum_r^{1,n} \frac{a_{ir}\ a_{jr}}{\omega_r^2 \sum\limits_k^{1,n} m_k a_{kr}^2}. \tag{IX.144}$$

Expresiile teoretice (IX.143) şi (IX.144) au numeroase aplicaţii practice. Una dintre ele apare la determinarea iterativă a modurilor proprii.

Exemplul de calcul IX.6. Ca aplicaţie, se poate confrunta matricea de deformabilitate a sistemului dinamic din fig. IX. 31 cu dezvoltarea sa spectrală, dată sub forma (IX. 144). Calculele dau, plecind de la soluţiile a_{ir} şi ω_r ale exemplului de calcul IX.3, expresia.

$$\mathbf{D} = \frac{7m\,a^3}{(9-\sqrt{74})\,6\,EI}\cdot\frac{1}{(148+14\sqrt{74})m}\begin{bmatrix} 25 & 35+5\sqrt{74} \\ 35+5\sqrt{74} & 123+14\sqrt{74}\end{bmatrix} +$$

$$+\frac{7m\,a^3}{(9+\sqrt{74})\,6\,EI}\cdot\frac{1}{(148-14\sqrt{74})m}\begin{bmatrix} 25 & 35-5\sqrt{74} \\ 35-5\sqrt{74} & 123-14\sqrt{74}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^3}{3EI} & \frac{5a^3}{6EI} \\ \frac{5a^3}{6EI} & \frac{8a^3}{3EI}\end{bmatrix}$$

care coincide cu rezultatele calculelor efectuate în exemplul de calcul IX. 1. în vederea stabilirii ecuaţiilor de mişcare.

5.5. Soluţia generală a ecuaţiilor de mişcare

În cazul general, soluţia sistemelor diferenţiale care constituie ecuaţiile de mişcare ale sistemelor dinamice cu număr finit de grade de libertate, este de forma

$$u_i(t) = u_i^{(0)}(t) + \bar{u}_i(t) \tag{IX.145}$$

unde termenul $u_i^{(0)}(t)$ reprezintă soluţia generală a sistemului de ecuaţii omogen asociat, iar termenul $\bar{u}_i(t)$ reprezintă o soluţie particulară a sistemului neomogen.

Dacă se consideră un sistem dinamic cu legături ideal elastice, se constată, din dezvoltările paragrafului 5.3, că termenul $u_i^{(0)}(t)$ nu poate să fie decît o combinație liniară a unor soluții de forma (IX.113), unde pulsația ω ia valorile pulsațiilor proprii

$$u_i^{(0)}(t) = \sum_r^{1,n} a_{ir} (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t). \tag{IX.146}$$

Constantele A_r și B_r pot fi determinate în cazul cînd se dau condițiile inițiale, adică valorile $u_i^{(0)}(0)$ ale deplasărilor și $\dot{u}_i^{(0)}(0)$ ale vitezelor la momentul $t = 0$. Condițiile inițiale iau în acest caz forma

$$\begin{aligned} \sum_r^{1,n} a_{ir} A_r &= u_i^{(0)}(0) \\ \sum_r^{1,n} \omega_r a_{ir} B_r &= \dot{u}_i^{(0)}(0). \end{aligned} \tag{IX.147}$$

Sistemul de ecuații (IX.147) în raport cu necunoscutele A_r și B_r se poate rezolva cu ușurință prin înmulțirea cu produsul $m_i a_{is}$ sumarea în raport cu i și considerarea proprietăților de ortogonalitate. Rezultă expresiile

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\sum_i^{1,n} m_i a_{ir} u_i^{(0)}(0)}{\sum_j^{1,n} m_j a_{jr}^2} \\ B_r &= \frac{\sum_i^{1,n} m_i a_{ir} \dot{u}_i^{(0)}(0)}{\omega_r \sum_j^{1,n} m_j a_{jr}^2} \end{aligned} \tag{IX.148}$$

Rezultatul se poate generaliza pentru cazul sistemelor cu amortizare, la care se consideră soluții de forma

$$u_i^{(0)}(t) = \sum_i^{1,n} a_{ir}(A_r \cos \omega'_r t + B_r \sin \omega'_r t)\, e^{-n_r \omega_r t}. \tag{IX.149}$$

Constantele A_r și B_r iau în acest caz valorile

$$A_r = \frac{\sum\limits_{i}^{1,n} m_i\, a_{ir}\, u_i^{(0)}(0)}{\sum\limits_{j}^{1,n} m_j\, a_{jr}^2}$$

$$B_r = \frac{\sum\limits_{i}^{1,n} m_i\, a_{ir}\, \dot{u}_i^{(0)}(0)}{\omega_r' \sum\limits_{j}^{1,n} m_j\, a_{jr}^2} + \frac{n_r}{\sqrt{1 - n_r^2}}\, A_r. \qquad \text{(IX.150)}$$

Exemplul de calcul IX.7. Se consideră consola din fig. IX.31, căreia i se aplică la momentul inițial un șoc în dreptul masei de la extremitate, astfel încît viteza inițială a acestei mase ia valoarea v_0. Se cere să se determine vibrațiile libere neamortizate ale consolei.

În acest caz, aplicarea formulei (IX. 149) duce la necesitatea de determinare a constentelor A_r și B_r, conform formulelor (IX. 150). Deplasările inițiale fiind nule, constantele A_I și A_{II} vor fi de asemenea nule. Constantele B_r vor avea expresiile (pentru cazul vectorilor proprii normați).

$$B_I = \frac{1}{\omega_I} m a_{2I}\, v_0 = \sqrt{\frac{7m\, a^3}{(9 - \sqrt{74})\, 6\, EI}}\; m \frac{7 + \sqrt{74}}{\sqrt{(148 + 14\sqrt{74})m}}\, v_0 = \sqrt{\frac{7(7 + \sqrt{74})}{(9 - \sqrt{74})\sqrt{74}}}\sqrt{\frac{a^3}{12\, EI}}\, m v_0$$

$$B_{II} = \frac{1}{\omega_{II}} m a_{2II}\, v_0 = \sqrt{\frac{7m\, a^3}{(9 + \sqrt{74})\, 6\, EI}}\; m \frac{7 - \sqrt{74}}{\sqrt{(148 - 14\sqrt{74})m}}\, v_0 = -\sqrt{\frac{7(\sqrt{74} - 7)}{(9 + \sqrt{74})\sqrt{74}}}\sqrt{\frac{a^3}{12\, EI}}\, m v_0.$$

Deplasările maselor concentrate vor avea deci expresiile

$$u_1(t) = a_{1I}\, B_I \sin \omega_I t + a_{1II}\, B_{II} \sin \omega_{II} t =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{148}}\sqrt{\frac{7m\, a^3}{12\, EI}}\, v_0 \left(\frac{1}{\sqrt{9 - \sqrt{74}}} \sin \omega_I t - \frac{1}{\sqrt{9 + \sqrt{74}}} \sin \omega_{II} t \right)$$

$$u_2(t) = a_{2I}\, B_I \sin \omega_I t + a_{2II}\, B_{II} \sin \omega_{II} t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{148}}\sqrt{\frac{7m\, a^3}{12\, EI}}\, v_0 \left(\frac{\sqrt{74} + 7}{\sqrt{9 - \sqrt{74}}} \sin \omega_I t + \frac{\sqrt{74} - 7}{\sqrt{9 + \sqrt{74}}} \sin \omega_{II} t \right).$$

Soluția particulară a sistemului neomogen, $\bar{u}_i(t)$, se poate obține cu ușurință dacă se utilizează în continuare modurile proprii ale sistemului. Soluția are forma

$$\bar{u}_i(t) = \sum_{r}^{1,n} a_{ir}\, q_r(t) \qquad \text{(IX.151)}$$

unde coordonatele normale $q_r(t)$ satisfac ecuații de forma

$$\ddot{q} + 2n_r\, \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = Q_r(t) \qquad \text{(IX.152)}$$

cu termenul liber $Q_r(t)$ de forma

$$Q_r(t) = \frac{\sum_i^{1,n} F_i(t) a_{ir}}{\sum_j^{1,n} m_j a_{jr}^2}. \qquad \text{(IX.153)}$$

Ecuația (IX.152) și expresia (IX.153) se obțin din sistemul de ecuații (IX.85) prin înmulțirea cu a_{ir} și sumarea în raport cu i. Soluția ecuației (IX. 152) are forma cunoscută de la sistemele cu un grad de libertate [v. expresia (IX.48)],

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega_r'} \int_0^t e^{-n_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_r'(t-\tau) Q_r(\tau) d\tau. \qquad \text{(IX.154)}$$

Un caz particular deosebit de important este acela al forțelor exterioare periodice sinusoidale, avînd expresiile.

$$F_i(t) = F_i' \cos \omega_0 t + F_i'' \sin \omega_0 t = \text{Re } [F_i^* e^{i\omega_0 t}] (F_i^* = F_i' - iF_i''). \qquad \text{(IX.155)}$$

Termenii liberi din ecuațiile normale de mișcare, $Q_r(t)$, devin în acest caz

$$Q_r(t) = Q_r' \cos \omega_0 t + Q_r'' \sin \omega_0 t = \text{Re } [Q_r^* e^{i\omega_0 t}] \; (Q_r^* = Q_r' - iQ_r'') \qquad \text{(IX.156)}$$

cu expresiile

$$Q_r' = \frac{\sum_i^{1,n} F_i' a_{ir}}{\sum_j^{1,n} m_j a_{jr}^2}; \quad Q_r'' = \frac{\sum_i^{1,n} F_i'' a_{ir}}{\sum_j^{1,n} m_j a_{jr}^2}; \quad Q_r^* = \frac{\sum_i^{1,n} F_i^* a_{ir}}{\sum_i^{1,n} m_j a_{jr}^2}. \qquad \text{(IX.157)}$$

Soluțiile particulare ale ecuațiilor normale de mișcare (IX.152) vor avea forma

$$q_r(t) = q_r' \cos \omega_0 t + q_r'' \sin \omega_0 t = \text{Re}[q_r^* e^{i\omega_0 t}] \qquad \text{(IX.158)}$$

unde amplitudinile complexe q_r^* vor avea expresia, dedusă din ecuația (IX.152).

$$q_r^* = \frac{1}{-\omega_0^2 + 2in_r\omega_r\omega_0 + \omega_r^2} Q_r^* = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + 2in_r \frac{\omega_0}{\omega_r}} \frac{Q_r^*}{\omega_r^2}. \qquad \text{(IX.159)}$$

Componentele q_r' și q_r'' vor fi exprimate sub forma

$$q_r' = \frac{(\omega_r^2 - \omega_0^2)\, Q_r' + 2n_r\omega_r\,\omega_0 Q_r''}{(\omega_r^2 - \omega_0^2) + 4n_r^2\omega_r^2\omega_0^2} = \frac{\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2 \dfrac{Q_r'}{\omega_r^2} + 2n_r\,\dfrac{\omega_0}{\omega_r}\,\dfrac{Q_r''}{\omega_r^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right) + 4n_r^2\,\dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}} \tag{IX.160}$$

$$q_r'' = \frac{2n_r\omega_r\omega_0 Q_r' - (\omega_r^2 - \omega_0^2) Q_r''}{(\omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + 4n_r^2\omega_r^2\omega_0^2} = \frac{-\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2 \dfrac{Q_r''}{\omega_r^2} + 2n_r\,\dfrac{\omega_0}{\omega_r}\,\dfrac{Q_r'}{\omega_r^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2 + 4n_r^2\,\dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}}.$$

Pentru amplitudinile reale ale mișcării

$$q_r^0 = \sqrt{q_r'^2 + q_r''^2}; \quad Q_r^0 = \sqrt{Q_r'^2 + Q_r''^2} \tag{IX.161}$$

se va putea scrie relația

$$q_r^0 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + 4n_r^2\omega_r^2\omega_0^2}}\, Q_r^0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2 + 4n_r\,\dfrac{\omega_0^2}{\omega_r^2}}}\,\frac{Q_r^0}{\omega_r^2} =$$

$$= \beta\left(\frac{\omega_0}{\omega_r},\ n_r\right)\frac{Q_r^0}{\omega_r^2}. \tag{IX.162}$$

unde apare factorul „dinamic" $\beta\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_r},\ n_r\right)$ cunoscut din relația (IX.56) de la sistemele cu un grad de libertate.

Forma (IX.162) nu este adecvată pentru studiul suprapunerii contribuțiilor corespunzătoare modurilor proprii, întrucît în această formă nu apare faza mișcării pentru fiecare coordonată normală. Din acest motiv este preferabil să se lucreze cu amplitudinile complexe, q_r, sau cu componentele lor reale și imaginare q_r' și q_r''.

Dacă pentru deplasările $u_i(t)$ se introduc reprezentările

$$u_i(t) = u_i' \cos\omega_0 t + u_i'' \sin\omega_0 t = \mathrm{Re}[u_i^* e^{i\omega_0 t}]\ (u_i^* = u_i' - iu_i'') \tag{IX.163}$$

atunci amplitudinile introduse pentru deplasările $u_i(t)$ vor putea fi exprimate pe baza amplitudinilor corespunzătoare ale coordonatelor normale, sub forma:

$$\begin{aligned} u_i' &= \sum_r a_{ir} q_r' \\ u_i'' &= \sum_r a_{ir} q_r'' \\ \dot{u}_i &= \sum_r a_{ir} \dot{q}_r. \end{aligned} \tag{IX.164}$$

Pe această cale se pot obține rezultate utile asupra efectelor produse de încărcările periodice sinusoidale aplicate sistemelor dinamice. Se poate adopta însă o altă cale, mai directă, de determinare a amplitudinilor vibrațiilor sinusoidale.

Dacă se pleacă de la ecuațiile de mișcare (IX. 25), în care se consideră forțe perturbatoare de forma (IX.155) și, în consecință, o soluție particulară de forma (IX.163), se obține sistemul de ecuații de mișcare pentru amplitudinile complexe.

$$\sum_{j}^{1,n} (-\omega_0^2 m_{ij} + i\omega_0 c_{ij} + k_{ij})\, u_j^* = F_i^* . \qquad \text{(IX.165)}$$

Formal, sistemul (IX.165) are o soluție

$$u_i^* = \sum_{j}^{1,n} \hat{h}_{ij}(\omega) F_j^* \qquad \text{(IX.166)}$$

în care apar termenii $\hat{h}_{ij}(\omega)$ ai matricei de transfer a sistemului dinamic. Matricea de transfer este inversa matricei ai cărei termeni apar drept coeficienți în membrul sting (IX.165). Această inversare este discutată în paragraful 5.6. Sistemul de ecuații (IX.165) poate fi rezolvat, în principiu, ca orice sistem de ecuații algebrice liniare și neomogene (în cazul cînd termenii c_{ij} nu sînt identic nuli, sistemul este complex). Această rezolvare este în principiu posibilă, dar ea nu permite să se tragă concluzii suficient de bogate privind comportarea sistemului dinamic. Soluția obținută cu ajutorul modurilor proprii de vibrație [ecuațiile (IX.156)—(IX.164)] este mult mai concludentă, întrucît ea permite să se observe care sînt factorii cei mai importanți în comportarea dinamică a sistemului. Mai concret, se poate vedea în ce măsură apropierea pulsației perturbatoare ω_0 de una din pulsațiile proprii ω_r dă efecte defavorabile, sau chiar periculoase.

Relațiile precedente din paragraful 5.5 sînt obținute utilizîndu-se în permanență forma ecuațiilor în care apare matricea de rigiditate. Se pot obține relații similare și cu ajutorul matricei de deformabilitate. Aceste relații sînt prezentate numai pentru cazul sistemelor ideal elastice.

Dacă se consideră sistemul de ecuații (IX.70), în care necunoscutele se dezvoltă ca o combinație liniară în raport cu vectorii proprii, conform relației (IX. 151), dacă se înmulțesc aceste ecuații cu produsul $m_i a_{ir}$ și se sumează în raport cu indicele i, se obține sistemul de ecuații separate

$$q_r + \frac{1}{\omega_r^2} \ddot{q}_r = \frac{1}{\omega_r^2} Q_r(t) \qquad \text{(IX.167)}$$

în cazul că se ține seama de relațiile (IX.126) și (IX.128). Ecuația (IX.167) este însă un caz particular al ecuației (IX.152), scrisă pentru ipoteza absenței disipării de energie, $n_r = 0$. Soluția particulară a ecuației neomogene (IX.167) are forma

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t \sin \omega_r(t - \tau) Q_r(\tau)\, d\tau \qquad \text{(IX.168)}$$

care particularizează cazul mai general (IX.154).

Un alt caz interesant pentru practică este acela al unor perturbații sinusoidale de forma

$$F_i(t) = F'_i \cos \omega_0 t \tag{IX.169}$$

care, introduse în sistemul de ecuații (IX. 70), duc la o soluție particulară de forma

$$\bar{u}_i(t) = u'_i \cos \omega_0 t. \tag{IX.170}$$

Amplitudinile F'_i și u'_i satisfac sistemul de ecuații dedus din sistemul (IX.70),

$$u'_i - \omega_0^2 \sum_j^{1,n} d_{ij} m_j u'_j = F'_i. \tag{IX.171}$$

Acest sistem de ecuații are o soluție formală care particularizează soluția (IX. 166), pentru cazul cînd capacitatea de amortizare lipsește. În locul acestei soluții obținute direct, este interesant și în cazul de față să se utilizeze modurile proprii de vibrații. Dacă amplitudinile u'_i se exprimă sub forma (IX.164) de combinații liniare ale vectorilor proprii normați a_{ir}, dacă se înmulțește sistemul (IX.171) cu produsul $m_i\, a_{ir}$ și se sumează în raport cu i, se obține sistemul de ecuații separate

$$q'_r - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} q'_r = \frac{1}{\omega_r^2} Q'_r \tag{IX.172}$$

cu soluția

$$q'_r = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2}} \frac{Q'_r}{\omega_r^2} = \beta\left(\frac{\omega_0}{\omega_r}, 0\right) \frac{Q'_r}{\omega_r^2} \tag{IX.173}$$

în care intervine factorul „dinamic" $\beta\left(\frac{\omega_0}{\omega_r}, n_r\right)$ cunoscut de la sisteme cu un grad de libertate. În cazul sistemelor ideal elastice, fără capacitate de amortizare, nu apar diferențe de fază, iar amplitudinile de vibrație u'_i au forma

$$u'_i = \sum_r^{1,n} a_{ir} q'_r = \sum_r^{1,n} a_{ir} \beta\left(\frac{\omega_0}{\omega_r}, 0\right) \frac{Q'_r}{\omega_r^2} = \sum_r^{1,n} a_{ir} \frac{\beta\left(\frac{\omega_0}{\omega_r}, 0\right)}{\omega_r^2} \sum_j^{1,n} F'_j a_{jr}. \tag{IX.174}$$

Exemplul de calcul IX.8. Se consideră consola din fig. IX. 31, încărcată de o singură forță concentrată, periodică sinusoidală, de amplitudine F_0 și pulsație ω_0, care acționează asupra primei mase. Forțele perturbatoare vor avea expresiile

$$F_1(t) = F_0 \cos \omega_0 t; \qquad F_2(t) = 0.$$

Dacă se utilizează notațiile din relațiile (IX.156)—(IX.174), amplitudinile termenilor liberi din ecuațiile normale de vibrație, conform relațiilor (IX.157), pentru cazul vectorilor proprii normați, vor fi

$$Q'_{\mathrm{I}} = F_0 a_{1\mathrm{I}}; \quad Q'_{\mathrm{II}} = F_0 a_{1\mathrm{II}}.$$

Neglijarea proprietăților disipative ale sistemului dinamic face ca, pentru coordonatele normale, să fie satisfăcute relații de forma (IX.167), respectiv în cazul perturbațiilor sinusoidale (IX.172), care dau soluția (IX.173),

$$q'_I = \frac{1}{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_I^2}}\,\frac{Q'_I}{\omega_I^2}; \qquad q'_{II} = \frac{1}{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{II}^2}}\,\frac{Q'_{II}}{\omega_{II}^2},$$

Amplitudinile de vibrație în cele două puncte vor fi deci

$$u'_1 = a_{1I}\,q'_I + a_{1II}\,q'_{II} = \frac{a_{1I}^2}{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_I^2}}\,\frac{F_0}{\omega_I^2} + \frac{a_{1II}^2}{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{II}^2}}\,\frac{F_0}{\omega_{II}^2}$$

$$u'_2 = a_{2I}\,q'_I + a_{2II}\,q'_{II} = \frac{a_{2I}\,a_{1I}}{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_I^2}}\,\frac{F_0}{\omega_I^2} + \frac{a_{2II}\,a_{1II}}{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{II}^2}}\,\frac{F_0}{\omega_{II}^2}.$$

Dacă se utilizează pentru vectorii și pulsațiile proprii valorile obținute în aplicația din paragraful 5.3, expresiile amplitudinilor de vibrație devin

$$u'_1 = \left[\frac{175}{296-22\sqrt{74}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\omega_0^2\,7ma^3}{(9-\sqrt{74})6EI}} + \frac{175}{296+22\sqrt{74}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\omega_0^2\,7\,ma^3}{(9+\sqrt{74})\,6EI}}\right]\frac{F_0a^3}{6\,EI}$$

$$u'_2 = \left[\frac{35(7+\sqrt{74})}{296-22\sqrt{74}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\omega_0^2\,7\,ma^3}{(9-\sqrt{74})6EI}} + \frac{35(7-\sqrt{74})}{296+22\sqrt{74}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\omega_0^2\,7\,ma^3}{(9+\sqrt{74})6EI}}\right]\frac{F_0a^3}{6\,EI}.$$

5.6. Matrice pondere și matrice de transfer ale sistemelor dinamice

Pentru analiza comportării sistemelor dinamice sub acțiunea diferitelor forțe perturbatoare, este deosebit de avantajos uneori să se utilizeze în calcule matricele de transfer sau matricele pondere ale acestor sisteme. Aceste matrice joacă un rol similar cu cel jucat de matricea de deformabilitate, **D**, în cazul fenomenelor statice.

Matricea (complexă) de transfer $\hat{\mathbf{H}}(\omega)$, avînd termenii $\hat{h}_{ij}(\omega)$, are semnificația următoare: un termen $\hat{h}_{ij}(\omega)$ reprezintă amplitudinea complexă de vibrație după gradul de libertate i, atunci cînd sistemul dinamic este încărcat de o singură forță, de amplitudine complexă egală cu 1, avînd pulsația ω și acționînd după gradul de libertate j. Pentru a se obține expresia acestei matrice, se pleacă de la ecuațiile (IX.83) sau (IX.86), punîndu-se condiția

$$F_i(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\,[e^{i\omega_0 t}] = \cos\omega_0 t & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} \qquad \text{(IX.175)}$$

Soluţia sistemului de ecuaţii de mişcare considerat va avea în acest caz forma

$$u_i(t) = \mathrm{Re}\,[\hat{h}_{ij}(\omega_0)\,e^{i\omega_0 t}]. \qquad \text{(IX.176)}$$

Termenii $\hat{h}_{ij}(\omega_0)$ satisfac ecuaţiile, deduse din ecuaţiile de mişcare (IX. 86).

$$\sum_{j}^{1,n} (-\omega_0^2 m_{ij} + i\omega_0 c_{ij} + k_{ij})\hat{h}_{jk}(\omega_0) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \qquad \text{(IX.177)}$$

Termenii $\hat{h}_{ij}(\omega_0)$ se pot reprezenta sub forma de combinaţii liniare ale vectorilor proprii,

$$\hat{h}_{ij}(\omega_0) = \sum_{r}^{1,n} a_{ir}\hat{g}_{ir}(\omega_0) \qquad \text{(IX.178)}$$

unde coeficienţii $\hat{g}_{jr}$ (ω_0) au expresiile, deduse din înmulţirea ecuaţiilor (IX.177) cu a_{ir} şi sumarea în raport cu i,

$$\hat{g}_{jr}(\omega_0) = \frac{1}{-\omega_0 + 2\,i n_r\omega_r\omega_0 + \omega_r^2} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{k,e}^{1,n} m_{kl}a_{kl} - a_{lr}}\, a_{jr}. \qquad \text{(IX.179)}$$

Termenii matricei de transfer $\hat{h}_{ij}(\omega)$ au deci expresia finală

$$\hat{h}_{ij}(\omega_0) = \sum_{r}^{1,n} \frac{a_{ir}\,a_{jr}}{(-\omega_0^2 + 2in_r\omega_r\omega_0 + \omega_r^2)\sum\limits_{k,e}^{1,n} m_{kl}\,a_{kr}\,a_{lr}}. \qquad \text{(IX.180)}$$

Se observă că matricea de deformabilitate statică, exprimată sub forma spectrală (IX.144), este de fapt valoarea matricei de transfer, exprimată sub forma spectrală, (IX.180) pentru pulsaţia $\omega = 0$ (adică pentru cazul solicitărilor statice).

Dacă se consideră un sistem de forţe periodice sinusoidale, reprezentate sub forma complexă

$$F_i(t) = \mathrm{Re}\,[F_i^* e^{i\omega_0 t}] \qquad \text{(IX.181)}$$

atunci soluţia particulară a ecuaţiilor de mişcare va avea o formă similară

$$\bar{u}_i(t) = \mathrm{Re}\,[u_i^* e^{i\omega_0 t}], \qquad \text{(IX.182)}$$

unde amplitudinile complexe pot fi obţinute, suprapunînd efectele, cu ajutorul matricei de transfer, sub forma

$$u_i^* = \sum_{j}^{1,n} \hat{h}_{ij}(\omega_0)F_j^* \qquad \text{(IX.183)}$$

Relația (IX.183) se poate scrie sub o formă echivalentă desfășurată,

$$u_i^* = \sum_{r}^{1,n} \frac{a_{ir}\left(\sum\limits_{j}^{1,n} a_{jr}F_j^*\right)}{(-\omega_0^2 + 2in_r\omega_r\omega_0 + \omega_r^2)\sum\limits_{k,l}^{1,n} m_{kl}\,a_{kr}\,a_{lr}}, \qquad \text{(IX.184)}$$

care se poate obține direct din ecuațiile de mișcare, fără a face apel la noțiunea de matrice de transfer.

Matricea pondere $\mathbf{H}(t)$, avînd termenii $h_{ij}(t)$, se poate introduce dacă se consideră mișcarea unui sistem dinamic inițial în repaus, în stare nedeformată, care la momentul $t = 0$ primește un impuls de mărime egală cu unitatea după gradul de libertate j. Acest impuls poate fi reprezentat matematic prin funcția de impuls (distribuția) lui Dirac, $\delta(t)$

$$F_i(t) = \begin{cases} \delta(t) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \qquad \text{(IX.185)}$$

Funcția $\delta(t)$ se bucură de proprietățile

$$\delta(t) = 0 \qquad (t \neq 0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & (t_1t_2 < 0) \\ 0 & (t_1t_2 > 0) \end{cases} \qquad \text{(IX.186)}$$

Termenii h_{ij} se pot exprima sub forma de combinație liniară a vectorilor proprii,

$$h_{ij}(t) = \sum_{r}^{1,n} a_{ir}\,g_{jr}(t) \qquad \text{(IX.187)}$$

unde coordonatele normale satisfac ecuațiile, deduse din ecuațiile de mișcare prin înmulțirea cu a_{ir} și sumare

$$\ddot{g}_{jr} + 2n_r\omega_r\dot{g}_{jr} + \omega_r^2 g_{jr} = \frac{a_{jr}\delta(t)}{\sum\limits_{k,l}^{1,n} m_{kl}\,a_{kr}\,a_{lr}}. \qquad \text{(IX.188)}$$

Soluția ecuației (IX.188) are forma

$$g_{jr}(t) = \begin{cases} \dfrac{a_{jr}}{\omega_r'}\,\mathrm{e}^{-n_r\omega_r t}\sin\omega_r' t & (t \geqslant 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad \text{(IX.189)}$$

care este întrutotul similară soluției (IX.49) din cazul sistemelor cu un grad de libertate. Termenii $h_{ij}(t)$ au deci forma generală

$$h_{ij}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{r}^{1,n} \dfrac{a_{ir}a_{jr}}{\omega_r'}\,\mathrm{e}^{-n_r\omega_r t}\sin\omega_r' t & (t \geqslant 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad \text{(IX.190)}$$

Dacă forţele exterioare se consideră ca o succesiune de impulsuri elementare, prin suprapunerea efectelor se poate obţine soluţia $u_i(t)$ a ecuaţiilor de mişcare sub o formă echivalentă cu forma (IX.151)—(IX.154)

$$u_i(t) = \sum_j^{1,n} \int_{-\infty}^{t} h_{ij}(t-\tau) F_j(\tau)\, d\tau \qquad \text{(IX.191)}$$

sau, sub forma desfăşurată.

$$u_i(t) = \sum_r^{1,n} a_{ir} \frac{1}{\omega_r'} \int_{-\infty}^{t} e^{-n_r\omega_r(t-\tau)} \sin \omega_r'(t-\tau) \frac{\sum\limits_j^{1,n} a_{jr} F_j(\tau) d\tau}{\sum\limits_{k,l}^{1,n} m_{kl} a_{kr} a_{lr}}. \qquad \text{(IX.192)}$$

În aceste expresii dispar condiţiile iniţiale, integrarea făcîndu-se cu începere de la un moment de timp foarte depărtat, a cărui influenţă tinde spre zero, datorită proprietăţilor disipative ale sistemelor mecanice.

Expresiile (IX.183) şi (IX.191) arată clar importanţa matricelor de transfer şi matricelor pondere pentru analiza comportării sistemelor dinamice. Aceste matrice sînt un instrument deosebit de adecvat în analizele teoretice şi în rezolvarea problemelor practice.

Se poate verifica uşor că matricele de transfer şi pondere sînt transformate reciproce Fourier,

$$\hat{h}_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h_{ij}(t) dt$$

$$h_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{h}_{ij}(\omega)\, d\omega. \qquad \text{(IX.193)}$$

Dacă se consideră transformatele Fourier $\hat{F}_i(\omega)$ ale forţelor exterioare $F_i(t)$, date prin expresia

$$\hat{F}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F_i(t)\, dt \qquad \text{(IX.194)}$$

şi transformatele Fourier $\hat{u}_i(\omega)$ ale deplasărilor $u_i(t)$, date prin expresia.

$$\hat{u}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_i(t)\, dt, \qquad \text{(IX.195)}$$

atunci, conform regulilor de calcul cu transformatele Fourier şi conform relaţiilor (IX.193), imaginea Fourier a soluţiei generale (IX.191) are forma unui produs algebric

$$\hat{u}_i(\omega) = \sum_j^{1,n} \hat{h}_{ij}(\omega) \hat{F}_j(\omega). \qquad \text{(IX.196)}$$

În cazul particular cînd perturbațiile $F_i(t)$ (deci și deplasările $u_i(t)$) sînt pur sinusoidale, deci energia de vibrație este concentrată pe axa pulsațiilor ω în valorile $\pm\omega_0$, expresia (IX.196) se reduce la forma particulară (IX.183).

Exemplul de calcul IX.9. Se cere să se determine termenii matricei de transfer $\hat{h}_{ij}(\omega)$, pentru sistemul dinamic reprezentat în fig. IX. 31, utilizîndu-se modurile proprii.

În vederea rezolvării problemei puse, se utilizează expresia generală (IX.180), particularizată la cazul vectorilor proprii normați. Expresia căutată este deci

$$\hat{h}_{ij}(\omega) = \sum_{r}^{1,n} \frac{a_{ir}\, a_{jr}}{-\omega_0^2 + 2in_r\omega_r\omega_0 + \omega_r^2}.$$

Dacă se utilizează soluțiile aplicației din paragraful 5.3., soluția problemei propuse devine în cazul unui sistem lipsit de capacitate de amortizare, $n_r = 0$,

$$[\hat{h}_{ij}(\omega)] = \frac{1}{-\omega_0^2 + \frac{9-\sqrt{74}}{7}\frac{6EI}{ma^3}}\,\frac{1}{(148+14\sqrt{74})\,m}\begin{bmatrix}25 & 35+5\sqrt{74}\\ 35+5\sqrt{74} & 123+14\sqrt{74}\end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{-\omega_0^2 + \frac{9+\sqrt{74}}{7}\frac{6EI}{ma^3}}\,\frac{1}{(148-14\sqrt{74})\,m}\begin{bmatrix}25 & 35-5\sqrt{74}\\ 35-5\sqrt{74} & 123-14\sqrt{74}\end{bmatrix}$$

Exemplul de calcul IX.10. Se cere să se determine termenii matricei pondere $h_{ij}(t)$ pentru sistemul dinamic reprezentat în fig. IX.31, utilizîndu-se modurile proprii.

În vederea rezolvării problemei, se utilizează expresia generală (IX.190), particularizată la cazul vectorilor proprii normați. Expresia căutată este deci

$$h_{ij} = \begin{cases} \sum_{r}^{1,n} \frac{a_{ir}\, a_{jr}}{\omega_r'}\, e^{-n_r\omega_r t}\sin\omega_r' t & (t \geqslant 0)\\ 0 & (t < 0)\end{cases}$$

Dacă se utilizează soluțiile exemplului de calcul IX.5, soluția problemei propuse devine (pentru $t \geqslant 0$)

$$h_{ij}(t) = \frac{e^{-n_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{I}}t}\sin\omega_{\mathrm{I}}' t}{\omega_{\mathrm{I}}'}\begin{bmatrix}25 & 35+5\sqrt{74}\\ 35+5\sqrt{74} & 123+14\sqrt{74}\end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{e^{-n_{\mathrm{II}}\omega_{\mathrm{II}}t}\sin\omega_{\mathrm{II}}' t}{\omega_{\mathrm{II}}'}\begin{bmatrix}25 & 35-5\sqrt{74}\\ 35-5\sqrt{74} & 123-14\sqrt{74}\end{bmatrix}$$

unde

$$\omega_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{9-\sqrt{74}}{7}\frac{6EI}{ma^3}} \qquad \omega_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{74}}{7}\frac{6EI}{ma^3}}$$

$$\omega_{\mathrm{I}}' = \omega_{\mathrm{I}}\sqrt{1-n_{\mathrm{I}}^2} \qquad \omega_{\mathrm{II}}' = \omega_{\mathrm{II}}\sqrt{1-n_{\mathrm{II}}^2}.$$

6. METODE APROXIMATIVE

6.1. Generalităţi

De regulă problemele apărute în dinamica structurilor sînt de aşa natură că nu este posibil să se găsească soluţii exacte ale ecuaţiilor de mişcare. Cazurile în care se pot determina soluţii exacte ale acestor ecuaţii sînt mai degrabă rare excepţii. Din acest motiv, utilizarea de metode aproximative este o necesitate care a dus la numeroase preocupări ale specialiştilor în vederea creării unui instrument de calcul care să ofere, în schimbul unui volum de efort rezonabil, un grad de precizie satisfăcător. Metodele aproximative sînt utilizate pentru determinarea de soluţii în toate tipurile de probleme, atît în problemele de vibraţii proprii, cît şi în cele de vibraţii întreţinute (astfel de metode sînt utilizate şi pentru problemele de vibraţii neliniare, care nu sînt abordate în prezenta secţiune). În cele ce urmează, sînt prezentate în special metode utilizate pentru determinarea modurilor proprii.

Metodele aproximative utilizate în determinarea modurilor proprii, prezentate în cele ce urmează, pornesc, în linii mari, de la două idei :

a) reducerea complexităţii (sau a dimensiunii) problemei formulate iniţial ;

b) căutarea unor soluţii aproximative pentru o problemă dată.

În cele ce urmează sînt expuse doar cîteva din metodele aproximative cunoscute din literatură, anume metode care în prezent se bucură de o utilizare largă.

6.2. Metoda simplificării distribuţiei maselor (concentrării maselor)

Distribuţia maselor determină structura sistemului de grade de libertate. În unele cazuri sînt posibile simplificări ale acestei distribuţii fără a se afecta apreciabil rezultatele obţinute. Cazul cel mai curent de utilizare a metodei este acela al înlocuirii distribuţiei reale, continue, a maselor printr-un sistem de mase concentrate „echivalente". De regulă această echivalenţă este o echivalenţă statică. Sistemul mecanic se împarte într-un număr de panouri, iar pentru fiecare panou suma maselor existente se consideră concentrată în dreptul centrelor respective ale maselor.

Exemplul de calcul IX.11. Se consideră grinda simplu rezemată, de secţiune constantă, cu masă uniform distribuită, din fig. IX. 35. Lungimea grinzii se împarte în patru segmente egale. Masele segmentelor marginale se consideră concentrate pe reazeme. Masele segmentelor centrale se consideră concentrate la jumătatea deschiderii.

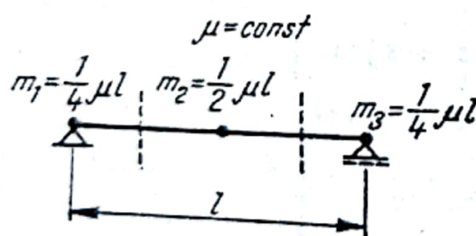


Fig. IX.35

Pulsaţia proprie fundamentală, calculată exact, este

$$\omega_I = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

Pulsaţia proprie calculată pentru un sistem simplificat, cu un grad de libertate, este

$$\tilde{\omega}_I = \frac{\sqrt{96}}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

Eroarea este redusă. Erori mai importante apar de regulă la aproximarea pulsaţiilor proprii superioare, atunci cînd se aplică metoda ajungîndu-se la sisteme cu mai multe grade de libertate.

Exemplul de calcul IX,12. Pentru cadrul cu patru niveluri, descris mai în detaliu în cadrul exemplului următor, în vederea reducerii numărului gradelor de libertate, masele de la nivelurile 1 şi 3 (numărate de jos în sus) se distribuie, în proporţii egale, nivelurilor învecinate. Numărul gradelor de libertate se reduce la doi (corespunzînd deplasărilor nivelurilor 2 şi 4). Masele concentrate vor fi, în consecinţă, 2 m la nivelul din mijloc şi 1,5 m la nivelul superior.

6.3. Metoda Ritz-Galiorkin

Metoda Ritz-Galiorkin este o metodă sistematică şi elegantă de reducere a complexităţii problemei. Ea este susceptibilă de automatizare prin utilizarea calculatoarelor numerice (eventual în context cu utilizarea metodei elementelor finite). Aplicarea metodei se poate face la sisteme cu număr finit de grade de libertate, sau la sisteme continue. Metoda se aplică în mod natural formei directe a ecuaţiilor de mişcare (adică formei în care intervine matricea de rigiditate pentru sisteme cu număr finit de grade de libertate, respectiv formei în care intervin ecuaţii cu derivate parţiale pentru sistemele continue). Metoda poate fi aplicată problemelor de vibraţii proprii sau de vibraţii întreţinute. Pentru anumite comodităţi de calcul, ea poate fi scrisă sub forma matriceală.

Ideea metodei este următoarea :

a) deplasările punctelor materiale se exprimă sub forma unor combinaţii liniare ale unor deformate compatibile cu legăturile, ai căror coeficienţi nedeterminaţi q_k (care joacă rolul de coordonate generalizate în raport cu sistemul de referinţă alcătuit din deformatele adoptate) reprezintă necunoscutele de bază ;

b) se exprimă energia cinetică şi energia de deformare a sistemului mecanic ca forme pătratice în raport cu vitezele generalizate $\dot{q}_k$, respectiv cu deplasările generalizate, q_k (în problemele de vibraţii întreţinute, lucrul mecanic al forţelor exterioare se exprimă ca formă liniară de coordonatele generalizate q_k) ;

c) se separă matricele de inerţie şi rigiditate (şi eventual vectorul termen liber), se formulează ecuaţiile de mişcare şi se găsesc soluţiile geometrice ;

d) soluţiile generalizate se transformă în rezultate cu semnificaţie fizică.

Exemplul de calcul IX.13. Se consideră cadrul cu patru niveluri, cu rigle perfect rigide, de mase egale şi cu stîlpi inextensibili de secţiune constantă şi înălţimi de etaj egale, din fig. IX.36, *a*. Acest cadru are, în plan

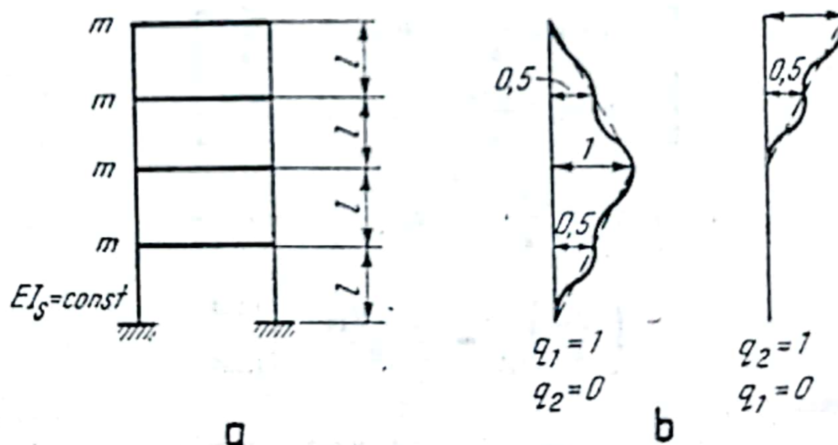


Fig. IX.36

patru grade de libertate. Se reduce dimensiunea problemei la o problemă cu două grade de libertate, admiţîndu-se că deformatele structurii sînt combinaţii liniare a două deformate de bază, reprezentate respectiv în fig. IX.36, *b*.

Deplasările la cele 4 niveluri, u_i, au expresiile

$$u_1 = 0,5\,q_1$$
$$u_2 = q_1$$
$$u_3 = 0,5q_1 + 0,5q_2$$
$$u_4 = q_2$$

Energia cinetică a sistemului are expresia

$$E = \frac{1}{2} m \sum_{i}^{1,4} \dot{u}_i^2 = \frac{1}{2} m \,(0,25\, \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2 + 0,25\, \dot{q}_1^2 + 0,5\, \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 0,25\, \dot{q}_2^2 + \dot{q}_2^2 = $$

$$= \frac{1}{2} m\,(1,5\, \dot{q}_1^2 + 0,5\, \dot{q}_1\dot{q}_2 + 1,25\, \dot{q}_2^2).$$

Energia de deformare a sistemului are expresia

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i}^{1,4} (u_i - u_{i-1})^2 \qquad (u_0 = 0)$$

$$V = \frac{1}{2} k\,[(0,25\, q_1^2 + 0,25\, q_1^2 + 0,25(q_2 - q_1)^2 + 0,25(q_2 + q_1)^2] =$$

$$= \frac{1}{2} k\left[\, q_1^2 - q_1 q_2 + 0,5\, q_2^2\right]\left(k = \frac{2\times 12\, EI_s}{l^3}\right).$$

Matricea de inerție are forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,25 \\ 0,25 & 1,25 \end{bmatrix} m$$

Matricea de rigiditate are forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Ecuația frecvențelor proprii devine

$$\begin{bmatrix} 1 - 1,5\,\dfrac{\omega^2 m}{k} & -0,5 - 0,25\,\dfrac{\omega^2 m}{k} \\ -0,5 - 0,25\,\dfrac{\omega^2 m}{k} & 0,5 - 1,25\,\dfrac{\omega^2 m}{k} \end{bmatrix} = 0$$

sau, desfășurat,

$$1,8125\left(\frac{\omega^2 m}{k}\right)^2 - 2,25\,\frac{\omega^2 m}{k} + 0,25 = 0$$

cu soluția

$$\left(\frac{\omega^2 m}{k}\right)_{\mathrm{I,II}} = \frac{4,5 \pm \sqrt{13}}{7,25} = \begin{cases} 0,124 \\ 1,116 \end{cases}$$

pentru pulsațiile proprii și

$$\frac{q_{1r}}{q_{2r}} = \frac{19 \mp \sqrt{13}}{2 \pm 6\sqrt{13}} = \begin{cases} 0,651 & (r = \mathrm{I}) \\ -1,152 & (r = \mathrm{II}) \end{cases}$$

pentru vectorii proprii.

Vectorii proprii exprimați în deplasările u_i devin (pentru valoarea la vîrf 1)

r \ i	1	2	3	4
I	0,325	0,651	0,825	1
II	− 0,576	− 1,152	− 0,076	1

Calculul exact, fără aplicarea metodei Ritz-Galiorkin, duce la valorile

$$\left[\frac{\omega_m^2}{k}\right]_{I} = 0{,}121 \qquad \left[\frac{\omega_m^2}{k}\right]_{II} = 1$$

pentru pulsațiile proprii și la vectorii proprii

i	1	2	3	4
I	0,347	0,652	0,880	1
II	−1	−1	0	1

Se constată că pulsațiile proprii calculate aproximativ sînt mai mari decît cele calculate exact. De asemenea erorile sînt mai importante pentru al doilea vector propriu decît pentru vectorul propriu fundamental.

Exemplul de calcul IX.14. Pentru o consolă încovoiată de secțiune constantă de deschidere l, de masă uniform distribuită μ și de modul de rigiditate EI, se admite că săgeata este o funcție de forma:

$$v(x) = q_1\frac{x^2}{l^2} + q_2\frac{x^3}{l^3}.$$

Ambele deformate fundamentale, $\frac{x^2}{l^2}$ și $\frac{x^3}{l^3}$, sînt compatibile cu condițiile geometrice de încastrare, dacă originea axei Ox se ia în încastrare.

Energia cinetică a sistemului are expresia

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{v}^2\,dx = \frac{\mu l}{2}\left[\frac{1}{5}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{3}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{7}\dot{q}_2^2\right].$$

Energia de deformare a sistemului are expresia

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EI\,v''^2\,dx = \frac{EI}{2l^3}\,[4q_1^2 + 12\,q_1q_2 + 12\,q_2^2].$$

Matricea de inerție are forma

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{vmatrix}\mu l.$$

Matricea de rigiditate are forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}\frac{EI}{l^3}.$$

Ecuația frecvențelor proprii devine.

$$\begin{bmatrix} 4 - \frac{1}{5}\frac{\omega^2\mu l^4}{EI} & \frac{1}{6}\frac{\omega^2\mu l^4}{EI} \\ 6 - \frac{1}{6}\frac{\omega^2\mu l^4}{EI} & 12 - \frac{1}{7}\frac{\omega^2\mu l^4}{EI} \end{bmatrix} = 0$$

sau, desfășurat,

$$\frac{1}{35\times 36}\left(\frac{\omega^2\mu l^4}{EI}\right)^2 - \frac{34}{35}\frac{\omega^2\mu l^4}{EI} + 12 = 0.$$

cu soluţia fundamentală

$$\frac{\omega^2\mu l^4}{EI} = \frac{12 \cdot 35}{17\left[1 + \sqrt{1 - \frac{35}{567}}\right]} = 12{,}52.$$

Rezultă valoarea aproximativă

$$\omega_I \approx \frac{3{,}54}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

faţă de valoarea exactă

$$\omega_I = \frac{3{,}51}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

Dacă se urmăreşte analiza vibraţiilor întreţinute sub acţiunea unei forţe $f(x, t)$, lucrul mecanic al forţei prin deplasări devine

$$L = \int_0^l f(x, t)\, v(x) \mathrm{d}x = q_1 \int_0^l f(x, t) \frac{x^2}{l^2} \mathrm{d}x + q_2 \int_0^l f(x_2, t) \frac{x^3}{l^3} \mathrm{d}x.$$

Ecuaţiile de mişcare sînt deci, ţinînd seama de expresiile anterioare ale energiei cinetice şi energiei de deformare,

$$\frac{\mu l}{5}\ddot{q}_1 + \frac{\mu l}{6}\ddot{q}_2 + 4\frac{EI}{l^3}q_1 + 6\frac{EI}{l^3}q_2 = \int_0^l f(x, t)\frac{x^2}{l^2}\mathrm{d}x = F_1(t)$$

$$\frac{\mu l}{6}\ddot{q}_1 + \frac{\mu l}{7}\ddot{q}_2 + 6\frac{EI}{l^3}q_1 + 12\frac{EI}{l^3}q_2 = \int_0^l f(x, t)\frac{x^3}{l^3}\mathrm{d}x = F_2(t).$$

Exemplul de calcul IX.15. Pentru o grindă încovoiată simplu rezemată de secţiune constantă, de deschidere l, de masă uniform distribuită μ şi de modul de rigiditate EI, se admite că săgeata este o funcţie de forma:

$$v(x) = q_1 \sin\frac{\pi x}{l} + q_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + q_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

unde deformatele fundamentale $\sin\frac{i\pi x}{l}$ reprezintă tocmai funcţiile proprii sau formele proprii de vibraţie în cazul adoptării ipotezelor curente privind deformarea grinzii.

Energia cinetică a sistemului are expresia.

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{v}^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mu l}{4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \ldots + \dot{q}_n^2).$$

Energia de deformare a sistemului are expresia

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EI\,v''^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4 EI}{4l^3}(q_1^2 + 2^4 q_2^2 + \ldots + n^4 q_n^2).$$

Matricea de inerţie are forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix} \frac{\mu l}{2}.$$

Matricea de rigiditate are forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 2^4 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 4^4 \end{bmatrix} \frac{\pi^4 EI}{2l^3}.$$

Ecuaţia frecvenţelor proprii devine

$$\left(\frac{\pi^4 EI}{l^4} - \omega^2\mu\right)\left(\frac{2^4\pi^4 EI}{l^4} - \omega^2\mu\right)\ldots\left(\frac{n^4\pi^4 EI}{l^4} - \omega^2\mu\right) = 0$$

cu soluţiile exacte

$$\omega_r^2 = \frac{n^4\pi^4 EI}{\mu l^4}.$$

Utilizarea funcţiilor proprii exacte drept funcţii fundamentale în metoda Ritz conduce deci la situaţia în care matricele **M** şi **K** sînt matrice diagonale, după cum era de aşteptat.

În consecinţă, sistemul de ecuaţii pentru coordonatele generalizate $q_1 \ldots . q_n$ se reduce la n ecuaţii separate care permit obţinerea de soluţii exacte.

Exemplul de calcul IX.16. Pentru o consolă de secţiune constantă, de lungime l, moment de inerţie mecanic polar J şi modul de rigiditate la torsiune GI_t, se analizează vibraţiile de torsiune. Dacă extremitatea încastrată corespunde abscisei $x = 0$, se admite că rotirea secţiunii curente este o funcţie de forma ;

$$\vartheta(x) = q_1 \sin\frac{\pi x}{2l} + q_2 \sin\frac{3\pi x}{2l} + \ldots + q_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

unde deformatele fundamentale $\sin\frac{(2i-1)\pi x}{l}$ coincid, la fel ca în exemplul precedent, cu formele proprii de vibraţie.

Energia cinetică a sistemului va fi

$$E = \frac{1}{2}\int J\dot{\vartheta}^2 \, dx = \frac{Jl}{4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \ldots + \dot{q}_n^2)$$

Energia de deformare a sistemului are expresia ;

$$V = \frac{1}{2}\int GI_t \vartheta'^2 \, dx = \frac{\pi^2 GI_t}{16l}[q_1^2 + 3^2 q_2^2 + \ldots + (2n-1)^2 q_n^2]$$

Ca şi în exemplul precedent, matricele de inerţie şi rigiditate sînt diagonale, iar pentru pulsaţiile proprii se obţin soluţii exacte,

$$\omega_r = \frac{(2r-1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_t}{J}}.$$

6.4. Metoda Rayleigh

Metoda Rayleigh este un caz particular al metodei Ritz, anume cazul în care deformata sistemului mecanic considerat depinde de un singur parametru multiplicativ, q_1. Metoda serveşte exclusiv la aproximarea uneia din pulsaţiile proprii. La fel ca în cazul metodei Ritz, pulsaţia proprie fundamentală calculată aproximativ este mai mare decît cea reală. Această proprietate se poate demonstra uşor, dacă se consideră că deformata structurii este o combinaţie liniară a formelor de vibraţie şi se face cîtul care conduce la aproximarea pulsaţiei proprii.

De exemplu, în cazul unui sistem cu număr finit de grade de libertate, se scrie relaţia

$$u_i = \sum_{r}^{1,n} v_{ir} q_r \tag{IX.197}$$

din care rezultă (utilizînd teorema de ortogonalitate)

$$\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij} u_i u_j = \sum_{r}^{1,n} q_r^2 \left[\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij} a_{ir} a_{jr} \right] \tag{IX.198}$$

şi, respectiv

$$\sum_{i,j}^{1,n} k_{ij} u_i u_j = \sum_{r}^{1,n} \omega_r^2 q_r^2 \left[\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij} a_{ir} a_{jr} \right]. \tag{IX.199}$$

Valoarea aproximativă a pulsaţiei proprii căutate $\tilde{\omega}^2$ este dată în raportul

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\sum\limits_{i,j}^{1,n} k_{ij} u_i u_j}{\sum\limits_{i,j}^{1,n} m_{ij} u_i u_j} \tag{IX.200a}$$

care corespunde, de altfel, raportului μ (a_i) din relaţia (IX. 129). Dacă se utilizează expresiile (IX.198) şi (IX.199) şi se consideră forme proprii normate, raportul (IX.200a) devine

$$\tilde{\omega}^2 \approx \frac{\sum\limits_{r}^{1,n} \omega_r^2 q_r^2}{\sum\limits_{r}^{1,n} q_r^2} = \omega_I^2 \frac{\sum\limits^{1,n} \dfrac{\omega_r^2}{\omega_I^2} q_r^2}{\sum\limits_{r}^{1,n} q_r^2}. \tag{IX.200b}$$

Din expresia (IX. 200 b) se vede că raportul $\tilde{\omega}^2$ devine minim atunci cînd toate valorile q_r, cu excepţia valorii q_I, se anulează. În acest caz, valoarea $\tilde{\omega}^2$ coincide cu pătratul pulsaţiei proprii fundamentale, ω_I^2. Precizia rezultatelor depinde în mod esenţial de modul în care se alege deformata. În unele cazuri, pentru a se obţine o deformată relativ apropiată de forma proprie fundamentală, este recomandabil să se efectueze în mod preliminar un calcul al deplasărilor corespunzătoare unei încărcări statice convenabile.

În cazul cînd se dau forţe statice f_i pentru a aplica această metodă, expresia $\tilde{\omega}^2$ IX.200 a) se poate înlocui prin expresia

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\sum\limits_{i}^{1,n} f_i u_i}{\sum\limits_{i,j}^{1,n} m_{ij} u_i u_j} \tag{IX.200c}$$

unde u_i sînt deplasările corespunzătoare forţelor f_i.

Exemplul de calcul IX.17. Pentru cadrul din fig.IV. 36, *a* se admite că deplasările u_i sînt:

$$u_1 = 0,4 \quad u_2 = 0,7 \quad u_3 = 0,9 \quad u_4 = 1,0.$$

In acest caz,

$$\sum_i m_i u_i^2 = m(0,4^2 + 0,7^2 + 0,9^2 + 1,0^2) = 2,46\,m$$

$$\sum_i k_i (u_i - u_{i-1})^2 = k(0,4^2 + 0,3^2 + 0,2^2 + 0,1^2) = 0,3k$$

$$\frac{\tilde{\omega}^2 m}{k} \cong \frac{0,3}{2,46} = 0,122 > 0,121 = \omega_I^2 \frac{m}{k}.$$

6.5. Metoda Dunkerley

Metoda Dunkerley este o metodă aproximativă, întrucîtva complementară metodei Rayleigh, care permite aproximarea pulsației proprii fundamentale. Metoda constă în următoarele: în locul distribuției reale a maselor (exemplu: grinda din fig. IX.37, *a*) se consideră pe rînd existența cîte unei singure mase *m*, evaluîndu-se pulsații proprii ω_i^2 ca pentru cîte un sistem cu un singur grad de libertate, cu o masă m_i. Pulsația proprie pentru sistemul real se aproximează prin relația:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}^2} = \sum_i \frac{1}{\omega_i^2}. \tag{IX.201}$$

În acest caz este satisfăcută relația

$$\tilde{\omega}^2 \leqslant \omega_I^2. \tag{IX.202}$$

Într-adevăr, în acest caz, dacă se pleacă de la relația

$$\frac{1}{\omega_I^2} = \frac{\sum_i m_i v_{iI}^2}{2V} = \sum_i \frac{m_i v_{iI}^2}{2V} = \sum_i \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2},$$

unde v_{iI} sînt valorile corespunzătoare formei proprii fundamentale, iar *V* este energia de deformare, se observă faptul că raportul $\frac{1}{\omega_I^2}$ este dat de fapt de considerarea unor pulsații proprii aproximative, care sînt mai mari decît pulsațiile proprii ω_i calculate exact în ipoteza prezenței cîte unei singure mase, m_i

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} \leqslant \frac{1}{\omega_i^2}.$$

Ca urmare,

$$\frac{1}{\tilde{\omega}^2} = \sum_i \frac{1}{\omega_i^2} \geqslant \sum_i \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} = \frac{1}{\omega_I^2}.$$

Metoda Dunkerley furnizează deci o margine inferioară a pulsației proprii fundamentale, în timp ce metoda Rayleigh furnizează o margine superioară

$$\tilde{\omega}_{\text{Dunkerley}} \leqslant \omega_I \leqslant \tilde{\omega}_{\text{Rayleigh}}$$

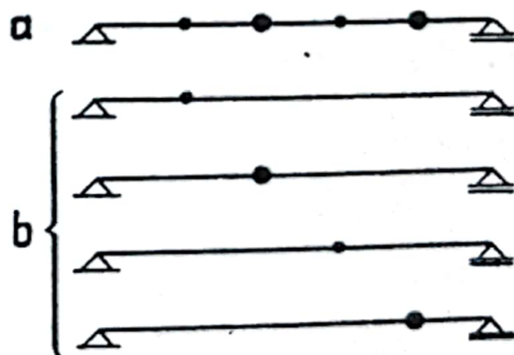


Fig. IX.37

Exemplul de calcul IX.18. Pentru cadrul din fig. IX. 36, a se obțin valorile:

$$\frac{1}{\omega_1^2}=\frac{m}{k},\quad \frac{1}{\omega_2^2}=\frac{2m}{k},\quad \frac{1}{\omega_3^2}=\frac{3m}{k},\quad \frac{1}{\omega_4^2}=\frac{4m}{k}$$

și, ca urmare,

$$\frac{1}{\widetilde{\omega}^2}=\frac{10\,m}{k}$$

deci

$$\frac{\widetilde{\omega}^2 m}{k}=0{,}1<0{,}121=\frac{\omega_I^2 m}{k}.$$

6.6. Metoda iterativă von Mises (Vianello-Stodola-Zavriev)

Metoda iterativă, cunoscută în algebra liniară sub numele de metoda von Mises, iar în literatura referitoare la calculul structurilor sub numele de metoda Vianello-Stodola-Zavriev, se aplică plecînd de la forma inversă a ecuațiilor de mișcare (forma în care apare matricea de deformabilitate pentru sistemele cu număr finit de grade de libertate, respectiv forma în care apare o ecuație integrală pentru sistemele continue).

Metoda este expusă în cele ce urmează în formulare matriceală. Ecuația de mișcare a vibrațiilor libere (IX.111) poate fi rescrisă (pentru cazul vibrațiilor sinusoidale simple) sub forma

$$\mathbf{U}-\omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,\mathbf{U}=0 \tag{IX.203}$$

unde $\mathbf{U}$ reprezintă vectorul coloană cu componentele u_i, iar $\mathbf{M}$ și $\mathbf{D}$ reprezintă matricele de inerție și deformabilitate. Se pleacă de la o deformată arbitrară, $\mathbf{U}_0$ (normată de regulă prin condiția

$$\mathbf{U}_0^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{U}_0=1 \tag{IX.204}$$

pentru a se ordona convenabil calculele) iar aproximațiile succesive se obțin prin procesul iterativ

$$\frac{1}{\omega_p^2}\mathbf{U}_p=\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,\mathbf{U}_{p-1}, \tag{IX.205}$$

impunînd deformatelor succesive $\mathbf{U}_p$ condiții de normare din care rezultă, indirect, valorile ω_p. Procesul converge spre soluția fundamentală

$$\lim_{p\to\infty}\mathbf{U}_p=\mathbf{A}_I,\ \lim_{p\to\infty}\omega_p=\omega_1 \tag{IX.206}$$

(unde cu $\mathbf{A}_r$ se notează vectorii proprii normați).

Într-adevăr, dacă o deformată curentă $\mathbf{U}_p$ se exprimă sub forma de combinație liniară a vectorilor proprii (normați)

$$\mathbf{U}_p=\sum_r^{1,n}\mathbf{A}_r\,q_{rp} \tag{IX.207}$$

[cu condiţia de normare $\sum_{r}^{1,n} q_{rp}^2 = 1$ dedusă din relaţia (IX.204)] relaţia (IX.205) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{1}{\omega^2} \sum_{r}^{1,n} \mathbf{A}_r q_{r,p} = \mathbf{DM} \sum_{r}^{1,n} \mathbf{A}_r q_{r,p-1} = \sum_{s}^{1,n} \left(\frac{\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T}{\omega_s^2} \right) \mathbf{M} \sum_{r}^{1,n} (\mathbf{A}_r q_{r,p-1}) = \qquad \text{(IX. 208)}$$

$$= \sum_{r}^{1,n} \left(\frac{1}{\omega_r^2} \mathbf{A}_r q_{r,p-1} \right)$$

întrucît există condiţia de ortonormare $\mathbf{A}_s^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r = \delta_{rs}$ şi dezvoltarea spectrală (IX. 142) a matricei **D.** Dacă egalitatea (IX.208) se înmulţeşte la stînga cu matricea de inerţie **M** şi apoi cu egalitatea (IX.208) transpusă, rezultă după calcule simple relaţia

$$\frac{1}{\omega_p^4} \sum_{r}^{1,n} q_{r,p}^2 = \sum_{r}^{1,n} \frac{1}{\omega_r^4} q_{r,p-1}^2 \qquad \text{(IX.209)}$$

care dă o imagine a relaţiilor între aproximaţiile succesive q_{rp}. De asemenea, dacă egalitatea (IX. 208) se înmulţeşte la stînga cu produsul $\mathbf{A}^T \mathbf{M}$, rezultă relaţia

$$\frac{1}{\omega_p^2} q_{s,p} = \frac{1}{\omega_s^2} q_{s,p-1} \qquad \text{(IX.210)}$$

De aici rezultă,

$$q_{s,p} = \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} q_{s,p-1} \qquad \text{(IX.211)}$$

sau o formă

$$q_{s,p} = \frac{\sqrt{\sum_{r}^{1,n} q_{r,p}^2}}{\omega_s^2 \sqrt{\sum_{r}^{1,n} \frac{q_{r,p-1}^2}{\omega_r^4}}} q_{s,p-1} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{r}^{1,n} \frac{q_{r,p-1}^2}{\omega_r^4}}} \frac{q_{s,p-1}}{\omega_s^2} \qquad \text{(IX.212)}$$

în care dispare parametrul ω_p^2.

Din relaţia (IX.211) se constată că, în procesul de iteraţie, coordonatele normale q se înmulţesc cu factori care sînt invers proporţionali cu pătratul pulsaţiei proprii. Convergenţa spre soluţia fundamentală este deci de natura convergenţei seriei geometrice.

Metoda iterativă expusă mai înainte este utilizată şi pentru determinarea soluţiilor superioare, dacă i se aduc unele completări. O primă cale este ortogonalizarea vectorilor $\mathbf{U}_p$, la fiecare treaptă de iteraţie, în raport cu vectorii proprii deja determinaţi. De exemplu, dacă se consideră vectorul propriu fundamental, $\mathbf{A}_I$, ortogonalizarea se efectuează prin determinarea coordonatei $q_{I,p}$ din relaţia

$$q_{I,p} = \mathbf{A}_I^T \mathbf{M} \mathbf{U}_p \text{ (unde } \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s = 1) \qquad \text{(IX. 213)}$$

și efectuarea scăderii

$$\mathbf{U}'_p = \mathbf{U}_p - \mathbf{A}_\mathrm{I}\, q_{\mathrm{I},p}. \qquad \text{(IX.214a)}$$

În acest caz convergența este asigurată spre soluția a doua. Dacă se caută soluția a r-a, se efectuează o ortogonalizare similară, sub forma

$$\mathbf{U}_p^{(r-1)} = \mathbf{U}_p - \sum_{s}^{\mathrm{I},r-1} \mathbf{A}_s\, q_{s,p} = \mathbf{U}_p - \sum_{s}^{\mathrm{I},r-1} \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T \mathbf{M}\, \mathbf{U}_p. \qquad \text{(IX.214b)}$$

O altă cale, mai comodă, este eliminarea din matricea de deformabilitate $\mathbf{D}$ a contribuției vectorilor proprii deja determinați. Astfel, dacă se înlocuiește matricea $\mathbf{D}$ prin matricea redusă

$$\mathbf{D}^{(r-1)} = \mathbf{D} - \sum_{s}^{\mathrm{I},r-1} \frac{\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s^T}{\omega_s^2} \qquad \text{(IX.215)}$$

și se efectuează procesul iterativ (IX.205) sub forma

$$\frac{1}{\omega_p^2} \mathbf{U}_p = \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{M}\, \mathbf{U}_{p-1}. \qquad \text{(IX.216)}$$

se obține soluția de ordinul r în locul soluției fundamentale ($r = \mathrm{I}$).

Metoda Rayleigh, în forma care o conduce la relația (IX.200b), constituie, în esență, primul pas de iterație al metodei iterative, deci face aproximația

$$\omega_\mathrm{I} \approx \omega_1.$$

Exemplul de calcul IX.19. Se consideră cadrul din fig. IX. 36, *a*. În acest caz, matricea de inerție are forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m,$$

iar matricea de deformabilitate are forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{k}.$$

Produsul $\mathbf{DM}$ devine, deci;

$$\mathbf{DM} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{m}{k}.$$

Dacă se consideră o deformată de plecare (nenormată)

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 1{,}0 \end{bmatrix},$$

se obține, după calcule,

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,66 \\ 0,88 \\ 1,00 \end{bmatrix} \qquad \omega_1^2 = 8,5 \frac{k}{m}.$$

Dacă se repetă calculele, se obține soluția

$$U_I = \begin{bmatrix} 0,347 \\ 0,652 \\ 0,880 \\ 1,000 \end{bmatrix}; \qquad \omega_I^2 = 8,294 \frac{k}{m}.$$

Exemplul de calcul IX,20. Se consideră consola din fig. IX.38, pentru care se admite concentrarea maselor în patru puncte.

Se admite o deformată inițială (nenormată) de forma

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,3 \\ 0,6 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

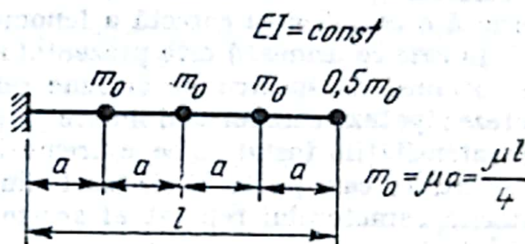


Fig. IX.38

Calculele se pot organiza într-un tabel de forma următoare, care corespunde primului ciclu de iterație:

i	u_{i0}	$\frac{m_i u_{i0}}{m_0}$	$\frac{M_{i1}}{m_0 a}$	$\frac{EI u_{i1}}{m_0 a^3}$	u_{i1}
1	0,1	0,1	4,5	1,88	0,091
2	0,3	0,3	3,0	6,78	0,328
3	0,6	0,6	1,6	13,36	0,648
4	1,0	0,5	0,5	20,58	1

În coloana u_{i0} se dau valorile de plecare, în coloana următoare se dau forțe proporționale forțelor de inerție, apoi se dau momentele încovoietoare (decalate cu o căsuță), apoi se dă noua deformată, care se înmulțește cu un factor care duce la valoarea la vîrf $v_{41} = 1$. Prima aproximație a pulsației proprii rezultă din raportul

$$\omega_1^2 = \frac{1}{20,58} \frac{EI}{ma^3}.$$

Pulsația proprie, exprimată în funcție de datele de bază μ și l în loc de m_0 și a, devine

$$\omega_1^2 = \frac{1}{20,58} \frac{EI}{\frac{\mu l}{4}\left(\frac{l}{4}\right)^3} = 12,4 \frac{EI}{\mu l^4}$$

deci,

$$\omega_1 = \frac{3,52}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

în timp ce soluția exactă, pentru masă uniform distribuită, este

$$\omega_I = \frac{3,51}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

7. SOLICITĂRI SEISMICE

7.1. Generalități

În cap. 3 al secțiunii sînt descrise succint cîteva caracteristici ale mișcărilor seismice ale terenului și ale comportării construcțiilor sub acțiunea acestor perturbații. Prezentul capitol este dedicat metodelor practice de evaluare a solicitărilor și deplasărilor structurilor datorite cutremurelor. Relațiile de calcul sînt scrise pentru stadiul de comportare liniară. Deși în cazul cutremurelor puternice comportarea structurilor poate să fie pronunțat neliniară, în special datorită neliniarităților fizice, nu sînt date relații pe această linie, întrucît calculul în stadiul de comportare elasto-plastică constituie în prezent o activitate de cercetare și întrucît încă nu s-au elaborat metode aplicabile în practica curentă, care să permită o considerare corectă a fenomenului dinamic.

În cele ce urmează este prezentată numai teoria clasică a vibrațiilor seismice, bazată pe noțiunea de spectru de acțiune seismică. Această noțiune derivă de fapt din două ipoteze: ipoteza comportării liniare și ipoteza conform căreia degradările sînt determinate de intensitățile instantanee extreme ale eforturilor (neglijîndu-se aspectul degradărilor cumulative, care poate să fie foarte important în cazul solicitărilor seismice puternice, datorită caracterului repetat al acestora).

7.2. Spectrul de acțiune seismică

Caracteristica de bază a unei mișcări seismice într-un punct al terenului și pe o direcție dată, este accelerograma $w_g(t)$, corespunzătoare seismogramei $u_g(t)$ prin relația.

$$w_g(t) = \ddot{u}_g(t), \tag{IX.217}$$

care este o funcție de timp. Accelerograma conduce la noțiunea de spectru de acțiune seismică dacă se consideră vibrațiile unui sistem cu un grad de libertate în ipoteza comportării liniare și a unei mișcări de translație a terenului (considerarea rotațiilor perturbatoare la nivelul terenului presupune anumite generalizări ale calculelor care urmează). Se consi-

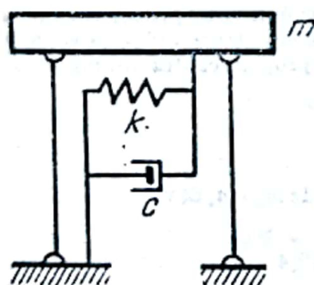


Fig. IX.39

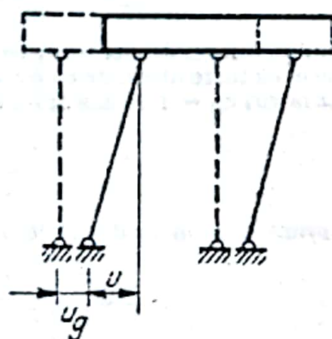


Fig. IX.40

deră astfel sistemul cu un grad de libertate din fig. IX. 39, cu o legătură visco-elastică de tip Kelvin-Voigt. În cazul unei deplasări a terenului $u_g(t)$, sistemul intră în regim de vibrație, caracterizat prin deplasările relative $u(t)$.

Ecuația de mișcare este

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\,\dot{u} + k\,u = 0 \tag{IX.218}$$

(în primul termen, corespunzător forțelor de inerție, intervin deplasările absolute, $u_g + u$, în timp ce în ceilalți doi termeni intervine deformarea sistemului, deci deplasarea relativă u). Dacă se trece în membrul drept termenul cunoscut, dat prin problemă, ecuația devine.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\,u = -\,m\ddot{u}_g(t) = -\,m\,w_g(t) \tag{IX.218a}$$

(se revine de fapt la ecuația (IX. 35) cu notații puțin diferite). Soluția (IX. 50) devine, în acest caz

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_I'}\int_0^t e^{-n_I\omega_I(t-\tau)}\sin\omega_I'(t-\tau)\,w_g(\tau)\,d\tau \tag{IX.219}$$

dacă se admit condiții inițiale omogene.

În cazul unor amortizări reduse ($n_I \ll 1$) rezultă pentru viteza relativă $\dot{u}(t)$ și pentru accelerația absolută $\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$ expresiile

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &\approx -\int_0^t e^{-n_I\omega_I(t-\tau)}\cos\omega_I'(t-\tau)\,w_g(\tau)\,d\tau\\ \ddot{u}(t) + w_g(t) &\approx \omega_I'\int_0^t e^{-n_I\omega_I(t-\tau)}\sin\omega_I'(t-\tau)\,w_g(\tau)\,d\tau.\end{aligned} \tag{IX.220}$$

Se înțeleg prin spectre de acțiune seismică [spectru de accelerație, $S_a(T_I, n_I)$, spectru de viteză, $S_v(T_I, n_I)$, și spectru de deplasare, $S_d(T_I, n_I)$], extremele valorilor absolute instantanee din relațiile (IX.219) și (IX.220):

$$\begin{aligned}S_a(T_I, n_I) &= \max_{(t)}\left|\omega_I'\int_0^t e^{-n_I\omega_I(t-\tau)}\sin\omega_I'(t-\tau)w_g(\tau)\,d\tau\right|\\ S_v(T_I, n_I) &= \max_{(t)}\left|\int_0^t e^{-n_I\omega_I(t-\tau)}\cos\omega_I'(t-\tau)\,w_g(\tau)\,d\tau\right|\\ S_d(T_I, n_I) &= \max_{(t)}\left|\frac{1}{\omega_I'}\int_0^t e^{-n_I\omega_I(t-\tau)}\sin\omega_I'(t-\tau)\,w_g(\tau)\,d\tau\right|.\end{aligned} \tag{IX.221}$$

Între aceste funcții există relațiile aproximative

$$\begin{aligned}S_d(T_I, n_I) &\approx \frac{T_I'^2}{4\pi^2}S_a(T_I, n_I)\\ S_v(T_I, n_I) &\approx \frac{T_I'}{2\pi}S_a(T_I, n_I).\end{aligned} \tag{IX.222}$$

Prima relație este o aproximare bună în cazul $n_I \ll 1$. A doua relație este valabilă mai degrabă în mod statistic, în cazul cutremurelor de durată lungă în raport cu perioada

proprie T_{I} (a doua relaţie presupune înlocuirea în integrandul funcţiei $S_v(T_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})$ a funcţiei cos prin funcţia sin).

Forţa seismică maximă este dată de relaţia

$$\max_{(t)}|F(t)| = \max_{(t)}|\,|m(\ddot{u} + \ddot{u}_g)| = m\, S_a(T_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}}) \qquad \text{(IX.223)}$$

sau de relaţia echivalentă (cu aproximaţie)

$$\max_{(t)}|F(t)| \approx \max_{(t)}|k\, u| = k\, S_d(T_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}}) = \frac{k}{\omega_{\mathrm{I}}'^2} S_a(T_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}}) \approx m\, S_a(T_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}}). \qquad \text{(IX.224)}$$

Aproximaţia din relaţia (IX.224) rezultă din neglijarea termenului $c\dot{u}$ din ecuaţia (IX.218).

7.3. Dinamica sistemelor supuse acţiunii seismice

În continuare se consideră, pentru simplitate, sisteme ideal elastice, cu n grade de libertate şi mase concentrate. În acest caz, în ecuaţiile de mişcare intervin doi termeni: termenii corespunzători forţelor de inerţie (în care apar acceleraţiile absolute) şi termenii corespunzători forţelor elastice (în care apar deplasările relative). Corespunzător formei (IX.74) apare ecuaţia

$$m_i(\ddot{u}_i + \ddot{u}_g) + \sum_j^{1,n} k_{ij}\, u_j = 0 \qquad \text{(IX.225a)}$$

care, după separarea în partea dreaptă a cantităţilor cunoscute, devine

$$m_i\ddot{u}_i + \sum_j^{1,n} k_{ij}\, u_j = -\, m_i\ddot{u}_g(t) = -\, m_i w_g(t). \qquad \text{(IX.225b)}$$

În această ecuaţie necunoscutele $u_i(t)$ sînt deci deplasările relative. Forma simplă a membrului drept derivă din ipoteza amintită mai înainte, a unei mişcări de translaţie a terenului, sincronă în toate punctele de rezemare.

Dacă se consideră vectorii proprii (nenormaţi) a_{ir}, rezultă pentru coordonatele normale din dezvoltarea (IX.151) ecuaţia (IX. 152) [unde termenul afectat de factorul n_r se neglijează, eventual, dacă se admite ipoteza elasticităţii ideale pe care se bazează relaţia (IX.225 b)]

Termenul liber $Q_r(t)$ din ecuaţia (IX. 152) devine, în acest caz.

$$Q_r(t) = -\frac{\sum\limits_i^{1,n} m_i\, a_{ir}}{\sum\limits_j^{1,n} m_j a_{jr}^2}\, w_g(t) = -\, P_r w_g(t). \qquad \text{(IX.226)}$$

În expresia (IX.226) intervine factorul de participare

$$P_r = \frac{\sum_{i}^{1,n} m_i a_{ir}}{\sum_{j}^{1,n} m_j a_{jr}^2}. \qquad \text{(IX.227)}$$

Soluţia ecuaţiei (IX.152), dată de relaţia (IX. 154), permite determinarea funcţiei $q_r(t)$. Valoarea absolută extremă a coordonatei normale $q_r(t)$ devine, conform relaţiilor din paragraful precedent

$$\max_{(t)} |q_r(t)| = P_r S_d(T_r, n_r). \qquad \text{(IX.228)}$$

Pe această bază se va putea determina valoarea absolută extremă a deplasărilor sau eforturilor din elementele sistemului (admiţînd că la determinarea vectorilor proprii. a_{ir}, s-au determinat şi eforturile corespunzătoare N_{kr}). În mod similar se pot determina valorile absolute extreme ale acceleraţiilor normale $\ddot{q}_r(t)$.

$$\max_{(t)} |\ddot{q}_r(t)| = P_r S_a(T_r, n_r). \qquad \text{(IX.229)}$$

Pe baza relaţiilor (IX.228) şi (IX.229) se pot determina maximele deplasărilor $u_{i(r)}$, eforturile $N_{i(r)}$ acceleraţiilor absolute $\ddot{u}_{i(r)} + w_g$ sau forţelor de inerţie $S_{i(r)}$ corespunzătoare modului propriu de ordinul r, sub forma

$$\begin{aligned} u_{i(r)} &= P_r S_d (T_r, n_r) a_{ir} \\ N_{i(r)} &= P_r S_d (T_r, n_r) N_{ir} \\ \ddot{u}_{i(r)} + w_g &= P_r S_a (T_r, n_r) a_{ir} \\ S_{i(r)} &= P_r S_a (T_r, n_r) m_i a_{ir} \end{aligned} \qquad \text{(IX.230)}$$

(a_{ir} sînt vectori proprii, N_{ir} — eforturi corespunzătoare deformatelor a_{ir}).

7.4. Relaţiile introduse în normele de proiectare

Relaţiile introduse în Normativul de proiectare antiseismică (P. 13 — 70) derivă din relaţiile precedente. Astfel, expresia forţelor $S_{i(r)}$ din (IX. 230) poate fi transformată sub forma

$$\begin{aligned} S_{i(r)} &= S_a(T_r n_r) P_r m_i a_{ir} = k_s \beta(T_r) \psi(n_r) P_r a_{ir} Q_i = \\ &= k_s \beta(T_r) \psi(n_r) \eta_{ir} Q_i . \end{aligned} \qquad \text{(IX.231)}$$

În această relaţie s-au introdus cîteva notaţii noi, şi anume:

$$S_a (T_r, n_r) = k_s g \beta(T_r) \psi(n_r). \qquad \text{(IX.232)}$$

(Spectrul de accelerație a fost înlocuit printr-un produs ai cărui factori au următoarea semnificație:

g — accelerația gravitației;

k_s — fracțiunea din accelerația gravitației, care reprezintă raportul dintre accelerația seismică convențională considerată și valoarea g;

$\beta(T_r)$— factor dinamic corespunzător perioadei proprii T_r;

$\psi(n_r)$ — un factor dinamic corespunzător fracțiunii din amortizarea critică n_r).

$$Q_i = m_i\, g. \tag{IX.233}$$

(Încărcarea corespunzătoare gradului de libertate i este produsul masei respective cu accelerația gravitației)

$$\eta_{ir} = P_r\, a_{ir} = \frac{a_{ir} \sum\limits_{j}^{\overline{1,n}} m_j\, a_{jr}}{\sum\limits_{k}^{\overline{1,n}} m_k\, a_{kr}^2}. \tag{IX.234}$$

Suma forțelor de inerție seismică (care are sens dacă toate forțele $S_{i(r)}$ sînt dirijate pe aceeași direcție) se numește forță tăietoare de bază și se notează, în cele ce urmează cu $S_{(r)}$. Ea are expresia

$$S_{(r)} = k_s\, \beta\,(T_r)\, \psi\,(n_r)\, \varepsilon_r \sum_j Q_j, \tag{IX.235}$$

unde factorul de echivalență ε_r are expresia

$$\varepsilon_r = \frac{\left(\sum\limits_{i}^{\overline{1,n}} Q_i\, a_{ir}\right)^2}{\left(\sum\limits_{j}^{\overline{1,n}} Q_j\right) \sum\limits_{k}^{\overline{1,n}} Q_k\, a_{kr}^2}. \tag{IX.236}$$

Se observă faptul că forțele $S_{i(r)}$ pot fi exprimate sub forma

$$S_{i(r)} = \frac{Q_i\, a_{ir}}{\sum\limits_j Q_j\, a_{jk}}\, S_{(r)} \tag{IX.237}$$

echivalentă cu relația (IX.231).

Factorii de echivalență ε_r dau o imagine a modului în care se distribuie efectul seismic global între modurile proprii. Se poate verifica proprietatea

$$\sum_{r}^{\overline{1,n}} \varepsilon_r = 1. \tag{IX.238}$$

În cele de mai înainte au fost date expresii pentru efectele corespunzătoare unui mod de vibrație. Desigur, în timpul unei mișcări seismice efectele corespund (în mai mare sau

mai mică măsură) tuturor modurilor de vibrație. O problemă importantă care apare în această ordine de idei este aceea a compunerii efectelor după diferitele moduri proprii. O margine superioară în acest sens este sumarea valorilor absolute pentru deplasări, accelerații sau eforturi (nu este permisă sumarea forțelor de inerție, deoarece aceasta ar duce în final la rezultate radical greșite). O cale indicată de aplicarea unor noțiuni ale teoriei funcțiilor aleatoare este sumarea pătratică a efectelor în forma

$$u_i = \sqrt{\sum_r u^2_{i(r)}}\,; \quad N'_{i(r)} = \sqrt{\sum_r N^2_{i(r)}} \qquad \text{(IX.239)}$$

care decurge din ipoteza neglijării corelației dintre coordonatele normale ;

$$\overline{q_r\, q_s} = 0 \qquad (r \neq s). \qquad \text{(IX.240)}$$

Această ipoteză poate să fie destul de depărtată de realitate în special pentru mișcări seismice de scurtă durată.

Dintre factorii care intervin în relațiile precedente, sînt caracteristici condițiilor seismologice factorii k_s și $\beta(T_r)$. Factorul k_s reprezintă fracțiunea din accelerația gravitației, considerată în calcul. Ea se determină cu considerarea activității seismice a amplasamentului și a gradului de asigurare rațional pentru construcții. Factorul $\beta(T_r)$ depinde de distribuția după frecvențe a energiei mișcării seismice. De regulă, în cazul unor amplasamente apropiate de zona de degajare a energiei seismice și în cazul unor terenuri stîncoase, spectrul de accelerație $S_a(T_r, n_r)$ are valori pronunțat mai ridicate pentru perioade mici. La distanțe mai mari și în terenuri mai moi, apare o creștere a valorilor pentru perioade mai mari și o scădere a valorilor pentru perioade mai mici.

Factorul $\beta(T_r)$ ar trebui în principiu să reflecte această deformare a spectrului de acțiune odată cu creșterea distanței la zona-focar și cu modificarea condițiilor de teren. Din păcate, cunoștințele existente în prezent sînt insuficiente pentru a permite o traducere a acestor constatări calitative în relații cantitative certe.

Relațiile de calcul prezentate mai înainte sînt insuficiente pentru a conduce la o evaluare corectă a efectelor seismice și, în special, pentru a conduce la soluții raționale în proiectare. Principalii factori care trebuie avuți în vedere, cel puțin calitativ, chiar dacă aceștia nu se reflectă întotdeauna în relații de calcul, sînt comportarea neliniară (în special din punct de vedere fizic, uneori și din punct de vedere geometric) și caracterul spațial al perturbației seismice (alături de care putea să joace un rol important în unele situații nesincronismul perturbațiilor aplicate în diferitele puncte de rezemare). Alături de acești factori, pot să fie uneori importanți deformabilitatea terenului de fundație sau aspectul său mai complex, interacțiunea teren-structură.

Probleme complexe pot să apară de asemenea în cazul structurilor-recipiente (rezervoare, castele de apă, baraje, silozuri, ziduri de sprijin), unde problemele de interacțiune între recipient și conținut, pînă în prezent puțin cunoscute, pot să aibă o importanță majoră asupra solicitărilor seismice.

În această secțiune nu se dau reguli de alcătuire și proiectare a construcțiilor amplasate în zone seismice, totuși este util să se sublinieze un aspect fundamental, anume acela că proiectantul unei astfel de construcții trebuie să asigure atît o anumită rezistență la forțe de inerție de proveniență seismică, cît și o capacitate de deformare suficientă, fără rupere sau prăbușire a construcțiilor. Aceste cerințe pot să vină în contradicție directă, făcînd dificilă uneori alegerea unei soluții constructive acceptabile. Neglijarea uneia din aceste cerințe poate avea însă urmări grave.

8. MĂSURI DE IZOLARE CONTRA VIBRAȚIILOR

8.1. Generalități

În cazul construcțiilor solicitate dinamic poate să fie uneori necesară luarea de măsuri de izolare contra vibrațiilor. Anumite indicații generale asupra criteriilor care trebuie avute în vedere în acest sens sînt date în paragraful 1.4.

În linii mari, în situațiile în care un proiectant este nevoit să ia măsuri de reducere a vibrațiilor, îi stau la îndemînă următoarele posibilități :

— modificări ale caracteristicilor structurii (acest lucru poate fi făcut de regulă la proiectare, intervențiile asupra construcțiilor existente fiind dificile, costisitoare și de multe ori incerte ca rezultat) ;

— modificări ale caracteristicilor încărcărilor dinamice aplicate construcției (modificări ale punctelor de aplicație, direcției de acțiune, caracteristicilor de amplitudine și frecvență etc.) ; sau

— introducerea de dispozitive de izolare.

Dispozitivele de izolare pot să fie de două mari categorii :

— dispozitive active (care au rolul de a reduce transmiterea vibrațiilor chiar de la sursă, asigurînd astfel întregii construcții un regim de funcționare liniștit) ;

— dispozitive pasive (care au rolul de a crea, într-o construcție supusă unui regim permanent de vibrații, o zonă liniștită pentru aparate sensibile, laboratoare sau pentru alte scopuri).

Principalele posibilități existente sînt :

— sisteme de arcuri și, eventual, amortizare vîscoasă ;

— sisteme de dopuri sau straturi de cauciuc sau alte materiale organice cu proprietăți adecvate ;

— straturi de plută, pîslă, sau grătare de șipci ;

—amortizoare dinamice.

Sistemele de arcuri și amortizoare (cu ulei) sînt o soluție de tehnicitate ridicată, cu caracteristici care pot fi bine controlate și sînt de regulă stabile în timp. Costul poate să fie relativ ridicat, iar uneori soluția poate să fie zgomotoasă.

Sistemele de dopuri sau straturi sînt de regulă soluții mai simple, care asigură o capacitate de amortizare relativ ridicată. Aceste soluții au avantajul de a nu fi zgomotoase, dar dezavantajul de a fi mai puțin controlabile și de a fi supuse unor eventuale alterări în timp.

Soluții cu pîslă, plută sau grilaj de șipci se situează la distanță și mai mare de soluțiile cu arcuri și amortizoare, în același sens cu precedentele.

Soluțiile cu amortizor dinamic pot să conducă uneori la rezolvări deosebit de reușite, dar sînt soluții de mare finețe, a căror aplicare este condiționată de un nivel ridicat de proiectare și control.

În cele ce urmează sînt date cîteva relații de calcul pentru soluții de izolare antivibratoare.

8.2. Izolarea activă

Se consideră un sistem de tipul celui reprezentat în fig. IX.41, alcătuit dintr-un corp rigid de masă m, acționat de o forță variind sinusoidal, de amplitudine complexă $f^*(\omega)$, legat prin intermediul unui dispozitiv cu proprietăți visco-elastice, avînd rigiditatea elastică k și rigiditatea vîscoasă c, la o structură. Se admite că, în cazul unei vibrații de pulsație ω,

dacă deplasările masei sînt reprezentate de amplitudinea (complexă) $u_m^*(\omega)$, iar deplasările structurii de amplitudinea (complexă) $u_s^*(\omega)$, forța transmisă la structură de dispozitivul de rezemare are expresia

$$S^*(\omega) = k^*(\omega)[u_m^*(\omega) - u_s^*(\omega)], \qquad \text{(IX.241)}$$

unde coeficientul de rigiditate visco-elastică $k^*(\omega)$ are forma

$$k^*(\omega) = k + i\omega c \qquad \text{(IX.242)}$$

rezultată din aplicarea legii (IX. 3) la cazul mișcării sinusoidale.

Aplicarea celei de a 2-a legi a lui Newton la mișcarea masei m duce la ecuația

$$-\omega^2 m u_m^*(\omega) = f^*(\omega) - S^*(\omega). \qquad \text{(IX.243)}$$

Pe de altă parte, aplicarea unei forțe sinusoidale $S^*(\omega)$ structurii, duce la deplasări de amplitudine $u_s^*(\omega)$ date de relația

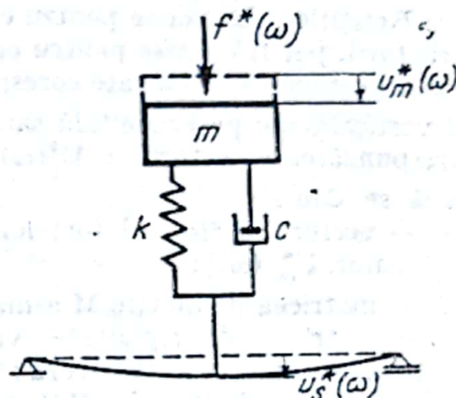


Fig. IX.4

$$u^*(\omega) = h^*(\omega)\, S^*(\omega) \qquad \text{(IX.244)}$$

unde factorul $h^*(\omega)$ are expresia, dedusă din relația (IX.180),

$$h^*(\omega) = \sum_{r}^{1,n} \frac{a_r \cdot a_r}{(\omega_r^2 + 2in_r\omega_r\omega - \omega_0^2)\, M_r}; \qquad \text{(IX.245)}$$

Factorul a_r reprezintă valoarea corespunzătoare formei proprii de ordinul r a structurii în punctul de rezemare, iar factorul M_r reprezintă dublul amplitudinii energiei cinetice a structurii pentru o pulsație $\omega = 1$ și amplitudini de vibrație date de forma proprie de ordinul r (pentru forme proprii normate $M_r = 1$).

Din relațiile (IX. 241), (IX. 242), (IX. 244) se obține sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{aligned} -\omega^2 m u_m^*(\omega) + k^*(\omega)[u_m^*(\omega) - u_s^*(\omega)] &= f^*(\omega) \\ u_s^*(\omega) &= h^*(\omega)\, k^*(\omega)[u_m^*(\omega) - u_s^*(\omega)]. \end{aligned} \qquad \text{(IX.246)}$$

Soluția sistemului (IX.246) este

$$u_m^*(\omega) = \frac{f^*(\omega)}{\dfrac{k^*(\omega)}{1 + h^*(\omega)\, k^*(\omega)} - \omega^2 m},$$

$$u_s^*(\omega) = \frac{h^*(\omega)\, k^*(\omega)}{1 + h^*(\omega)\, k^*(\omega)} \cdot \frac{f^*(\omega)}{\dfrac{k^*(\omega)}{1 + h^*(\omega)\, k^*(\omega)} - \omega^2 m}. \qquad \text{(IX.247)}$$

Din această soluţie rezultă pentru amplitudinea forţei transmise $S^*(\omega)$ expresia

$$S^*(\omega) = \frac{k^*(\omega)}{1 + h^*(\omega)\, k^*(\omega)} \, \frac{f^*(\omega)}{\dfrac{k^*(\omega)}{1 + h^*(\omega)\, k^*(\omega)} - \omega^2 m} . \qquad \text{(IX.248)}$$

Relaţiile date, scrise pentru cazul unui singur grad de libertate al masei, respectiv al structurii, pot fi rescrise pentru cazul mai multor grade de libertate, utilizînd forma matriceală (gradele de libertate corespunzătoare vectorului $\mathbf{U}_m^*(\omega)$ pot să reprezinte translaţii pe verticală sau pe orizontală sau rotaţii, în plan sau în spaţiu, iar gradele de libertate corespunzătoare vectorului $\mathbf{U}_s^*(\omega)$ reprezintă deplasări omoloage ale punctelor structurii).
Dacă se dau:

— vectorul $\mathbf{F}^*(\omega)$ al forţelor aplicate [după gradele de libertate corespunzătoare vectorului $\mathbf{U}_m^*(\omega)$];

— matricea de inerţie $\mathbf{M}$ a masivului rigid;

— matricea de rigiditate vîsco-elastică $\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C}$ a dispozitivului de legătură între masiv şi structură;

— matricea de transfer $\mathbf{H}^*(\omega)$ a structurii, se obţin soluţiile:

$$\mathbf{U}_m^*(\omega) = \{-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{I} + \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)]^{-1}\}^{-1}\,\mathbf{F}^*(\omega)$$

$$\mathbf{U}_s^*(\omega) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}^*(\omega)\,\mathbf{K}^*(\omega)]^{-1}\,\mathbf{H}^*(\omega)\,\mathbf{K}^*(\omega)\{-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{I} + \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)]^{-1}\}^{-1}\mathbf{F}^*(\omega)$$

$$\mathbf{S}^*(\omega) = \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{I} + \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)]^{-1}\{-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{I} + \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)]^{-1}\}^{-1}\,\mathbf{F}^*(\omega) \qquad \text{(IX.249)}$$

unde $\mathbf{I}$ reprezintă matricea unitate, iar matricea de transfer $\mathbf{H}^*(\omega)$ are forma:

$$\mathbf{H}^*(\omega) = \sum_r \frac{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_r^T}{(\omega_r^2 - 2in_r\omega_r\omega + \omega^2)M_r} . \qquad \text{(IX.250)}$$

$\mathbf{A}_r$ este vectorul deplasărilor corespunzător formei proprii, după gradele de libertate ale contactului între masiv şi structură.

8.3. Izolarea pasivă

Se consideră sistemul din fig. IX.42, similar sistemului precedent, care însă nu este supus unei forţe exterioare $f^*(\omega)$, ci unei perturbaţii traduse printr-o mişcare $u_0^*(\omega)$ a structurii (în ipoteza absenţei masivului). Prezenţa masivului perturbă mişcarea structurii, înlocuind amplitudinea $u_0^*(\omega)$ prin amplitudinea $u_s^*(\omega)$, deci introducînd o deformare suplimentară, măsurată prin diferenţa $u_s^*(\omega) - u_0^*(\omega)$. În aceste condiţii, sistemul de ecuaţii (IX.246) este înlocuit prin sistemul

$$-\omega^2 m u_m^*(\omega) + k^*(\omega)[u_m^*(\omega) - u_s^*(\omega)] = 0$$

$$u_s^*(\omega) - u_0^*(\omega) = h^*(\omega)\, k^*(\omega)[u_m^*(\omega) - u_s^*(\omega)] \qquad \text{(IX.251)}$$

care conduce la rezultatele

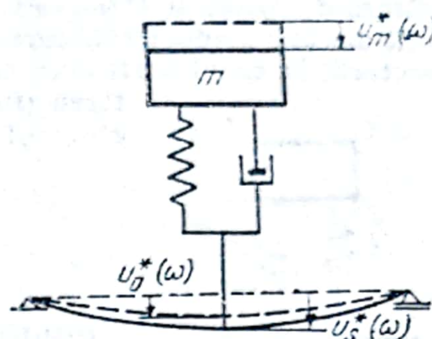


Fig. IX.42

$$u_m^*(\omega) = \frac{k^*(\omega)}{k^*(\omega) - \omega^2 m} \; \frac{u_0^*(\omega)}{1 - \dfrac{h^*(\omega)\, k^*(\omega)\, \omega^2 m}{k^* - \omega^2 m}} \tag{IX.252}$$

$$u_s^*(\omega) = \frac{u_0^*(\omega)}{1 - \dfrac{h^*(\omega)\; k^*(\omega)\, \omega^2 m}{k^*(\omega) - \omega^2 m}}$$

pentru deplasări și la eforturile în legătură

$$S^*(\omega) = \frac{\omega^2 m}{k^*(\omega) - \omega^2 m} \; \frac{u_0^*(\omega)}{1 - \dfrac{h^*(\omega)\; k^*(\omega)\, \omega^2 m}{k^*(\omega) - \omega^2 m}}. \tag{IX.253}$$

În cazul formulării matriceale, cînd termenul liber este constituit de vectorul $\mathbf{U}_0^*(\omega)$ al mișcării neperturbate a structurii, se obține soluția

$$\mathbf{U}_m^*(\omega) = [\mathbf{K}^*(\omega) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{K}^*(\omega)\{\mathbf{I} - \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{K}^*(\omega) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\omega^2\mathbf{M}\}^{-1}\mathbf{U}_0^*(\omega)$$

$$\mathbf{U}_s^*(\omega) = \{\mathbf{I} - \mathbf{H}^*(\omega)\, \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{K}^*(\omega) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\omega^2\mathbf{M}\}^{-1}\mathbf{U}_0^*(\omega)$$

$$\mathbf{U}_s^*(\omega) - \mathbf{U}_0^*(\omega) = \mathbf{H}^*(\omega)\, \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{K}^*(\omega)] - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\, \omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I} - \tag{IX.254}$$

$$- \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{K}^*(\omega) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\omega^2\mathbf{M}\}^{-1}\mathbf{U}_0^*(\omega)$$

$$\mathbf{S}^*(\omega) = \mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{K}^*(\omega) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I} - \mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{K}^*(\omega)[\mathbf{K}^2(\omega) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1}\omega^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}_0^*(\omega).$$

8.4. Utilizarea relațiilor de calcul

Relațiile precedente pot fi utilizate direct, în cazul unor vibrații sinusoidale, pentru determinarea amplitudinilor de vibrație ale masivului și ale structurii, ca și a amplitudinilor eforturilor din dispozitivul de legătură (sau a amplitudinilor forțelor transmise structurii). După caz, ele pot fi utilizate în cazul izolării active sau pasive, respectiv în cazul sistemelor cu unul sau mai multe grade de libertate (în ultimul caz se utilizează rezultatele exprimate în formă matriceală, în relațiile (IX.249) sau (IX.254).

În cazul izolării active, principalul element urmărit este acela al efectelor transmise structurii (amplitudinile deplasărilor $u_s^*(\omega)$ și eforturilor $S^*(\omega)$). În cazul izolării pasive, principalul element urmărit este acela al efectelor transmise masivului (amplitudinile deplasărilor $u_m^*(\omega)$).

Aprecierea măsurii în care amplitudinile deplasărilor sînt admisibile se face de regulă pe baza comparării amplitudinilor vitezelor $|\omega\, u^*(\omega)|$ sau accelerațiilor $|\omega^2 u^*(\omega)|$ cu valorile limită date în prescripții. În anumite măsuri pot fi utile în acest sens, mai ales ca orientare, indicațiile paragrafului 1.4.

Relațiile date pentru cazul izolării pasive pot fi utilizate și în evaluarea efectelor amortizorului dinamic, dacă sistemul alcătuit din masivul de masă m și dispozitivul de

legătură de rigiditate $k^*(\omega)$ este considerat drept amortizor dinamic. În acest caz interesează analiza modului în care prezența amortizorului dinamic influențează vibrațiile structurii. În cazul particular, cînd structura este la rîndul ei un masiv legat elastic de teren (fig. IX.43), relațiile de mai înainte rămîn valabile, cu observația că se schimbă expresia funcției de transfer, care devine

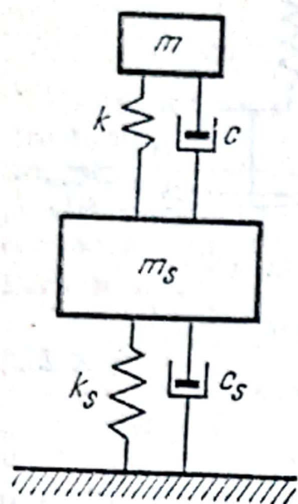


Fig. IX.43

$$h^*(\omega) = \frac{1}{k_s^*(\omega) - \omega^2 m_s} \qquad \text{(IX.255)}$$

în cazul legăturii cu un grad de libertate. În cazul legăturii cu mai multe grade de libertate, expresia matricei de transfer devine, în mod similar,

$$\mathbf{H}^*(\omega) = [\mathbf{K}_s^*(\omega) - \omega^2\mathbf{M}_s]^{-1}, \qquad \text{(IX.256)}$$

unde $\mathbf{M}_s$ și $\mathbf{K}_s^*(\omega)$ sînt respectiv matricele de inerție și de rigiditate (complexă) care caracterizează masivul-structură.

Relațiile date mai înainte sînt utilizabile direct pentru cazul unei perturbații sinusoidale. În realitate, pot să apară probleme pentru care perturbațiile sînt periodice oarecare sau aperiodice tranzitorii. În aceste cazuri se pot utiliza rezultatele respective cu condiția ca ele să opereze asupra coeficienților Fourier ai unor funcții periodice sau asupra transformatelor Fourier ale unor funcții aperiodice tranzitorii.

Dacă se lucrează cu o funcție $f(t)$, periodică de perioada T, ea poate fi reprezentată sub forma de serie Fourier complexă,

$$f(t) = \sum_{k}^{-\infty,\infty} f_k^* \, e^{\frac{2\pi k i t}{T}} \qquad \text{(IX.257)}$$

unde coeficienții complecși f_k^* au expresia

$$f_k^* = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\pi k i t}{T}} f(t)\, dt. \qquad \text{(IX.258)}$$

În acest caz se procedează în modul următor:

— se calculează coeficienții Fourier f_k^* ai perturbației cu ajutorul relației (IX.258);

— se aplică relațiile din paragrafele precedente pentru valorile $\omega = \frac{2\pi k}{T}$;

— se obține expresia soluțiilor periodice aplicînd relația (IX.257) la coeficienții Fourier ai deplasărilor, eforturilor etc.

Un exemplu de perturbație care poate fi abordat pe această cale este acela al unor șocuri periodice cu o evoluție în timp după legea reprezentată grafic în fig. IX. 44.

În cazul unei funcții t aperiodice (de regulă tranzitorie, dar în orice caz susceptibilă de a avea o transformată Fourier), funcția $f(t)$ poate fi reprezentată sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f^*(\omega)\, d\omega \qquad (IX.259)$$

unde transformata Fourier $f^*(\omega)$ are expresia

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \qquad (IX.260)$$

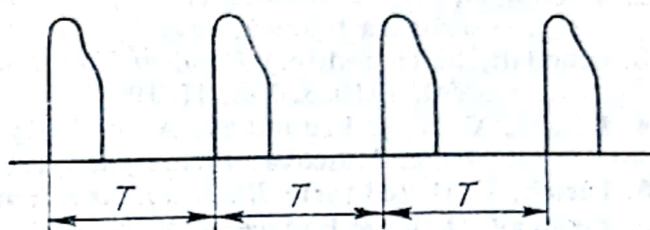


Fig. IX.41

În acest caz se procedează în modul următor:

— se determină transformata Fourier $f^*(\omega)$ a perturbației cu ajutorul relației (IX.260);

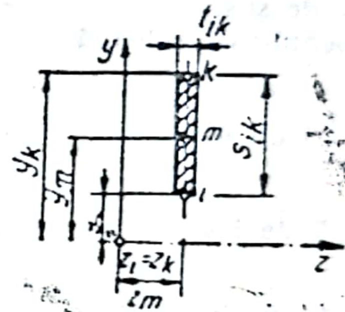
— se aplică relațiile din paragrafele precedente;

— se obține expresia soluțiilor aplicînd relația (IX.259) soluțiilor (deplasări, eforturi etc.).

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan, Şt. şi Arcan, M. *Încercarea construcţiilor*. Bucureşti Editura tehnică, 1965
2. Buzdugan, Gh. Hamburger, L. şi Wermescher, V. *Fundaţii de maşini*. Bucureşti Editura tehnică, 1958.
3. Crandall, S. H. (editor) *Random Vibration*. Cambridge, MIT, John Wiley & Sons, Vol. I, 1958, Vol. II, 1963.
4. Ditkin, V. A. şi Prudnikov, A. P. *Integralinle preobrazovania i operaţionnoe iscislenie*. Moscova, Fizmatghiz, 1961.
5. Eirich, F. R. (editor) : *Rheology*. New York, Academic Press, 1956.
6. Faddeev, D. K. şi Faddeeva, V. N. *Vîcislitelinîe metodî lineinoi alghebrî*. Moscova Fizmathgiz, 1960.
7. Ghiocel, D şi Lungu, D. *Acţiunea vîntului, zăpezii şi variaţiilor de temperatură în construcţii*. Bucureşti, Editura tehnică, 1972.
8. Harris, C şi Crede, Ch. *Şocuri şi vibraţii* (3 vol.), (traducere din l. engleză). Bucureşti, Editura tehnică, 1968.
9. Hurty, W. C. şi Rubinstein, M. F. *Dynamics of Structures*. Englewood Cliffs, N. J. Prentice Hall, 1964.
10. Koloušek, V. *Dynamika stavebnich konstrukci*. Praha, 1960. (trad. în l. rusă), Moscova, Gosstroizdat, 1965.
11. Kolsky, H. *Stress waves in solids*. Oxford, 1953. (trad. în l. rusă), Moscova, IIL, 1955
12. Mazilu, P. *Statica construcţiilor*. Vol. I, 1955, Vol. II, 1958, Bucureşti, ESAC.
13. Polşkov, M. K. şi Petraşeni, G. I. *Voprosî dinamiceskoi teorii rasprostranenia seismiceskin voln*. Izd. Leningrad neftianoi i gorno-topli voi literaturî, 1957.
14. Pugaciov, V. S. *Teoria sluciainîh funkţii i eio primenenia v zadaciah avtomaticeskogo regulirovania*. Ed. II, Moscova, Fizmatghiz, 1960.
15. Rubinstein, M. F. *Matrix ComputerAnalysis of Structures*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1966.
16. Sandi, H. *Asupra efectului elementelor vibroizolante*. În: Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată, 3, 1961.
17. Sandi, H. *Eigenwertaufgaben und Übertragungsmatrizen für nichtkonservative mechanische Systeme*. În: ZAMM, 5, 1970.
18. Sandi, H. *Conventional Seismic Forces Corresponding to Nonsynchronous Ground Motion*. În: A 3-a Conf. europeană de inginerie seismică, Sofia, 1970.
19 Sandi. H. *Metode matriceale în mecanica structurilor*. Bucureşti, Editura tehnică, 1975.
20. Sorokin, E. S. *Dinamiceskii rasciot nesuşcih konstrukţii zdanii*. Moscova, Gosstroiizdat, 1956.
21. Timoshenko, S. *Vibration Problems in Engineering*, Ed. III, Toronto, New York, London, D. van Nostrand, 1955.
22. Vîlcovici, V. Bălan, St. Voinea, R. *Mecanica teoretică*. Bucureşti, Ed. tehnică, 1968.
23. Wiegel, R. (editor). *Earthquake engineering*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1971.
24. *** Normativ pentru proiectarea construcţiilor civile şi industriale din regiuni seismice. P. 13 — 70. În : Buletinul Construcţiilor, 5, 1971.

ERATĂ

Pag.:	Rîndul:	În loc de:	Se va citi:
27	Tabelul I.6, nr. 12	$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n} = \ldots$	$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \ldots$
57	4 de jos	$\ldots \bar{k} = 0,$	$\ldots \bar{k} \neq 0,$
93	2 de jos	$\ldots = \frac{s!}{x_1!\, x_2\eta \ldots x_n!};$	$\ldots = \frac{s!}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!}$
150	9 de jos	$(C_1 e^{\omega'' t} + C_2 e^{\omega'' t})$	$(C_1 e^{\omega'' t} + C_2 e^{-\omega'' t})$
425	Figura din stinga se înlocuieşte cu fig.		
479	12 de jos, rel. (IV.13)	$\ldots + \int_0^l \frac{\eta t T}{GA} ds \quad \sum \int_0^l \frac{m_t M_t}{GI_t} ds.$	$\ldots + \sum \int_0^l \frac{\eta t T}{GA} ds + \sum \int_0^l \frac{m_t M_t}{GI_t} ds.$
511	19 de sus, rel. (IV.23 a)	$S_{n-1,\, n+1} = \frac{M_n^0}{h};$	$S_{n-1,\, n+1} = -\frac{M_n^0}{h};$
557	Tabelul IV.14, ultima relaţie	$\mathfrak{M}_{is} = \mathfrak{M}_{ii'} = EI \frac{\alpha \Delta t^\circ}{h}$	$\mathfrak{M}_{is} = \mathfrak{M}_{ii'} = -EI \frac{\alpha \Delta t^\circ}{h}$
606	Rel. (IV.127 a) (în matrice)	$\frac{12 EI_z}{}$ şi $-\frac{12\ \ I_z}{l^3}$	$\frac{12 EI_z}{l^3}$ şi $-\frac{12 EI_z}{l^3}$

BIBLIOGRAFIE

Pag.:	Rîndul:	În loc de:	Se va citi:
613	Rel.(IV.158)	$\ldots = \frac{\alpha l}{}\left[\ldots\right]\ldots$	$\ldots = \frac{\alpha l}{2}\left[\ldots\right]\ldots$
626	Rel.(IV.217)	$K_1 = \left[\ldots\right]$	$K_1 = \frac{EA}{l}\left[\ldots\right]$
899	Coloana 2 și 3 prima linie. Lipsesc valorile 7,88 respectiv 4,04		
925	2 de sus	Cazul $b \leqslant a$	Cazul $b \geqslant a$
1078	7 de sus, penultima coloană	$+ \mathfrak{I}_3$	$+ X_3$
1086	14 de jos	$+ r\int(\ldots)$	$+ \int r(\ldots)$
1234	7 de jos	... deci $v = 0$)	... deci $\bar{v} = 0$)
1249	14 de jos (rel. VIII.32)	$\ldots \frac{2\varphi_{A,Q}\alpha + \varphi_{A,Q}\beta}{4\alpha^2 - \beta^2}$	$\ldots \frac{2\varphi_{B,Q}\alpha + \varphi_{A,Q}\beta}{4\alpha^2 - \beta^2}$
1253	2 de jos	... este mai mare (adică mai puțin periculoasă)	... este mai mică (adică mai periculoasă)
1266	Cap tabel	i_1/i_2	i_2/i_1
1328	7 de sus	, anumită viteză critică,	, numită viteză critică,
1342	3 de sus	$u_i(t) = \sum_{i,j}^{1,n} \ldots = \sum_{j-}^{1,n} \ldots$	$u_i(t) = \sum_{j}^{1,n} \ldots = \sum_{j}^{1,n} \ldots$
1343	7 de jos, (rel. IX.81)	$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij}\dot{u}_j\dot{u}_j.$	$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{1,n} m_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j.$

Editura tehnică

Lei 73